EduSTAR eBOOK

中教育星电子图书馆

中教育星

电子图书馆 EBOOK

北大清华高考状元易错题宝典

数 学

Edustar

中教育星软件股份有限公司

第一章　北大、清华状元谈学习经验

朱坤(北京大学光华管理学院学生，河南省高考文科状元)：

数学是我最讨厌，也是最头疼的科目之一。不过，它对于文科生又至关重要，成为衡量优秀学生与一般学生的最重要的尺度。我高一高二时，数学基础不好，时常不及格，因此心里对它实在是有些害怕。高三数学复习要经过三轮，第一轮先将各知识点重讲一遍，第二轮将各个知识点串联起来，比较有系统性，第三轮则是做综合试题。每一轮都离不了大量的题目，如若题题都做，实在精力不逮，况且其他几科的复习又都如箭在弦上，不得不发，因此事实上我做的题目连 20%也没有。我更注重于对各个知识点的理解，只有理解了才会运用，这是很明显的道理，况且高考试题又都不是很难，花费大量时间去钻所谓难题以提高能力实在不值得去效仿。做数学题比做其他题更注重技巧，比如数学中的解答题，参考答案标明了每一步骤各有多少分，少一个步骤就要丢掉多少多少分，实在很可惜。我做题就是步骤尽可能的繁复，以期别人抓不到破绽。我觉得这个方法还蛮有用。再有就是碰到过难的题，也要尽量多写；实在写不下去，只好胡猜一个结果，以图侥幸。至于有些选择题、填空题技巧，一般老师都多有秘诀，我在这儿就不多说了。

胡湛智(北京大学生命科学学院学生，贵州省高考理科状元)：

数学是理科的支柱，数学基础不好往往影响到理化成绩的提高，因此必须给予足够的重视。高中的数学可以分为几个大的“板块”：一是函数板块，二是三角板块，三是立体几何板块，四是解析几何板块，五是数列极限板块，六是排列组合板块，七是复数板块。其中第一、二、四板块是尤其重要的，比较难的大题大多出自这三块，因此可以多花一些力气。复习时可以先按照大的板块复习，争取搞清每一个板块的各种题型，并做到能熟练地对付每种题型。这可以找一本系统复习的参考书来练习，最好是能跟上老师复习的进度并稍超前些，复习起来就比较轻松了。虽然大家都不提倡“题海战术”，我也不主张，那太费精力，但这并不意味着不做足够数量的习题就能把数学学好，这一点必须引起注意。买的参考书和老师布置的习题一定要尽自己的力量做，空着不做会留下遗憾的空白。关于做题难度的选择问题，我有一点自己的看法。首先，高考题的难度分布为 30%的简单题，50%的中等题，20%的难题。这意味着基础题占了 120 分，它是复习中练题的主要部分，决不能厌烦它。要知道，高考不仅考你对知识的掌握程度，还要考做题的速度，许多同学就是在高考时因时间不够，丢掉了平时能做出来的中等难题才考砸的，这些教训值得大家三思。鉴于此，我建议大家在中等以下难度的题上多花时间。做难题并非做得越多越好，只能根据自己的情况适量地做：这一是因为对大多数同学来说做难题感到很头疼，容易产生厌烦情绪；二是做难题过多太费时间；三是因为大多数难题是由中等难度题组成的，基础题做熟练了，再来做难题会相对容易些。我的数学老师说过一句话：“越是表面复杂的题越有机可乘”。这句话非常有道理，而高考的难题绝大部分就属于这种表面复杂的类型，它往往给出较多的条件，仔细分析条件的特点通常都能击破它。做难题的关键在于平时总结，自己总结一些小经验、小结论并记牢是非常有用的，能力也提高得快，有

余力的同学不妨试试。

另外，还要特别重视画图的作用。数学中几乎所有的内容都可以用图形给予直观简明的表示，因而常使繁琐的题目简单化；特别地，通过图形发现的一些几何关系有时正是解题的关键，因此要掌握各种函数图象的特点，达到熟练的程度。

邓芳(北京大学法律系学生，江西省高考文科状元)：

数学相对文科生来说则属于偏理的科目，因此也是很多文科生的弱项。所以，学好数学在激烈的高考竞争中是占有极大优势的。我觉得，学数学首先要掌握基本的公式、原理，其次就要懂得灵活运用。第一步背公式，稍花点功夫大家都能做到，而要学会灵活运用公式、原理解题则需要一定的训练。我的意思不是搞“题海”战术，题目是永远都做不完的。我认为，除了老师布置的作业和学校发的卷子，只要适当精选一两本课外参考书就够了。有些人买一大堆参考书，结果手忙脚乱做不过来，到处象征性地“蜻蜓点水”一下，最终还是一无所获。与其这样，还不如集中精力吃透一本参考书的效果好。学习数学，思考总结非常重要。很多人做题象完成任务似的，做完就不管了。还有的人一旦做出一道难题就欣喜异常、大受鼓舞；想乘胜追击解出下一道难题，因而又把做出的那道题扔在了一边。这两种做法是十分不可取的。我们每做一道题都要注意思考总结，做完之后回想一下自己的解题思路，从中总结出这一类型题目的一般解法，尤其是做完了难题，更应从中掌握这种题的特殊技巧。对于错题和没做出来的题，则要搞懂答案的解题思路，并和自己的思维方法作对比，看看问题出在哪一环。只有这样，做过的题才算真正消化吸收，变成了你自己的东西，否则下次碰到同类的题又束手无策，那就白练习了。所以，学数学主要就在背熟公式、原理的基础上，通过典型的例题的训练，从中掌握一些题型的基本解法和某些特殊技巧，以不变应万变。另外，在练习过程中要重视基础题，不能光想攻克难题，钻牛角尖。因为试卷上的难题毕竟不多，大多数还是容易题和中等题，而且有些难题也只是在基础题上稍作变化而已。

刘阳(北京大学法律系学生，黑龙江省高考文科状元)：

有人说“文学是谎言，数学才是真理”，这肯定是失之偏颇，不过却道出了数学的重要性。我要为那些数学不太好的同学或是在数学上有潜力但由于兴趣不致于此而不愿过多投放精力于此的同学们敲敲警钟。你想想，我们是学文科的，可以说在一样的学习环境下，属于同一档次的学生在历史、政治、语文等科目上的感悟差别不会太大，但是如果数学有差距，相去十几、几十分也不是很难。尤其是那些为了逃避过重数学而选文的人，一定要做好思想上的调整，不要重文轻理。对于数学，我的方法是多做题，多思考。对于做题，我认为择选题目的数量、质量及类型十分重要，切忌盲目的以为多多益善，投入题海中奋勇搏击。如果你不分质量、类型而乱做，就会导致劳动资源的浪费或是知识结构的畸形。举个例子，如果你选题不慎，函数占了 60 道(设总题量为 100 道)，而实际上，可能 40 道就够了，这样相当于浪费了 20 道题目的时间；同时，在知识结构中，函数部分得以巩固，但可能导致其它部分的薄弱。高考中，出题人对大部分知识的要求程度是差不多的。另外，高三时间宝贵，哪容得浪费，因此做题不可不挑选一下。还有，那些思维较敏捷、

反应较快的同学在平时做题时可以在头脑中几步合并，节省时间，但在考试做大题时，千万别“自作聪明”，否则就会“聪明反被聪明误”，丢掉步骤分，而这纯属“无谓送分’，是最令人心痛的啦。切忌把自己当成做题机器，拿来题就做，不思考一下题目的特点、结论和意义。这样会导致你有些题做过了，再碰到还是雾水一头；或是原本是一个小题，在大题中可直接搬用，做为条件，但由于你没有记住，没能理解也就没法运用，等于你那道小题白做了。为了避免这点，我采用重复演算的办法，当然不是连续做。我的数学题都是按套编上号的，题量不是很多，但有计划地循环做。实际上，高考题目虽说千变万化，但是全新，让你一点摸不着套路的题是很少的，大多是一些你见过的题目的全新组合。如果你能对结合前的题目有充分理解，何患组合后的不会解呢？如果你保证每一道做过的题目都记住了，理解了，那你就赢了。请大家不要误解我这里的“记住了”，它不等同于把题目、答案背下来，我所要记住的是题目的类型、原理及解题技巧。另外，还是那句老话“万变不离其宗”，所有的这些都源于书本上的基本原理，因此一定要把书本记牢、吃透。还没有谁能建起“空中楼阁”呢！

何忻(北京大学中文系学生，甘肃省高考文科第二名)：

比起其它几门课，数学是客观性较强、评分的伸缩性也较小的一门，因此数学是最容易丢分的，但也是最容易拿分的。从我学习数学的经验来说，我认为高考数学题目虽然较难，但都与课上的基本定义、概念有着千丝万缕的联系，因此复习数学首先要注意定义、定理，把定义、定理做为一个点，掌握它的内容、证明、逆命题、推广、应用等。弄清了单个的定义之后，还要纵向横向看它与其它的定义、定理的联系，以及这些关系的应用。这样，学习过的数学知识便成了一个立体的知识结构，应用起来就比较自如了。当然，做练习是数学学习中必不可少的一个环节。通过做练习，可以加深对各种定义、概念的理解和掌握。但是，做习题时一定要注意立足点的问题，不能为了做出高考中的最后两题而去一味地攻难题。数学题可谓“难无止境”，做出一道，总有一道更难的在前面等着你，遇到的不会做的题多了，一方面会降低你的自信，另一方面，由于钻难题要耗费大量的时间(而且未必会收到良好的效果)，这就必然会对其它几门课的复习造成冲击，并且容易使人忽略一些看似简单的基础问题和细节问题，在考场上丢了不该丢的分，造成难以弥补的损失。因此，对待练习中低、中、高三档题的态度应立足于低档题，重视中档题，适当做些典型的有代表性的高档题以提高思维品质。实际难题只是若干个基础题的组合，只要能把基础知识融汇贯通，许多难题自然会迎刃而解。高考时如果能做到低档题不丢分，中档题少丢分，高档题拿点分，实际加起来就是高分。不用去追求把所有的题都解出来、解正确，这对于大多数人来说是不可能的，你甚至可以提前制定出计划放弃最后的一至二题，但要争取做到做一道题就对一道题，这样，考试时就不会因为担心时间不够而紧张慌乱了。另外要养成良好的答题习惯，平时做习题要注意格式，尽量做到规范化，弄清哪些步骤可省，哪些步骤不可省，否则在考场上会因为这些问题而丢分。答卷时头脑应冷静，千万不要“绊”在一道题上，应该尽量把自己掌握的都答出来。对于两道分值不等但都会做的题应采取先高后低的“战术”，先做分值高的，

后做分值低的；对于两道难易不等的题自然是实行“先易后难”的原则。俗话说“拳不离手，曲不离口”，数学练习也应当持续进行，量不要大，但要每天都做几道题，否则考试时往往会出现忘公式、忘技巧的问题。

耿德健(北京大学经济学院学生，安徽省高考文科第二名)：

数学贵在“联想”，即基础理论和基本方法的综合、灵活运用。基础理论指的是书上的定义、定理和公式。基本方法不外乎综合法、分析法、图象法、三角代换法、归纳法、构造法等有限几种。《大纲》也明确规定：高考不考查特殊方法。你可以观察，每一道再复杂的题目，用的都是我们学过的最基础的理论和最基本的方法，难就难在运用上。故而，我们可以得到启示：要想学好数学，必须做到两点，一是课本上基础知识灵活、扎实、熟练的掌握；二是大量练习，当然要同时避免上面提到的两个误区。

陆慧(北京大学经济学院学生，甘肃省高考文科第二名)：

复习数学时，许多同学觉得似乎题做得越多越好，不少人也认为“题海”战术是最有效的。事实上，我认为做数学题“贵精不贵多”，做一道题要学会“举一反三”，用心揣摩这一类题的解题方法。其实高三阶段老师、学校发的资料已经很多了，认真地做完这些典型样题已经很不容易了，不用再花很多钱去购买其它的参考书，多而不精，往往是事倍功半。课外的书只要挑好一两本就足够了。最后挑那种很全面、很系统，每章有小结、有较为详细的例题分析和练习题及解答的书，这比那种纯粹的习题要有用得多，往往可以从书里的总结讲解中学到不少解题技巧。另外，做题要用心，要善于归纳。平时测验后要分外留心做错的题，认真系统地总结相似题型的做法，争取每一类题错过一次之后下次决不再错。时间一久，会做的题也就越来越多，考试时可将失误减少到最低限度。

此外，我顺便谈一下数学考试中一些应注意的地方。数学考试题量较大，若是安排不好时间，很容易就会出现答不完卷子的情况；而且数学考试中，心理也最容易变化，往往一道题能否做得出来会较大的影响考生以后答卷的情绪。许多同学发挥失常也往往是不会安排时间、不善调节自己的情绪、心理素质较差造成的。所以考试之前一是要休息好，保持较为轻松的心情，尽量避免神经过于紧张。有的同学一进考场就心里发慌，脑中一片空白，结果连简单常用的公式也忘得一干二净了。所以答题时要沉稳，一拿到卷子就不要再多想，立刻让自己全心投入。遇到不太顺利的题也不要慌乱，尽量先把会做的都做完，做正确，特别要避免因简单的计算错误而丢分。然后再回过头看没做的题，这时情绪已经比较稳定，注意力也已经比较集中，可能会比刚答卷时更容易进行思考；对于实在做不出的题目也不要死守着不放，不妨先放弃，因为在一道题上耗时过多，必然会影响下面的答题，而且越想越乱，越做越急，反而会打乱整个思路和情绪。一定要力求将会做、应该能做的题都做对，这样即使最后是因实在不会做的题而丢了分，那也没什么遗憾的。我在高考数学时，就放弃了一道不会做的大题(12 分)，但却用争取到的时间认真修改了前面做错的选择和填空(共 4 道约 20 分)，考后想来仍很庆幸自己的选择。另外，有的题目是不必长篇繁琐地推算的，特别是解析几何的题，有的可以直接将四个选项代入原题，符合题目已知的即为正确

答案。当然，这只是在万不得已时为了节约时间而用的方法，平时做题宁可做错也别投机取巧，因为只有平时扎实的基础才会有考场灵活的反应。

总之，数学复习要讲“细”、“扎实”；考试时要讲“稳”、“冷静”、不骄不躁，争取发挥应有的水平。平时练习时尽量不要大意，把每一次小测验都当做一次高考预演，锻炼自己的心理素质和答题方法。

焦朋朋(清华大学土木工程系学生，安徽省高考理科第三名)：

数、理、化三门的复习有许多相似之处，都需要做相当数量的习题，都需要对一些理论知识加以融汇贯通。在高考试题中，高难度的题可以说没有(近几年如此)，所以在平时练习中不要找过难的题，而要把精力放在一般题型和中等水平的题目上，要注意知识的灵活运用，需要强调的一点是，做题并非越多越好，而是越精越好。同一类型的题目做几个就可以了，不必花太多时间，有些题目有特殊解法，对这样的题应注意归类，并归纳其解题方法。对知识要进行系统化，可以运用类似、相反等关系把相应知识连结起来，组成一个个体系，例如数学中的幂函数、指数函数，对数函数必须放在一起，加以比较，才能掌握住各个的特点。课本中有一些公式理论比较复杂，对此应注重理解，自己可以多推导几遍，从头至尾弄清楚了，记起来自然就会容易些。

另外，数学要注意一些技巧运用，物理要在头脑中建立适当的物理模型，化学则要十分注重分析与推导。

高中阶段的学习，最重要还在于练习。勤练、精练、巧练，就是练习最基本的方法。“勤在于劳手，精在于长眼，巧在于用脑”。也就是说，要注意思维方法和解题技巧。见多识广，才能触题生辉。找一些“新鲜”的解题方法如在数学方面这是最紧要的。思路越开阔，方法才能找上你，而不是冥思苦想不得其法。俗语说“大考大玩，小考小玩，不考就不玩。”平时练的得法，上什么“战场”也是临危不惧。当然说得再多都不顶用，要的是“战术”。

解题需要巧精，而不在多杂。题海战术给你的只是见题就做，而多是做而错或不全。解题首先得破题。所谓“破”是指你的一般思维而言。读题时把重点的词勾出来，有数字、单位的要着重指出，还有就是对提问的分析，看见了题首先要想的不是如何解出来，而是如何把前面的题设与之相连接。如“已知：

$$\sin x=m+1，\cos x=m-1，\tan x=?$$”，

也许多数人就会来个

“$$\tan x=\sin x/\cos x=\frac{m+1}{m-1}(m\neq 1)$$”，

这看似正确，其实一看便知此题为一错题。

$$(\sin^2 x+\cos^2 x=2m^2+2\neq 1)$$

同学们都有这样的错误，看着题简单而忽略了很多必要的常识。还如上题从定义上看也是错的，如

$$|\sin x|\leq 1，即-2\leq m\leq 0$$

而

$$|\cos x|\leq 1，即0\leq m\leq 2故m=0，$$

代入可知为一错题，这样很明显的错题必须注意题干。

有了以上复习数理化的一般认识，下面我就具体谈一下这三科的复习：

数学的复习主要是基础知识。每一章的复习开始前一定要把课本看一遍，定理、公式记住自不必说，一些典型例题的解法也要注意，特别是立体几何，在以前的高考中曾多次出现课本上的例题。读者最好能选一本好的参考书，在复习一章的过程中把对应的题目仔细做一遍，不过要特别强调的是切不可采用题海战术，题海浩瀚无边，一时陷入就难以自拔了。数学有一个典型特点就是它有许多固定的题型，比如函数中的定义域、值域、反函数问题，圆锥曲线中过定点的弦的中点问题，定长弦的中点轨迹问题等，这些固定的题型都有一些固定的解法，如果掌握了这些固定解法，在遇到相应的题目时就可从容不迫。还有一点就是平时的复习中一定要注意提高运算能力，特别是解析几何，有的题目能列出方程，但只要解不出来得分就很少了。

楚军(清华大学自动化系学生，北京市高考理科第四名)：

数学同语文一样，也是最基本的工具学科。与语文相比，它更需脑子的灵活。学习数学，最基础的是对概念的理解，掌握了概念才能去分析解决各种题目。数学离开了题目是不行的，只有能在解题中熟练运用各种概念、定理和分析方法，才算是真正掌握了数学。做题目要用脑筋。借一句话，不能“死做题，做死题，做题死”。说实话，经过这么多年的练习、高考，各个知识点的各种类型的题目也差不多都出遍了，很难再出什么新花样。我们可以有系统地进行练习，一边做题一边总结题目的类型，找到每一种类型题目的解题办法。不论题目外表怎么变化，只要是这种类型的题，用这种办法肯定能解出来。虽说这样做有点像做八股文，长此下去会束缚人的思维，但这不失为应付考试的一个行之有效的办法。因为考场上的时间有限，如果在很长时间内拿不出解决问题的方法，可能会导致考试的失败。当然我们也不能忘记能力的培养，两者要相辅相成才能收到最大的功效。我相信，经过认真细致的归纳总结后，决大多数的题目会迎刃而解，为考试节约了时间；只要再做到认真细致，就能够得到比较高的分数。至于一些新颖的题型，就要靠自己平时培养的能力去解决了。

张雅丽(清华大学经济管理学院学生，湖南省高考理科第四名)：

数学，它是一门很基础却又非常灵活的学科。它的重要性是不言而喻的，因为只有在学好数学的基础上才有可能学好物理和化学，但同时，它又是很不容易学好的，主要是由于太多的基本概念须要掌握，不仅如此，还需要你能够很清楚地区分它们，这就须要大家下一定的功夫。功夫应该下在什么地方呢？我认为，数学中主要有几个重点和难点要求掌握好，包括函数、三角和解析几何，因为这几个部分是出题率比较高的，尤其是分数较多的大题；另外，在综合题中也经常涉及到这几个部分的内容，所以，你无论如何都要把这几个部分复习好。其次，数学是非常讲究解题技巧与方法的，数学题或多或少地都有一些灵活性，它虽然不是那么难，但仍需要你的脑筋转转弯，因此，我们在平时的练习中要经常进行总结和归纳，掌握解题的方法与技巧。不要以为这是多么难做到的事情，或者借口自己没有数学细胞而放弃，毕竟凡事都有它自身的规律，只要你用心去发掘，没有什么办不到的。最后，数学的题量相对而

言是比较大的，大家在做题时必须注意自己的速度，以免出现时间不够的现象。要想提高做题的速度，不妨用用这个办法：先有目的地找一些题目，自己估量一下做题的速度，看看自己哪种类型的题做得比较快，哪种类型的题做得比较慢，再好好分析分析，到底是由于什么原因影响了你的速度，然后根据情况改进做题方法，或是改变做题思路，这样慢慢提高速度应该较为可行。

牛强(清华大学热能系学生，辽宁省高考理科第十名)：

高中数学内容庞杂，有幂函数、数列、复数、三角、立体几何、解析几何等内容。虽然相互之间常结合起来做成综合题，但实际上，在基本的概念、原理和解题技巧上关联甚少。所以复习时宜采取各个击破的方式，先掌握每一部分的内容再处理综合问题。

现在许多同学热衷于做难题，认为“难题掌握了，简单问题也不在话下”。但实际上，难题常偏重于考查技巧，而疏于基本概念和原理的考查；这样，许多同学费力甚多解出了难题却在基本的小题上失去许多分，结果得不偿失。而且，须知，数学这一科目如果深究起来是深不可测的。一些数学竞赛的题目更是与高考题目少有关系，所以除非确实有极高的天份与兴趣，否则，就不要无限度地去做难题，而应以把握基本概念为主，深刻体会基本例题中的求解方法与技巧。

下面再让我分类谈一谈。

在学习幂函数时，我们可以深刻体会到图象的重要性。事实上，在整个学习过程中，图象都可以给我们以很大的帮助。

在对数列的学习和复习中，我们不仅仅要牢记那几条公式，而且应理解甚至牢记那些公式的推导过程。考试中题目的解法很少会是套用公式，却常常含在书中的例题、公式推导中。

有一位老师说“三角是数学中最简单的部分”。这么说是因为三角题目常有极强的规律可循，通常有“遇到积就化和差，遇到和差就化积，遇到乘方就降次”的说法。一般地，如果能牢记那些公式，解题可以有一定把握。

在学习复数时，要熟练掌握复数的两种表示方法和它的计算公式。高中复数是比较粗浅的，只是为以后的学习打基础，我们应注意体会它的几何意义并与代数中的其它内容对比。

立体几何是有趣的，它将我们的思维从平面移到了空间，充分开发我们的空间想象力。复习时我们应以最基本的画图开始——好的图形可以起到事半功倍的效果。我们既要想象出空间形状，又要把空间图形搬回平面上，用平面几何的方法解立体几何的题目。

解析几何是很难的一部分内容，常作压轴题出现。几类二次曲线的应用常使学子们束手无策，大量的运算常令人望而生畏。其实只要理解它们的概念，用焦点与准线的定义解题，常可以避开大量的运算。

下面用几道例题加以说明。

1．已知$|z+i|+|z-i|=z$求$|z+i+1|$的最小值。

解：本题考查复数的几何意义，只要知道$|z+i|$表示z到$-i$点的距离，便可以理解，所求为：z点距$-1-i$的距离。显然答案为1。

2．已知：$\tan A+\cot A=2m$，求$\sin 2A$

解：遇切变弦：$\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=2m$

$$\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}=2m$$

$\therefore \frac{1}{\sin A\cos A}=2m$，又$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{1}{m}$

3．已知：$|x|\leq\frac{\pi}{4}$，求$f=\cos^2 x+\sin x$的最值。

解：$f=1-\sin^2 x+\sin x$

$=-(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$

$\because |x|\leq\frac{\pi}{4}\ \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

当$\sin x=\frac{1}{2}$时，$f_{max}=\frac{5}{4}$

在求f_{min}时可以参看图线，显然f_{min}在$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时取得。

计算得$f_{min}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

另外还要说一点，有一部分同学一遇到复杂的计算就跳过不做，认为“知道思路就可以”。其实数学是理科的基础，而计算又是数学的基础，我们应踏踏实实地掌握这一个基本功。

徐凡(清华大学经济管理学院学生，北京市高考理科第二名保送入清华大学)：

高中数学，与其它学科一样，简单划一，可分为概念、定理、应用。临考复习，各章节也当遵循这三步。数学本身是很抽象的，掌握起来也就不很容易。我以为学习或复习的方法为理解概念，做题与总结三个环节。说实话，这并不是一条捷径，是条大路，好找也好走些，不过时间自然要用长些。

掌握概念，包括定理，是最初的一环，重要性不言自明。然而这却常常被人们忽略。这是由于这些概念表述往往很简单，看一遍就可以记住。然而记住并不意味懂，与应用更是相去甚远。概念之间是相互联系的。如果头脑中只有一个个孤立的概念，解题时必然找不到思路。因此，学习或复习时就是努力建立这些联系。比如，复数这个概念，$a+bi(a, b\in R)$，想到这个概念，首先应该想到复平面，然后是复数的向量表示，模与方向；复数加减——平行四边形法则，复数乘除——旋转与伸缩；复数乘方——连续旋转与连续伸缩，复数平方——等分圆周……如此等等。这代表了一个方向，即将抽象的代数概念放入具体的坐标系中，考察它的几何意义。这不仅有助于理解，而且借助图形的形象性，正是解复数的思路之一。

另一个方向是考虑复数集，它与实数集及其它数集的关系；复数相等、复数共轭与其它数集中的相等与共轭有什么相同点与不同点。这不仅有助于澄清概念，而且将复数概念延伸出去，与实数联系起来，也是

一种“温故知新”吧。

关于概念与定理还要言明的是有些概念在实际中并不常用，常用的是它的等价命题。如“共轭复数”这个概念，原始定义为“两个复数实部相等，虚部互为相反数，则这两个复数叫共轭复数”，而实际中常用的是“两个复数为共轭复数等价于它们的和与乘积都为“实数”。一方面，我们要接受并消化这种引申定义，因为在实际应用中它更有针对性，更方便；然而也不能就此忽略原始定义，它更具普遍性，这在后文还将有所论述。

下面谈谈做题。虽然题海战术已被批驳得体无完肤，然而每到高考复习阶段，各种参考书、习题集便蜂涌而出，名目繁多，装帧精美而且价格不菲，然而有些书内容实在让人无话可说。毕竟每年这会儿财神爷必然光顾，家长自然是不惜本钱，学生这时也只能“跟着感觉走”，因此盲目性很大。为了压缩投入，提高产出，不妨征询老师的意见，依靠老师的经验当是一条捷径。

做题量大小，依各人情况而定。你若有精力，有时间，偏要多做题，谁也管不着。我以为，复习阶段是需要一定的做题量的，不过做得过多，超过一定量后，收效的增长率也会随着投入的再增加而递减。与其如此，不如把时间投到其它科目。我的老师就是这样教我的，即 1×5 大于 5×1。

这就是说一道题分五种方法做，其效果比做同类的 5 道题要大。先看这样一道例题：

已知抛物线 $y^2=x$ 上存在两点 P、Q，使得 P 和 Q 关于直线 $y-1=k(x-1)$ 对称，试求实数 k 的取值范围。(详见 96 年 9 月西城区教研中心编《高三数学复习指导》301 页例题三)

书中给出了三种解法如下。

解法一：设 $P(x_1，y_1)$、$Q(x_2，y_2)$ 为抛物线上两点且 P、Q 关于直线 $y-1=k(x-1)$ 对称。

$$\begin{cases} {y_1}^2=x_1 & ① \\ {y_2}^2=x_2 & ② \\ \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{k} & ③ \\ \dfrac{y_1+y_2}{2}-1=k(\dfrac{x_1+x_2}{2}-1) & ④ \end{cases}$$

(以下略)

将所有关系用方程表出，共有 4 个方程 5 个参量，消去参量后用二次方程根的判别式求解，这无疑是最常规的办法，而对所有解析几何的题目，这种方法在理论上都是行得通的。虽然这种方法较繁琐，但由于它的通用性很好，切不可忽视。何况以现有的评分制度，写出上述四个方程，捞得也不少了。我学习有懂、会、熟、巧四个阶段，到“熟”的境界已相当不易，“巧”字更需平日功夫。然而在高考中时间紧迫，一心取巧也许会竹篮打水——一场空，优秀的学生尤慎之。“常仙解题”乃吾师之诲。

如果在成绩上想更进一步，上述解法一的“理论上可行”在实际中对有些题目也许就行不通了，这是由于消参后式子太过复杂，无法化简，

且极易出错。如果平日训练有素，可看出较简便的解题方法，请看解法二：

设直线 PQ 程 $x+ky+m=0$ 与 $y^2=x$ 联立，消去 x 得 $y^2+ky+m=0$。

∵与抛物线交于 P、Q 两点

$\therefore \Delta=k^2-4m>0$

又 $y_1+y_2=-k$

∴PQ中点纵坐标为 $\frac{-k}{2}$

(以下略)

这种解法的中心就是取出这个中点。用判别式保证 PQ 与抛物线相交于两点，由于 $y-1=k(x-1)$ 垂直平分 PQ 的垂直性已在设 PQ 方程时保证，再用中点为两直线交点保证平分就构成了这种解法的基本思路。

解法三：同样取出中点，但利用了该点在抛物线内部以保证 PQ 与抛物线交于两点。

由此可见，后两种方法较第一种方法要简单很多，但思路难于寻找。做题时想不到这种做法并无要紧，但看例题解法是切不可走马观花，而要作出些切实的分析，并进行适当的归纳、总结，以利提高。

实际上概念，做题与总结三环环环相扣，把它拆开来说是不很恰当的。

做题时就要进行方法的总结。对于某种类型题，要对可能的方法进行列举，选出常规方法。有些比较巧妙的方法在一定范围内也有一定的通用性，也可记为常规方法。例如取中点对于点点对称问题往往很有效，这样你的思路就拓宽了。

对解题步骤也要有所归纳。有时，对于有些题目，你会不会感到无从下手呢？这就要寻找到切入点。例如对含多个参变量方程进行讨论，首先要选取只影响一个变量的条件。这里就不再举具体例子了。实际上，这种对步骤的归纳在大学数学学习中是很普遍的。

对概念、定理进行总结。也许你会以为这没有什么好总结的。其实，所谓总结就是进一步寻找它们之间的联系，将它们连成一个彼此交通的网络。我们都知道生物进化的树状结构，我以为数学知识，至少在局部上也应具有这样的结构。正如前文所叙，原始定义比从它引申出来的等价命题具有更大的普遍性。知识树状体系中越靠近根部越具有普遍性。而最具代表性的就是定义。也就是说在使用某种方法行不通时，使用定义往往可以获得解决。比如立体几何中，如果几个垂直关系间能使用三垂直定理，不妨试一试直线与平面垂直的性质定理与判定；如果证明圆与直线相切不能用圆心到直线距离或其它方法求出，老老实实用切线定义当会有所收获。这里的例子也许并不恰当，实际应用中，这种思想当有用武之地。

我想以上所述概括了数学学习的一种方法。这种方法应该是有效的，但是需要投入较多时间。在一道题上投入时间过多，心理上要能承受。临考复习改变方法如同临阵易帅，要冒一定风险，望诸君慎之。

王新(清华大学电子系学生，湖北省高考理科第三名)：

首先，你应该对高中所学内容按章节全面地进行一次系统的复习。

我高三那年，数学课上采用的就是这种复习方法。我当时态度十分认真，为数学在高考中取得好成绩，打下坚实的基础。在复习的过程中，最好能做一定量的习题(我并不要求大量。应该说，做题贵在精。那种对概念要求高，自己易做错的题比较好)。举个例子，比方说，这两周，你集中精力复习复数这一章，然后认真做一套复数题，检查自己复习中的漏洞。通常，你做错一道题，可能有四种情况：概念不清或根本不理解题意；计算过程中出现失误；方法不当或虽知道题意却不知道如何做；对题意理解失误。针对第一种情况，你应该找到课本，认真看一看弄错了的概念，对弄混淆了的概念进行比较、理解(检查自己是否用已理解的办法做题)；计算出现错误，相对来说是个比较小的错误。但是对这种错误不能太轻视，平时练习时就应该有针对性的锻炼自己的计算能力，否则试想：如果在高考中发生因计算出错而失分，岂不太冤！对题意理解失误，本质上与计算出错差不多，不可忽视。至于方法，这是数学解题中十分重要的。一般来说，每一章中，总有一些有代表性的题目，每一个题目，都有自己的解法。如果你能掌握好这种解法(或者说是，见到类似的题目时，能熟练正确地套用这种解法)，这将对你的解题十分有利。

在你切实地做完第一轮的系统复习后，就可以做一轮综合复习。综合复习，所做的练习是那些在章节之间有跨度的。比如：一道题可能同时对于你的集合函数知识及不等式应用等知识同时进行考查，诸如此类。显而易见，没有第一轮系统复习的扎实基础，这一轮复习将是举步艰难的。同时，我建议能在这一阶段复习中，对一些题的解法作更进一步的归纳总结。举一个例子，在你进行完第一轮解析几何中关于椭圆曲线这一章的复习之后，你应该对如何求点的轨迹方程这一类问题的解法进行小结：可以按定义，直接写出符合题意的轨迹方程；可以先设一些变量，用方程来表示不同的曲线或直线，然后联立方程，消去参变量，求得这些曲线、直线交点的轨迹；或者利用平面几何知识，找出所求点满足的几何条件，进而设点的坐标，用方程表示这个几何条件。同时，你还应了解，做这种题时，还要去掉一些不合适的点。这些都是第一轮复习中应该做到的。在第二轮复习中，你应该进行更深入地归纳：你应该比较三种不同方法时所给的条件，尝试一下在同一条件下其他方法能否可行，如可行，其计算量有多大。这样，你就会特别注意，为什么这种条件下应这样做，而那种条件下却那样做，想一想为什么，在进行过这样的思考之后，你再拿到这种题时，根据题目的条件，头脑中会立刻反应出可行的解法，并能大致知道解法的大致过程，估计每种解法的计算量，最终找出一简单可行的方案。

我以上所说的两个复习阶段，说实在的，要求比较高。对于基础较差的同学，如果能真正落实好第一个阶段，则已能够在高考中取得一个比较理想的成绩。对于基础较好的同学，在做完第一轮的复习后，继续进行第二阶段的复习，将会有更多的收获。

刘海涛(清华大学精密仪器系学生，青海省高考理科第六名)：

数学知识是一个纯逻辑的体系，我感受最深的是要努力掌握各知识块内部及各种知识块之间的联系，因为这个联系把握得越深，知识就用得越灵活。打个比方，高中数学的学习过程中，老师总要强调四大数学思想方法，即函数与方程的思想、数形结合的思想、等价转换的思想和

分类讨论的思想。我高中学数学时，对这四个数学思想方法颇有体会，发觉它们实在是数学知识内部深层次上的联系。函数与方程的思想贯穿了代数、平面解析几何这两大知识块的始终，代数第一册以函数为主，依次讲了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，第二册中也讲了不等式(已知函数因变量范围求相应的自变量范围，主要用函数的方法解决)、数列(自变量为自然数的函数)等与函数联系紧密的知识块。解析几何总体上分为两部分，即已知动点运动条件求动点轨迹方程和已知曲线方程，研究曲线性质，其中二元方程若以其中一者为自变量，另一者为因变量则转化成了一元函数，而方程的曲线则相应地转化成了函数图象，即解析几何的实质是函数，关于数形结合的思想，可在函数图象、解析几何及复数的几何意义中得以体现。函数(一元)图象、平面解析几何的思想方法即是把平面上的点与一个二元实数对相对应，而这即是数形结合的思想，复数几何意义是用平面向量沿两个正交方向的分量来对应复数的实部与虚部。数形结合实现了“数”与“形”的转化，可以把复杂的代数运算转化为简单直观的几何运算，也可以把复杂的几何运算转化为易于操作的代数运算，其意义之重大不言而喻。而等价转化的思想支配的领域就更广了，它实质上是一个逻辑规律，而数学就是一个逻辑的体系。数学上问题的模式是根据已知条件，通过逻辑推理得出待求结果。而将不易用的已知条件等价转化为另一些易用的命题，则可实现百分之百地用上已知条件，克服了通常的将已知条件转化为其必要条件而得不出待求结果的毛病。若将不易求得的结果等价转化为易求得的结果，则避免了通常的分析法易犯的无法满足待求结果过强的充分条件的毛病。而分类讨论的思想，其实质也是一个逻辑规律，可描述如下：

设A、B、C均为命题，C与$\bar{C}$互为否命题；“$A \Rightarrow B$”等价于“$\left.\begin{matrix}C\\A\end{matrix}\right\}\Rightarrow B$，且 $\left.\begin{matrix}\bar{C}\\A\end{matrix}\right\}\Rightarrow B$”，其中“$A \Rightarrow B$” 较难实现，而 $\left.\begin{matrix}C\\A\end{matrix}\right\}\Rightarrow B$ 和 $\left.\begin{matrix}\bar{C}\\A\end{matrix}\right\}\Rightarrow B$ 由于增加了已知条件而往往较易实现。比如在求解含参数的不等式时，若分别讨论参数取值范围(即上文中的 C)来求解此不等式，往往能化繁为简，有时甚至非此法不能见效。综上所述，可见数学知识的内部联系是很深的，统领数学知识的四个数学思想方法即是一例。因此，我们在学习过程中要努力去把握这些联系，这是最根本的方法。

魏少岩(清华大学电机系学生，平时成绩优秀保送入清华大学)：

对一个考生来说，最难拿分的部分恐怕就是数、理、化，下面我重点谈一谈怎么复习才能有比较大的效果。

绝大多数学校高三复习都是从对书本的复习开始的，我们不妨称之为高三复习的第一阶段。有些同学认为复习课本没有必要，实际上，这种认识是错误的，书本是所有基础知识的发源地，只有对书本上的知识全面掌握才能谈得上“拔高复习”。在以往的高考题中，曾经出现过课本上例题的原题，比如“对射影定理的逆定理的叙述和证明”“证明异面直线上点的距离公式”等，有些题目也是由书本例题改编的。虽然它们的难度不是很大，但许多同学由于对基础知识不熟(比如搞不清哪个是

射影定理哪个是射影定理的逆定理)而白白丢了分。

建议：如果老师对课本复习比较粗略(比如只利用一两节课的时间串一遍)，你自己要利用课余时间补上“这一课”。首先要重新认识、理解、记忆每一个《考试说明》上所要求的公式和定理，第二要留心每个定理公式运用的条件和范围。例如：等比数列求和公式：“$S=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$”运用条件是“$q\neq 1$”。第三，认真看书上的例题。但要注意：课本复习虽然重要，但不宜把时间拉得过长，一般以两到三周为宜。对书上课后的习题，最好不要花时间专门去做。

几乎所有的学校复习的第二阶段都是以课上老师讲方法，讲题为线索的。这一阶段非常重要，因为老师所讲的东西包含了各类问题的常规思想、误区、一些重要专题，一些很适用的巧法妙解。所以课上必须认真听讲、认真做笔记，对于课下老师留的练习要认真完成。因此只有认真做老师留的练习，才能熟悉掌握课上老师讲的规律并达到灵活运用的程度。

注意：①如果觉得老师留的题目不够做，可以自己利用课下时间加做一些题目，但千万不能搞题海战术，必须明确做题是为了巩固知识，不是为了做题而做题。自己最好准备一两套复习资料(注意资料不宜过多)，且保证资料一定要精，如果自己拿不准买什么样的好，可以征求老师的意见。利用资料时注意应该有选择性，一页接一页地做题一般不太好，最好的方法是：某一章节自己过去学得不好，老师给留的题目不足以达到练习的目的，这时做一做资料上的相关部分，而对其它自己学得不错的章节，认真做老师留的习题就足够了。②在第二阶段复习中，必须注意对能力的培养。首先是准确完成每一道会做的题目的能力。高考试卷分析中经常发现，考生做错的题目中一大部分是由于马虎大意造成的，所以必须培养自己严谨认真的素质。不管是审题还是计算，必须认认真真，保证做一道对一道。第二个能力是以较快速度完成题目的能力。参加过高考的人都可以体会到，考试时间不是很充裕。因此在高考中能争取到时间至关重要。做题速度必须通过做题来培养，但同样避免题海战术，我认为培养迅速解题能力的关键是你有没有想提高自己解题速度的意识。也就是能否把做习题看成考试，让自己“紧张”起来(注意这里“紧张”的真正含义)，题目给的是什么条件，考的是哪方面知识，有什么常规方法，这些思考过程都要在尽量少的时间内完成。开始动笔，要有意识地提高计算速度。但千万注意，提高准确率比提高速度更为重要，后者必须建立在前者的基础之上。③复习方向要明确。复习中重点要提高的是以常规思想，常规方法解决问题的能力。当然掌握一些巧解、妙解或非常规重要思想(如图象法、代换法、构造法、待定系数法等)是有必要的，但不能苛意追求，近年高考题的选择题中，可以用特殊值法、猜值法、排除法等解决的题目越来越少。况且，从历届高考题可以看出，可以用巧妙方法解决的问题用常规方法也并不困难。从命题者的命题角度看，他们考的是常规方法。总之，只有牢固掌握常规思想、常规方法，才能以不变应万变。另外一个应该注意的问题是，不要刻意追求难题，对于一个学习尖子来说，花很多时间搞难题也不是一个好现象。④要重

视自己的学习方法。在学习中，学习方法非常重要，两个智力和勤奋程度差不多的人，方法好的可能会优秀很多。这里我只提供一个比较适用的方法：自己准备一个笔记本，把平时做题中出现的错误都整理上去，写上造成错误的原因和启示。如果你平时做题出错较多，比如一张练习卷要错五、六处或更多，抄错题恐怕得不偿失，这时你可以在试卷上把错题做上标记，有题目的旁边写上评析，然后把试卷保存好，每过一段时间，就把"错题笔记"或标记错题的试卷翻着看一看，好处会很大。在看参考书时，也应注意把精彩之处或做错的题目做上标记，这样以后你再看这本书时就有所侧重了，不必再整个看一遍。⑤要不耻下问。只有平时对知识透彻理解了才能保证在做题时不在概念上出现偏差，所以有不明白的地方，必须要向老师或同学请教。

多数学校把高考前二个月划为复习的第三阶段。在这个阶段中，每隔一周便有一次模拟考试。考试间隔的几天中，老师在课上分析试卷，对试卷中暴露的问题做出复习指导。也就是通过模拟来练兵(感觉一下高考)和查漏补缺。但对于每个同学来说犯的错误是不同的，老师强调的只是同学们犯的错误中较典型的那部分。这就要求你自己对老师没分析过的错误加以分析，有必要可以翻开关于这方面内容的笔记式习题，重新复习一下。

应该注意的是：①许多学校往往在这一阶段中只是做模拟、分析模拟，连平时作业都是各省市的模拟，很少要求学生抽出一些时间看看基础知识(这是广义的"基础知识"，是指应该掌握的公式、定理，第二阶段中所复习的常规思想、常规方法)，这就要求你自己应该有意识到回头看一看这些东西的重要性，有许多同学由于在第三阶段中只是做题结果连最基本的公式和某些题目的常规解法都忘了。另外，这时候也应把以前做过的错题回头看一看。②注意在这个阶段培养自己对高考的适应性即把每一次模拟看作高考，培养自己的答题策略，也就是在高考中怎样答题才能得到自己的最高分，由于模拟题的信度、难度和高考都不太相似，所以建议翻看一下往年的高考题。从高考题可以看出，试卷的难度梯度很明显。一般说来，对于一个中等水平的同学来说，选择题一般只一至两道会感到稍稍有些困难，填空题一般也是有一至两道会感到有些困难，大题(按六道计算)，应该有三至四道是可以得绝大部分分数的。因此，如果你在高考的考场上，一道一道地往下做题目，不如把感到有些棘手两三分钟还没思路的跳过去(这些题目毕竟占少数，如果跳了好几道，就不正常了)，把有把握的大题做好，并且保证前面已经做过的选择、填空、大题一定正确，然后来考虑那些原来跳过去的题目。这时即使你做错了或都做不出来也不会很后悔，因为毕竟水平有限，会做的全做好了是最大的事情。当然，对于这部分较难题目也不能完全放弃(空着不做)，会多少做多少，实在不行也可列上几个相关公式，要知道高考中每一分都是很宝贵的。

模拟题的特点是：选择、填空比高考稍难，大题前三道稍难一些，而后三道，尤其是压轴题则比高考要容易。鉴于此，不要把模拟完全等价于高考，在模拟中适用的策略在高考中不一定适用。模拟考试中反应出的成绩和高考考出的成绩(同一个考生)对于不同水平下是不同的。比如学习尖子的模拟成绩要比高考成绩高一些，中等和中等偏上同学的模

拟成绩和高考成绩相差不大，而中下等水平同学的高考成绩高于平时模拟成绩，所以不要把模拟看得太重，我们是要通过模拟高考练习适应高考的能力和通过模拟检查知识的漏洞。

孟宪飞(清华大学精密仪器系学生，平时成绩优秀保送入清华大学)：

数学是一门基础的工具学科，内容丰富，题型灵活多样，学起来有一定的难度。通过对多年来高考题目的研究，重点在于定义定理的灵活运用。灵活运用的基础是对定义定理的熟练掌握。只有对基础知识了解透彻，清楚了各部分知识的联系，触类旁通，解决问题的时候才易于启发多条思路，选择最佳方法，并且在一条思路遇到阻碍时能够及时转换到其它思路上去。比如说求值域有多种方法，常见的如判别式法、观察法，不等式法，图形法等等，遇到具体问题时能立即反映出可用什么方法解，用哪种方法更简单，学习就算清晰透彻了。

具备上述水平需要一段时期的训练和提高。首先，要把各部分基础知识学好。数学各部分之间的联系相当紧密，因而上课要认真听讲，及时复习，遇到疑难问题及时解决，以免影响以后的学习，并且注意多做总结，想清楚各部分的层次关系，让知识形成体系。体系的形成代表着基本功水平的提高。

学习了基础知识，在此基础上多做些习题必不可少。只学习了基础知识，或许对定义定理的理解还只停留在表面上，没有意识到它可能的演化。做题的过程也是对定理的强化，既加强了记忆，又使理解深入其内涵。多数题目都是针对某项基础知识的不同方面而出的，是对基础知识的包装，做题是要去伪存真，抓住事物的关键所在，找到解题的依据，这就是所谓的能力。不管什么科目的教学，都是以培养能力为目标的，有了能力就可立于不败之地，走向成功。

做题时不免要出现各种各样的错误，如何处理很关键。有的同学做题只重数量不重质量，做过之后不问对错就放到一边不闻不问了，这种做法很不科学。做题的目的是培养能力，是寻找自己的弱点和不足的有效途径。做错的题目如果轻易放过了，那部分知识永远变不成自己的，再遇到类似问题肯定还会出错。长此下去能力没有提高，水平只能停在原来的高度。这样做题就成了对时间和精力的浪费。俗话说“吃一堑，长一智”，多数有用的经验都是从错误中总结出来的，因此发现了错误及时研究改正，并总结成经验以免再犯，时间长了就知道做题的时候有哪些方面应引起注意，出错的机会就大大减少了。

李宏霞(北京大学国际关系学院学生，黑龙江省高考文科第三名)：

数学是同语文差异很大的基础学科，它着重培养我们的理性思维能力。它在很大程度上是文史类考生的学习调节剂，在单调的人文科学中增加一点自然科学的情趣。数学学科复习的重点是所学定理定论的灵活运用。数学方面的复习参考书目名目繁杂，需要我们在教师的引导下慎重选取，尽量做到少而精。数学的模拟试卷很重要，它从题型和题量两方面体现了高考数学的模式，所以我平时很注重模拟试卷的总结，从每一道做错的题中发现自身的不足。是计算不够精确，速度不够快，还是理解上有偏差，思维不够严密，找出失误的原因，然后再有针对性地进行训练。

数学中的基础题目固然很重要，它是得高分的基础，但得高分的关

键则是综合性强、难度大的最后两至三道大题，即俗称的“拉分题”。对于立志考名牌大学的学生，这十几分至关重要，所以我在复习备考时就有规律性地选做这类的习题。由于这类习题一般很费时间，所以每次做的量不要太大，一次做四～五道即可，而且类型的选取要典型、全面，同一题型的题两三道即可，要注重方法的积累和移用。在一定周期例如两个星期后要进行小结，把解题方法进行汇总，选取能同时运用两三种方法的试题进行综合运用能力的训练，要努力做到看到与做过题型有相似之处的题目时能迅速联想到原题的解题方法，高考中的难题经常是几种解题方法综合运用的考核，因此我们的训练也要有侧重点的进行。以上是我复习数学的一点浅薄经验，但它却是我在学校的历次模拟考试中勇夺桂冠的法宝。

杨临明(北京大学信息管理系学生，毕业于安徽省枞阳中学)：

数学在文科中有着特殊的地位及重要性，拿到数学高分，你的高考总分便会十分理想，数学最大的特点便是熟能生巧，多做适当的题你的头脑就会越来越灵活，你的思路就会越来越开阔。学好数学第一步是弄清基本概念的内涵和外延。如函数，你就必须弄清什么叫函数，函数定义域、值域、函数单调性和反函数等一系列内容。第二步是做有益的题。文科数学的要求不高，注重基础，反映到做题上应该是先做容易的题，多做中等程度的题，少做难题，在复习阶段中最好少钻牛角尖，那样费时费力且对高考并无太多益处。数学就应夯实基础，有了扎实的基础什么都不必担心，问题会清晰明朗而变得易于解决。高考数学的选择题分数多，应引起高度重视，那种考卷一发就动手去做后面分值大的难题的做法是绝对不妥的。选择题不可死做，那样浪费时间，应运用科学方法比如赋值法、代入法、以偏概全法、图形法、换元法等，具体题目灵活运用，这里就不再举例说明了。在高考答卷时，对后面大题应抱着拿一分算一分的态度，切不可望而生畏不敢动笔，主动放弃。现在的题目一般都是渐进式的，经常会分为几个小问题，因为每个小问题的独立得分，所以能解决一个算一个。拿到一道综合性的数学题，首先应逐字通读一遍，再仔细把它翻译成数学语言、弄清已知条件和待求问题，再找出二者之间的联系及桥梁，说起来也可算是“解剖麻雀”法，采取个个击破法，难点一个个扫除，基本上一道题就能顺利地做出来了。

啜玉林(北京大学光华管理学院学生，北京市高考文科状元)：

先谈一谈我是如何做好知识准备的。知识准备指的是掌握各科的知识结构，把《高考说明》上所列的每一个知识点都抠细、抠精，从而把各科的基础知识牢记在心；在把握好各科基础知识的前提下，培养自己的答题技巧、应试能力。文科的一个显著特点就是知识点多而且碎，并且要求记忆的东西比较多，因此做好知识准备是需要付出艰苦的努力的，我主要是从以下几方面来做的。

第一，服从老师的教学计划和复习安排，不要急于求成。进入高三以后，基本上就开始高考前的总复习了。总复习共有三遍，第一遍是按章节进行复习，主要目的是帮助学生弄清楚每个知识点；第二遍要打乱章节顺序，按专题进行复习，目的是让学生从宏观上对知识有一个再认识；最后一遍复习是进行查漏补缺，主要是对前两遍复习后学生仍未掌握的知识进行强化复习。由于各个学校高三的任课教师水平都是最高的，

因而他们的复习安排具有合理性和可行性。每个考生都应遵循。我在这个问题上曾出现过失误。因为我的基础打得比较好，所以高三上学期进行的第一遍复习的内容，我几乎都会。所以刚上高三时，我便没跟着老师的进度走，而是盲目地做一些高考模拟题，结果时间没少花，却没有任何效果。大约过了一个月，我才发现自己对某些基础知识并没有真正掌握，因而做一些综合题并不会提高我的水平。从此以后，我便一直跟着老师的进度走，第一遍复习取得圆满成功。许多同学认为知识复习的次数越多，效果就会越好。其实并不一定，如果复习质量不高，复习多少遍也不会把知识掌握牢固。如果真是踏踏实实地按老师的安排复习三遍，参加高考就一定没问题。而许多高三的学生往往都有急功近利的心理，他们确实很努力、很辛苦，他们看不起每一科最基本的定义、定理，认为高考不会考这么容易的东西。所以他们赶在老师安排之前，狂做高考模拟题，这样必然造成基础不扎实，从而使提高答题技巧成为“无源之水，无本之木”。

第二，要仔细研究历年的高考试题，发现考试的规律，从而提高应试的技巧。第二轮复习后，每个考生在基础知识方面都不应再存在问题了。而这对于参加高考是非常不够的，因为高考中基础题占 20%，中档题占 60%，难题占 20%，所以还必须继续努力，掌握解答中档题和难题的能力。而这种能力的提高一是需要老师的指导和训练，再就是需要自己努力了。我想，要提高这方面的能力，一个非常有效的方法就是研究考题，找出出题的规律以及一些答题的技巧。比如，我对 94—96 年的高考数学试卷进行了分析，我发现数学试卷上的解答题出题很有规律。数学的解答题是数学试卷的重头戏，直接影响数学成绩的高低。

高考试卷上，解答题共 6 题，一般是三易三难，三个较易题分别是：三角函数(或复数)、解不等式、立体几何题。这三个题应该说是送分题：对于三角函数(复数题一般也要归结为三角函数问题)，只要熟记和差化积、积化和差公式，进行公式变换一定能做出来；解不等式需要的就是耐心和速度；立体几何题总离不开证明“平行”和“垂直”这两个永恒的命题，只要熟记第一章中的判定方法就不会遇到什么大的困难。而剩下的三个题：应用题、数列题(或函数题)、解析几何题就不那么好对付了。这三个题之所以难，主要是思路不容易找到，计算比较繁琐。但这些题即使是一点思路也没有，只要掌握了一定的答题技巧，也不会 1 分不得。原因就是高考是按步给分，而且这三种题都可以分别用一套“通法”来写上几步，从而得上几分。不要小看这几分，也许正是这些“小分”关系到你能否上线。当这几个题没有思路时，应用题就把题中所有未知量都设成未知数，然后由题目条件列出几个方程；数列题也分别按数列通项公式和求和公式列出方程即可；解析几何题更二话别说，先把直线和圆锥曲线联立，消去一个未知数，然后令判别式大于零，解这个不等式，一般到此即可得总分的 1/3 左右。

从上面我举的例子可以看出，对高考试题研究以后，就会对考什么以及考到什么程度有个了解，从而做到心中有数。在平时安排好复习，在考场上也可随机应变，大大提高自己的成绩。由此可见，研究以前的考题还是很重要的，但这样做的前提必须是有扎实的基本功。

田蕾(清华大学建筑系学生，山西省忻州地区高考理科状元)：

再来谈谈数学，对于学理工的学生来说，数学是最基础的，数学学得好坏直接影响到理化的解题。有的同学认为学数学只要多做题就行了，多做题虽不是一件坏事，因为它毕竟可以开阔自己的解题思路，增加自己的解题经验，但是在高三这个分秒必争的阶段，我们应尽量争取从最少的付出中取得最大的回报。我的建议是，可以先将公式、定律等所有应该记忆的东西都整理出来，反复地记，将它们刻在头脑里，因为它们是进一步学习的基石，其次在自己做的每一道好题下面都做好笔记，例如可以分析一下，它用到哪些知识啦，它有哪些十分重要的隐含条件或限制条件啦，应如何分析才是最正确的分析思路啦，不妨将自己的这些想法都转化成文字记录下来，这一整理的过程其实已使你在不知不觉中对该题的认识又深化了许多。我同样认为，关于数学的参考书也不宜太多，一两本足够了，但这一两本必须是“精品”，不妨多去书店转转，不妨多向老师请教，当你找到一本编写质量较高适合你自己阅读习惯的参考书以后，就要争取将它吃通吃透，看看编者是以怎样的线索将各个知识点组织起来的。我认为相当重要的方面还有对历年高考试题的研究。最好能找到近 5—6 年的高考题，按时间顺序模拟高考情境将它们做一遍，你会感到尽管题目的难度有反复，但是可以看出，命题者一方面在强调对基础知识的考察，另一方面在突出对考生能力的考察。最后几道大题，题目是趋向灵活的，为了适应这种种变化，不妨参阅一些专门研究高考的杂志，如《试题研究》、《考试》等，这些杂志上常会刊登一些符合高考命题变化趋向的题目。

袁南果(清华大学建筑学院建筑学系学生，毕业于信阳市高级中学)：

(1)认真看课本。说起来很简单，做起来却很难。首先要能准确地背下书上每一个公式，每一条定理。做到准确，全面很不容易，是个日积月累的硬功夫。第二步，就是学会把“薄书看厚，厚书看薄”。即能够深入到课本中去。前者指看课本时，能够以课本为题纲，一下带起一系列有关的知识。例如，在看代数书时，当读到幂指数时，你是否能立刻反应出它的性质、图象、限制条件以及相应的反函数——指数函数及其一系列内容。当看到$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象，你能主动地去考虑当指数分别为$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{5}$，$-\frac{1}{3}$……时对应的图象吗？能想到去列一个表归纳一下它们并设法去寻找它们的规律吗？说到把“厚书看薄”，就是要学会从课本中跳出来，能除掉文中小知识点的迷惑，抓住课文的主脉络，理清思路，帮你从宏观中看问题，把握住大局，这对高考复习是很有意义的，既有利于对综合问题的处理又利于学习能力的培养。

(2)做大量的习题。高中三年是艰苦的，想不吃苦就考出好成绩，是不可能的。“题海战术”听起来是很过分，但必要的一定量的习题是必须做的。高中时间很紧张。每天大部分时间要上课听讲，完成课上作业，所剩时间本来就不多了，看书再占去一部分，可以说自己做题的时间的确少得可怜。但越是这样，就越要挤出时间来做题。(当然前提在于要保证合理的睡眠时间)高中生活对学生的要求本来就是快节奏、高效率。所以做习题一定要注意时间性和准确性。有意识地要求自己加快做题速度，定时完成习题并保证质量。可以刚开始时一天只做三、四道题，然后再

慢慢加量，提速，不骄不躁，稳住情绪，日积月累，你的成绩自然就上去了。

(3)上课听讲。这一点似乎是老生常谈了，从小学到大学，时时总有这句话在耳旁唠叨，但具体做来，却真不容易。我觉得要想学好，听讲时思维一定要抢在老师前面，不要等老师一点一点告诉你该怎么办。要先自己考虑该怎么办，再听老师讲怎么办，之后比较一下两者有什么不同，为什么会这样。这样你等于掌握了两套东西——自己的和老师的。而只等着老师告诉你怎么做，自己仅仅是听懂了，我想你还是没有真正掌握。因为高考现在考查的是“能不能”，而不是“会不会”。而好学生与差学生的区别往往就在这儿。比如上数学习题课，老师会讲一些习题，你不要坐在那里等着老师把题一道一道解给你看。你应当取出纸笔先争取在老师讲之前把这道题解出来。(如果时间不够或你的程度还达不到，就先想一下大致的解题思路和步骤。或多或少，你必须先自己想。)然后再认真听老师解题，关键是抓住老师的思维方法。这样一道题做下来，收获却并不只是那区区一道题了。

第二章 函数

一、选择题

1．定义在 R 上的偶函数 $f(x)$，满足 $f(3+x)=f(3-x)$，在区间[－3，
0]上单调递减，设 $a=f(-1.5)$，$b=f(\sqrt{2})$，$c=f(4)$，则 a、b、c 的大小顺序为

[　　]

A．b＜c＜a
B．a＜b＜c
C．b＜a＜c
D．c＜b＜a

【解答】　∵〔－3，0〕↘，∴偶函数 $f(x)$在〔0，3〕↗，$f(4)=f(3+1)=f(3-1)=f(2)$，∴$f(-1.5)=f(1.5)$，∴$f(4)>f(-1.5)>f(\sqrt{2})$，故选(C)．

2．已知集合 $M=\{x|x\neq 1，x\in R|\cup\{y|y\neq 2，y\in R\}$，集合 $P=\{x|x<1$ 或 $1<x<2$ 或 $x>2，x\in R\}$，则 M 与 P 之间的关系是

[　　]

A．$M\subset P$
B．$M\supset P$
C．M＝P
D．$M\cap P=\varnothing$

【解答】　∵$M=\{x|x\in R\}$　$P\{x|x\neq 1，x\neq 2，x\in R\}$∴$M\supset P$，选(B)．

3．集合 $A=\{a^2，a+1，-3\}$，$B=\{a-3，2a-1，a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，则 a 值为

[　　]

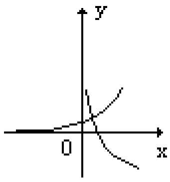
A．0
B．1
C．2
D．－1

【解答】　当 a＝0 时，$A=\{0，1，-3\}$，$B=\{-3，-1，1\}$，
此时 $A\cap B=\{-3，1\}$ 不符题条件，所以 $a\neq 0$，类似验证 a＝1，2，－1，
得结论，选(D)．

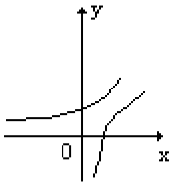
4．已知 $f(x)=a^x$，$g(x)=\log_a x(a>0，a\neq 1)$，如图 1，若 $f(3)\cdot g(3)<0$，则 $y=f(x)$与 $y=g(x)$在同一坐标系内的图象可能是

[　　]

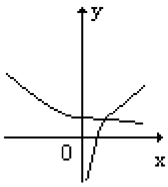
A．



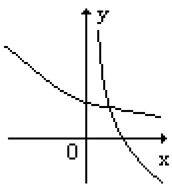
B．



C．



D．



【解答】 $f(x)>0$ 恒成立

$g(4)=\log_{a}^{3}<0$

$0<a<1$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 关于 $y=x$ 对称，

故选(D)．

5．函数 $y=(0.2)^{-x}+1$ 的反函数是

[ ]

A．$y=\log_5 x+1$

B．$y=\log_x 5+1$

C．$y=\log_5(x-1)$

D．$y=\log_5 x-1$

【解答】 ∵原函数过点(0，2)，故反函数必过点(2，0)，代入选择与验证，选(C)．

6．若函数 $y=\lg(mx^2-4x+m-3)$ 的值域为 R．则实数 m 的取值范围是

[ ]

A．$(4+\infty)$

B．$[0,4]$

C．$(-1,4)$

D．$(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)m>0$

【解答】 由$\begin{cases} m>0 \\ \text{当}m=0\text{时结论也成立} \\ \Delta=4^2-4\times m(m-3)\geq 0 \end{cases}$ 得$0<m\leq 4$

∴0≤m≤4，选(B).

7．f(x)是定义在 R 上的奇函数，当 x＜0 时，f(x)＝xe^{-x}，则当 x≥0 时，f(x)的表达式为

[　　]

A．$-xe^{-x}$

B．$-xe^{x}$

C．xe^{x}

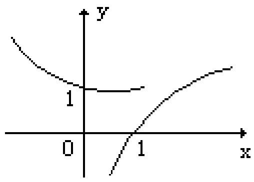
D．$\frac{1}{x}e^{-x}$

【解答】　令 x＝－1 有 f(－1)＝－e，∴f(1)＝e. 代入选择支验证，选(C).

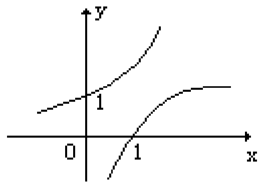
8．如图 2；当 a＞1 时，在同一坐标系中，函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象是

[　　]

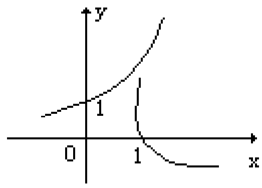
A．



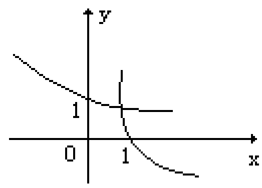
B．



C．



D．



【解答】　∵a＞1，∴$y=\log_a x$ 的图象为增，故排除(C)、(D).

∵ $y=a^{-x}=(\frac{1}{a})^{x}$，∴ $0<\frac{1}{a}<1$，$y=a^{-x}$ 的图象为减，故排除(B)，选(A).

9．如果实数x，y满足$(x-2)^2+y^2=3$，那么$\frac{y}{x}$的最大值是

[　　]

A．$\frac{1}{2}$

B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

D．$\sqrt{3}$

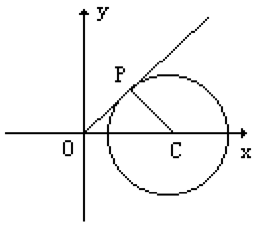


图3

【解答】 设P(x，y)，则$\frac{y}{x}$表示直线PO的斜率(O为原点)．又P(x，y)在圆$(x-2)^2+y^2=3$上运动，如图3易知，OP的斜率的最大值为$\sqrt{3}$．故选(D)．

10．已知f(x)是奇函数，它在区间[3，7]上是增函数，且最小值是5，那么f(x)在区间[－7，－3]上是

[　　]

A．增函数，且最小值是－5

B．增函数，且最大值是－5

C．减函数，且最小值是－5

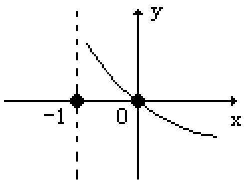
D．减函数，且最大值是－5

【解答】 f(x)是奇函数，它在[3，7]上是增函数，且它在[－7，－3]上仍为增函数．由奇函数的图象关于原点对称可知f(x)在[3，7]上的最小值与它在[－7,－3]上的最大值关于原点对称.所以有f(3)＝5(最小)，则f(－3)＝－5(最大)，故本题应选(B)．

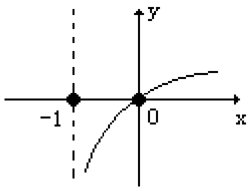
11．已知函数$y=a^x$(a＞0，a≠1)是R上的增函数，则函数y＝$\log_{\frac{1}{a}}(\frac{1}{x+1})$的图象只能是图4中的

[　　]

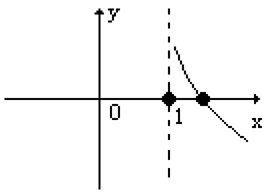
A．



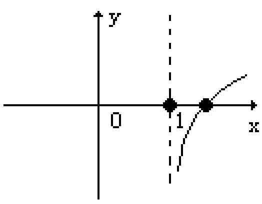
B．



C．



D．



【解答】　由 $y=a^x(a>0，a\neq 1)$在 R 上是增函数，所以 $a>1$，而$\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{x+1}=\log_a(x+1)$．因此，$\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{x+1}$的图象实际就是$\log_a(x+1)$的图象．而 $\log_a(x+1)$的图象只需把 $\log_a x$ 的图象向左平移 2 个单位即可，而由已知 a＝1，$\log_a x$ 是增函数，故本题应选(B)．

12．函数 y＝f(x)在(0，2)上是减函数，且关于 x 的函数 y＝f(x－2)是偶函数，那么

[　　]

A．$f(\frac{1}{2})<f(\frac{5}{2})<f(3)$

B．$f(3)<f(\frac{5}{2})<f(\frac{1}{2})$

C．$f(3)<f(\frac{1}{2})<f(\frac{5}{2})$

D．$f(\frac{5}{2})<f(3)<f(\frac{1}{2})$

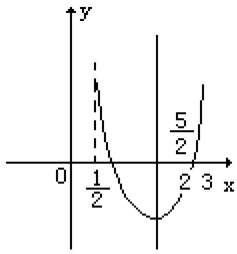


图5

【解答】 依题意画出 y＝f(x)的草图如图 5，观察即可得结论，选(D)．

13．定义在区间(－∞，＋∞)的奇函数 f(x)为增函数，偶函数 g(x)在区间〔0，＋∞)的图象与 f(x)的图象重合，设 a＞b＞0，给出下列不等式：

①f(b)－f(－a)＞g(a)－g(－b)

②f(b)－f(－a)＜g(a)－g(－b)

③f(a)－f(－b)＞g(b)－g(－a)

④f(a)－f(－b)＜g(b)－g(－a)

其中成立的是

[ ]

A．①与④

B．②与③

C．①与③

D．②与④

【解答】 根据题设条件，可将两个抽象的函数具体化，令 f(x)＝x，g(x)＝|x|，再取 a＝2，b＝1，然后检验四个不等式，这样就容易选出正确答案(C)．

14．若 $a>b>0$，$a+b=1$，$x=\log_a b$，$y=\log_{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} ab$，$z=\log_b a$，则 x，y，z 的大小关系是

[ ]

A．y＜x＜z

B．z＜y＞x

C．y＜z＜x

D．x＜y＜z

【解答】 本题考查对数函数性质以及不等式的性质．因为，a＞b＞0，a＋b＝1，有 1＞a＞b＞0，借助中间量 $\log_a a$，可以得出

$\log_a b>\log_a a>\log_b a>0$；而$\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}$，所以$\log_{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}(ab)=\log_{\frac{1}{ab}}(ab)=-1$

＜0；所以 x＞z＞y，应当选(C)．本题由于 a、b 值范围比较明确，可选择特殊值$a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$去比较，但基本思路一致．

15．已知 $y=\log_a(2-ax)$在[0，1]上是 x 的减函数，则 a 的范围是

[ ]

A．(0，1)
B．(1，2)
C．(0，2)
D．〔2，+∞)
【解答】 由 $a>0$ 知 $2-ax$ 在[0，1]上是减函数，
∴$a>1$，又 $2-ax>0$，取 $x=1$ 有 $2-a>0$
∴$a<2$，故选(B)．

16．$A=\{\alpha|\alpha=k\pi+\frac{\pi}{3}，k\in Z\}$，$B=\{\alpha|-2\pi<\alpha<2\pi\}$，此 $A\cap B=$

[ ]

A．$\{-\frac{2}{3}\pi，\frac{\pi}{3}，\frac{4}{3}\pi\}$
B．$\{\frac{\pi}{3}，\frac{4}{3}\pi\}$
C．$\{-\frac{5}{3}\pi，-\frac{2}{3}\pi，-\frac{\pi}{3}，\frac{\pi}{3}，\frac{2}{3}\pi，\frac{5}{3}\pi\}$
【证明】 令 $x=t\cos\theta$，$y=t\sin\theta$，其中 $1\le t\le\sqrt{2}$，$0\le 0\le 2\pi$，则

【解答】 因为 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in Z)$，α可取的任意两个数之间的差应为π的整数倍．因此 C 不满足条件．集合“$A\cap B$”是由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的，选项 A、B 中的集合都是 $A\cap B$ 的真子集．所以选(D)．

17．函数 $y=f(x+1)$ 与函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图象

[ ]

A．关于直线 $y=x$ 对称
B．关于直线 $y=x+1$ 对称
C．关于直线 $y=x-1$ 对称
D．关于直线 $y=-x$ 对称
【解答】 $y=f(x+1)$ 与 $y=f^{-1}(x+1)$ 图象是分别将 $y=f(x)$，$y=f(x)$ 的图象向左平移一个单位所得，∵$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，$y=x$ 向左平移一个单位而得 $y=x+1$．故选(B)．

18．定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 有反函数，则函数 $y=f(x+a)+b$ 的图象与 $y=f^{-1}(x+a)+b$ 的图象间的关系是

[ ]

A．关于直线 $y=x+a+b$ 对称
B．关于直线 $x=y+a+b$ 对称
C．关于直线 $y=x+a-b$ 对称
D．关于直线 $x=y+a-b$ 对称
【解答】 将 $y=x$ 向左平移 a 个单位，向上平移 b 个单位得 $y=x+a+b$，故选(A)．

19．函数 $y=|||x|-1|-1|$ 的图象与 x 轴围成的封闭区域的面积是

[ ]

A．2

B．$\sqrt{2}$

C．1

D．$\frac{1}{2}$

【解答】 根据图象变换作出函数 y＝|||x|－1|－1|的图象，变换次序取

(1)y＝|x|，(2)y＝|x|－1，(3)y＝||x|－1|，

(4)y＝||x|－1|－1，(5)y＝|||x|－1|－1|．

由图 6 可知选(A)．

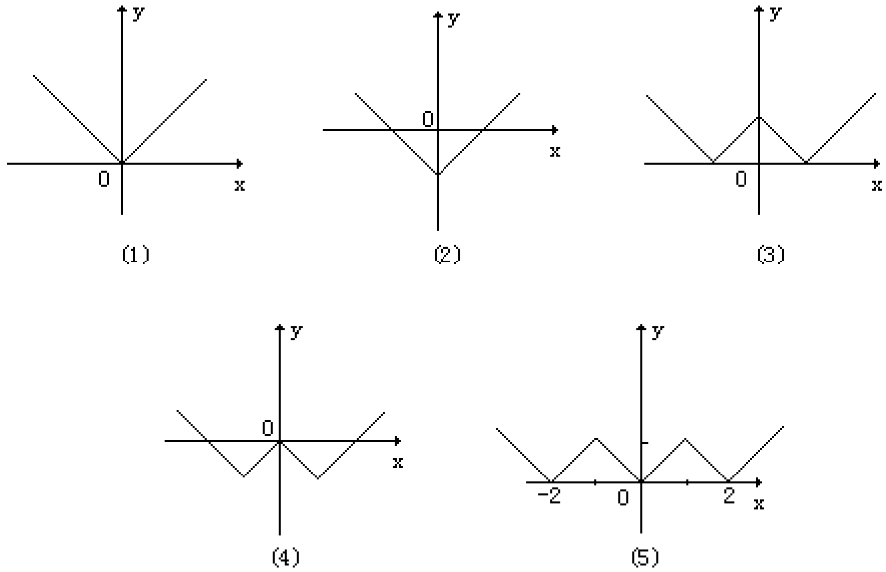


图6

20．定义域是 R 的函数 f(x)，对于常数 a，都有 f(x)＝f(a－x)，则这个函数的一条对称轴是直线

[ ]

A．x＝a

B．$x=\frac{a}{2}$

C．x＝2a

D．$x=-\frac{a}{2}$

【解答】 令$t=\frac{a}{2}+x$，得$f(\frac{a}{2}+t)=f(\frac{a}{2}-t)$∴选(B)．

注 一般地，如 f(x＋a)＝f(b－x)对 x∈R 恒成立，则 f(x)关于直线$x=\frac{a+b}{2}$对称．

21．函数 y＝f(x－a)与函数 y＝f(a－x)的图象间的关系是

[ ]

A．关于 y 轴对称

B．关于直线 x＝2a 对称

C．关于x轴对称

D．关于直线x＝a对称

【解答】　分别将y＝f(a－x)、y＝f(a－x)向左平移a个单位y＝f(x)，y＝f(－x)．∵y＝f(x)与y＝f(－x)的图象关于y轴对称，y轴再向右平移a个单位得x＝a，故选(D)．

22．已知函数$y=2x^2$在[a，b]上的值域为[0，2]，则点(a，b)的轨迹为图7中的

[　　]

A．线段AB、BC

B．线段AB、OC

C．线段OA、BC

D．线段OA、OC

【精析】　从抛物线$y=2x^2$的图象可知，在区间[－1，1]上函数值域恰为[0，2]，然而，改变一个函数的定义域却未必会改变它的值域，从这一理念出发，我们发现了问题的解．

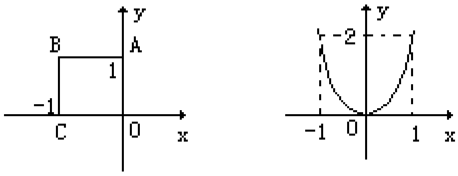


图7

(1)让区间[a，b]的右端点固定为点(－1，0)，且让左端点在区间[－1，0]上变动的情况下，我们发现其值域仍为[0，2]，于是有$\begin{cases}b=1\\-1\leq a\leq 0\end{cases}$，这条件说明点(a，b)的轨迹为线段AB．

(2)让区间[a，b]的左端点固定于点(－1，0)，并让其右端点在区间[0，1]上变动，这种情况下值域仍可为[0，2]，于是有$\begin{cases}a=1\\0\leq b\leq 1\end{cases}$，这表明点(a，b)的轨迹为线段BC，综上(1)、(2)，选(A)．

23．设函数y＝f(x)定义在实数集上，则函数y＝f(x－1)与y＝f(1－x)的图象关于

[　　]

A．直线y＝0对称

B．直线x＝0对称

C．直线y＝1对称

D．直线x＝1对称

【精析】　由函数图象的互对称性质3得直线$x=\frac{1-(-1)}{2}$即x＝1，故选(D)．

24．与直线2x＋3y－6＝0关于点(1，－1)对称的直线方程是

[　　]

A．3x－2y＋2＝0

B．2x＋3y＋7＝0

C．$3x-2y-12=0$

D．$2x+3y+8=0$

【精析】　所求直线方程为 $2(2-x)+3(-2-y)-6=0$，即 $2x+3y+8=0$，故选(D)．

25．下列各式中，结论正确的是

[　　]

A．$\log_{0.3}4<\log_{0.3}0.4<0.3^{-0.4}$

B．$\log_{0.3}4<0.3^{-0.4}<\log_{0.3}0.4$

C．$0.3^{-0.4}<\log_{0.3}4<\log_{0.3}0.4$

D．$\log_{0.3}0.4<\log_{0.3}4<0.3^{-0.4}$

【精析】　本题考查对数函数，指数函数性质，及不等式的性质；考查用 0，1 将实数分“段”比较大小的方法的运用能力。

首先由函数 $y=\log_{0.3}x$ 在$(0,+\infty)$上是减函数可断定实数 $\log_{0.3}4<\log_{0.3}0.4$．

同时，因 $0.4>0.3$．

$\therefore 0<\log0.30.4<1$．

$\because y=(0.3)^x$ 在 R 上是减函数，并且 $-0.4<0$，所以 $(0.3)^{-0.4}>1$，

亦即 $\log_{0.3}4<0<\log_{0.3}0.4<1<(0.3)^{-0.4}$；故应当选(A)．

26．如果直线 $x=-3$ 与 $x=2$ 均为曲线 $y=f(x)(x\in R)$的对称轴且 $f(1)=0$，则 $f(11)$的值为

[　　]

A．-11

B．0

C．1

D．11

【精析】　由题设知 $y=f(x)$为周期函数，其周期为 $2[2-(-3)]=10$，则 $f(11)=f(10+1)=f(1)=0$，故选(B)．

27．已知 $f(x+1)$是偶函数，则函数 $y=f(2x)$的图象的对称轴是

[　　]

A．$x=-1$

B．$x=1$

C．$x=-\frac{1}{2}$

D．$x=\frac{1}{2}$

【精析】　由 $f(x+1)$是偶函数知 $y=f(x+1)$的图象的对称轴是 $x=0$，$y=f(x)$的图象的对称轴是 $x=1$，$y=f(2x)$的图象的对称轴是 $x=\frac{1}{2}$，故选(D)．

28．已知函数 $f(x)=a^x+b$ 的图象过 M(1，5)，又其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象过点 N(7，2)，则

[　　]

A．$a=4$，$b=1$

B．a＝1，b＝4

C．a＝3，b＝2

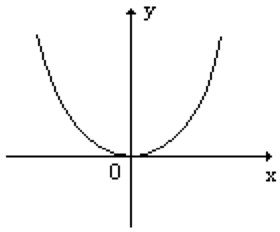
D．a＝2，b＝3

【精析】　由题意知 f(x)过点(1，5)，(2，7)代入得 a＝2，b＝3，选 D．

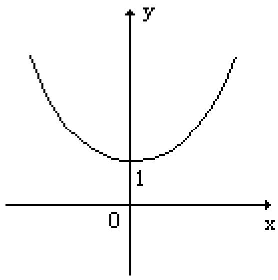
29．如图 8，函数 $y=a^{|x|}(a>1)$的图象是

[　　]

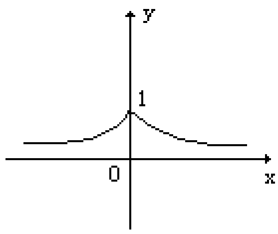
A．



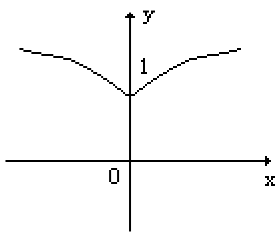
B．



C．



D．



【解答】　(作图法)取 a＝2，作函数 $y=2^{|x|}$即分段函数

$$m=\frac{2x+7}{(x+2)^2}\quad(x\neq-2)\qquad(*)$$

由m为正整数知 $\frac{2x+7}{(x+2)^2}\geq 1$，

30．向高为 H 的水瓶中注水，注满为止，如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如图 9 所示，那么水瓶的形状是

[　　]

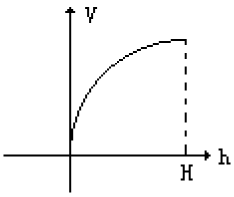
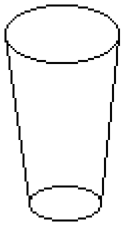


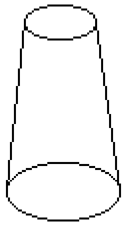
图9

(图 10)

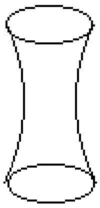
A.



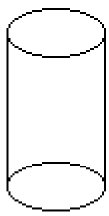
B.



C.



D.



【解答】 (选点法)选点、估算，如图 11，在函数图象上，选择坐标为$\frac{1}{2}$H的点A，通过观察可以估计点A的纵坐标应大于瓶容积的一半，这也就是说，当水面的高度刚好等于水瓶高度的一半时，注水量应大于该瓶容积的一半，经观察估算，不难得知，当水面高度等于水瓶高度的一半时，四个水瓶中水的体积依次为：小于瓶容积的一半、大于瓶容积的一半、约等于瓶容积的一半、等于瓶容积的一半，故只能选(B)．

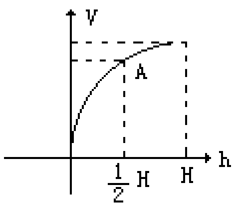


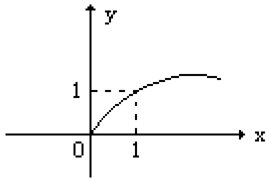
图11

得：$-a-bi=(a+bi)(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})+(-1)+(-i)$，

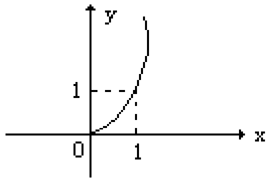
[　　]

(图 12)

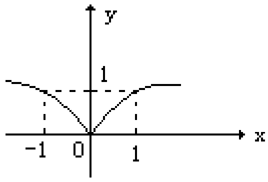
A．



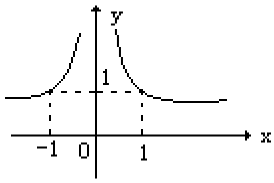
B．



C．



D．



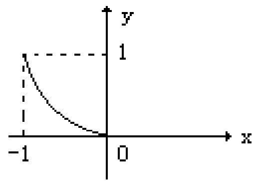
【解答】　用排除法，因$y=\sqrt{x}$的值域大于或等于0，所以其反函数定义域应小于0，排除C、D，又$y=\sqrt{x}$过点(4，2)，则其反函数应过点(2，4)，由函数图象知应选(B)．

32．设函数$f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leq x\leq 0)$，则函数$y=f^{-1}(x)$的图象是

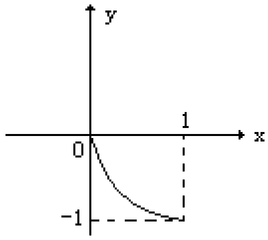
[　　]

(图 13)

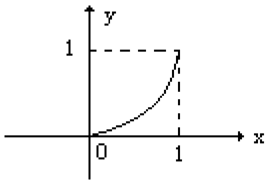
A．



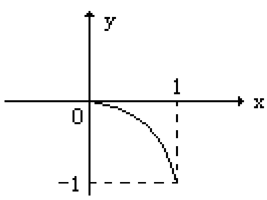
B．



C．



D．



【解答】 利用互为反函数的两个函数图象的关系，$y=1-\sqrt{1-x^2}$$(-1\leq x\leq 0)\Rightarrow x^2+(y-1)^2=1$**，且** $-1\leq x\leq 0$，$0\leq y\leq 1$**，可见** $y=f(x)$**的图象是圆的一段，恰好与(A)中图象相同，作(A)中图象关于直线 y＝x 的对称图象，得(B)图象，故选(B)．**

386．**已知函数**$f_1(x)=2^x$，$f_2(x)=\cos(-x)$，$f_3(x)=\arcsin x$，$f_4(x)=\dfrac{\pi}{2}$

集合$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$**，那么**$\overline{M\cup N}$**等于**

[　　]

A．$\varnothing$

B．　{(2，3)}

C．(2，3)

D．　{(x，y)|y＝x＋1}

【解答】　I 是整个黑板面，M 是黑板面上去掉一个点的一条线，N 是整个黑板面内去掉这条线(“一道裂缝”)，M∪N 即把 N 中的这条线“塞”进这条“缝”，即得整个黑板内去掉一个“孔”(点)，而$\overline{M\cup N}$**却恰是这个“孔”，即只有一个元素的点集 B，免算！**

34．**函数**$y=-\dfrac{1}{x+1}$**的图象是**

[　　]

【解答】 根据函数图象的平移规则，函数$y=-\frac{1}{x+1}$的图象可看成

即$\cos 2\theta=\frac{1}{2}$.

又$-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\theta=-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=-\frac{1}{2}$.

【解答】 $-\frac{1}{2}$

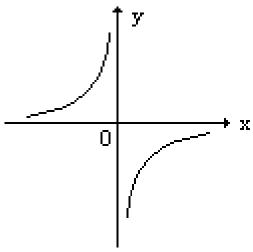


图14

向左平移 1 个单位长度而得到的，显然应选图 15B．

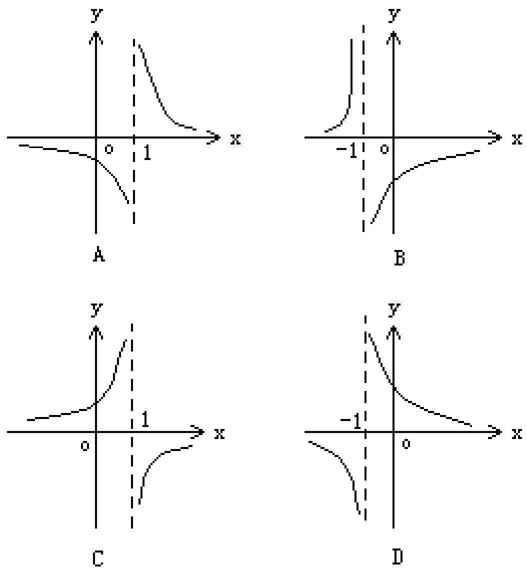


图15

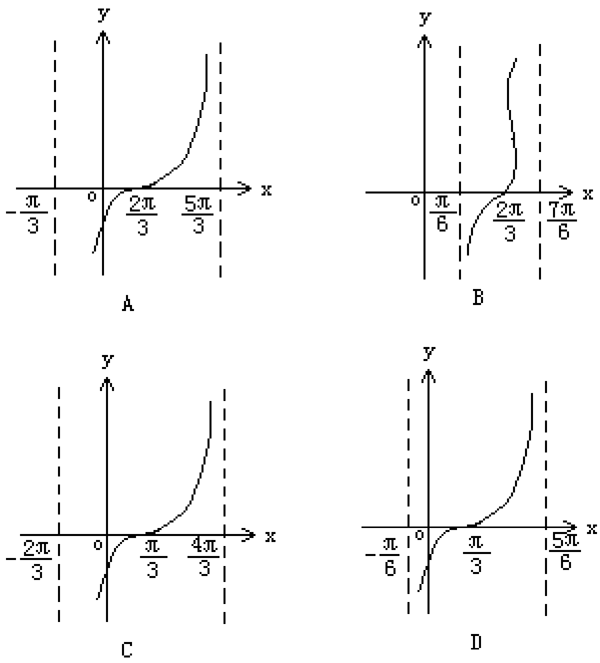


图16

35．函数$y=\tan(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\pi)$在同一个周期内的图象是(图16)

[　　]

【解答】(分析法)求已知函数定义域．由$k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\pi<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$得$2k\pi-\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}$，$k\in Z$．

令$k=0$，得$-\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$．经观察应选A．

36．设 f(x)是(－∞，＋∞)上的奇函数，f(x＋2)＝－f(x)，当 $0\le x\le 1$ 时 f(x)＝x，则 f(7.5)等于

[　　]

A．0.5

B．－0.5

C．1.5

D．－1.5

【解答】∵f(x)为奇函数，

当 $0\le x\le 1$ 时 f(x)＝x，

∴当 $-1\le x\le 0$ 时 f(x)＝x．

又 f(x＋2)＝－f(x)，

当 $1\le x\le 3$ 时，$x-2\in[-1,1]$，f(x)＝－f(x－2)＝－(x－2)＝2－x，从而不难画出 f(x)的图象如图 17，由图知 f(7.5)＝－0.5，故选 B．

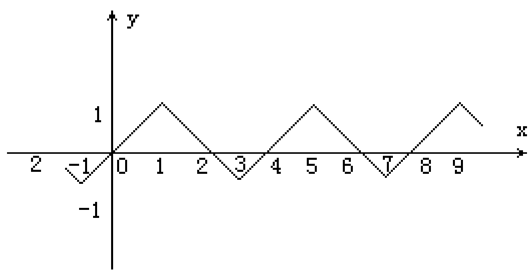


图17

37．设定义在R上的偶函数$y=f(x)$是周期为2的周期函数，且当$2\le x\le 3$时，$f(x)=x$，则当$-1\le x\le 0$时，$f(x)=$

[　　]

A．$4+x$
B．$2+|x+1|$
C．$-2+x$
D．$3-|x+1|$

【解答】$x\in$〔$-1,0$〕，$-x\in$〔$0,1$〕，$-x+2\in$〔$2,3$〕

$\therefore f(x)=f(-x)=f(2-x)=2-x$

$3-|x+1|=3-(x+1)=2-x$

∴选D．

38．已知函数$f(x)=-x-x^3$，$\alpha,\beta,\gamma\in R$且$\alpha+\beta>0$，$\beta+\gamma>0$，$\gamma+\alpha>0$，则$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)$的值

[　　]

A．大于零
B．等于零
C．小于零
D．正负不确定

【解答】$\alpha+\beta>0$　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)[(\alpha-\frac{1}{2}\beta)^2+\frac{3}{4}\beta^2]>0$

$f(\alpha)+f(\beta)$

$=-(\alpha+\beta)-(\alpha^3+\beta^3)<0$．

$\therefore f(\beta)+f(\gamma)<0$，$f(\gamma)+f(\alpha)<0$．

$\therefore f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)<0$，选C．

39．对于定义域是R的任何奇函数$f(x)$，都有

[　　]

A．$f(x)-f(-x)>0(x\in R)$
B．$f(x)-f(-x)\le 0(x\in R)$
C．$f(x)\cdot f(-x)\le 0(x\in R)$
D．$f(x)\cdot f(-x)>0(x\in R)$

【解答】取$f(x)=x$，则有$f(x)-f(-x)=x-(-x)=2x$

$\begin{cases}\ge 0 & (x\ge 0)\\ <0 & (x<0)\end{cases}$，排除A，B，又$f(x)\cdot f(-x)=x\cdot(-x)=-x^2\le 0$，排除D而选C．

40．如果奇函数$f(x)$在区间[3，7]上是增函数且最小值为5，那么

f(x)在区间[－7，－3]上是

[　　]

A．增函数且最小值为－5

B．增函数且最大值为－5

C．减函数且最小值为－5

D．减函数且最大值为－5

【解答】设 f(x)在区间[3，7]上的图象如图 18 所示，又 f(x)为奇函数，f(x)在[－7，－3]上的图象与它在[3，7]上的图象关于原点对称，不难画出 f(x)在[－7，－3]上的图象，由图易知，选 B．

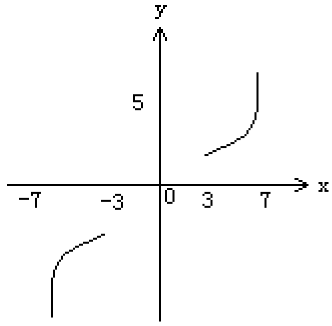


图 18

41．设函数 y＝f(x)定义在实数集上，则函数 y＝f(x－1)与 y＝f(1－x)的图象关于

[　　]

A．直线 y＝0 对称

B．直线 x＝0 对称

C．直线 y＝1 对称

D．直线 x＝1 对称

【解答】取 $f(x)=(x+1)^2$，则 $f(x-1)=x^2$，$f(1-x)=(2-x)^2$ 在同一直角坐标系中画出它们的图象(如图 19)，由图象可知选 D．

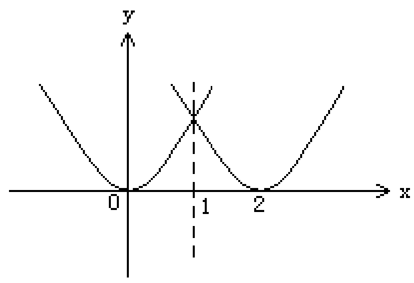


图 19

42．将 $y=2^x$ 的图象

[　　]

A．向左平移 1 个单位

B．向右平移 1 个单位

C．向上平移 1 个单位

D．向下平移 1 个单位

再作关于直线 y＝x 对称的图，可得函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象．

【解答】函数图象的初等变换可双向进行，正向变换不易，可反向

进行，将变换“反过去，再返回来”，由 $y=\log_2(x+1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，得 $y=2^x-1$ 的图象，再向上平移 1 个单位得 $y=2^x$ 的图象；那么，$y=2^x$ 的图象向下平移 1 个单位得 $y=2^x-1$ 的图象，再作关于直线 $y=x$ 对称的图象，可得 $y=\log_2(x+1)$ 的图象，选 D.

二、填空题

43．以下四个命题中：

①$f(x+a)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}(a\neq 0，x\in R)$ 是以 $2a$ 为周期的周期函数.

②对任何 x、y∈N，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$，且 $f(1)=1$，则 $f(5)=15$.

③如果函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+a}$ 的反函数等于函数 $f(x)$ 本身，则 $a=-1$；

④函数 $y=|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}$ 的值域为 $[2，+\infty)$.

其中正确的命题的序号是________.

【解答】$y=|x+1|-|x-2|\geq|x+1-x+2|=3$

故选①②③

44．实数 α、β 数满足等式 $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1$，$\beta^3-3\beta^2+5\beta=5$，求 $\alpha+\beta$ 的值________.

【解答】原式变形得：$(1-\alpha)^3+2(1-\alpha)=2$，

$(\beta-1)^3+2(\beta-1)=2$.

构造函数 $f(x)=x^3+2x$，由 $f(1-\alpha)=f(\beta-1)$ 及 $f(x)$ 在 R 上严格递增可知，

$1-\alpha=\beta-1$ 即 $\alpha+\beta=2$.

45．当 m∈N，若关于 x 的方程 $mx^2+2(2m-1)x+4m-7=0(x\in N)$ 至少有一整数根，则 m=________.

【精析】若用求根公式解出

$x=\dfrac{1-2m\pm\sqrt{3m+1}}{m}$ 后，再讨论 x 的整数取值，将较为繁难，现不不妨把 m 表示成 x 的函数，用函数思想来解之.

【解答】原方程可变形为 $m(x+2)^2=2x+7$，显然，当 $x=-2$ 时，原方程不成立，故

$$m=\frac{2x+7}{(x+2)^2}\quad (x\neq -2)\qquad (*)$$

由 m 为正整数知 $\dfrac{2x+7}{(x+2)^2}\geq 1$，

解得 $x\in\{-3，-1，0，1\}$

将 x 的四个取值逐个代入(*)，可得到满足条件的 m=1 或 5.

46．设 α、β 分别是方程 $\log_2 x+x-3=0$ 和 $2^x+x-3=0$ 的根，则 $\alpha+\beta=$________，$\log_2\alpha+2^\beta$________.

【解答】由题设得 $\log_2\alpha+\alpha=3$，$2^\beta+\beta=3$.

由 $\log_2\alpha+\alpha=3$ 得 $\log_2\alpha=3-\alpha$，即 $\alpha=2^{3-\alpha}$

$\therefore(3-\alpha)+2^{3-\alpha}=3$，　　　　①

又 $2^{\beta}+\beta=3$，得 $2^{\beta}=3-\beta$　　　　　　②

构造函数 $f(x)=x+2^{x}$，由①、②知 $f(3-\alpha)=f(\beta)$，又 $f(x)$ 在 R 上严格递增，∴$3-\alpha=\beta$，即 $\alpha+\beta=3$．

∴ $\log_2\alpha+2^{\beta}=(3-\alpha)+(3-\beta)=3$

47．设 $p=(\log_2x)^2+(t-2)\log_2x-t+1$，若 t 在区间[－2，2]上变动时，p 恒为正值，则 x 的取值范围是________．

【精析】条件中有多个变量，t 与 p 的变化范围已给出，构造函数．

$p=f(t)=(\log_2x-1)t+(\log_2x-1)^2$，

已知 $-2\le t\le 2$，限定 $p=f(t)>0\Leftrightarrow P_{min}>0$．

【解答】令 $p=f(t)=(\log_2x-1)t+(\log_2x-1)^2$

(1)当 $x>2$ 时，$\log_2x-1>0$，$p=f(t)$ 在[－2，2]上是增函数．

$P_{min}=f(-2)=(\log_2x)^2-4\log_2x+3$．

由 $\begin{cases}(\log_2x)^2-4\log_2x+3>0\\ x>2\end{cases}$

解得 $x>8$．

(2)当 $0<x<2$ 时，在 $\log_2x-1<0$，$p=f(t)$ 在[－2，2]上是减函数，

$P_{min}=f(2)=(\log_2x)^2-1$，

由 $\begin{cases}(\log_2x)^2-1>0\\ 0<x<2\end{cases}$　解得 $0<x<\frac{1}{2}$．

∴x的取值范围为 $(0,\ \frac{1}{2})\cup(8,\ +\infty)$

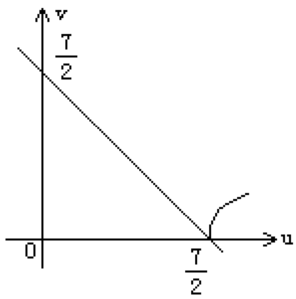


图 20

48．函数 $y=2x-3+\sqrt{4x-13}$ 的值域是________．

【解答】令 $u=2x-3$，$v=\sqrt{4x-13}$．则 $v^2=2(u-\frac{7}{2})(u\ge\frac{7}{2}$，$v\ge)0$．于是问题转化为求过抛物线 $v^2=2(u-\frac{7}{2})(v\ge 0)$ 弧上一点且斜率为－1 的直线系 $u+v=y$ 在 v 轴上的截距的范围．

由图20知，当直线过点 $(\frac{7}{2},\ 0)$ 时截距最小，当 $u\to+\infty$，截距 $y\to+\infty$．∴$y\in[\frac{7}{2},\ +\infty)$．

49．函数$y=\log_2[3\sin(2x-\frac{\pi}{3})]$的单调递增区间为________．

【精析】$\sin(2x-\frac{\pi}{3})>0$，$2k\pi+\pi>2x-\frac{\pi}{3}>2k\pi$，$k\pi+\frac{2}{3}\pi>x>k\pi+\frac{\pi}{6}$，$y=f(x)$单调递增，$2k\pi+\frac{\pi}{2}\geq 2x-\frac{\pi}{3}>2k\pi$，$k\pi+\frac{5}{12}\pi\geq x>k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$

【解答】$(k\pi+\frac{\pi}{6}，k\pi+\frac{5}{12}\pi]$，$k\in Z$

50．设函数$f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$的定义域是$[n，n+1](n\in N)$，那么$f(x)$的值域中共有________个整数．

【精析】可从 $x\in[n，n+1]$入手，通过求 $f(n+1)-f(n)$来确定值域$[f(n)，f(n+1)]$中整数的个数．

【解答】$\because f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，

$\therefore$当 $x\in[n，n+1](n\in N)$时，函数 $f(x)$是增函数，其值域为：$[f(n)，f(n+1)]$．

又$f(n)=n^2+n+\frac{1}{2}$，$f(n+1)=(n+1)^2+(n+1)+\frac{1}{2}$，

且$f(n)$、$f(n+1)$都不是整数，$f(n+1)-f(n)=(n+1)^2+(n+1)+\frac{1}{2}-(n^2+n+\frac{1}{2})=2n+2$ $\therefore f(x)$的值域中共有$2n+2$个整数．

51．函数 $y=|\log_2|x+1||$的递减区间是________．

【解答】根据图象变换作出函数 $y=|\log_2|x+1||$的图象，变换次序取：

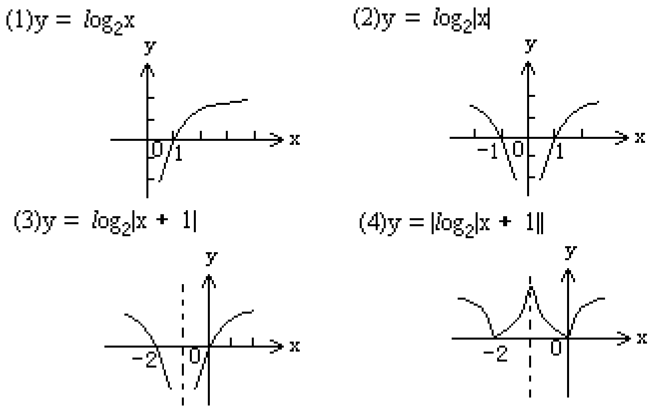


图 21

由图 21 可知，递减区间为$(-\infty，-2]$或$(-1，0]$．

52．先将$f(x)=\ln\frac{1}{1-x}$的图象作关于原点的对称变换，然后向右平移一个单位，再作关于直线 $y=x$ 的对称变换，则此时的图象对应的函数

解析式是_______．

【解答】第一次变换，得$-y=ln\frac{1}{1+x}$，即$y=ln(1+x)$

第二次变换，得 $y=ln[1+(x-1)]$，即 $y=lnx$

第三次变换，得 $x=lny$，即 $y=e^x$

∴三次变换所得图象对应的函数解析式为 $y=e^x$．

53．已知$\frac{x}{x^2+x+1}=a$，其中$a\neq0$，$a\neq\frac{1}{2}$，则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值为________．

【解答】数量特征$a\neq0$，$a\neq\frac{1}{2}$起着提示作用，恰是解题的突破口，由此猜想：运算过程或结果中分母上会出现因式a及$a-\frac{1}{2}$，将原式变成$\frac{x^2+x+1}{x}=\frac{1}{a}(x\neq0)$，得$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1$，从而有$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-1}=\frac{a^2}{1-2a}$．

54．设函数 $f(x)=2x^2-4ax+2a^2+a$ 的定义域为$[x_0，+\infty)$，值域为$[y_0，+\infty)$，若对于任意实数 a 都有 $y_0\geq3$，则 x_0 的最小值为_______．

【解答】如图 22、23 从抛物线 $f(x)=2x^2-4ax+2a^2+a$ 的对称轴 $x=a$ 的位置变化入手,就对称轴与定义域$[x_0,+\infty)$的相对位置进行讨论．

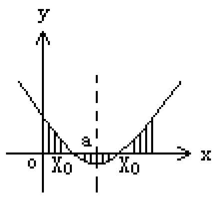


图 22

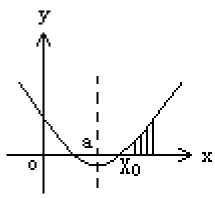


图 23

(1)$x_0<a$ 时，值域为$[f(a)，+\infty)$，但已知为$[y_0，+\infty)$，比较得

$f(a)=y_0$．据此知道条件："对于任意的实数 a 都有 $y_0\geq3$"表明，不等式

$f(a)\geq3$对任意的实数a恒成立，推出$a\geq3$恒成立，此时有$\begin{cases}x_0<a\\a\geq3\end{cases}$，

这表明x_0无最小值．

(2)$x_0\geq a$ 时，值域为$[f(x_0)，+\infty)$，但已知值域为$[(y_0)，+\infty)$，

由题意知不等式 $f(x_0)=y_0\geq 3$ 对任意的 $a\in R$ 恒成立．

即 $2a^2+(1-4x_0)a+2x_0^2-3\geq 0$ 对任意的 $a\in R$ 恒成立，故令 $\Delta\leq 0$．

解得 $x_0\geq\frac{25}{8}$，由此知 x_0 的最小值为 $\frac{25}{8}$．

综上，$\frac{25}{8}$ 为 x_0 的最小值．

55．定义在 $(-\infty，+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和，如果 $f(x)=lg(10^x+1)$，$x\in(-\infty，+\infty)$，那么 $g(x)=$_______，$h(x)$_______．

【解答】由题设有 $f(x)=g(x)+h(-x)$，则 $f(-x)=g(-x)+h(x)=-g(x)+h(x)$，

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ ，

由 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\frac{1}{2}lg\frac{10^x+1}{10^{-x}+1}=\frac{1}{2}lg10^x=\frac{x}{2}$，

故 $g(x)=\frac{x}{2}$，$h(x)=lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

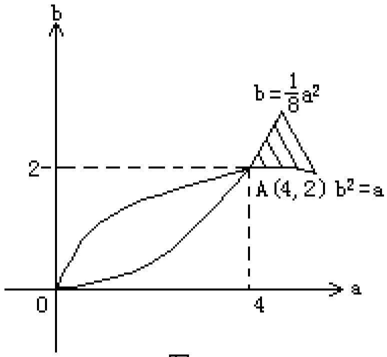


图24

56．已知 a、$b\in R^+$ 且 $x^2+ax+2b=0$，$x^2+2bx+a=0$ 都有实根，则 a＋b 的最小值是________．

【解答】依题意 $a>0$，$b>0$，$a^2-8b\geq 0$，$b^2-a\geq 0$，易知点(a，b)在图 24 的阴影区域内，设 $z=a+b$，这是一族斜率为－1 的直线系，该直线系中过 A(4，2)的那条直线在 b 轴有最小的截距．$(a+b)_{min}=4+2=6$

57．函数 $y=2\sqrt{x+1}+\sqrt{6-x}$ 的值域是________．

【解答】此函数的定义域为[－1，6]，

因为 $(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{6-x})^2=7$，所以设 $\sqrt{x+1}=\sqrt{7}\sin\theta$，

$\sqrt{6-x}=\sqrt{7}\cos\theta$，$\theta\in[0，\frac{\pi}{2}]$．

则 $y=2\sqrt{7}\sin\theta+\sqrt{7}\cos\theta=\sqrt{35}\sin(\theta+\psi)$

其中$\tan\varphi=\frac{1}{2}$，再由$\varphi\le\theta+\varphi\le\frac{\pi}{2}+\varphi$知，$\sin(\theta+\varphi)$的取值范围为$[\frac{\sqrt{5}}{5}，1]$

∴函数y的值域为$[\sqrt{7}，\sqrt{35}]$．

512．函数$y=x+\frac{8}{x^2}(x>0)$的最小值为________．

$+2\cos\theta-2=2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-2$，由$-\frac{\pi}{4}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$知$-4\le y\le2\sqrt{2}-2$．即函数的定义域为$[-4，2\sqrt{2}-2]$．

59．已知 $a>0$，$a\neq1$，则使方程：$log_a(x-ak)=log_{a^2}(x^2-a)$有解的 k 的取值范围是________．

【解答】原方程可化为

$$\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2 & ①\\ x-ak>0 & ②\\ x^2-a^2>0. & ③\end{cases}$$

当①、②成立时，③显然成立．故只需解

$$\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2, & ①\\ x-ak>0. & ②\end{cases}$$

由①得 $2kx=a(1+k^2)$．　④

当$k=0$时，由$a>0$知④无解，因而原方程的解为$\varnothing$；

当$k\neq0$时，由④得解$x=\frac{a(1+k^2)}{2k}$．

当 $k<0$ 时，得 $k^2>1$，即 $k<-1$．

当 $k>0$ 时，得 $k^2<1$，即 $0<k<1$．

综上所述，当 k 在集合$(-\infty，1)\cup(0，1)$内取值时，原方程有解．

60．函数$y=x+1-\sqrt{3-x^2+2x}$的值域是________．

【解答】将函数变形为

$y=(x-1)+2-\sqrt{4-(x-1)^2}$，

可求得它的定义域是$[-1，3]$，因为$(x-1)^2+(\sqrt{4-(x-1)^2})^2=4$，

故可设　$x-1=2\sin\theta$，

$\sqrt{4-(x-1)^2}=2\cos\theta$，$\theta\in[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$，

则$y=2\sin\theta-2\cos\theta+2=\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})+2$．

因为$-\frac{3\pi}{4}\le\theta-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}$

所以$-1\le\sin(\theta-\frac{\pi}{4})\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

即函数y的值域是$[2-\sqrt{2}，4]$．

61．函数$f(x)$对一切实数x都满足$f(\frac{1}{2}+x)=f(\frac{1}{2}-x)$，并且方程$f(x)=0$有且只有三个根，这三个实根的和是________．

【解答】∵$f(\frac{1}{2}+x)=f(\frac{1}{2}-x)$对$x\in R$恒成立，∴$f(x+\frac{1}{2})$为偶函数，其图象关于y轴对称，$y=f(x+\frac{1}{2})$向右平移$\frac{1}{2}$个单位得$y=f(x)$，∴$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{1}{2}$对称，可知，一根为$\frac{1}{2}$，另两根和为1，∴三根和为$\frac{3}{2}$．

62．已知定义域在闭区间[0，3]上的函数$f(x)=kx^2-2kx$的最大值为3，求实数k的值为________．

【精析】抛物线$y=kx^2-2kx$的对称轴为$x=1$，而开口方向与k的正、负取值相关，故需对k进行讨论．

【解答】①$k>0$时，因抛物线开口向上，故值域为$[f(1)，f(3)]$，而已知函数的最大值为3，故$f(3)=3$，解得$k=1$．

②$k<0$时，抛物线开口向下，故值域为$[f(3)，f(1)]$，显然$f(1)=3$，解得$k=-3$．

综上，$k=-3$或1．

63．实数k为________时，$kx^2-2|x|+k=0$有实数解．

【解答】由已知方程可求出$k=\frac{2|x|}{1+x^2}$，显然$k\ge0$，而$\frac{2|x|}{1+x^2}\le\frac{2|x|}{2\sqrt{x^2}}=1(x\ne0)$当$x=0$时，$\frac{2|x|}{1+x^2}=0$，故方程有实数解应满足$0\le k\le1$．

64．当$x\in[1，2]$时，使不等式$(\log_2x-1)(\log_3y)^2-6\log_2x\cdot\log_3y+\log_2x+1>0$恒成立的y的取值范围为________．

【精析】当题目中字母较多时，可将某些元视为变量或常量，换位思考容易解决问题．

【解答】思考1：令$t=\log_3y$，$m=\log_2x$，则$m\in[0，1]$，本题变成求$(m-1)t^2-6mt+m+1>0$恒成立的t的范围．

令$f(t)=(m-1)t^2-6mt+m+1$．

思考2：令$m=\log_3y$，$t=\log_2x$，则$t\in[0，1]$，那么

$f(t)=(m^2-6m+1)t-m^2+1$．

对两种思考进行比较，当借助于函数图象解决时，思考1不易解决．进行换位思考，看出思考2利用一次函数图象，就能比较容易地解决．

结合一次函数图象，只要$\begin{cases} f(0)>0 \\ f(1)>0 \end{cases}$即可．

所以$-1<m<1/3$，则$1/3<y<\sqrt[3]{3}$．

65．函数$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$的值域是__________．

【解答】当$x\neq0$时，右边分子分母同除以x，得$y=\dfrac{-1+1\times(x+\frac{1}{x})}{1+(x+\frac{1}{x})}$，

$x_1=1$，$x_2=1$，$\lambda=x+\dfrac{1}{x}$，$y=x_p$；

$x>0$时，$\lambda\geq2$，$x<0$时，$\lambda\leq-2$，

即$x\neq0$时，$|\lambda|\geq2$．

$\because\lambda=\dfrac{x_p-x_1}{x_2-x_p}=\dfrac{y+1}{1-y}$，

$\therefore|\dfrac{y+1}{1-y}|\geq2\Rightarrow\dfrac{1}{3}\leq y<1$或$1<y\leq3$，

当$x=0$时，$y=1$，

$\therefore y\in[\dfrac{1}{3}，3]$．

66．$0\leq x\leq3$时，方程组$\begin{cases} y=-x^2+mx+1 \\ y=-x+3 \end{cases}$有惟一的解，则m的取值范围是________．

【精析】若本题没有条件$0\leq x\leq3$的限制，可以用一元二次方程有等根的条件来求解，然而附上限制条件后，问题就复杂多了，用定比分点公式将比较容易求解．

$\because0\leq x\leq3$，则$y=-x+3$表示以A(3，0)、B(0，3)为端点的线段，所以，原命题等价于已知A(3，0)， B(0，3)．m为何值时，线段AB与抛物线$y=-x^2+mx+1$的图象有惟一交点．

由定比分点定义知，$\lambda>0$，P是线段$\overline{AB}$的内分点，也就是说，线段AB与抛物线的图象有惟一交点的充要条件是：其交点是AB的内分点．

设P(x，y)，$\lambda=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$，则$x=\dfrac{3}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{3\lambda}{1+\lambda}(\lambda>0)$

代入抛物线方程，整理

$4\lambda^2+(5-3m)\lambda+10-3m=0$ ①

此时，方程①有惟一正根的条件是

(1) $\Delta=(5-3m)^2-16(10-3m)=0$，

即$m^2+2m-15=0$，

即$m>\frac{10}{3}$，$m=3$或$m=-5$($\lambda>0$，舍去)

(2)$10-3m<0$，即$m>\frac{10}{3}$．

综合(1)、(2)得：当$m=3$或$m>\frac{10}{3}$时，方程组在$0\le x\le 3$内有惟一解．

67．已知方程 $2x^2+3kx+k^2-k=0$ 至少有一个模为 1 的根，则实数 k 的值为________．

【解答】(1)若方程的根为实数，则由已知得 $x=\pm 1$，且有$\Delta=k^2+8k\ge 0$，即 $k\ge 0$ 或 $k\le -8$．

将 $x=1$ 代入原方程得 $k^2+2k+2=0$，无实数解．

将$x=-1$代入原方程得$k^2-4k+2=0$，由此解得$k=2\pm\sqrt{2}$，即为所求．

(2)若方程的根为虚数，则是一对共轭虚数，设为 $a\pm bi$(a，$b\in R$)，由已知得

$a^2+b^2=1$，且有$\Delta=k^2+8k<0$，即$-8<k<0$．

由韦达定理得$\frac{k^2-k}{2}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=1$，即$k^2-k-2=0$，由此解得$k=-1$或$k=2$(舍去)．

综上所述，所求k值为$2\pm\sqrt{2}$或-1．

68．若关于 x 的方程 $9^x+(4+a)\times 3^x+4=0$ 有解，则实数 a 的取值范围为________．

【精析与解答】原方程整理得：$a=-(3^x+\frac{4}{3^x})-4$　　　①

所以原方程有解等价于方程①有解，为此只需研究函数$f(x)=-(3^x+\frac{4}{3^x})-4$的值域．

由于$f(x)=-(3^x+\frac{4}{3^x})-4\le -2\times\sqrt{3^x\cdot\frac{4}{3^x}}-4=-8$．

所以 $a\le -8$，方程①有解．实数 a 的取值范围是$(-\infty,-8]$．

69．已知关于 x 的方程：

$\log_a(x-3)=1+\log_a(x+2)+\log_a(x-1)$有实根，则实数 a 的取值范围为________．

【精析与解答】原方程有解可设其解为 x_0，易知 $x_0>3$，整理原方程并将 x_0 代入得：

$a(x_0+2)(x_0-1)=x_0-3$．

隔离出a，$a=\frac{x_0-3}{(x_0+2)(x_0-1)}(x_0>3)$．

由于当 $x_0>3$ 时，

$0<\dfrac{x_0-3}{(x_0+2)(x_0-1)}=\dfrac{1}{(x_0^2+x_0-2)/(x_0-3)}=$

$\dfrac{1}{[(x_0-3)^2+7(x_0-3)+10]/(x_0-3)}=$

$\dfrac{1}{(x_0-3)+10/(x_0-3)+7}\le\dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$

从而$0<a\le\dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$.

所以实数a的取值范围是$(0,\ \dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}]$.

70．设实数 x，y，z 满足

$$\begin{cases}x^2-yz-8x+7=0 & ①\\ y^2+z^2+yz-6x+6=0 & ②\end{cases}$$

则 x 的取值范围是________.

【解答】由①得 $yz=x^2-8x+7$，由②得 $6x-6=y^2+z^2+yz=(y-z)^2+3yz\ge3yz$.

$\therefore 6x-6\ge3(x^2-8x+7)$，即 $x^2-10x+9\le0$.

$\therefore 1\le x\le9$.

于是 x 的取值范围是[1，9].

71．函数$f(x)=log_2(x\sqrt{x^2+1})$的值域为________.

【解答】易见f(x)的定义域是R，且$f(x)+f(-x)=log_2(x+\sqrt{x^2+1})+log_2(-x+\sqrt{x^2+1})=0$，所以f(x)是奇函数.

当 $x\in[0，+\infty)$时，f(x)单调递增，$f(x)\in[0，+\infty)$，因为奇函数的图象关于坐标原点对称，所以该函数的值域是 R.

72．方程$\dfrac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$的解是________.

【解答】将原方程化 3^x 为的二次方程 $3\times(3^x)^2+2\times(3^x)-1=0$，

即$(3^x+1)(3\times3^x-1)=0$，

得 $3^{x+1}=1$．从而 $x=-1$.

73．已知 $f(x)=4^x-2^{x+1}$，则 $f^{(-1)}(0)=$________.

【精析与解答】依反函数定义，求 $f^{-1}(0)$的值，无需求出反函数，只需求原函数的函数值为 0 时关于 f 的原像劣即可，由 $f(x)=0$ 即 $4^x-2^{x+1}=0$，解得 $x=1$，故 $f^{-1}(0)=1$.

74．设函数f(x)的值域为$[\dfrac{3}{8}，\dfrac{4}{9}]$，则函数$y=g(x)=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$的值域是________.

【精析】利用$\dfrac{3}{8}\le f(x)\le\dfrac{4}{9}$，得$\dfrac{1}{9}\le1-2f(x)\le\dfrac{1}{4}$，即得$\dfrac{1}{3}\le$

$\sqrt{1-2f(x)}\le\frac{1}{2}$．两式同向相加，得$\frac{17}{24}\le f(x)+\sqrt{1-2f(x)}\le\frac{17}{18}$．所求范围$[\frac{17}{24}，\frac{17}{18}]$被扩大了，而不是$g(x)$的值域．事实上，如$f(x)=\frac{3}{8}$时，$\sqrt{1-2f(x)}$并不等于$\frac{1}{3}$，所以$g(x)$取值不是$\frac{17}{24}$．

【解答】令$t=\sqrt{1-2f(x)}(\frac{1}{3}\le t\le\frac{1}{2})$，原函数化为二次函数

$y=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$．当$t=\frac{1}{3}$时，y最小，y最小$=\frac{7}{9}$；$t=\frac{1}{2}$时，y最大，$y_{最大}=\frac{7}{8}$．故$y=g(x)$的值域为$[\frac{7}{9}，\frac{7}{8}]$.

75．函数$y=7^{\frac{x}{1-x}}$的值域为__________．

【精析】它是由函数$y=7^u$与$u=\frac{x}{1-x}(x\in A)$复合而成的，其中A是题中所给函数的定义域．

【解答】易知所给函数的定义域为$(-\infty，1)\cup(1，+\infty)$

令$u=\frac{x}{1-x}$，则$y=7^u$．

$\because u=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1\ne-1$，$\therefore y=7^u\ne\frac{1}{7}$．

又$y=7^u>0$，$\therefore y>0$，且$y\ne\frac{1}{7}$．

故所求函数的值域为$(0，\frac{1}{7})\cup(\frac{1}{7}，+\infty)$．

76．函数$y=x-\sqrt{1-2x}$的值域为__________．

【解答】$\because x\le\frac{1}{2}$，函数$u=x$与$v=-\sqrt{1-2x}$在$(-\infty，\frac{1}{2}]$上均为增函数，

$\therefore y=x-\sqrt{1-2x}$在$(-\infty，\frac{1}{2}]$上是增函数，

而$x=\frac{1}{2}$时，$y=\frac{1}{2}$，

$\therefore y\le\frac{1}{2}$，故值域为$(-\infty，\frac{1}{2}]$.

77．函数$y=\frac{\sqrt{7x-2}}{x}(\frac{1}{3}\le x\le 2)$的值域为__________．

【解答】$\because x\in[\frac{1}{3}，2]$，

$\therefore y=\frac{\sqrt{7x-2}}{x}=\frac{\sqrt{7x-2}}{x^2}=\sqrt{-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x}}$

$=\sqrt{-2(\frac{1}{x}-\frac{7}{4})^2+\frac{49}{8}}$.

∴函数的值域为$[\sqrt{3}, \frac{7\sqrt{2}}{4}]$.

78．函数$y=2^{x-5}+\log_3\sqrt{x-1}(2\leq x\leq 10)$的值域为________.

【解答】令$y_1=2^{x-5}$，$y_2=\log_3\sqrt{x-1}$，则y_1，y_2在$[2，10]$上都是增函数.

因此，$y=y_1+y_2$在$[2，10]$上是增函数，从而

$y_{min}=2^{-3}+\log_3\sqrt{2-1}=\frac{1}{8}$，

$y_{max}=2^5+\log_3\sqrt{9}=33$，

故所求值域为$[\frac{1}{8}，33]$.

79．函数$y=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$的值域为________.

【解答】去分母，整理，得$(1-y)x^2-yx+(1-y)=0$.

当$y\neq 1$时，∵$x\in R$，∴$\Delta=(-y)^2-4(1-y)^2\geq 0$，

即$3y^2-8y+4\leq 0$，解之，得$\frac{2}{3}\leq y\leq 2$.

又当$y=1$时，$x=0$，故函数值域为$[\frac{2}{3}，2]$.

80．函数$y=\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}(a>0且a\neq 1)$的值域为________.

【解答】已知函数的反函数为$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\log_a\frac{x+1}{x-1}(a>0且a\neq 1)$，由$\frac{x+1}{x-1}>0$解得$x>1$或$x<-1$，故函数值域为$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$.

81．若关于x的不等式$\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$的解集为R，则实数m的取值范围是________.

【精析与解答】对$f(x)=x^2-8x+20$，由于$\Delta=64-80<0$，故$f(x)>0$恒成立，原题等价于$g(x)=mx^2+2(m+1)x+9m+4<0$的解集为R，求实数m的范围．结合二次函数的图象知，必须且只须

$\begin{cases}m<0,\\ \Delta<0,\end{cases}$可解得$-\infty<m<-\frac{1}{2}$.

82．函数$y=2x-3+\sqrt{13-4x}$的值域为________．

【解答】令$\sqrt{13-4x}=t(t\geq 0)$，则有

$y=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}(t-1)^2+4\leq 4$，

当且仅当 $t=1$ 时取等号，故函数值域为$(-\infty，4]$．

三、解答题

83．已知 $a^x>1$ 的解集是$\{x|x<0\}$，$(a>0$ 且 $a\neq 1)$，求关于 x 的不等式$\log_a(x-\frac{1}{x})>0$的解集．

【解答】由已知得$0<a<1$，然后由$0<x-\frac{1}{x}<1$，得解集为

$\{x|-1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$或$1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$．

84．已知定义在 R 上的函数满足：

①$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)\cos 2x_2+4a\sin^2 x_2(x_1、x_2\in R$，a 为常数$)(*)$

②$f(0)=f(\frac{\pi}{4})=1$，

③当$x\in[0，\frac{\pi}{4}]$时，$|f(x)|\leq 2$．

试求：(1)函数 f(x)的解析式；

(2)常数 a 的取值范围．

【解答】(1)在(*)中令：

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2=x\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{4}+x\\x_2=\frac{\pi}{4}\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{4}\\x_2=\frac{\pi}{4}+x\end{cases}$$

则有$\begin{cases}f(x)+f(-x)=2\cos 2x+4a\sin^2 x & ①\\ f(\frac{\pi}{2}+x)+f(x)=2a & ②\\ f(\frac{\pi}{2}+x)+f(-x)=2\cos(\frac{\pi}{2}+2x)+4a\sin^2(\frac{\pi}{4}+x) & ③\end{cases}$

由①+②－③得：

$$2f(x)=2a+2\cos 2x-2\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$$

$$+4a(\frac{1-\cos 2x}{2})-4a[\frac{1-\cos 2(\frac{\pi}{4}+x)}{2}]$$

$=2a+2(\cos 2x+\sin 2x)-2a(\sin 2x+\cos 2x)$

$\therefore f(x)=a+\sqrt{2}(1-a)\sin(2x+\frac{\pi}{4})$.

(2)当$x\in[0，\frac{\pi}{4}]$时，$\sin(2\pi+\frac{\pi}{4})\in[\frac{\sqrt{2}}{2}，1]$

因 f(x)的取值与 1－a 的符号有关，所以对 a 分如下情况讨论：

(i)当 a<1 时，有

$1=a+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)\leq f(x)\leq a+\sqrt{2}(1-a)\leq 2$

从而有$1-\sqrt{2}\leq(1-\sqrt{2})a\leq 2-\sqrt{2}$

由此得$-\sqrt{2}\leq a\leq 1$.

(ii)当$a\geq 1$时，有$-2\leq f(x)=a+\sqrt{2}(1-a)\leq 1$

从而有$1\leq a\leq 4+3\sqrt{2}$

故$a\in[-\sqrt{2}，4+3\sqrt{2}]$.

85．已知函数 f(x)满足如下条件：

①$f(\frac{1}{2})=1$；

②函数的值域为[－1，1]；

③严格递减；

④f(xy)＝f(x)＋f(y).

(1)求证：$\frac{1}{4}$不在f(x)的定义域内；

(2)求不等式$f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(\frac{1}{1-x})\leq\frac{1}{2}$的解集.

【解答】(1)用反证法，设$\frac{1}{4}$在f(x)定义域内，则$f(\frac{1}{4})$有意义，且$f(\frac{1}{4})\in[-1，1]$；另一方面由①与④的条件得：

$f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})=2$，

$\because 2\notin[-1，1]$，这与已知矛盾，故假设是不成立的，即$\frac{1}{4}$不在f(x)的定义域内.

(2)由条件②、③知，f(x)的反函数 $f^{-1}(x)$存在，且严格递减，定义域为[－1，1]，现证：

$f^{-1}(x_1)\cdot f^{-1}(x_2)=f^{-1}(x_1+x_2)$

设 $y_1=f^{-1}(x_1)$，$y_2=f^{-1}(x_2)$，则有

$x_1=f(y_1)$，$x_2=f(y_2)$，

$\therefore x_1+x_2=f(y_1)+f(y_2)=f(y_1\cdot y_2)$，即

$f^{-1}(x_1+x_2)=y_1y_2=f^{-1}(x_1)\cdot f^{-1}(x_2)$

于是，原不等式等价于：

$$\begin{cases} f^{-1}(x)f^{-1}(\frac{1}{1-x})=f^{-1}(x+\frac{1}{1-x})\leq f^{-1}(1) & (*) \\ -1\leq x\leq 1 \\ -1\leq \frac{1}{1-x}\leq 1 \\ -1\leq x+\frac{1}{1-x}\leq 1 \end{cases}$$

由(*)式利用单调性“穿脱”得：$x+\frac{1}{1-x}\geq 1$

从而联立解得：x＝0

故原不等式的解集为{x|x＝0}

86．证明：如果$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$，则$x+y=0$．

【证明】构造函数$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$．

由题设知 f(x)f(y)＝1．

而$f(-y)=-y+\sqrt{y^2+1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=\frac{1}{f(y)}$

∴f(x)＝f(－y)，又 f(x)在 R 上严格递增(证明略)，故 x＝－y，即 x＋y＝0．

87．设 f(x)是定义域为(－∞，0)∪(0，＋∞)的奇函数，且在(－∞，0)上是增函数．

(1)若 f(1)＝0，解关于 x 的不等式 $f[\log_a(1-x^2)+1]>0$，其中 a＞1；

(2)若 mn＜0，m＋n≤0，求证：f(m)＋f(n)≤0

【解答】(1)∵f(x)是奇函数，且在(－∞，0)上是增函数，

∴ f(x)在(0，＋∞)上也是增函数．

∵f(x)是奇函数，f(1)＝0，

∴f(－1)＝－f(1)＝0．

∴不等式 $f[\log_a(1-x^2)+1]>0$ 同解于不等式组

$$\begin{cases} \log_a(1-x^2)+1<0 \\ \log_a(1-x^2)+1>-1 \end{cases} \quad ①$$

或$$\begin{cases} \log_a(1-x^2)+1>0 \\ \log_a(1-x^2)+1>1 \end{cases} \quad ②$$

①即$-1<\log_a(1-x^2)+1<0$，

即$-2<\log_a(1-x^2)<-1$，

∵ a＞1，

$\therefore \frac{1}{a^2}<1-x^2<\frac{1}{a}$

$\therefore 1-\frac{1}{a}<x^2<1-\frac{1}{a^2}$

$\therefore\sqrt{1-\frac{1}{a}}<x<\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$

或$-\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}<x<-\sqrt{1-\frac{1}{a}}$

②即 $\log_a(1-x^2)>0$

$\because a>1$，

$\therefore$即 $1-x^2>1$，即 $x^2<0$，无解，

$\therefore$原不等式的解集为$\{x|\sqrt{1-\frac{1}{a}}<x<\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}<$或$-\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}<x<-\sqrt{1-\frac{1}{a}}\}$

(2)$\because mn<0$，$\therefore m>0$，$n<0$ 或 $m<0$，$n>0$．当 $m>0$，$n<0$ 时，由 $m+n\le 0$，有 $0<m\le -n$

$\because f(x)$在$(0，+\infty)$上是增函数，

$\therefore f(m)\le f(-n)$

又 $\because f(x)$是奇函数，

$\therefore f(-n)=-f(n)$

$\therefore f(m)\le -f(n)$，$\therefore f(m)+f(n)\le 0$

当 $m<0$，$n>0$ 时，由 $m+n\le 0$ 有 $0<n\le -m$，同理可证 $f(m)+f(n)\le 0$

88．已知二次函数$y=f(x)$在$x=\frac{t+2}{2}$处取得最小值$-\frac{t^2}{4}(t>0)$，$f(1)=0$．

(1)求 $y=f(x)$的表达式；

(2)若任意实数 x 都满足等于 $f(x)\cdot g(x)=a_nx+b_n=x^{n+1}$，$g(x)$为多项式，$n\in N$，试用 t 表示 a_n 和 b_n．

【解答】(1)设$f(x)=a(x-\frac{t+2}{2})^2-\frac{t^2}{4}$，

$\because f(1)=0$，$\therefore a(1-\frac{t+2}{2})^2-\frac{t^2}{4}=0$，得$a=1$．

于是 $f(x)=x^2-(t+2)x+t+1$．

(2)$f(x)=(x-1)[x-(t+1)]$，代入已知等式，得

$(x-1)[x-(t+1)]\ g(x)+a_nx+b_n=x^{n+1}$．

将 $x=1$， $x=t+1$ 分别代入上式，得

$$\begin{cases}a_n+b_n=1,\\(t+1)a_n+b_n=(t+1)^{n+1}.\end{cases}$$

由 $t\ne 0$，可解得

$a_n=\frac{1}{t}[(t+1)^{n+1}-1]$，

$b_n=\frac{t+1}{t}[1-(t+1)^n]$．

89．解方程 $3^x+4^x=5^x$．

【解答】原方程可化为 $(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x=1$．

构造函数 $f(x)=(\frac{3}{5})^x+(\frac{4}{5})^x$，易知 $f(x)$ 在R上严格递减，且

$f(2)=1$，由 $f(x)=f(2)$ 知，原方程有惟一解：$x=2$．

90．$f(x)$ 是定义在实数集上的函数，对于任意 x，$y\in R$，有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，且 $f(0)\neq 0$．

(1)求证：$f(0)=1$；

(2)求证：$y=f(x)$ 是偶函数；

(3)若存在常数 c，使 $f(\frac{c}{2})=0$，则对任意 $x\in R$，有 $f(x+c)=-f(x)$ 成立，试问函数 $f(x)$ 是不是周期函数？如果是，找出它的一个周期，如果不是，请说明理由。

【解答】(1)令 $x=y=0$，得 $f(0)=1$；

(2)令 $x=0$，得 $f(y)=f(-y)$；

(3)分别用 $x+\frac{c}{2}$ 和 $\frac{c}{2}(c>0)$ 替代 x、y 得：

$f(x+c)+f(x)=2f(x+\frac{c}{2})\cdot f(\frac{c}{2})$，

由已知 $f(\frac{c}{2})=0$，$\therefore f(x+c)=-f(x)$．

分别用 $x+c$ 和 $c(c>0)$ 替代 x、y 得：

$f(x+2c)+f(x)=2f(x+c)\cdot f(c)$．

由 $f(x+c)=-f(x)$，

$\therefore f(x+2c)=-f(x)\cdot[2f(c)+1]$．　　①

又令 $x=y=\frac{c}{2}(c>0)$ 得：

$f(c)+f(0)=2f(\frac{c}{2})f(\frac{c}{2})$，

$\because f(0)=1$，$f(\frac{c}{2})=0$，

$\therefore f(c)=-1$，代入①式得 $f(x+2c)=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是周期函数，$2c$ 是它的一个周期．

91．设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$．

(1)解不等式 $f(x)\leq 1$；

(2)求 a 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调函数．

【解答】(1)不等式 $f(x)\leq 1$ 即

$$\sqrt{x^2+1}\leq 1+ax,$$

由此得 $1\leq 1+ax$，即 $ax\geq 0$，其中常数 $a>0$．

所以，原不等式等价于

$$\begin{cases}x^2+1\le(1+ax)^2,\\ x\ge 0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\ge 0,\\ (a^2-1)x+2a\ge 0.\end{cases}$$

所以，当$0<a<1$时，所给不等式的解集为$\{x|0\le x\le \frac{2a}{1-a^2}\}$；

当 $a\ge 1$ 时，所给不等式的解集为$\{x|x\ge 0\}$.

(2)在区间$[0，+\infty)$上任取 x_1，x_2，使得 $x_1<x_2$.

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)$$

$$=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)$$

$$=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right).$$

(i)当$a\ge 1$时，

$\because \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$,

$\therefore \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0$,

又 $x_1-x_2<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，

即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以，当 $a\ge 1$ 时，函数 $f(x)$在区间$[0，+\infty)$上是单调递减函数.

(ii)当$0<a<1$时在区间$[0，+\infty)$上存在两点$x_1=0$，$x_2=\frac{2a}{1-a^2}$，满足 $f(x_1)=1$，$f(x_2)=1$，即 $f(x_2)$，所以函数 $f(x)$在区间$[0，+\infty)$上不是单调函数.

综上，当且仅当 $a\ge 1$ 时，函数 $f(x)$在区间$[0，+\infty)$上是单调函数.

92．已知a，b为正值，求函数$y=\frac{a}{x}+bx(x>0)$的单调区间.

435．不等式$\sqrt{x^2-5x+6}>x-1$的解集为

【证明】令$0<x_1<x_2\le\sqrt{\frac{a}{b}}$，则

$$y_1-y_2=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}(a-bx_1x_2)$$

由$x_1x_2<\frac{a}{b}$可得$a-bx_1x_2>0$，

∴$y_1-y_2>0$，即$y_1>y_2$，

A．$(\frac{1}{2}，1)$　　　　B．$(\frac{1}{2}，+\infty)$

C．$(0，\frac{1}{2})\cup(1，+\infty)$　　　　D．$(0，\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2}，+\infty)$

(1)求a的取值范围；

(2)满足(1)的a取最大值时，求使方程$f(x)=log_2(4x-m)$有解的最大m的值．

【解答】(1)$f(x)=-log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax-a)=log_2(x^2-ax-a)$，要使$f(x)=log_2(x^2-ax-a)$在区间$(-\infty，1-\sqrt{3})$上是减函数，只要函数定义域包含$(-\infty，1-\sqrt{3})$且$u=x^2-ax-a$在$(-\infty，1-\sqrt{3})$上是减函数．后者即$1-\sqrt{3}\leq\frac{a}{2}$，故$a\geq2(1-\sqrt{3})(*)$，

x^2-ax-a的判别式$\Delta=a^2+4a$，

∴当$-4<a<0$时，$x^2-ax-a>0$恒成立，结合(*)知$2(1-\sqrt{3})\leq a<0$．

当$a\geq0$或$a\leq-4$时，函数定义域为：

$x<\frac{a}{2}-\sqrt{a+\frac{a^2}{4}}$或$x>\frac{a}{2}+\sqrt{a+\frac{a^2}{4}}$．要使它包含区间$(-\infty，1-\sqrt{3})$，则$1-\sqrt{3}\leq\frac{a}{2}-\sqrt{a+\frac{a^2}{4}}$．解得：$a\leq2$，再结合(*)知$0\leq a\leq2$．

综合上述$\{a|2(1-\sqrt{3})\leq a\leq2\}$就是所求．

(2)由条件$a=2$，此时方程：$log_2(x^2-2x-2)=log_2(4x-m)$有解，即$x^2-2x-2=4x-m>0$

$$\therefore\begin{cases}m=-x^2+6x+2=-(x-3)^2+11,\\ x<1-\sqrt{3}\text{或}x>1+\sqrt{3},\end{cases}$$

∴$x=3$时，$m_{max}=11$．

94．设方程$2^x+x-3=0$的根为α，方程$log_2x+x-3=0$的根为β，求α+β．

【精析与解答】因为$2^x+x-3=0\Rightarrow 2^x=-x+3$，$log_2x+x-3=0\Rightarrow log_2x=-x+3$，在同一坐标系中画出$y_1=2^x$，$y_2=log_2x$，$y_3=-x+3$的图象，如图25．

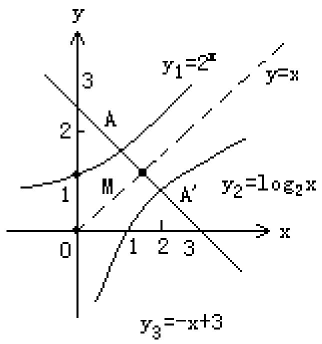


图 25

因为 $y_1=2^x$ 与 $y_2=\log_2 x$ 互为反函数，它们的图象关于 y＝x 对称，直线 $y_3=-x+3$ 本身关于直线 y＝x 对称，所以 y_1 与 y_3 的交点 A(a，b) 与 y_2 与 y_3 的交点 A′(β，α)也关于直线 y＝x 对称，由对称性可知：

α＋β就是 $y=x$ 与 $y_3=-x+3$ 的交点 $M(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ 的横坐标的二倍，即

$\alpha+\beta=3$.

注意：有不少学生没有学习过这种题型，想用单纯的代数方法去解题而遭到失败．有的学生也画出对数函数与指数函数图象，由于基本功不扎实而画错．有的学生没画出对称性，总之，对方程 $2^x+x-3=0$ 是由指数函数与一次函数复合而成而没有发现．对方程 $\log_2 x+x-3=0$ 是由对数函数与一次函次复合而成也没有发现．实际上，本题阐明了三条曲线 $y_1=2^x$、$y_2=\log_a x$、$y_3=-x+3$ 的位置关系以及它们的交点，对称轴 y＝x 也是重要的．

发生错误的原因是对指数函数、对数函数的性质没有深刻地理解，对它们互为反函数的关系不十分清楚，由函数的解析式翻译成图象，由图象再翻译成解析式都不能完成．函数的对称性关系也不明白，函数的解析式与图象不能割裂，融合成一个整体，也就是说，看到解析式，不但迅速知道其性质，马上能想到图象；看到图象，又能迅速想到解析式．

必须深刻理解指数函数、对数函数的性质，尤其对单调性要很熟练的掌握．本题无论是指数函数还是对数函数都是单增函数．在画图中要特别注意，若对数函数是单增函数，其反函数即指数函数也是单调递增函数．本题的曲线 $y_1=2^x$ 与 $y_2=\log_2 x$ 没有交点，而是对数函数和指数函数均与 $y_3=-x+3$ 曲线合成，对数函数与指数函数的图象与 $y_3=-x+3$ 的图象均有交点．

95．已知x，y，a∈R，并且有 $\begin{cases} x+y=2a-1 & ① \\ x^2+y^2=a^2+2a-3 & ② \end{cases}$

求 xy 的最小值及此时 a 的值

【解答】由题设，得

$$xy=\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=\frac{3}{2}a^2-3a+2. \quad ③$$

∵x，y，a∈R，且由①②消去 y 整理，得

$2x^2-2(2a-1)x+(3a^2-6a+4)=0$

据 $\Delta=4(2a-1)^2-8(3a^2-6a+4)\geq 0$，得

$2-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a\leq 2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由③知抛物线对称轴$a=1$在区间$[2-\frac{\sqrt{2}}{2}，2+\frac{\sqrt{2}}{2}]$

左侧通过，且开口向上，故当$a=2-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，得

$(xy)_{min}=\frac{3}{2}(2-\frac{\sqrt{2}}{2})^2-3(2-\frac{\sqrt{2}}{2})+2=\frac{1}{4}(11-6\sqrt{2})$.

96．设 f(x)是定义在 R 上以 2 为周期的周期函数，且 f(x)为偶函数，在区间[2，3]上，$f(x)=-2(x-3)^2+4$，求 $x\in[1，2]$时，f(x)的解析表达式．

【解答】当 $x\in[-3，-2]$时，$-x\in[2，3]$

∵f(x)是偶函数．

$\therefore f(x)=f(-x)=-2(-x-3)^2+4$

$=-2(x+3)^2+4$，

∵f(x)是以 2 为周期的周期函数

∴当 $x\in[1，2]$时$-3\leq x-4\leq -2$．

$\therefore f(x)=f(x-4)$

$=-2[(x-4)+3]^2+4$

$=-2(x-1)^2+4$，

$\therefore f(x)=-2(x-1)^2+4(1\leq x\leq 2)$

97．讨论方程$|x^2-4x+3|+a=0$，当 a 分别取何值时此方程有两解、三解、四解及无解？

【精析与解答】直接解含参数 a 的方程计算量较大，由$|x^2-4x+3|=-a$ 引入辅助函数 $y_1=|x^2-4x+3|$和 $y_2=-a$．画出它们的图象，从图 26 中不难看出：

当$-a>1$或$-a=0$即$a<-1$或$a=0$时，方程有两解．

当$-a=1$即$a=-1$时，方程有三解．

当$0<-a<1$，即$-1<a<0$时，方程有四解．

当$-a<0$即$a>0$时，方程无解．

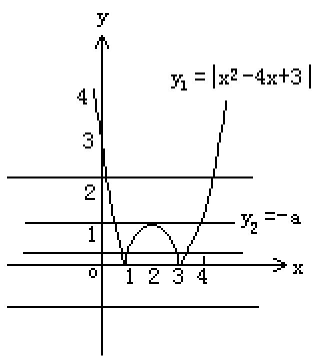


图 26

98．设 a，b 是两个实数，

$A=\{(x，y)|x=n，y=na+b，n\in Z\}$

$B=\{(x，y)|x=m，y=3m^2+15，m\in Z\}$

$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 144\}$

是平面内的点集，讨论是否存在a和b，使得(1)$A\cap B\neq\varnothing$；(2)$(a,b)\in c$ 同时成立．

【解答】该题等价于讨论关于 a、b 的混合组

$$\begin{cases}na+b=3(n^2+5) & ①\\ a^2+b^2\leq 144 & ②\end{cases}$$

是否有解．

由于①、②两式可分别看作一条直线和一个圆面，因而混合组有解的充要条件是直线与圆面有公共点，则$d=\dfrac{|3(n^2+5)|}{\sqrt{n^2+1}}\leq 12$，整理得$(n^2-3)^2\leq 0$，则$n=\pm\sqrt{3}$，与$n\in Z$矛盾，故适合题设的a、b不存在．

99．设 $0<x<1$，$a>0$，$a\neq 1$，比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小．

【解答】$\because 0<x<1$，$\therefore 1+x>1$，$0<1-x<1$，$0<1-x^2<1$，$\log_{(1+x)}(1-x)<0$，$\log_{(1+x)}(1-x^2)<0$．

$\therefore \dfrac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\dfrac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|$

$=|\log_{(1+x)}(1-x)|=-\log_{(1+x)}(1-x)$

$=\log_{(1+x)}\dfrac{1}{1-x}=\log_{(1+x)}\dfrac{1+x}{1-x^2}$

$=1-\log_{(1+x)}(1-x^2)>1$，

故$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

100．设整数集为Z，关于x的不等式$\log_a(2-\frac{1}{2}x^2)>\log_a(a-x)$的解集为A，若$Z\cap A=\{1\}$，试求常数a的取值范围．

【解答】$\because x=1$ 是不等式的唯一整数解，

$\therefore \log_a(2-\frac{1}{2})>\log_a(a-1)\Rightarrow 1<a<\frac{5}{2}$．

因此，得 $2-\frac{1}{2}x^2>a-x$，

整理，得 $x^2-2x+2a-4<0$．

解得，$1-\sqrt{5-2a}<x<1+\sqrt{5-2a}$．

原不等式有唯一整数解1，必须且只需$\sqrt{5-2a}\leq 1$，

$\therefore \begin{cases}5-2a\leq 1\\ 5-2a>0\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}2a\geq 4\\ 2a<5\end{matrix}\Rightarrow 2\leq a<\frac{5}{2}$．

$\therefore$a的取值范围是$[2,\frac{5}{2})$．

101．已知$u\geq 1$，$v\geq 1$，且$\log_a^2u+\log_a^2v=\log_a(au^2)+\log_a(av^2)(a>1)$求 $\log_a(uv)$的最大值和最小值．

【解答】　令 $x=\log_a u$，$y=\log_a v$，这时原问题可化为：若 $(x-1)^2+(y-1)^2=4(x\ge 0，y\ge 0)$，求 $x+y$ 的最值．

设 $x+y=t$，利用解几模型，由图 27 即可知，直线 $y=-x+t$ 与圆相切时，纵截距 t 最大，$t_{max}=2+2\sqrt{2}$；直线 $y=-x+t$ 过圆上 A、B 点时，纵截距 t 最小，$t_{min}=1+\sqrt{3}$．

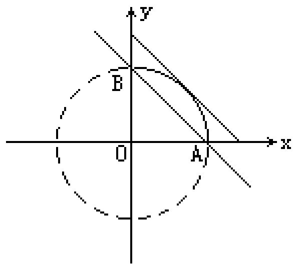


图 27

102．已知 a、b、c 是实数，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当 $-1\le x\le 1$ 时，$|f(x)|\le 1$．

(1)证明：$|c|\le 1$；

(2)证明：当 $-1\le x\le 1$ 时，$|g(x)|\le 2$；

(3)设 $a>0$，当 $-1\le x\le 1$ 时，$g(x)$ 的最大值为 2，求 $f(x)$．

【证明】　(1)、(2)略

(3)因为 $a>0$，$g(x)$ 在 $[-1，1]$ 上是增函数，当 $x=1$ 时取得最大值 2，即

$g(1)=a+b=f(1)-f(0)=2$．　　　　①

$\because -1\le f(0)=f(1)-2\le 1-2=-1$，

$\therefore c=f(0)=-1$

因为当 $-1\le x\le 1$ 时，$f(x)\ge -1$，即 $f(x)\ge f(0)$，根据二次函数性质可知，直线 $x=0$ 为 $f(x)$ 的图象的对称轴，由此得 $-b/2a=0$，从而得 $b=0$．代入①得 $a=2$．$\therefore f(x)=2x^2-1$．

103．已知 $-1<a<0$，试比较 3^a、$a^{1/3}$ 和 a^3 的大小．

【解答】　设 $y=3^x$，$y=x^{1/3}$，$y=x^3$ 在同一坐标系中画出它们的图象(图略)，由图象即可知：$a^{1/3}<a^3<3^a$．

104．设 $x^2-2xy+2y^2\le 2$，求证：$|x+y|\le\sqrt{10}$．

【精析】　根据结论所提供的信息，猜想可能的途径是：$(x+y)^2+(\quad)^2\le 10$，直奔解题目标，题设立即可得 $(x+y)^2+(2x-3y)^2\le 10$，进而有 $|x+y|\le\sqrt{10}$．

在猜想的形成过程中，常常依赖于解题经验，有时出于灵感．

105．设 a 是任意的正奇数，证明：一定存在整数 x、y，使得 $5x^2+11y^2-1$ 为 a 的倍数．

【精析】　本题只要能找出一对 x，y 的值，使 $5x^2+11y^2-1$ 是 a 的倍数即可现在困难的是 $5x^2+11y^2-1$ 不能分解因式，为此可猜 $x=y$，于是

$5x^2+11y^2-1=16x^2-1=(4x+1)(4x-1)$

设 $a=2m+1$，取 $x=m^2$，则有

$4x-1=4m^2-1=(2m-1)(2m+1)$，

$\therefore 16x^2-1=(4m^2+1)(2m-1)(2m+1)=ka$．

其中 k 为整数，这就是说，当 $x=y=m^2$ 时，$5x^2+11y^2x-1$ 是 a 的倍数．

坚实的基础知识是合理猜想的先决条件．

106．解方程

$\sqrt{x2+5x-14}+\sqrt{x+7}+\sqrt{2-x}=5-x$．

【精析】 若通过平方去掉根号后化为整式方程来解，运算冗繁．仔细观察题目特征，冲破常规思维的局限，从方程中隐含的条件入手去猜想．

由题意有$\begin{cases}x^2+5x-14\geq 0\\ x+7\geq 0\\ 2-x\geq 0\end{cases}$

解此不等式组，得出：$x=-7$ 或 $x=2$．经检验 $x=2$ 为原方程的实根．

107．设函数$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$的定义域和值域分别为[a，b]和[2a，2b]，求 a、b 的值．

【精析】 题中所给抛物线是静态的，定义域[a，b]是动态的，由于值域的确定要依赖于区间[a，b]位置的确定，须就[a，b]位置作分类讨论．

【解答】 (1)a＞0 时，易由图象 28 知函数值域为[f(b)，f(a)]，但已知值域为[2a，2b]，比较两值域知：

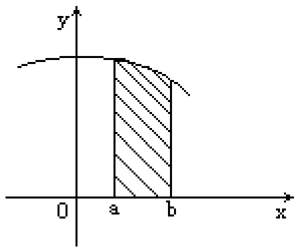


图 28

$\begin{cases}f(a)=2a\\ f(b)=2b\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^2+4b=13\\ b^2+4a=13\end{cases}$

两式相减得：

$\begin{cases}a^2-b^2+4(a-b)=0\\ a^2+4b=13\end{cases}$

$\therefore a\neq b$，

$\therefore \begin{cases}a+b-4=0\\ a^2+4b=13\end{cases}$，$\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$．

(2)b＜0 时，易由图象 29 知值域为[f(a)，f(b)]，比较已知值域[2a，2b]

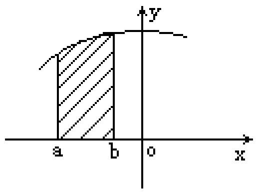


图 29

得 $\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b = -2 \pm \sqrt{17} \\ a = -2 \pm \sqrt{17} \end{cases}$

∵b＜0，

∴$b = -2 - \sqrt{17}$，由a＜b知a、b无解．

$(3)\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ b < -a \end{cases}$ 时，由图象30知值域为[f(a)，f(0)]，

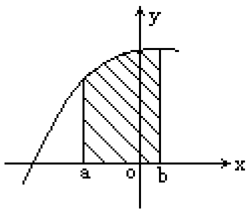


图 30

由题意得 $\begin{cases} f(a) = 2a \\ f(0) = 2b \end{cases}$

即 $\begin{cases} a^2 + 4a = 13 \\ b = \dfrac{13}{4} \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = -2 - \sqrt{17} \\ b = \dfrac{13}{3} \end{cases}$

检验知 a、b 的值符合条件：b＜0 且 b＜－a．

$(4)\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ b \geq -a \end{cases}$ 时，值域为[f(b)，f(0)]，比较已知值域得$\begin{cases} f(b) = 2a \\ f(0) = 2b \end{cases}$(图31)

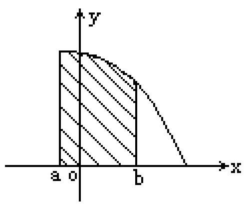


图 31

即 $\begin{cases} b=\dfrac{13}{4} \\ a=\dfrac{39}{64} \end{cases}$，这与$a<0$矛盾．

综上知$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$ 或$\begin{cases} a=-2-\sqrt{17} \\ b=\dfrac{13}{4} \end{cases}$

108．求函数 $f(x)=x^2(2-x)$的增区间．

【精析】 将 $f(x)$改写为 $f(x)=2x^2+(-x^3)$，由于函数 $y_1=2x^2$ 与 $y_2=-x^3$ 在$(-\infty，0)$上均为减函数，故 $f(x)$在$(-\infty，0)$上递减；将 $f(x)$改写为 $f(x)=-x^2(x-2)$，由于 $y_3=x^2$ 与 $y_4=x-2$ 在$(2，+\infty)$上均为增函数，且函数值为正，故 $y=x^2(x-2)$在$(2，+\infty)$上递增，从而 $f(x)=-x^2(x-2)$在$(2，+\infty)$上递减．

在$[0，2]$上，$f(x)=\dfrac{1}{2}x\cdot x\cdot(4-2x)\leq\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{x+x+4-2x}{3})^3=\dfrac{32}{27}$，当且仅当$x=4-2x$即$x=\dfrac{4}{3}$时，$f(x)$取得最大值$\dfrac{32}{27}$，从而点$(\dfrac{4}{3}，\dfrac{32}{27})$是$f(x)$在$[0，2]$上的最高点，又$x=0$和$x=2$时$f(x)$有最小值$0$，从而猜想$[0，\dfrac{4}{3}]$为其增区间．

【证明】 设$0\leq x_1\leq x_2\leq\dfrac{4}{3}$，

$f(x_1)-f(x_2)$

$=(x_2-x_1)(x_1^2+x_2^2+x_1x_2-2x_1-2x_2)$

$=(x_2-x_1)[(x_1^2+\dfrac{x_1x_2}{2}-2x_1)+(x_2^2+\dfrac{x_1x_2}{2}-2x_2)]$

$=(x_2-x_1)[x_1(x_1+\dfrac{x_2}{2}-2)+x_2(x_2+\dfrac{x_1}{2}-2)]$

由假设可得$0<x_1+\dfrac{x_2}{2}<2$，$0<x_2+\dfrac{x_1}{2}<2$．

从而可推得 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$．

$\therefore[0，\dfrac{4}{3}]$为$f(x)$的增区间．

109．设 $f(x)=e^x+e^{-x}$，若关于 x 的方程 $f(2x)+af(x)+a+3=0$ 有实数解，求实数 a 的取值范围．

【解答】 设 $t=e^x+e^{-x}$，原方程化为 $t^2+at+a+1=0$．①

显然，$t\geq2$，故原方程有实解等价于方程①至少有一个不小于 2 的解，从而有

$\begin{cases} \Delta=a^2-4(a+1)\geq0 \\ t=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4(a+1)}}{2}\geq2 \end{cases}$，解得 $a\leq-\dfrac{5}{3}$

110．已知 $a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，且为常数，$|x|+|y|\le 1$，求 $ax+y$ 的最大值．

【解答】 $ax+y\le|ax|+|y|$ ①

$=a|x|+|y|\le a|x|+(1-|x|)$

$=(a-1)|x|+1$

为使①等号成立，应取 $x\ge 0$，$y\ge 0$，从而 $0\le x\le 1$，现构造一次函数

$g(x)=(a-1)x+1$．

(1)当 $a>1$ 时，$g(x)$为增函数，在 $x=1$ 时取得最大值，即

$|g|(x)|_{max}=a$，则有：$ax+y\le a$．

于是 $ax+y$ 的最大值为 a，且当 $x=1$，$y=0$ 时等号成立．

(2)当 $0<a<1$ 时，$g(x)$为减函数，在 $x=0$ 时取得最大值，即 $x=0$，$y=1$ 时，$ax+y$ 有最大值为 1．

111．已知 $f(x)=x^2+px+q$，(p、$q\in R$)，求证：$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$

中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$．

【证明】 假如$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$都小于 $\frac{1}{2}$，则

$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|<\frac{1}{2}+2\cdot(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=2$． ①

但 $|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|$

$=|1+p+q|+2|4+2p+q|+|9+3p+q|$

$\ge|1+p+q|+|(8+4p+2q)-(9+3p+q)|$

$=|1+p+q|+|-1+p+q|$

$\ge|(1+p+q)-(-1+p+q)$

$=|1+p+q+1-p-q|=2$

即$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|\ge 2$ ②

显然①和②矛盾，从而假设不成立．

$\therefore|f(1)|$、$|f(2)|$、$f(3)|$中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$．

112．函数 $f(x)$在$[0,1]$上有最大值和最小值，$f(0)=f(1)$，且对任意不同的 x_1、$x_2\in[0,1]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$．求证：$|f(x_2)-f(x_1)|$

$<\frac{1}{2}$．

【解答】 因为 $f(x)$在$[0,1]$有最大值和最小值，不妨设 $M=f(t_1)$，最小值 $m=f(t_2)$，t_1、$t_2\in[0,1]$．

①当$|t_1-t_2|\le\frac{1}{2}$时，

$|f(x_2)-f(x_1)|\le|f(t_1)-f(t_2)|\le|t_1-t_2|$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)<\frac{1}{2}$．

②当$|t_1-t_2|>\frac{1}{2}$时，设$t_1<t_2$，即$t_2-t_1>\frac{1}{2}$，

$|f(x_2)-f(x_1)|\le|f(t_1)-f(t_2)|$

$=|f(t_1)-f(0)+f(1)-f(t_2)|$

$=|f(t_1)-f(0)|+|f(1)-f(t_2)|$

$<|t_1-0|+|1-t_2|=1-(t_2-t_1)<\frac{1}{2}$

若$t_2<t_1$，同样可得$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$

故对任意x_1、$x_2\in[0，1]$，都有$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

113．设a是给定的不大于$\frac{5}{4}$的正实数，若满足不等式$|x-a|<b$的一切实数x，亦满足不等式$|x-a^2|<\frac{1}{2}$，求正数b的取值范围．

【解答】 由$|x-a|<b$得：

$a-b<x<a+b$ ①

由$\{x-a^2|<\frac{1}{2}$得：

$a^2-\frac{1}{2}<x<a^2+\frac{1}{2}$ ②

要使满足①的一切x满足②，则应有：

$$\begin{cases}a-b\ge a^2-\frac{1}{2}\\ a+b\le a^2+\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\le -a^2+a+\frac{1}{2}\\ b\le a^2-a+\frac{1}{2}\end{cases}$$

由$a^2-a+\frac{1}{2}-(-a^2+a+\frac{1}{2})=2a(a-1)$知：

(1)当$0<a\le1$时，$a^2-a+\frac{1}{2}\le-a^2+a+\frac{1}{2}$，

$\because a^2-a+\frac{1}{2}=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}>0$

$\therefore 0<b\le a^2-a+\frac{1}{2}$

(2)当$1<a\le\frac{5}{4}$时，$a^2-a+\frac{1}{2}>-a^2+a+\frac{1}{2}$，此时，

$-a^2+a+\frac{1}{2}=-(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{16}>0$

$\therefore 0<b\le-a^2+a+\frac{1}{2}$

114．已知函数$f(x)=\log_3\frac{2x^2+bx+c}{x^2+1}$的值域为$[0，1]$．

(1)求b、c的值；

(2)求证：$\log_3\frac{7}{5}\le f(|x-\frac{1}{6}|-|x+\frac{1}{6}|)\le\log_3\frac{13}{5}$.

【解答】 (1)设$y=f(x)$，则$3^y=\frac{2x^2+bx+c}{x^2+1}$，即$(3^y-2)x^2-bx+(3^y-c)=0$.

当$3^y-2\neq0$时，由$x\in R$得

$\Delta=b^2-4(3^y-2)(3^y-c)\geq0$.

$\therefore4(3^y)^2-4(2+c)3^y-(b^2-8c)\leq0$.

又由$0\leq y\leq1$，得$1\leq3^y\leq3$.

由一元二次方程根与系数的关系得$\begin{cases}2+c=1+3\\ \frac{8c-b^2}{4}=1\times3\end{cases}$解之得

$\begin{cases}b=2\\ c=2\end{cases}$或$\begin{cases}b=-2\\ c=2\end{cases}$

当$3^y-2=0$时，对上述b、c的值，有$f(0)=\log_3 2\in[0,1]$.

故上述b、c的值满足题设条件.

【证明】 (2)首先证明当b=2时，f(x)是[－1，1]上的增函数，当b=－2时，f(x)是[－1，1]上的减函数，则有：

$|x-\frac{1}{6}|-|x+\frac{1}{6}|\leq|(x-\frac{1}{6})-(x+\frac{1}{6})|=\frac{1}{3}$.

同理：$|x+\frac{1}{6}|-|x-\frac{1}{6}|\leq\frac{1}{3}$，

$\therefore\ -\frac{1}{3}\leq|x-\frac{1}{6}|x+\frac{1}{6}|\leq\frac{1}{3}$

利用上述结果，当$b=2$时，$f(-\frac{1}{3})\leq f(|x-\frac{1}{6}|-|x+\frac{1}{6}|)\leq f(\frac{1}{3})$，

且易得$f(-\frac{1}{3})=\log_3\frac{7}{5}$，$f(\frac{1}{3})=\log_3\frac{13}{5}$；

当$b=-2$时，$f(\frac{1}{3})\leq f(|x-\frac{1}{6}|-|x+\frac{1}{6}|)\leq f(-\frac{1}{3})$，

且易得$f(\frac{1}{3})=\log_3\frac{7}{5}$，$f(-\frac{1}{3})=\log_3\frac{13}{5}$

综合上述两种情况即得：

$\log_3\frac{7}{5}\leq f(|x-\frac{1}{6}|-|x+\frac{1}{6}|)\leq\log_3\frac{13}{5}$

115．设a、b满足$2a^2+6b^2=3$，证明函数$f(x)=ax+b$在[－1，1]上满足$|f(x)|\leq\sqrt{2}$.

【证明】 $\because 2a^2+6b^2=3$，$\therefore b=\pm\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}a^2}$

$\therefore y=f(x)=ax\pm\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}a^2}$

这是以a为斜率，$\pm\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}a^2}$为截距的直线，所以$|f(x)|$在区间$[-1，1]$

端点取得最大值，故$|f(x)|$在$[-1，1]$上的最大值为：

$|a|+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}a^2}$.

设$|y|=|a|+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}a^2}$，移项两边平方整理得：

$\frac{4}{3}a^2-2|y|\cdot|a|+|y|^2-\frac{1}{2}=0$.

由$\Delta=(-2|y|)^2-4\times\frac{4}{3}(|y|^2-\frac{1}{2})\geq 0$，得$|y|^2\leq 2$，即$|y|\leq\sqrt{2}$，

∴当$x\in[-1，1]$时，$|f(x)|\leq\sqrt{2}$.

116．已知 $f(x)=1+\log_x 3$，$g(x)=2\log_x 2(x>0$，且 $x\neq 1)$.

(1)比较 $f(x)$与 $g(x)$的大小；

(2)若$|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)=4$，求 x 的值.

【解答】 (1)$f(x)-g(x)=\log_x(\frac{3}{4}x)$.

①当$0<x<1$时，$0<\frac{3}{4}x<\frac{3}{4}$，

∴$\log_x(\frac{3}{4}x)>0$，$f(x)>g(x)$.

②当$1<x<\frac{4}{3}$时，$\frac{3}{4}<\frac{3}{4}x<1$.

∴ $\log_x(\frac{3}{4}x)<0$，$f(x)<g(x)$.

③当$x=\frac{4}{3}$时，$\frac{3}{4}x=1$，$\log_x(\frac{3}{4}x)=0$，

∴ $f(x)=g(x)$.

④当$x>\frac{4}{3}$时，$\frac{3}{4}x>1$，$\log_x(\frac{3}{4}x)>0$，

∴$f(x)>g(x)$.

(2)当 $f(x)\geq g(x)$时，$f(x)=2$，即 $1+\log_x 3=2$，$\log_x 3=1$，$x=3$；

当$f(x)<g(x)$时，$g(x)=2$，即$\log_x 2=1$，$x=2$，与$1<x<\frac{4}{3}$矛盾.

117．求函数 $f(x)=a^2-1+ax-x^2$，$x\in[0，1]$的值域.

【解答】 配方 $f(x)=-(x-a/2)^2-1+5a^2/4$，得对称轴方程为 $x=\frac{a}{2}$.

根据对称轴 $x=a/2$ 在定义区间的左、中、右三种情况讨论：

①当 $a<0$ 时，对称轴在$[0，1]$之左，$f(x)$在$[0，1]$上递减，值域为$[f(1)，f(0)]=[a^2+a-2，a^2-1]$；

②当 $0\leq a\leq 1$ 时，对称轴在$[0，1/2]$之内，$f(x)$的值域为

$[f(1), f(a/2)]=[a^2+a-2, 5a^2/4-1]$；

③当 $1\le a\le 2$ 时，对称轴在 $[1/2, 1]$ 之内，$f(x)$ 的值域为

$[f(0), f(a/2)]=[a^2-1, 5a^2/4-1]$；

④当 $a>2$ 时，对称轴在 $[0, 1]$ 之右，$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上递增，值域为

$[f(0), f(1)]=[a^2-1, a^2+a-2]$.

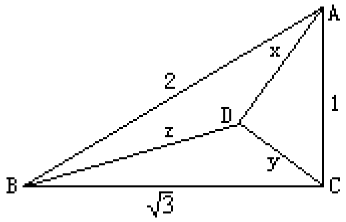


图 32

118．如图 32，已知 $x, y, z>0$，且 $x^2+y^2+xy=1$，$y^2+z^2+yz=3$，$z^2+x^2+zx=4$，求 $xy+yz+zx$ 的值．

【解答】 三个条件式化为 $x^2+y^2-2xy\cos 120°=1^2$，$y^2+z^2-2yz\cos 120°=(\sqrt{3})^2$，$z^2+x^2-2zx\cos 120°=2^2$．

条件式的结构类似余弦定理，且条件式右边的常数具有 $1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$ 的特征．

于是可构造直角三角形 ABC，使 $\angle C=90°$，$AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，则 AB=2，在直角三角形 ABC 内作一点 D，使 $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=120°$，且 $AD=x$，$CD=y$，$BD=z$．

$\because S_{\triangle ADC}+S_{\triangle CDB}+S_{\triangle BDA}=S_{\triangle ABC}$．

$\therefore \frac{1}{2}xy\sin 120°+\frac{1}{2}yz\sin 120°+\frac{1}{2}\cdot zx\sin 120°=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}$．

即 $xy+yz+zx=2$．

119．已知 $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}$，求证：x、y、z 中至少有 2 个相等．

【精析】 只要证出 $(x-y)$、$(y-z)$、$(z-x)$ 的乘积为 0 即可．

【证明】 $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}$，

所以 $x^2z+y^2x+z^2y=z^2x+y^2z+x^2y$，

$(x-y)(y-z)(z-x)=xyz+(x^2z+y^2x+z^2y)-(z^2x+y^2z+x^2y)-xyz=0$．

则 $(x-y)$、$(y-z)$、$(z-x)$ 中至少有 1 个等于零，故 x，y，z 中至少有 2 个相等．

120．已知 x，y，z，t 为非零实数且满足关系 $a^2t^2+y^2(t^2+1)+z^2+2y(x+z)t=0$，求证：$y^2=xz$．

【证明】 将 t 视为主元，将已知整理得：$(x^2+y^2)t^2+2y(x+z)t+y^2+z^2=0$．

由题意知方程有实根．

所以 $\Delta=4y^2(x+z)^2-4(x^2+y^2)(y^2+z^2)\ge 0$，$(y^2-xz)^2\le 0$，

$y^2-xz=0$，即 $y^2=xz$．

121．当 m 是什么整数时，关于 x 的方程 $x^2-(m-1)x+m+1=0$ 的两

根都为整数？

【解答】 显然1不是方程根，整理得

$(x-1)m=x^2+x+1$，

$m=\frac{x^2+x+1}{x-1}=x+\frac{3}{x-1}+2$．

x取何值才能使关于m为变元的方程根为整数．

因为x为整数，得出$x-1=\pm1$，±3．即$x=-2$，0，2，4．分别代入得：$m=7$，-1．所以当$m=-1$、7时方程两根为整数．

122．求函数$f(x)=(e^x-a)^2+(e^{-x}-a)^2(a\in R)$的值域．

【解答】 令$t=e^x+e^{-x}$，则$t\in[2,+\infty)$，

$f(x)=t^2-2at+2a^2-2=(t-a)^2+a^2-2$，

(1)$a<2$时，$f(x)\in[2(a-1)^2,+\infty)$；

(2)$a>2$时，$f(x)\in[a^2-2,+\infty)$．

123．已知：p、q、r都是正数，求证：关于x的方程：$x^2-\sqrt{p}x+q/8=0$，$x^2-\sqrt{q}x+r/8=0$，$x^2-\sqrt{r}x+p/8=0$中至少有1个方程有2个不等正根．

【精析】 欲证至少有1个方程有2个不等正根，则证至少有1个判别式大于0，故只要证$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3>0$即可．

【证明】 因为p、q、r都是正数，

$\Delta_1=p-q/2$，$\Delta_2=q-r/2$，$\Delta_3=r-p/2$，

所以$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=p+q+r-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}-\frac{r}{2}=(p+q+r)/2>0$．

从而Δ_1、Δ_2、Δ_3至少有1个大于零．即3个方程中至少有1个方程有2个不等的实根．

124．求方程组

$$\begin{cases}x+y+z=3, & ①\\ x^2+y^2+z^2=3, & ②\\ x^5+y^5+z^5=3. & ③\end{cases}$$

的所有实数解．

【解答】 由①设$x=1+a$，$y=1+b$，则$z=1-(a+b)$，代入②，$(1+a)^2+(1+b)^2+[1-(a+b)]^2=3$，即$a^2+ab+b^2=0$．

$\therefore(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$，

$a^3-b^3=0$，$a=b$．

$\therefore x=y$，同理$y=z$，$z=x$，代入①，得

$x=y=z=1$．

经检验，$x=y=z=1$是原方程组的实数解，也是惟一的解．

125．求证：函数$f(x)=1-x^3$在$(-\infty,+\infty)$上是减函数．

【证明】 在$(-\infty,+\infty)$上任取x_1，x_2，且$x_1<x_2$，则$x_1-x_2<0$．

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=(1-x_2^3)-(1-x_1^3)=x_1^3-x_2^3$

$=(x_1-x_2)(x_1^{2}+x_1x_2+x_2^{2})=(x_1-x_2)[(x_1+\frac{x_2}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2)^2]<0$，

即 $f(x_1)>f(x_2)$．

∴函数 $f(x)=1-x^3$ 在$(-\infty，+\infty)$上是减函数．

126．求函数 $y=|x-3|+|x+2|$ 的值域．

【精析】　函数值 y 相当于数轴上以 x 为坐标的点 P 与以 3，－2 为坐标的两点 A、B 的距离之和．显然，当 P 在线段 AB 上时，y 有最小值为 $|AB|=|-2-3|=5$．故所求函数的值域为 $y\in[5，+\infty)$．

127．设函数$f(x)$的值域为$[\frac{3}{8}，\frac{4}{9}]$求函数$y=g(x)=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$的值域．

【精析】　由$\frac{3}{8}\leq f(x)\leq\frac{4}{9}$，得$\frac{1}{9}\leq 1-2f(x)\leq\frac{1}{4}$，则$\frac{1}{3}\leq\sqrt{1-2f(x)}\leq\frac{1}{2}$．

【解答】　令$t=\sqrt{1-2f(x)}$，则

$y=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1(\frac{1}{3}\leq t\leq\frac{1}{2})$

∵在$[\frac{1}{3}，\frac{1}{2}]$上$y$为单增，∴最值在端点处取到．当$t=\frac{1}{3}$时，$y_{\min}=\frac{7}{9}$；当$t=\frac{1}{2}$时$y_{\max}=\frac{7}{8}$．

故函数$y=g(x)$的值域为$[\frac{7}{9}，\frac{7}{8}]$．

128．设 a、b∈R^+，$a^b=b^a$ 且 a＜1，证明 a=b．

【证明】　当 0＜b＜a＜1 时，∵$y=a^x$ 是减函数，

∴$a^b>a^a$．而 $b^a<a^a$，∴$a^b>b^a$．

这与已知 $a^b=b^a$ 相矛盾，故 b＜a 不成立．

当 0＜a＜b 时，∵$y=a^x$ 是减函数，∴$a^b<a^a$．

而 $a^a<b^a$，∴$a^b<b^a$．

这也与已知 $a^b=b^a$ 相矛盾，故 a＜b 也不能成立．

因此唯有 a=b 成立，命题得证．

129．解方程$4\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x}+3=0$．

【解答】　由观察可知 x 的取值范围－2≤x≤7，

∵在区间$[-2，7]$上，$f(x)=4\sqrt{x+2}$单调递增，$g(x)=-\sqrt{7-x}$也单调递增．

∴$F(x)=4\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x}+3$在区间$[-2，7]$上也单调递增，

又 F(－2)=0，故由函数的单调性可知，原方程的解为 x=－2．

130．讨论函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(3x-x^2)$的单调性．

【解答】　由题意，可知 $3x-x^2>0$，解之得 0＜x＜3．故所给函数的定义域为(0，3)．

令$u=3x-x^2$，则函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(3x-x^2)$可看作是由$y=\log_{\frac{1}{2}}u$与$=3x-x^2$ (0＜x＜3)复合而成的复合函数．

$\because u=3x-x^2=-x^2+3x$

$=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}(0<x<3)$，

$\therefore u=3x-x^2$在$(0，\frac{3}{2}]$上是增函数，而在区间$[\frac{3}{2}，3)$上是减函数．

又函数$y=\log_{\frac{1}{2}}u$在$(0，+\infty)$上是减函数．

故函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(3x-x^2)$在$(0，\frac{3}{2}]$上是减函数，在区间$[\frac{3}{2}，3)$上是增函数．

131．判定函数$f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性．

【解答】　易求此函数的定义域为 R，关于原点对称．

$\because f(-x)=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$，

又$(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=1$

即$\sqrt{x^2+1}-x=(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}$

$\therefore f(-x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$

$=-f(x)$．

故函数$f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数．

132．求函数 $f(x)=2x^2-4x-2a^2$ 在区间$[a，a+1]$上的最值．

【精析与解答】　$f(x)=2(x-1)^2-2-2a^2$，其图象的对称轴为 $x=1$，因区间$[a，a+1]$随 a 变化而移动，根据上述结论，应分四种情况讨论：

①$a\geq1$ 时，$f(x)_{最小}=f(a)=-4a$，$f(x)_{最大}=f(a+1)=-2$．

②$a<1<a+1$且$1-a<(a+1)-1$，即$\frac{1}{2}<a<1$时，

$f(x)_{最小}=f(1)=-2-2a^2$，$f(x)_{最大}=f(a+1)=-2$．

③$a<1<a+1$且$1-a\geq(a+1)-1$，即$0<a\leq\frac{1}{2}$时，

$f(x)_{最小}=f(1)=-2-2a^2$，$f(x)_{最大}=f(a)=-4a$．

④$a+1\leq1$ 即 $a\leq0$ 时，$f(x)_{最小}=f(a+1)=-2$，$f(x)_{最大}=f(a)=-4a$．

133．已知 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leq f(-1)\leq2$，$2\leq f(1)\leq4$，求 $f(-2)$的取值范围．

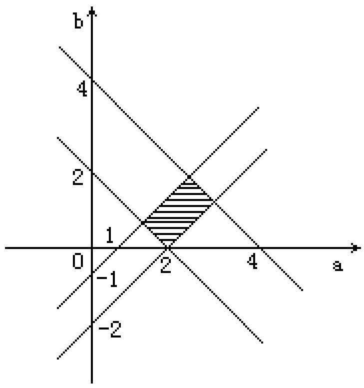


图 33

【精析与解答】 由$1\leq f(-1)\leq 2$，$2\leq f(1)\leq 4$，即$\begin{cases}1\leq a-b\leq 2,\\2\leq a+b\leq 4\end{cases}$，

两式相加(“减”)得$\begin{cases}\frac{3}{2}\leq a\leq 3\\0\leq b\leq \frac{3}{2}\end{cases}$，因$f(-2)=4a-2b$，及$6\leq 4a\leq 12$，

$-3\leq -2b\leq 0$，相加便得 $3\leq f(-2)\leq 12$．这种解答扩大了 $f(-2)$的取值范围，原因在于 $a+b$ 与 $a-b$ 有内在联系．两者的最小值点，最大值点不能同时取得，故同向相加扩大了范围．

【解答】 设 $u=f(-2)=4a-2b$．

如图 33，因 $1\leq a-b\leq 2$，$2\leq a+b\leq 4$ 所确定的平面点集是图中的矩形区域，所求的u的范围可由与之相交的直线$b=2a-\frac{u}{2}$的截距确定，将最左边的点$(\frac{3}{2}，\frac{1}{2})$和最右边的点$(3，1)$代入平行直线系$b=2a-\frac{u}{2}$，得$-\frac{u}{2}$的最大值$-\frac{5}{2}$，最小值$-5$，即$-5\leq -\frac{u}{2}\leq -\frac{5}{2}$．故$5\leq u\leq 10$，$5\leq f(-2)\leq 10$．

134．设$x>0$，$y\geq 0$，且$x+2y=\frac{1}{2}$，求当x、y为何值时，$u=\log_{\frac{1}{3}}(8xy+4y^2+1)$取得最大值和最小值，并求出最大值和最小值．

【解答】 由$x+2y=\frac{1}{2}$，得$x=\frac{1}{2}-2y$．

$\therefore u=\log_{\frac{1}{3}}[8(\frac{1}{2}-2y)y+4y^2+1]=\log_{\frac{1}{3}}(-12y^2+4y+1)$．

由$x>0$，$y\geq 0$，且$x+2y=\frac{1}{2}$，可得$0\leq y<\frac{1}{4}$，从而$1\leq -12y^2+4y+1\leq \frac{4}{3}$(当$y=0$时，左边取“$=$”号，$y=\frac{1}{6}$时，右边取“$=$”号)．由对数函数性质，即当$x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{6}$时，$u_{最小}=\log_{\frac{1}{3}}\frac{4}{3}$；当$x=\frac{1}{2}$，$y=0$时

，$u_{最大}=0$．

135．已知 x，y∈R，且 $3x^2+2y^2=6x$，求 x+y 的最值．

【解答】化 $3x^2+2y^2=6x$ 为 $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$，得参数方程为

$$\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta\end{cases}.$$

$\therefore x+y=1+\cos\theta+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta=1+\dfrac{\sqrt{10}}{2}\sin(\theta+\varphi)$．

$\therefore (x+y)_{最大}=1+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$(x+y)_{最小}=1-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$．

136．设 f(x)是定义在区间(-∞，+∞)上的以 2 为周期的函数，对 k∈Z，用 I_k 表示区间(2k-1，2k+1]，已知 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$．

(1)求 f(x)在 I_k 上的解析式．

(2)对自然数 k，求集合 M_k={a|使方程 f(x)=ax 在 I_k 上有两个不相等的实数根}．

【精析】 (1)根据周期函数的定义，易得 $f(x)=(x-2k)^2$，$x\in I_k$，k∈Z．

(2)则 f(x)=ax，可得 $x^2-(4k+a)x+4k^2=0$．①

问题转化为①在区间(2k-1，2k+1](k∈N)上有两个不相等的实根时，求 a 的范围．

令 $f(x)=x^2-(4k+a)x+4k^2$，则由二次函数的图象得：

$$\begin{cases}2k-1<\dfrac{4k+a}{2}<2k+1\\ \Delta=(4k+a)^2-4\cdot 4k^2>0\\ f(2k-1)=(2k-1)^2-(4k+a)(2k-1)+4k^2>0\\ f(2k+1)=(2k+1)^2-(4k+a)(2k+1)+4k^2\geq 0\end{cases}$$

解之得 $0<a\leq\dfrac{1}{2k+1}$，故 $M_k=\{a|0<a\leq\dfrac{1}{2k+1}$，$k\in N\}$．

137．设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa}{n}$，其中 a∈R，n∈N 且 n≥2．如果 f(x)当 x∈(-∞，1]时有意义，求 a 的取值范围．

【解答】 f(x)当 x∈(-∞，1]时有意义 ⇔ 当 x∈(-∞，1]时 $1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa>0$ ⇔ 当 x∈(-∞，1]时 $a>-[(\dfrac{1}{n})^x+(\dfrac{2}{n})^x+\cdots+(\dfrac{n-1}{n})^x]$．

易知函数$g(x)=-[(\frac{1}{n})^x+(\frac{2}{n})^x+\cdots+(\frac{n-1}{n})^x]$在$(-\infty，1]$上是严格递增函数，所以$g(x)$在$(-\infty，1]$上的最大值为$g(1)=-\frac{1}{2}(n-1)$．故$a>-\frac{1}{2}(n-1)$．

138．求函数$y=x+\sqrt{1-2x}$的最值．

【解答】 设$t=\sqrt{1-2x}(t\geq 0)$，则由原式，得$y=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1\leq 1$，当且仅当 t=1，即 x=0 时取等号，故 y 的最大值是 1，无最小值．

139．已知函数$y=f(x)$的定义域为$(-1，1)$，试求函数$y=f(\sqrt{x})$的定义域．

【精析】 函数$y=f(\sqrt{x})$可看作是由$y=f(u)$与$u=\sqrt{x}$复合而成的．解此类问题的关键是：必须综合考虑已知函数的定义域及基本初等函数的定义域这两个方面，列出符合题意的不等式组，对本题，令$t=\sqrt{x}$，得$-1<t<1$，而$t=\sqrt{x}$的定义域是$x\geq 0$．

【解答】 由题意，可得下列不等式组

$\begin{cases}-1<\sqrt{x}<1\\ x\geq 0\end{cases}$，解得$0\leq x<1$．

故函数$y=f(\sqrt{x})$的定义域为$[0，1)$．

140．已知函数$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，

(1)证明：f(x)在$(-\infty，+\infty)$上是增函数；

(2)证明：对于任意不小于3的自然数n，都有$f(n)>\frac{n}{n+1}$．

【证明】 (1)设 x_1，x_2 为任意两个实数，且 $x_1<x_2$．

$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，

$f(x_2)-f(x_1)=\frac{2}{2^{x_1}+1}-\frac{2}{2^{x_2}+1}$

$=2\cdot\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$

由指数函数性质知

$(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)>0$，$2^{x_1}-2^{x_2}>0$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$

故 f(x)在$(-\infty，+\infty)$上是增函数．

(2)要证$f(n)>\frac{n}{n+1}(n\in N，n\geq 3)$

即要证$1-\frac{2}{2^n+1}>1-\frac{1}{n+1}$

即要证$2^n>2n+1(n\geq 3)$

以下用数学归纳法证(略)．

141．已知函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$，$g(x)=x+2$

(1)若方程 f(x＋a)=g(x)有二不同实根，求 a 值范围；

(2)若$f(x)>g(x-b)$的解集为$(-1，\frac{1}{2})$时，求b值．

【精析与解答】 (1)设$y=f(x+a)$，即$y=\sqrt{1-(x+a)}$，$y=g(x)$，即$y=x+2$(一条固定直线)．$y=\sqrt{1-(x+a)^2}$，即$(x+a)^2+y^2=1(y\geq 0)$为半圆，当 a 变化时，半圆位置亦发生变化．方程有二不同实根，即直线 y=x＋2 与半圆$(x+a)^2+y^2=1$有二不同交点．

当半圆沿 x 轴负向平移至与直线相切时，有一解，再向负向平移则有二解，至直线过半圆的直径左端点时有二解，再向负向平移，则无两个交点．

先求相切时的 a 值：

$$\begin{cases}y=x+2 & ①\\ y^2=1-(x+a)^2(y\geq 0) & ②\end{cases}$$

①代入②，$2x^2+(2a+4)x+a^2+3=0$，$\Delta=(2a+4)^2-4\cdot 2(a^2+3)$，$a^2-4a+2=0$，$a=2\pm\sqrt{2}$，取$a=2-\sqrt{2}$($a=2-\sqrt{2}$是圆向负向平移，直线与圆(y≥0)部分相切时的 a 值)．

当圆过直线与 x 轴交点(－2，0)时，$0=1-(-2+a)^2$，所以 a=1 或 a=3，取 a=1(a=3 是半圆的直径右端点在(－2，0)时的 a 值)，所以$2-\sqrt{2}<a\leq 1$时，方程有二不同的实根．

(2)设$y=f(x)$，即$y=\sqrt{1-x^2}$的图象以(0，0)为圆心，r＝1的半圆(y≥0)，$y=g(x-b)$即$y=x+2-b$，若$f(x)>g(x-b)$的解集为$(-1，\frac{1}{2})$，则半圆在$(-1，\frac{1}{2})$部分恰在直线$(-1，\frac{1}{2})$部分的上方，直线$y=x+2-b$，过$(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})$点，这时$\frac{\sqrt{3}}{2}+2-b$，

所以$b=\frac{5-\sqrt{3}}{2}$，即当$b=\frac{5-\sqrt{3}}{2}$时，不等式的解为$(-1，\frac{1}{2})$．

注意：(1)有不少学生没考虑定义域，把$f(x)=\sqrt{1-x^2}$没看成半圆，也有不少学生看不懂题意是动圆与定直线相切、相交、相离的关系．有的学生能看懂题意，列出方程，在解方程组时，没考虑 y≥0，不分析题意，求出 a 值不知取舍而造成错误．(2)定圆弧在直线上方时，给出了区间求 b 值，有的学生不明了其本质是 f(x)＞g(x－b)而造成错误．

错误发生的原因，没有考虑定义域及参数 a 的变动．没有动的观念，本题深刻地考查“ 动 ”．本题若解决相切、相交、相离判别式的应用是重要的一环，有的学生忘记了．第二问的解答除函数知识外，就是解不等式，本题用数形结合解题比较好，有的学生没有使用．

纠正错误的办法，加强参数方程的教学，对字母讨论的教学，事实上，在高中数学教学中，变是纲，讨论是关键，本题只要加强这两点的教学，再牢固掌握所学的知识，就能取得正确的解答．同时也要知道，一切事物都在不停地发展与变化当中，孤立而静止的事物永远不会存在．从而在引申中，由于事物的变化而发展成极限概念，发展了微积分，由初等数学而进入高等数学．

第三章　三角函数

一、选择题

142．如果α，β都是第二象限角，且α＞β，那么

[　　]

A．sinα＞sinβ

B．sinα＜sinβ

C．sinα可小于也可能等于sinβ

D．sinα，sinβ的大小关系不能确定

【解答】　解本题应该注意到，第二象限的角不都是(90°，180°)内的角．如460°，170°都在第二象限，选D．

143．θ为第一象限角，那么能确定为正值的是

[　　]

A．$\cos 2\theta$　　　　B．$\sin\frac{\theta}{2}$

C．$\cos\frac{\theta}{2}$　　　　D．$\tan\frac{\theta}{2}$

【精析】　因为$2k\pi<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，所以$k\pi<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$，即$\frac{\theta}{2}$的终边落在第一、三象限．

【解答】　D

注意：终边在第一象限的角的一半的终边不一定在第一象限．

此题亦可用特殊值法求解．

取θ=80°，A错．

取θ=400°，可排除B、C．

144．在△ABC中，sinA＞sinB是∠A＞∠B的

[　　]

A．充分条件但非必要条件　　B．必要条件但非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分条件又非必要条件

【精析】　若$\sin A>\sin B$，由正弦定理知$\frac{a}{2R}>\frac{b}{2R}$(R为三角形的外接圆半径)，得$a>b$．则$A>B$．反之由$A>B$得$a>b$．则$\frac{a}{2R}>\frac{b}{2R}>$．即$\sin A>\sin B$．

【解答】　C

145．∠A＞∠B是sinA＞sinB的

[　　]

A．充分条件但非必要条件　　B．必要条件但非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

【精析】　若180°＞0°，但sin180°$\not>$sin0°．反之sin60°＞sin150°，但60°$\not>$150°．

【解答】　D

146．与正弦曲线$y=\sin x(x\in R)$关于直线$x=\frac{3\pi}{2}$对称的曲线是

[　　]

A．y=sinx　　B．y=cosx

C．y=－sinx　　D．y=－cosx

【解答】 在所求曲线上任取一点(x,y)，则依对称性，$(2\times\frac{3\pi}{2}-x,y)$在已知曲线上，于是 y=sin(3π－x)=sinx．故选 A．

注意：与曲线 y=f(x)关于点(a，b)对称的曲线方程为 2b－y=f(2a－x).这是因为如果(x,y)在所求的曲线上,则(2a－x,2b－y)必在 y=f(x)上．故满足其方程．

147．在△ABC 中，角 A、B 均为锐角，且 cosA＞sinB，则△ABC

[　　]

A．一定是直角三角形　　B．一定是钝角三角形

C．一定是锐角三角形　　D．不一定是锐角三角形

【解答】 B

148．在△ABC中，若$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{a^2}{b^2}$，则三角形一定是

[　　]

A．等腰三角形　　B．直角三角形

C．等腰或直角三角形　　D．等腰直角三角形

【解答】 C

149．$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$是$\tan x=1$成立的

[　　]

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【解答】 D

150．函数$f(x)=3\sin(x+\varphi)$是偶函数的充要条件是

[　　]

A．$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

B．$\varphi=2k\pi(k\in Z)$

C．$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

D．$\varphi=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

【解答】 C

151．函数$y=\sin x(1+\tan x\cdot\tan\frac{x}{2})$的最小正周期是

[　　]

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．π

C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{3\pi}{2}$

【解答】 B

152．函数$y=\frac{1-\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$的最小正周期是

[ ]

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．π

C．$\frac{\pi}{4}$　　D．2π

【解答】 B

153．有四个函数：①$y=\sin^2 x$；②$y=|\sin x|$；③$y=\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}$；④$y=\sin|x|$．其中周期$T=\pi$，且在$(0,\frac{\pi}{2})$上是增函数的函数个数是

[ ]

A．1　　B．2

C．3　　D．4

【解答】 C

154．函数$y=\frac{\cos 2x+\sin 2x}{\cos 2x-\sin 2x}$的最小正周期是

[ ]

A．2π　　B．π

C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

【解答】 C

155．函数$y=2\sin x\cdot\cos(x+\frac{\pi}{4})+\frac{1-\tan^2(x+\frac{\pi}{8})}{1+\tan^2(x+\frac{\pi}{8})}$的最小正周期是

[ ]

A．2π　　B．π

C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

【解答】 B

156．函数$y=1-2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$的单调递增区间为

[ ]

A．$[4k\pi+\frac{\pi}{3}，4k\pi+\frac{7\pi}{3}](k\in Z)$

B．$[2k\pi+\frac{\pi}{3}，2k\pi+\frac{7\pi}{3}](k\in Z)$

C．$[4k\pi+\frac{\pi}{6}，4k\pi+\frac{7\pi}{6}](k\in Z)$

D．$[2k\pi+\frac{\pi}{6}，2k\pi+\frac{7\pi}{6}](k\in Z)$

【解答】 A

157．在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，若 $\frac{a}{b}=\frac{\cos B}{\cos A}$，则△ABC是

[ ]

A．等腰三角形　　B．直角三角形

C．等腰直角三角形　　D．等腰或直角三角形

【解答】 D

158．已知函数$y_1=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，$y_2=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，那么函数$y=y_1+y_2$的振幅A的值是

[ ]

A．5　　B．7

C．13　　D．$\sqrt{13}$

【解答】 D

159．将函数$y=f(x)$的图象沿x轴向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位，再保持图象上的点纵坐标不变，而横坐标变为原来的 2 倍，得到的曲线与 y=cosx 图象相同，则 y=f(x)是

[ ]

A．$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$　　B．$y=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$

C．$y=\cos(2x+\frac{2\pi}{3})$　　D．$y=\cos(2x-\frac{2\pi}{3})$

【解答】 C

160．下列四个函数中，同时具有性质①最小正周期为π，②图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称的是

[ ]

A．$y=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})$　　B．$y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

C．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$　　D．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

【解答】 D

161．α在第三、第四象限，$\sin\alpha=\frac{2m-3}{4-m}$，则m的取值范围是

[　　]

A．(－1，0)　　　　B．$(-1,\frac{1}{2})$

C．$(-1,\frac{3}{2})$　　　　D．(－1，1)

【精析】　由已知得$-1<\frac{2m-3}{4-m}<0$．

解$\begin{cases}\frac{2m-3}{4-m}<0\\ \frac{2m-3}{4-m}+1>0\end{cases}$，得$\begin{cases}m>4或m<\frac{3}{2}\\ -1<m<4\end{cases}$．所以$-1<m<\frac{3}{2}$．

【解答】　C

注意：此题可不必解不等式组，而用特殊值法解．实际上，m 可等于0，所以A错．

又m=1符合已知条件，所以排除B、D．从而得出正确答案C．

162．给出下列四个命题，其中正确的命题是

[　　]

A．在区间$[2k\pi-\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in Z)$上，$y=\sin x$和$y=\sqrt{\sin x}$都是增函数

B．$y=\cos(\frac{3\pi}{2}+x)$为偶函数

C．$y=\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin x}$为奇函数

D．$y=\frac{\sin 2x}{\sin x}-1$为偶函数

【精析】　当$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq x<0$时，$y=\sqrt{\sin x}$无意义，A错．

又$\cos(\frac{3\pi}{2}+x)=\sin x$，B错．

因奇函数的定义域关于原点对称，而$y=\frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin x}$在$x=-\frac{\pi}{2}$时有意义，但在$x=\frac{\pi}{2}$时无意义，C错．

【解答】　D

注意：偶函数与奇函数的定义域关于原点对称，若不满足定义域关于原点对称这一条件，函数不可能是奇函数或偶函数．

163．若$y=(\sec^4\theta-1)(\csc^4\theta-1)$，则y的最小值是

[　　]

A．8　　　　B．9

C．10　　　　D．无最小值

【精析】 $y=[(1+\tan^2\theta)^2-1][(1+\cot^2\theta)^2-1]=5+2(\tan^2\theta+\cot^2\theta)\geq 5+4$．

【解答】 B

164．要得到函数$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图象，只要将函数$y=\sin\frac{1}{2}x$的图象

[　　]

A．先把每个x值扩大4倍，y值不变，再向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位

B．先把每个x值缩小4倍，y值不变，再向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位

C．先把每个x值扩大4倍，y值不变，再向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位

D．先把每个x值缩小4倍，y值不变，再向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位

【精析】 由$y=\sin\frac{1}{2}x$，有$y=\sin(4\times\frac{1}{2}x)=\sin 2x$，即

$y=\sin 2(x-\frac{\pi}{6})=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$．

【解答】 D

165．若$\frac{2\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+3\cos\theta}=-5$，则$3\sin 2\theta-7\cos 2\theta$的值为

[　　]

A．$\frac{9}{5}$　　B．$\frac{5}{9}$

C．5　　D．9

【精析】 $\frac{2\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+3\cos\theta}=-5\Leftrightarrow\tan\theta=-2$，$\sin 2\theta=-\frac{4}{5}$，$\cos 2\theta=-\frac{3}{5}$

故$3\sin 2\theta-7\cos 2\theta=3\times(-\frac{4}{5})-7\times(-\frac{3}{5})=\frac{9}{5}$

【解答】 A

166．$\alpha=\beta$是$\tan\alpha=\tan\beta$的

[　　]

A．充分但不必要条件

B．必要但不充分条件

C．充要条件

D．既非充分条件，又非必要条件

【解答】 全面考察α、β的取值，易知$\alpha=\beta=90°$时，$\tan\alpha$和$\tan\beta$不存在，更无法相等，应选D．

167．函数$y=\cos^2x-3\cos x+2$的最小值是

[　　]

A．2　　　　　　　　　　B．0

C．$-\frac{1}{4}$　　　　　　　　　　D．6

【解答】　$y=(\cos x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$，

∵$-1\leq\cos x\leq 1$，∴当 $\cos x=1$ 时，得 $y_{min}=0$，故选 B．

168．方程 $\sqrt{\sin 2x}=\sqrt{\sin x}$ 的解集是

[　　]

A．　$\{x|x=k\pi，k\in Z\}$

B．　$\{x|x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}，k\in Z\}$

C．$\{x|x=k\pi 或 x=2k\pi+\frac{\pi}{3}，k\in Z\}$

D．$\{x|x=k\pi 或 x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}，k\in Z\}$

【解答】　由 sisx＞0 判断排除 B、D；又 sinx=0，即 x=kπ是方程的部分解，故选 C．

169．函数 $y=\sin(2x+\frac{5\pi}{2})$ 的图象的一条对称轴方程是

[　　]

A．$x=-\frac{\pi}{2}$　　　　　　　　　　B．$x=-\frac{\pi}{4}$

C．$x=\frac{\pi}{8}$　　　　　　　　　　D．$x=\frac{5\pi}{4}$

【精析与解答】　①所求对称轴由 $2x+\frac{5\pi}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{k\pi}{2}-\pi$ 确定，取 k=1，即选 A．

②由题设得 $y=\cos 2x$，其图象以 $2x=k\pi$ 即 $x=\frac{k\pi}{2}$ 为对称轴，取 k=－1，即选 A．

170．设θ是第二象限角，则必有

[　　]

A．$\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$

B．$\tan\frac{\theta}{2}<\cot\frac{\theta}{2}$

C．$\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$

D．$\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$

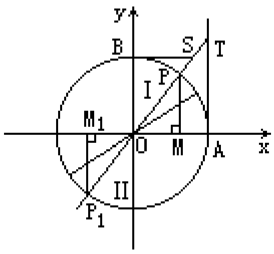


图 34

【精析】 由已知$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi$．得$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，在单位圆中确定$\frac{\theta}{2}$所在的区域如图34中，区域Ⅰ和区域Ⅱ，画出这个区域内某个角的正弦线、余弦线、正切线和余切线MP，OM，AT，BS．观察可得区域Ⅰ和区域Ⅱ内，都有AT＞BS，所以都有$\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$，可知只有A正确．

事实上，虽然在区域Ⅰ，有MP＞OM，但在区域Ⅱ，由于$M_1P_1<0$，$OM_1<0$，且$|M_1P_1|>|OM_1|$，所以$M_1P<OM_1$，即有$\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$．故C、D都不正确．

171．当$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$的

[ ]

A．最大值是1，最小值是－1

B．最大值是1，最小值是$-\frac{1}{2}$

C．最大值是2，最小值是－2

D．最大值是2，最小值是－1

【精析】 由$f(0)=\sqrt{3}>1$，可排除A，B，其次由于$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$，知$\sqrt{3}\cos x\geq 0$，$\sin x\geq -1$，所以恒有$f(x)\geq -1$，故排除C，答案只能为D．

172．已知$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，并且α是第二象限角，那么$\tan\alpha$的值等于

[ ]

A．$-\frac{4}{3}$　　B．$-\frac{3}{4}$

C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

【精析】 本题考查同角三角函数关系式的运用．若能认真分析已知条件，根据三角函数性质即可估值求解．由α是第二象限角和 sinα＞

$\frac{\sqrt{2}}{2}$，可知$\tan\alpha < -1$，从而排除B，C，D，得答案A．

173．使 sinx≤cosx 成立的 x 的一个区间

[　　]

A．$[-\frac{3}{4}\pi，\frac{\pi}{4}]$　　B．$[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$

C．$[-\frac{\pi}{4}\pi，\frac{3}{4}\pi]$　　D．$[0，\pi]$

【精析】　当 sinx≤cosx 时，角 x 的终边应在直线 y=x 的下方或在直线 y=x 上(如图 35)，所以选 A．．(如图 36 所示)

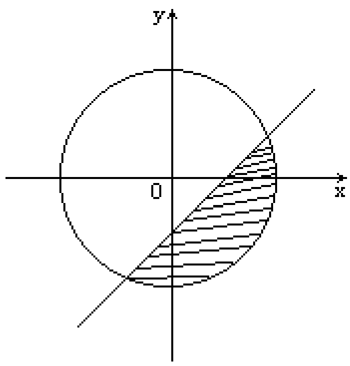


图 35

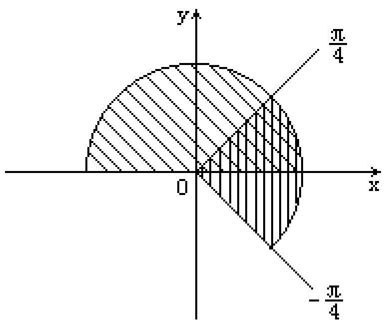


图 36

174．已知 $0\leq\theta\leq2\pi$，集合 $E=\{\theta|\cos\theta<\sin\theta\}$，$F=\{\theta|\tan\theta<\sin\theta\}$，E∩F 为

[　　]

A．$(\frac{\pi}{2}，\pi)$　　B．$(\frac{\pi}{4}，\frac{3}{4}\pi)$

C．$(\pi，\frac{3}{2}\pi)$　　D．$(\frac{3}{4}\pi，\frac{5}{4}\pi)$

【精析】　作单位圆和 y=x 的图象(如图 37 所示)．当 $\cos\theta<\sin\theta$ 时，角θ的终边在直线 y=x 上方；当 $\tan\theta<\sin\theta$ 时，角θ的终边在第二、四象限，故 $\theta\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$，选A．

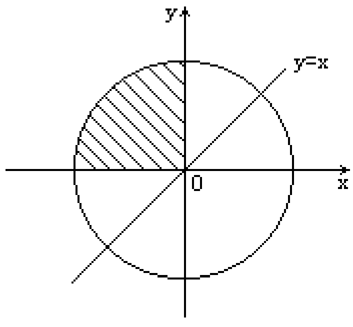


图 37

二、填空题

175．函数$f(x)=\frac{x}{2}-2+\sqrt{4-x^2}$的值域是__________．

【解答】 ∵定义域为$-2\le x\le 2$，

∴可设$x=2\sin\theta\ (-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

∴$f(x)=\sin\theta-2+2\cos\theta$

$=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)-2$，

其中辅助角φ满足$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

首先辅助角φ必为锐角，大约比$\frac{\pi}{3}$稍大些，

∴ $\theta+\varphi\in[-\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}，\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}]$，

∴$\sin(\theta+\varphi)$的最大值为1(∵ $\theta+\varphi$可以达到$\frac{\pi}{2}$)，$\sin(\theta+\varphi)$的最小值应为

$\sin(-\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}})$

$=-\sin[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}]=-\cos(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}})$

$=-\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}})=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，

∴ $-\frac{1}{\sqrt{5}}\le\sin(\theta+\varphi)\le 1$，

$-3\le f(x)\le\sqrt{5}-2$.

176．函数$y=\cos(-x+\frac{\pi}{3})$的单调递减区间为__________.

【解答】 $y=\cos(-x+\frac{\pi}{3})=\cos(x-\frac{\pi}{3})$

∵$y=\cos t$在$[2k\pi，2k\pi+\pi](k\in Z)$递减.

由$2k\pi\le x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\pi$得：

$2k\pi+\frac{\pi}{3}\le x\le 2k\pi+\frac{4\pi}{3}$.

故$y=\cos(-x+\frac{\pi}{3})$的递减区间为

$[2k\pi+\frac{\pi}{3}，2k\pi+\frac{4\pi}{3}](k\in Z)$.

177．函数$y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$的最大值等于________.

【解答】 设$\sin x=a+b$，$\cos x=a-b$.

从而由$\sin^2x+\cos^2x=1$可得：

$a^2+b^2=\frac{1}{2}$，∴$b^2=\frac{1}{2}-a^2$.

由$b^2\geq 0$得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴y=sinxcosx+sinx+cosx=a^2-b^2+2a

$=a^2-(\frac{1}{2}-a^2)+2a=2(a+\frac{1}{2})^2-1$.

故当$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$y_{max}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

178．函数$y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}+\frac{|\cot x|}{\cot x}$的值域是__________.

【解答】 分四个象限分别考查，易得{－2，0，4}.

179．设 A、B 是锐角三角形的两个内角，且 tanA、tanB 是方程 $x^2+mx+m+4=0$ 的两个实根，则实数 m 的取值范围为________ .

【解答】 由题意，得：

$$\begin{cases}\Delta=m^2-4(m+4)\geq 0,\\ \tan A+\tan B=m>0\\ \tan A\cdot\tan B=m+4>0.\end{cases}$$

解之得$-4<m\leq 2-2\sqrt{5}$. ①

又∵A、B 为锐角三角形的两内角，

∴$A+B>\frac{\pi}{2}$，∴$\tan(A+B)<0$，即有$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{-m}{1-(m+4)}<0$，

从而得

$-3<m<0$

综合①、②，得$-3<m\leq 2-2\sqrt{5}$.

180．已知关于 x 的方程 $\sin^4x+2a\sin^2x-2a-2=0$ 有解，实数 a 的取值范围为________.

【精析与解答】 原方程整理得：

$2a(\sin^2x-1)=2-\sin^4x$.

显然$\sin^2x\neq 1$，否则与原方程有解矛盾，隔离出a得：$a=\frac{2-\sin^4x}{2(\sin^2x-1)}$.

再令$t=\sin^2x$，$0\leq t<1$，$a=\frac{2-t^2}{2(t-1)}$.

从而将方程有解等价转化为：实数a要在函数$f(t)=\frac{2-t^2}{2(t-1)}(0\leq t<1)$的值域中取值.

由于$f(t)=\frac{1}{2}(-t-1+\frac{1}{t-1})$，易知函数f(t)在[0，1]上是减函数，所以

$f(t)\leq f(0)=-1$，即 $a\leq -1$.

所以实数 a 的取值范围是$(-\infty，-1]$.

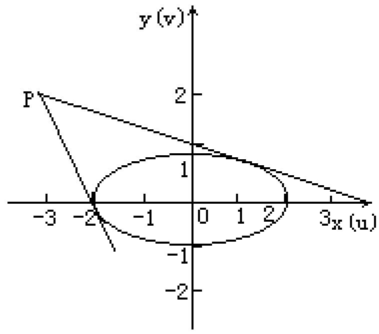


图 38

181．函数$f(x)=\dfrac{\sin x-2}{2\cos x+3}$的值域为__________．

【精析】 将函数变形为$f(x)=\dfrac{\sin x-2}{2\cos x-(-3)}$，可以看出，$f(x)$是由定点A坐标为(－3，2)与动点P坐标为(2cosx，sinx)连线的斜率构成的，而动点P在$\begin{cases}u=2\cos x(|u|\leq 2)\\ v=\sin x\quad(|v|\leq 1)\end{cases}$，即$\dfrac{u^2}{4}+v^2=1$的椭圆上．作出图38，显然过点P的2条切线的斜率应该是f(x)的最大值和最小值，代入已知切线

斜率的切线方程$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$(其中a为长半轴，b为短半轴)中得$y=kx\pm\sqrt{4k^2+1}$．

又切线过P(－3，2)，所以

$2=3k\pm\sqrt{4k^2+1}$，得$k=-\dfrac{6}{5}\pm\dfrac{\sqrt{21}}{5}$．

故 $-\dfrac{6}{5}-\dfrac{\sqrt{21}}{5}\leq f(x)\leq-\dfrac{6}{5}+\dfrac{\sqrt{21}}{5}$．

182.已知 $f(x)=ax^3+b\sin x+cx+2$,其中a、b、c为常数且f(3)=5.则f(－3)=________.

【解答】 $f(x)=ax^3+b\sin x+cx+2$.

$\therefore f(-x)=a(-x)^3+b\sin(-x)+c(-x)+2$

$=-(ax^3+b\sin x+cx)+2$.

$\therefore f(x)+f(-x)=4$,

$\therefore f(3)+f(-3)=4$.

$\because f(3)=5$，$\therefore f(-3)=-1$.

183．函数$y=\dfrac{3\cos x-1}{\sin x+\cos x+2}$的值域为__________．

【解答】 将函数式整理成关于x的方程：

$y\sin x+(y-3)\cos x=-1-2y$，此方程有解，

$\therefore y^2+(y-3)^2\geq(-1-2y)^2$，

$\therefore y^2+5y-4\leq 0$，

$\therefore(-5-\sqrt{41})/2\leq y\leq(-5+\sqrt{41})/2$.

184．函数 $f(x)=|\sin x|+\cos x$ 的值域为________．

【解答】 f(x)的定义域是R，偶函数，周期是2π．

当$x\in[0，\pi]$时，$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)\in[-1，\sqrt{2}]$；

所以此函数的值域是$[-1，\sqrt{2}]$．

185．函数$f(x)=\lg\sin x+\sqrt{\sqrt{2}\cos x-1}$的定义域为__________．

【解答】 先在[0，2π]上考虑x的取值．作单位圆，由sinx＞0，有$x\in(0，\pi)$．由$\sqrt{2}\cos x-1\geq 0$，即$\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$，有$x\in[-\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{4}]$，其公共部分为$(0，\frac{\pi}{4}]$．再根据三角函数的周期性可得函数f(x)的定义域为：

$2k\pi<x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$．

186．求函数$f(x)=\sin^6x+\cos^6x$的最小正周期等于________．

【解答】 $f(x)=\sin^6x+\cos^6x=(\sin^2x+\cos^2x)\times(\sin^4x-\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4x$，∵cosx的最小正周期为2π，∴f(x)的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$．

187．下列命题正确的是________(填上序号)．

①若$\sin x+\sin y=\frac{1}{3}$，则$\sin y-\cos^2x$的最大值是$\frac{7}{12}$；

②函数$y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$的单调增区间是$[k\pi-\frac{\pi}{8}，k\pi+\frac{3\pi}{8}]$$(k\in Z)$；

③函数$f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$是奇函数；

④函数$y=\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{\sin x}$的最小正周期是π；

⑤设θ是第二象限角，则$\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$，且$\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$．

【解答】 对于命题①，将二元问题化为一元问题后，还得注意隐含条件．

令$T=\sin y-\cos^2x$，由$\sin x+\sin y=\frac{1}{3}$知 $\sin y=\frac{1}{3}-\sin x$，

$\therefore T=\frac{1}{3}-\sin x-\cos^2x=\sin^2x-\sin x-\frac{2}{3}$．

考虑到$-1\leq\sin y=\frac{1}{3}-\sin x\leq 1$，

$\therefore -\frac{2}{3}\leq\sin x\leq 1$．又令$\sin x=t$，

$\therefore t\in[-\frac{2}{3}，1]$．$\therefore T=t^2-t-\frac{2}{3}(t\in[-\frac{2}{3}，1])$，由图象可知当 $t=-\frac{2}{3}$ 时，$T_{max}=-\frac{4}{9}$．

∴①错．

对于命题②，须知函数 $y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$ 是由 $y=\sin u$ 和 $u=\frac{\pi}{4}-2x$ 复合而成．因 u(x)为减函数，故要使 y 随 x 的增加而增加，就必须 y 随 u 的增加而减少．

(2)当 $\alpha=1$ 时，$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}=n$．

此题还可以用图象讨论(略)．

对于命题③，如果对 f(x)的表达式不做变形，可能会认为 $f(-x)=\frac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}$ 与 $f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 无相等或差符号的关系；如果作变形，会有 $f(x)=\tan\frac{x}{2}$，易知 $f(-x)=f(x)$．此时若得出 $f(x)$ 是奇函数的结论，就为时过早，别忘了必要条件——定义域应关于原点对称．

由 $1+\sin x+\cos x\neq 0$ 有 $x\neq 2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 且 $x\neq 2k\pi+\pi$，显然定义域不关于原点对称，∴③错．

对于命题④，高考只要求会求经变形后得到形如 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=\tan(\omega x+\varphi)$ 等简单函数的三角函数周期．另外，别忽视了定义域．变形后有 y=－cotx，定义域为 x≠kπ，故其最小正周期为π，∴④正确．

对于命题⑤，可认为来源于 1994 年高考题．考查三角函数值的分布规律，即角的范围与三角函数值的大小间的关系，这类问题用代表区间法、图象法处理起来形象、直观、简单易行．

∵θ为第二象限角

$\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi$，

$\therefore k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$．

当 $k=2m(m\in Z)$ 时，$2m\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2m\pi+\frac{\pi}{2}$，在代表区间 $(\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2})$ 上，由正、余弦函数图象可知 $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$，由正、余切函数图象可知，

$$\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}.$$

当$k=2m+1(m\in Z)$时，$2m\pi+\frac{5\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<2m\pi+\frac{3\pi}{2}$，在代表区间$(\frac{5\pi}{4}，\frac{3\pi}{2})$上，由图象易知$\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$，$\tan\frac{\theta}{2}>\cot\frac{\theta}{2}$．

∴⑤错．

由以上讨论可知五个命题中只有④正确．

188．$y=\tan(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{\cos 2x}$的最小正周期是__________．

【解答】 $\frac{\pi}{2}$

189．函数$y=\sqrt{\cos(\sin x)}$的定义域为__________．

【精析】 因为$-1\leq\sin x\leq1$，而余弦函数在-1弧度与1弧度之内恒为正，所以$\cos(\sin x)>0$．

【解答】 $x\in R$．

190．函数 $y=\sqrt{1+2\cos x}+\lg(2\sin x+\sqrt{3})$的定义域为__________．

【精析】 因为$\begin{cases}1+2\cos x\geq0\\2\sin x+\sqrt{3}>0\end{cases}$，即$\begin{cases}\cos x\geq-\frac{1}{2}\\\sin x\geq-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，从单位圆中可知，

$$\begin{cases}2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in Z),\\2k\pi-\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{4\pi}{3}(k\in Z).\end{cases}$$

所以，函数的定义域是$\{x|2k\pi-\frac{\pi}{3}<x\leq2k\pi+\frac{2\pi}{3}，k\in Z\}$．

【解答】 $\{x|2k\pi-\frac{\pi}{3}<x\leq2k\pi+\frac{2\pi}{3}，k\in Z\}$

191．设 A、B 都是锐角，且 cosA＞sinB，则 A＋B 的取值范围是________．

【精析】 由已知有 cosA＞cos(90°－B)．因为 0°＜90°－B＜90°，且余弦函数在第一象限为减函数，所以有 0＜A＜90°－B，即 0＜A＋B＜90°．

【解答】 0°＜A＋B＜90°

192．设 tanθ＋secθ=5，则 cosθ=________．

【精析】 可设 cosθ=m(|m|≤1)．

利用勾股定理易得$\tan\theta=\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$．于是$\frac{\sqrt{1-m^2}+1}{m}=5$，m可解．

【解答】 $\frac{5}{13}$

193．已知$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{8}$，且$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则$\cos\alpha-\sin\alpha$等于________．

【精析】 因为$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以$\cos\alpha-\sin\alpha<0$.

由$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{4}$，得$\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

194．已知函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0，0<\varphi<\pi)$的两个相邻的最值点为$(\frac{\pi}{6}，2)$和$(\frac{2\pi}{3}，-2)$，则这个函数的表达式为__________.

【精析】 由最值点的纵坐标得振幅 A=2．因两个相邻的最值点

令$S_n{}'n=a+2a^2+\cdots+na^n$.

于是有：

$y=2\sin(2x+\varphi)$.

设 $X=2x+\varphi$.

$\therefore (1-a)S_n{}'=a+a^2+\cdots+a^n-na^{n+1}$

$=\frac{a(1-a^n)}{1-a}-na^{n+1}$，

【解答】 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

195．不等式$(\frac{1}{4})^{2\sin x}-3\times(\frac{1}{4})^{\sin x}<-2$的解集为__________.

【精析】 令$(\frac{1}{4})^{\sin x}=y$，则有$y^2-3y+2<0$，$1<y<2$，即$-\frac{1}{2}<\sin x<0$．从单位圆中的正弦线可以得到解集．

【解答】 $\{x|2k\pi+\pi<x<2k\pi+\frac{7}{6}\pi\}\cup\{x|2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<2k\pi\}$ $(k\in Z)$

三、解答题

196．比较$\tan\frac{9\pi}{8}$与$\tan\frac{\pi}{7}$的大小．

【解答】 $\tan\frac{9\pi}{8}=\tan(\pi+\frac{\pi}{8})=\tan\frac{\pi}{8}$.

$\because \frac{\pi}{8}，\frac{\pi}{7}\in(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$且$\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{7}$，

又$y=\tan x$在$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$内是增函数.

$\therefore \tan\frac{\pi}{8} < \tan\frac{\pi}{7}$.

即$\tan\frac{9\pi}{8} < \tan\frac{\pi}{7}$.

197.设关于 x 的函数 $y=2\cos^2x-2a\cos x-(2a+1)$的最小值为 f(a).

(1)试用 a 写出 f(a)的表达式；

(2)试确定$f(a)=\frac{1}{2}$的a值，并对此时的a，求y的最大值.

【解答】 (1)$y=2(\cos x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2+4a+2}{2}$.

因为$|\cos x|\le 1$，以下对 a 值进行讨论：

①当$\frac{a}{2}<-1$，即$a<-2$时，$\cos x=-1$，y取得最小值，即

$y_{\min}=2(-1-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2+4a+2}{2}=1$.

②当$-1\le\frac{a}{2}\le 1$，即$-2\le a\le 2$时，$\cos x=\frac{a}{2}$，y取得最小值，即

$$y_{\min}=-\frac{a^2+4a+2}{2}.$$

③当$\frac{a}{2}>1$，即$a>2$时，$\cos x=1$，y取得最小值$y_{\min}=1-4a$.

$$\therefore f(a)=\begin{cases}1 & (a<-2)\\ -\frac{a^2}{2}-2a-1 & (-2\le a\le 2)\\ 1-4a & (a>2)\end{cases}$$

(2)$f(a)=\frac{1}{2}$，解得$1-4a=\frac{1}{2}$. 则$a=\frac{1}{8}$与$a\ge 2$矛盾.

于是只能有$-\frac{a^2}{2}-2a-1=\frac{1}{2}$.

解得 $a=-1$.

此时有$y=2(\cos x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$.

当 $\cos x=1$，即 $x=2k\pi(k\in Z)$时，$y_{max}=5$.

198. 已知函数$f(x)=2a\sin x\cos x+2b\cos^2x$，$f(\frac{\pi}{6})=6+\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$f(0)=8$.

(1)求 a、b 的值以及 f(x)的周期和最大值；

(2)若$\alpha\ne\beta+k\pi(k\in Z)$，且α、β是方程 $f(x)=0$ 的两个根，求$\tan(\alpha+\beta)$值.

【解答】 (1)由已知条件，有

8=f(0)=2b，

$6+\frac{3\sqrt{3}}{2}=f(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}a+2b\cdot(\cos\frac{\pi}{6})^2$.

解得 a=3，b=4.

所以$f(x)=3\sin2x+8\cos^2x=3\sin2x+8\times\frac{1+\cos2x}{2}$

$=4+3\sin2x+4\cos2x=4+5\sin(2x+\varphi)$，

其中 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$.

故 f(x)的周期为π，最大值为 9.

(2)因α、β是方程 f(x)=0 的两个根，所以

3sin2α＋4cos2α＋4=0，3sin2β＋4cos2β＋4=0.

两式相减得 3(sin2α－sin2β)＋4(cos2α－cos2β)=0.

即 3×2cos(α＋β)sin(α－β)=4×2sin(α＋β)sin(α－β).

因α－β≠kπ(k∈Z)，所以，sin(α－β)≠0.

于是$3\cos(\alpha+\beta)=4\sin(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$.

199．化简 $\frac{\sec\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}+\frac{2\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$.

【精析与解答】 $\frac{\sec\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}+\frac{2\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$

$=\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha}}+\frac{2\tan\alpha}{\sqrt{\tan^2\alpha}}$

$=\frac{\sec\alpha}{|\sec\alpha|}+\frac{2\tan\alpha}{|\tan\alpha|}$

(1)若α在第一象限时，则

原式$=\frac{\sec\alpha}{\sec\alpha}+\frac{2\tan\alpha}{\tan\alpha}$

=1＋2=3.

(2)若α在第二象限时，则

原式$=\frac{\sec\alpha}{-\sec\alpha}+\frac{2\tan\alpha}{-\tan\alpha}$

=－1－2=－3.

(3)若α在第三象限时，则

原式$=\frac{\sec\alpha}{-\sec\alpha}+\frac{2\tan\alpha}{\tan\alpha}$

=－1＋2=1.

(4)若α在第四象限时，则

原式$=\frac{\sec\alpha}{\sec\alpha}+\frac{2\tan\alpha}{-\tan\alpha}$

=1－2=－1

注意：学生易错在求 $\sec^2\alpha$ 和 $\tan^2\alpha$ 的算术平方根，不分α的象限一律都得到 $\sqrt{\sec^2\alpha}=\sec\alpha$，$\sqrt{\tan^2\alpha}=\tan\alpha$．

出现错误的原因：首先是学生认识不清不同三角函数在α是不同象限角时，其函数值的正负情况是有所变化的；第二是学生对于同角三角函数关系式理解片面；由于这两个原因产生了第三个原因是缺乏分类讨论意识．

解决问题的办法：首先要明确六个三角函数的函数值在每个象限的符号，即α在第一象限时全为正；α在第二象限时只有 sinα、cscα为正；α在第三象限时只有 tanα、cotα为正；α在第四象限时只有 cosα、secα为正．第二要正确全面地理解同角三角函数的平方关系，由于该关系解决的是平方关系，因此没有对其符号加以讨论．所以若用到平方关系，必须要注意角所在象限，从而决定开方后符号的选择．

200．求函数 $y=\cos^2x+3\sin x$ 的最大值或最小值．

【精析与解答】 $y=\cos^2x+3\sin x$

$$=1-\sin^2x+3\sin x$$

$$=-\sin^2x+3\sin x+1$$

$$=-(\sin x-\frac{3}{2})^2+\frac{13}{4}.$$

因为 $-1\leq\sin x\leq 1$，$\sin x\neq\frac{3}{2}$，

所以，当 $\sin x=1$，即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时，$y_{max}=3$，当 $\sin x=-1$，即 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时，$y_{min}=-3$．

注意：学生在利用二次函数解本题时往往忽略 sinx 的有界性，简单地用二次函数顶点的纵坐标公式求出 y 的最大值，即由 $y=\cos^2x+3\sin x=-\sin^2x+3\sin x+1$ 得出：$a=-1$，$b=3$，$c=1$，则y的最大值 $=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{13}{4}$，而实际上，对于任意的x，$\sin\neq\frac{3}{2}$，因此 $y_{max}=\frac{13}{4}$ 是错误的．另外有不少学生利用根的判别式来求函数的最值，即由 $y=-\sin^2x+3\sin x+1$ 得到：$-\sin^2x+3\sin x+1-y=0$，$\Delta=9+4(1-y)\geq 0$，则 $y\leq\frac{13}{4}$，

$y_{max}=\frac{13}{4}$，显然是错的．原因是 $y=\frac{13}{4}$，则 $\sin x=\frac{3}{2}$，这是不可能的．再有就是部分学生直接讨论 $\cos^2x$、sinx 的有界性，由 $0\leq\cos^2x\leq 1$，$-3\leq 3\sin x\leq 3$，得出 $-3\leq y\leq 4$，则 $y_{min}=-3$，$y_{max}=4$，这里的错误在于 $\cos^2x$ 取最大值 1 时，$x=k\pi(k\in Z)$，sinx 取最大值 1 时，$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，x的取值不等，因此，$y_{max}=4$ 是错误的．

解决问题的方法，在教学中要强调 y=cosx 和 y=sinx 的有界性，二

次函数的最值是顶点的纵坐标的前提条件是横坐标是二次函数定义域中的值．在求正(余)弦的二次函数最大(小)值时，一般必须用配方法结合函数的有界性($-1\leq\sin x\leq 1$，$-1\leq\cos x\leq 1$)来求．

201．设$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，试比较$\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}$与$\tan\theta$的大小．

【解答】 如图39所示，设P(cosθ，sinθ)，A(1，1)，则有$k_{OP}=\tan\theta$，$k_{PA}=\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}$．

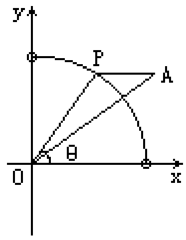


图 39

(1)当$0<\theta<\frac{\pi}{4}$时有$k_{OP}<k_{PA}$，即$\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}>\tan\theta$；

(2)当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，$k_{OP}=k_{PA}$，即$\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\tan\theta$；

(3)当$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$时，$k_{OP}<k_{PA}$，即$\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}<\tan\theta$．

202．已知$2\sin\alpha-\cos\alpha=1$，求$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha-\cos\alpha+1}$的值．

【解答】 设$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha-\cos\alpha+1}=k$，则

$(1-k)\sin\alpha+(1+k)\cos\alpha=k-1$

上式与已知$2\sin\alpha-\cos\alpha=1$，联立解得

$\sin\alpha=\frac{2k}{3+k}$，$\cos\alpha=\frac{3k-3}{3+k}(k\neq-3)$

由$(\frac{2k}{3+k})^2+(\frac{3k-3}{3+k})^2=1$解得$k=0$或$k=2$．

∴原式的值为0或2．

203．求函数$y=\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}$(x∈(0，π))的最小值．

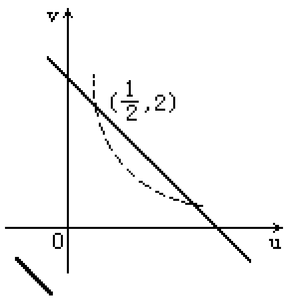


图 40

【解答】 令$u=\frac{\sin x}{2}$，$v=\frac{2}{\sin x}$，则$uv=1(0<u\le\frac{1}{2})$，于是问题转化为求过双曲线$uv=1(0<u\le\frac{1}{2})$的弧上一点，且斜率为－1的直线系$u+v=y$在 v 轴上的截距的最小值．

由图40易知当直线过$(\frac{1}{2}, 2)$时，$y_{\min}=\frac{5}{2}$．

204．设$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，试比较$(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$与$(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$的大小．

【解答】 $\because 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，$\therefore 0<\sin\alpha<\cos\alpha<1$，

又$\because y=x^{\cos\alpha}$在(0，1)上递增，故可知$(\sin\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\cos\alpha}$．

由$y=(\cos\alpha)^{\alpha}$在(0，1)上递减，又可知

$(\cos\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$，

$\therefore(\sin\alpha)^{\cos\alpha}<(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$．

205．在△ABC中，若$c=\frac{a+b}{\cos A+\cos B}$，试判断△ABC的形状．

【解答】 $\because c=\frac{a+b}{\cos A+\cos B}$

$\therefore c\cos A+c\cos B=a+b$

$=(b\cos C+c\cos B)+(a\cos C+c\cos A)$

$\therefore b\cos C+a\cos C=0$，即$(a+b)\cos C=0$

又$a+b\ne0$，$\therefore\cos C=0$，$\therefore C=\pi/2$．

故△ABC 为直角三角形．

206．求证$|\sin nx|\le n|\sin x|(n\in N)$．

【证明】 ①当 n=1 时，命题显然成立．

②假设 n=k 时，$|\sin kx|\le k|\sin x|$成立，则当 n=k＋1 时，就有：

$|\sin(k+1)x|=|\sin(kx+x)|$

$=|\sin kx\cdot\cos x+\cos kx\cdot\sin x|$

$\le|\sin kx|\cdot|\cos x|+|\cos kx|\cdot|\sin x|$

$\le|\sin kx|+|\sin x|$

$\le k|\sin x|+|\sin x|$

$=(k+1)|\sin x|$成立．

综合①、②可知，原命题成立．

207．图41是函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$图象的一部分，试确定A，ω，φ，k的值．

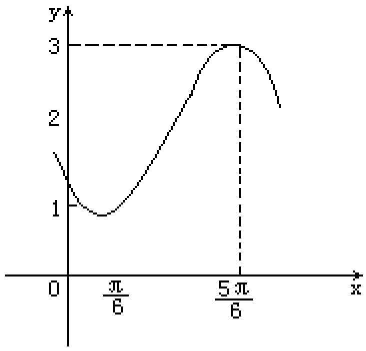


图 41

【解答】 $A=\frac{3-1}{2}=1$；$k=\frac{3+1}{2}=2$；$\omega=\frac{\pi}{|\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}|}=\frac{3}{2}$；

把$(\frac{\pi}{6}$，$1)$代入$y=\sin(\frac{3}{2}x+\varphi)+2$中，

得 $1=\sin(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\varphi)+2$，

$\therefore \sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)=-1$，

$\therefore \frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \varphi=2k\pi-\frac{3}{4}\pi\ (k\in Z)$．

因此，所求函数的解析式为

$y=\sin(\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}\pi)+2$．

208．已知函数 $y=-(\sin\theta-x)^2+x^2-2x-1(0\leq\theta\leq\pi/2)$的最大值是负数，求 x 的取值范围．

【解法一】 视 $\sin\theta$ 为自变量．

$y=-(\sin\theta-x)^2+x^2-2x-1$．

因为 $0\leq\sin\theta\leq1$，所以当 $0\leq x\leq1$ 时，$y_{max}=x^2-2x-1<0$，得

$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$．

因此 $0\leq x\leq1$．

当 $x>1$，$\sin\theta=1$ 时 y 达到最大值，所以 $y_{max}=-(1-x)^2+x^2-2x-1<0$，即 $-2<0$．

因此 $x>1$．

当 $x<0$，$\sin\theta=-1$ 时 y 达到最大值，所以 $y_{max}=-(-1-x)^2+x^2-2x-1<0$，即 $x>-1/2$．

由上述讨论可知：$x>-1/2$．

【解法二】 视 x 为自变量．

函数化为：

$y=2(\sin\theta-1)x-(1+\sin^2\theta)<0$．

若 $\sin\theta=1$，那么 x 可取任意实数．

若 $0\le\sin\theta<1$ 时，$2(\sin\theta-1)<0$.

所以 $x>\dfrac{1+\sin^2\theta}{2(\sin\theta-1)}$．因此必须求 $\dfrac{1+\sin^2\theta}{2(\sin\theta-1)}$ 的最大值．

令 $t=1-\sin\theta\ (0\le\theta\le\pi/2)$，

则 $0<t\le1$，$\sin\theta=1-t$，

$$\frac{1+\sin^2\theta}{2(\sin\theta-1)}=\frac{1+(1-t)^2}{-2t}=-\frac{1}{2}(t+\frac{2}{t}-2)$$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}-\sqrt{t})^2+2\sqrt{2}-2](\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}>0)$$

因为 $0<t\le1$，所以当且仅当 $t=1$ 时，$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}$ 取得最小值 $\sqrt{2}-1$．

所以 $\dfrac{1+\sin^2\theta}{2(\sin\theta-1)}$ 的最大值为 $-\dfrac{1}{2}$，x 应大于 $(-\infty,\ -\dfrac{1}{2}]$ 中的所有实数．

所以 $x>-\dfrac{1}{2}$ 即为所求．

209．试求函数 $y=\dfrac{\sin^2x+\sin x+1}{\cos^2x-\sin x-3}$ 的最大值和最小值．

【解答】 设 $A(\cos^2x-\sin x,\ \sin^2x+\sin x)$、$B(3,\ -1)$．

A 点轨迹：$\begin{cases}s=\cos^2x-\sin x\\ t=\sin^2x+\sin x\end{cases}$ 得 $s+t=1$，且 $s=\cos^2x-\sin x=-\sin^2x-\sin x+1=-(\sin x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{5}{4}$．

$\therefore -1\le s\le\dfrac{5}{4}$．

A 点轨迹为线段 MN．

$M(-1,\ 2)$、$N(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{-1}{4})$．

可求斜率 $k_{BN}=\dfrac{-1+\frac{1}{4}}{3-\frac{5}{4}}=-\dfrac{3}{7}$，$k_{BM}=\dfrac{-1-2}{3+1}=-\dfrac{3}{4}$．

$\therefore -\dfrac{3}{4}\le y\le-\dfrac{3}{7}$

即 $y_{max}=-\dfrac{3}{7}$，$y_{min}=-\dfrac{3}{4}$．

210．在圆心为 O，半径为 R(R 为常数)的半圆板内画内接矩形(如图 42 所示)，当矩形长和宽各取多少时，矩形面积最大，并求最大面积．

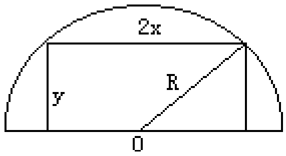


图 42

【解答】设此矩形长为 2x，宽为 y，则 $x^2+y^2=R^2$，所以面积 S $=2xy\le x^2+y^2=R^2$．当且仅当$x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}R$，即矩形宽为$\frac{\sqrt{2}}{2}R$，长为$\sqrt{2}R$时，矩形面积取最大值R^2．

211．求函数$y=\frac{3-\sin x}{2+\cos x}$的值域．(如图43所示)

【解答】设 $a=2+\cos x$，$b=3-\sin x$，消去 x 得$(a-2)^2+(b-3)^2=1$．由$y=\frac{b}{a}$得$b=ya$，其表示以y为斜率过原点的直线，如图 43．在这些直线中，以 OA(OB)所在直线的斜率为最小(大)．进而，易求得$y\in[2-\frac{2}{3}\sqrt{2}，2+\frac{2}{3}\sqrt{2}]$．

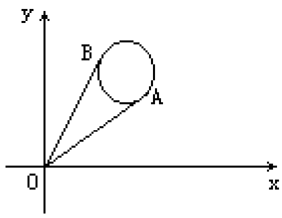


图 43

212．已知△ABC 的三边为 a、b、c，其面积为 S，试证 a、b、c中至少有1个不小于$2\sqrt{S}/\sqrt[4]{3}$．

【证明】设 $p=(a+b+c)/2$，则

$$\frac{p}{3}=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\ge\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

所以 $p^3\ge 27(p-a)(p-b)(p-c)$，

$p^4\ge 27p(p-a)(p-b)(p-c)=27S^2$，

$p^2\ge 3\sqrt{3}S$．

所以$(a+b+c)^2/4\ge 3\sqrt{3}S$，

$(a+b+c)^2/3\ge 4\sqrt{3}S$．

又因为 $a^2+b^2+c^2\ge(a+b+c)^2/3$，

所以$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$．因此$a^2$、$b^2$、$c^2$中至少有1个不小于$4S/\sqrt{3}$，

又知a、b、c均为正数，故a、b、c中至少有1个不小于$2\sqrt{S}/\sqrt[4]{3}$．

213．在△ABC 中，求证：

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}.$$

【精析】式子的左端仅是关于边的关系，而右端是边角关系，两端

不协调，为了两端和谐一致，可利用余弦定理加以统一．

右端$=\frac{1}{a}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{1}{b}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{1}{c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$．

214．求下列函数的周期：

(1) $f(x)=\tan3\pi x+\cot2\pi x$；

(2) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin2x+\frac{1}{3}\sin3x$．

【解答】(1)因为$\tan3\pi x$、$\tan2\pi x$的最小正周期分别为$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$，1是$\frac{1}{2}$与$\frac{1}{3}$的公倍数中的最小正数，所以$f(x)$的周期为1．

(2)因为$\sin x$、$\sin2x$、$\sin3x$的最小正周期分别为2π、π、$\frac{2\pi}{3}$，所以函数$f(x)$的最小正周期$T=2\pi$．

215．函数$y=|\sin x|+|\cos x|$，是否存在最小正周期，若有，试求之．

【解答】2π是函数$\sin x$及$\cos x$的一个周期，设$T'=\frac{2\pi}{k}(k\in N)$，则在$|\sin(x+T')|+|\cos(x+T')|=|\sin x|+|\cos x|$中，令$x=0$得$|\sin T'|+|\cos T'|=1$，两边平方得$\sin2T'=0$，$\therefore\frac{4\pi}{k}=n\pi(n\in Z)$，$\therefore k$只能取1、2、4，当$k=4$时，$T'=\frac{\pi}{2}$，由于$|\sin(x+\frac{\pi}{2})|+|\cos(x+\frac{\pi}{2})|=|\sin x|+|\cos x|$，$\therefore\frac{\pi}{2}$是$y=|\sin x|+|\cos x|$的最小正周期．

第四章　两角和与差的三角函数

一、选择题

216．若 $\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta=0$，则 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta=$

[　　]

A．-1　　B．0

C．1　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解答】B

217．已知 $\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=1998$，则 $\sec2\alpha+\tan2\alpha$ 的值是

[　　]

A．1997　　B．1998

C．1999　　D．2000

【解答】B

218．若函数 $f(x)=\frac{1}{\cos2x-2}$ 的最大值为M，最小值为N，则

[　　]

A．$M-3N=0$　　B．$M+3N=0$

C．$3M-N=0$　　D．$3M+N=0$

【解答】C

219．若△ABC 的三内角 A、B、C 成等差数列，那么 $\cos^2A+\cos^2C$ 的

[　　]

A．最小值为 $\frac{1}{2}$　　B．最小值为 $\frac{3}{2}$

C．最小值为2　　D．最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解答】A

220．若 $x+y=\frac{\pi}{3}$，则 $\sin x\cdot\sin y$ 的最小值是

[　　]

A．-1　　B．$-\frac{1}{2}$

C．$-\frac{3}{4}$　　D．$\frac{1}{4}$

【解答】C

221．设 $\theta\in(0，2\pi)$，若 $\sin\theta<0$ 且 $\cos2\theta<0$，则 θ 的范围是

[　　]

A．$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$　　B．$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{7\pi}{4}$

C．$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$　　D．$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}$

【解答】B

222．已知α、$\beta\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$且$\cos\alpha+\sin\beta>0$，则下列式子成立的是

[　　]

A．$\alpha+\beta<\pi$　　B．$\alpha+\beta>\frac{3\pi}{2}$

C．$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$　　D．$\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$

【解答】D

223．函数$f(x)=\sqrt{\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-1}$的定义域是

[　　]

A．$\{x|k\pi-\frac{\pi}{12}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{4}，k\in Z\}$

B．$\{x|k\pi-\frac{\pi}{6}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in Z\}$

C．$\{x|k\pi+\frac{3\pi}{12}\leq x\leq k\pi+\frac{11\pi}{12}，k\in Z\}$

D．$\{x|k\pi\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{3}，k\in Z\}$

【解答】A

224．函数$y=\lg\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$的定义域是

[　　]

A．$\{x|2k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{\pi}{4}，k\in Z\}$

B．$\{x|2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{4}，k\in Z\}$

C．$\{x|k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4}，k\in Z\}$

D．$\{x|k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4}，k\in Z\}$

【解答】D

225．函数 $y=|\cos x|-2\cos x$ 的值域是

[　　]

A．[－3，－1]　　B．[－1，3]

C．[0，3]　　D．[－3，0]

【解答】B

226．函数$y=1+4\cos x-4\sin^2 x(-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq\frac{3\pi}{4})$值域是

[　　]

A．[0，8]　　　　B．[－4，5]

C．[－3，5]　　　　D．[－3，$2\sqrt{2}$－1]

【解答】B

227．若α＝20°，β＝25°，则(1＋tanα)·(1＋tanβ)的值为

[　　]

A．1　　　　B．2

C．$1+\sqrt{2}$　　　　D．$1+\sqrt{3}$

【解答】B

228．若$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\beta-\cos\alpha)$，α、β∈(0，π)，则α－β的值为

[　　]

A．$-\frac{2\pi}{3}$　　　　B．$-\frac{\pi}{3}$

C．$\frac{\pi}{3}$　　　　D．$\frac{2\pi}{3}$

【解答】D

229．已知tanα、tanβ是方程$x^2+3\sqrt{3}x+4=0$的两根，且α，β∈$(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$，则α＋β等于

[　　]

A．$\frac{\pi}{3}$　　　　B．$\frac{\pi}{3}$或$-\frac{2\pi}{3}$

C．$-\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$　　　　D．$-\frac{2\pi}{3}$

【解答】D

230．函数$y=2\sin^2x+\sin 2x$是

[　　]

A．以π为周期的偶函数

B．以π为周期的非偶非奇函数

C．以2π为周期的奇函数

D．以2π为周期的非奇非偶函数

【精析】$y=2\times\frac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x$

$=1-\cos 2x+\sin 2x=1+\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$．

【解答】B

231．若$\cot\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则$\cos 2(\alpha+\frac{\pi}{4})$的值是

[　　]

A．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【精析】 由已知，有$\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\cos2(\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha)$
$=-\sin2\alpha=-\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解答】C

232．在△ABC 中，$\tan A\sin^2B=\tan B\sin^2A$，那么△ABC 一定是 [ ]

A．锐角三角形　　B．直角三角形

C．等腰三角形　　D．等腰三角形或直角三角形

【精析】 因$\sin A\neq0$，$\sin B\neq0$，所以将已知两边约去$\sin A\sin B$，得$\frac{\sin B}{\cos A}=\frac{\sin A}{\cos B}$，即$\frac{1}{2}\sin2B=\frac{1}{2}\sin2A$

∴2B＝2A，或 2B＋2A＝180°，即 B＝A，或 B＋A＝90°.

【解答】D

233．对函数$f(x)=\frac{\cos3x-\cos x}{\cos x}$进行讨论，得出下列四个结论：

①$f(x)>-4$；

②$f(x)<0$；

③$f(x)$的最小值为-4；

④$f(x)$的最大值为零.

其中正确的结论 [ ]

A．①和④　　B．③和④

C．①和②　　D．②和③

【精析】因为$f(x)=\frac{4\cos^3x-3\cos x-\cos x}{\cos x}=4\cos^2x-4=-4\sin^2x$，而$f(x)\leq0$，所以②错．从而排除(C)、(D).

又 $\sin^2x$ 取不到最大值 1(否则 $\cos x=0$)，所以 $f(x)$取不到最小值-4，排除

【解答】A

234．已知函数$f(x)=2a\sin^2x-2\sqrt{3}a\sin x\cos x+a+b(a<0)$的定义域是$[0,\frac{\pi}{2}]$，值域是$[-5,1]$，则a、b值分别为 [ ]

A．a＝2，b＝－5　　B．a＝－2，b＝2

C．a＝－2，b＝1　　D．a＝1，b＝－2

【精析】 $f(x)=a(1-\cos2x)-\sqrt{3}a\sin2x+a+b=-2a\sin(2x+\frac{\pi}{6})+2a+b$.

因为$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以$2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$，$\sin(2x+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$.

因为 a＜0，所以

$$\begin{cases}-2a(-\frac{1}{2})+2a+b=-5, \\ -2a+(2a+b)=1.\end{cases}$$

解得 a＝－2，b＝1.

【解答】C

235．函数 y＝－1＋sinx＋cosx，已知 y＞0，那么 x 的取值范围是

[　　]

A．$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$

B．$0<x<\frac{\pi}{2}$

C．$2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in Z)$

D．$2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

【精析】 因为$y=-1-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})>0$，

所以$\sin(x+\frac{\pi}{4})>\frac{\sqrt{2}}{2}$，则

$2k\pi+\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$.

【解答】D

236．若$\alpha\in(0，\frac{\pi}{2})$，则下列不等式中正确的是

[　　]

A．$\tan\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{2}\sin2\alpha$　　B．$\tan\frac{\alpha}{2}>\frac{1}{2}\sin2\alpha$

C．$\tan\frac{\alpha}{2}<\cot\frac{\alpha}{2}$　　D．$\tan\frac{\alpha}{2}>\cot\frac{\alpha}{2}$

【精析】用特殊值法求解，取$\alpha=\frac{\pi}{3}$验证.

【解答】C

237．已知α、β、α＋β都是锐角，则

[　　]

A．sinα＋sinβ＜sin(α＋β)＜cosα＋cosβ

B．sinα＋sinβ＜cos(α＋β)＜sin(α＋β)

C．sin(α＋β)＜cosα＋cosβ＜sinα＋sinβ

D．sin(α＋β)＜sinα＋sinβ＜cosα＋cosβ

【精析】 因为α、β及α＋β均为锐角，所以

sin(α＋β)＝sinαcosβ＋cosαsinβ＜sinα＋sinβ．排除(A)、(B)．

又 sin(α＋β)＝sinαcosβ＋cosαsinβ＜cosβ＋cosα，

所以排除(C).

【解答】D

238．设$\tan(\alpha-\beta)=\frac{2}{5}$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$，则$\tan(\alpha-2\beta)$等于

[　　]

A．$\frac{3}{8}$　B．$\frac{1}{4}$　C．$\frac{1}{12}$　D．$-\frac{1}{12}$

【精析】因为$\alpha-2\beta=(\alpha-\beta)-\beta$，所以

$\tan(\alpha-2\beta)=\tan[(\alpha-\beta)-\beta]=\frac{\tan(\alpha-\beta)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=-\frac{1}{12}$.

【解答】D

239．设$\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$，$|\cos\theta|=m$，则$\sin\frac{\theta}{2}$的值等于

[　　]

A．$-\sqrt{\frac{1+m}{2}}$　B．$-\sqrt{\frac{1-m}{2}}$　C．$\sqrt{\frac{1+m}{2}}$　D．$\sqrt{\frac{1-m}{2}}$

【精析】 由$\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$，有$\frac{5\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{2}$.

所以$\sin\frac{\theta}{2}<0$．故(C)、(D)错.

又因为$\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$，$m>0$，所以$\cos\theta=-m$.

则$\sin\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+m}{2}}$，选(A).

【解答】A

240．在三角形ABC中，$\angle A>\angle B$是$\cos^2A<\cos^2B$的

[　　]

A．充分且必要条件　　B．充分非必要条件

C．必要非充分条件　　D．既非充分也非必要条件

【精析】$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow\frac{a}{2R}>\frac{b}{2R}$(其中2R是△ABC外接圆直径)，即$\sin A>\sin B>0\Leftrightarrow\sin^2A>\sin^2B$，即$\cos^2A>\cos^2B$

【解答】A

241．已知$\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$，且α、β满足关系式$\sqrt{3}(\tan\alpha\cdot\tan\beta+a)+2\tan\alpha+3\tan\beta=0$，则$\tan\alpha$等于

[　　]

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}(1-a)$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}(1+a)$

C．$\sqrt{3}(1-a)$　　D．$\sqrt{3}(1+a)$

【精析】本题要用到两角和正切公式的变形的形式

$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$.

因为$\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$，所以$\tan\alpha+\tan\beta=\tan\frac{\pi}{6}\cdot(1-\tan\alpha\tan\beta)$，

即$3(\tan\alpha+\tan\beta)=\sqrt{3}(1-\tan\alpha\tan\beta)$，

$\sqrt{3}\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{3}-3\tan\alpha-3\tan\beta$．

代入已知式中，得

$\sqrt{3}-3\tan\alpha-3\tan\beta+\sqrt{3}\alpha+2\tan\alpha+3\tan\beta=0$，

即$\tan\alpha=\sqrt{3}(1+a)$．

【解答】D

242．化简$2\sqrt{1+\sin 8}+\sqrt{2+2\cos 8}$的结果是

[　　]

A．2sin4　　　　B．2sin4－4cos4

C．－2sin4－4cos4　　　　D．4cos4－2sin4

【精析】 原式$=2\sqrt{(\sin 4+\cos 4)^2}+\sqrt{2\times 2\cos^2 4}$

$=2|\sin 4+\cos 4|+2|\cos 4|$．

因为$\pi<4<\frac{3\pi}{2}$，

所以，原式$=-2(\sin 4+\cos 4)-2\cos 4$

$=-2\sin 4-4\cos 4$．

【解答】C

243．函数$y=\sin(\frac{\pi}{2}-x)\sin(\frac{\pi}{2}+x)\cos^2(\frac{5\pi}{2}+x)$的最小正周期是

[　　]

A．$\frac{\pi}{4}$　　　　B．$\frac{\pi}{2}$

C．π　　　　D．2π

【精析】 原式$=\cos^2 x\cdot\sin^2 x=\frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\times\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1}{8}(1-\cos 4x)$，

所以函数的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$．

【解答】B

244．若$0<x<\frac{\pi}{2}$，则函数$y=(1-\sin x)(1-\cos 2x)$的最大值是

[　　]

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{3}{4}(2-\sqrt{3})$　　C．$\frac{4}{27}$　　D．$\frac{8}{27}$

【精析】 因为$0<x<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin x>0$，且$1-\sin x>0$．

则 $y=(1-\sin x)(1-1+2\sin^2 x)$

$=2(1-\sin x)\sin x\cdot\sin x$

$\leq[\frac{2(1-\sin x)+\sin x+\sin x}{3}]^3=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$．

这里利用了不等式$a\cdot b\cdot c\leq(\frac{a+b+c}{3})^3$($a>0$，$b>0$，$c>0$)．

【解答】D

245．若$x\in(0,\pi)$，则函数$y=(1+\cos x)\cdot\sin\frac{x}{2}$的最大值为

[　　]

A．$\frac{\sqrt{3}}{9}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{9}$　　C．$\frac{16}{27}$　　D．$\frac{4\sqrt{3}}{9}$

【精析】　显然y＞0，两边平方，得

$y^2=(1+\cos x)^2\sin^2\frac{x}{2}=(2\cos^2\frac{x}{2})^2\cdot\sin^2\frac{x}{2}$．

因为$0<x<\pi$，$\cos\frac{x}{2}>0$及$\sin\frac{x}{2}>0$，利用代数中的若干个正数的算术平均数不小于几何平均数的定理，有

$y^2=2\cdot\cos^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\cdot2\sin^2\frac{x}{2}$

$\leq2\cdot[\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}}{3}]^3=\frac{16}{27}$．

$\therefore y\leq\frac{4\sqrt{3}}{9}$．

【解答】D

246．函数$y=\sin2x+a\cos2x$图象关于直线$y=-\frac{\pi}{8}$对称，则a的值为

[　　]

A．1　　　　　　B．$-\sqrt{2}$

C．$\sqrt{2}$　　　　　　D．-1

【精析】　由题设$\Rightarrow f(-\frac{\pi}{8}+x)=f(-\frac{\pi}{8}-x)$对一切x成立$\Rightarrow$

$\sin(-\frac{\pi}{4}+2x)+a\cos(-\frac{\pi}{4}+2x)=\sin(-\frac{\pi}{4}-2x)+a\cos(-\frac{\pi}{4}-2x)\Rightarrow$

$a=\frac{\sin(-\frac{\pi}{4}-2x)-\sin(-\frac{\pi}{4}+2x)}{\cos(-\frac{\pi}{4}+2x)-\cos(-\frac{\pi}{4}-2x)}$

$=\frac{2\cos(-\frac{\pi}{4})\sin(-2x)}{-2\sin(-\frac{\pi}{4})\sin2x}=-1$，故选(D)．

【解答】D

247．y＝3sin(x＋20°)＋5sin(x＋80°)的最大值是

[　　]

A．$5\frac{1}{2}$　　　　B．$6\frac{1}{6}$

C．7　　　　D．8

【精析】∵x＋20°与x＋80°不可能同时取到90°，∴最大值不可能是8，可排除(D)．又当x＝10°时，$y=\frac{3}{2}+5=6\frac{1}{2}$，大于(A)、(B)的值，故可排除(A)，(B)，故应选(C)．

【解答】C

二、填空题

248．在锐角△ABC中，tanA＋tanB＋tanC的最小值为________．

【解答】∵$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$(当且仅当A＝B＝C时取等号)，tanA＋tanB＋tanC＝tanAtanBtanC，

∴$\tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}>0$，

$(\tan A\tan B\tan C)^2\geq 27>0$．

$\tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt{3}$，即$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$，

故A＝B＝C＝60°时，tanA＋tanB＋tanC取得最小值$3\sqrt{3}$．

249．化简：$\tan\frac{3x}{2}-\tan\frac{x}{2}-\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}=$__________．

【解答】0

250．△ABC中，a，b，c三边成等差数列，则$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$的值为________．

【解答】$\frac{1}{3}$

251．在△ABC中，$\sqrt{3}\cos(B+C)+\cos(\frac{\pi}{2}+A)$的取值范围是_________．

【解答】$[-2,\sqrt{3})$

252．$\frac{\sin 10°+\sin 20°}{\cos 10°+\cos 20°}$的值等于_________．

【解答】$2-\sqrt{3}$

253．$\frac{2\sin 80°-\sin 20°}{\sin 70°}=$________．

【解答】$\sqrt{3}$

254．若$2^x+2^{-x}=(\sin\theta+\cos\theta)^2$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\tan\theta=$________．

【解答】1

255．在△ABC中，三边a、b、c成等比数列，则cos(A－C)＋cos2B＋cosB的值为________．

【解答】　1

256．若$-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$，则函数$y=\cos(x+\frac{\pi}{4})\cdot\cos(x-\frac{\pi}{4})$的最小值为________，最大值为________．

【解答】 $-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$

257．已知$5\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})+7\cos\frac{\beta}{2}=0$，则$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=$________．

【解答】-6

258．已知$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=5\sin\alpha$，$\alpha$、$\beta\in R$，则$\cos^2\alpha+\cos^2\beta$的取值范围是_______．

【解答】 $(\frac{5}{9}，2)\cup\{0\}$

259．已知$\tan(\frac{\pi}{4}+\theta)+\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)=4$，且$-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$，则$\sin\theta=$________．

【精析】 $\tan(\frac{\pi}{4}+\theta)+\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)=\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}=\frac{2}{\cos2\theta}=4$，

即$\cos2\theta=\frac{1}{2}$．

又$-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\theta=-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=-\frac{1}{2}$．

【解答】 $-\frac{1}{2}$

260．已知$\tan(\frac{\pi}{4}+\theta)=3$，则$\sin2\theta-2\cos^2\theta$的值为______．

【精析】 由已知得$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3$．

由此可求得$\tan\theta=\frac{1}{2}$，

$\sin2\theta-2\cos^2\theta=\sin2\theta-2\frac{1+\cos2\theta}{2}=\sin2\theta-\cos2\theta-1$．

再利用万能公式$\sin2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$，$\cos2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$，得

$\sin2\theta-2\cos^2\theta=-\frac{4}{5}$．

【解答】 $-\frac{4}{5}$

261．函数 $f(x)=1-2\sin^2\omega x$ 的周期是函数 $g(x)=\sin 4x$ 的周期的2倍，则 $\omega=$________．

【精析】 因为 $f(x)=2\cos 2\omega x$，所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=2\cdot\frac{2\pi}{4}$．解得 $\omega=1$．

【解答】1

262．函数 $y=\frac{\sin 2x+\sin(2x+\frac{\pi}{3})}{\cos 2x+\cos(2x+\frac{\pi}{3})}$ 的最小正周期是________．

【精析】利用两角和公式与和差化积公式，得

$$y=\frac{\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x}{\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x}=\frac{\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x}{\frac{3}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x}$$

$$=\frac{\sin(2x+\frac{\pi}{6})}{\cos(2x+\frac{\pi}{6})}=\tan(2x+\frac{\pi}{6}).$$

【解答】 $\frac{\pi}{2}$

263．$(2\cos 20°+1)\tan 40°-2\cos 70°=$________．

【精析】 原式 $=\frac{2\cos 20°\sin 40°-2\cos 70°\cos 40°+\sin 40°}{\cos 40°}$

$$=\frac{2(\sin 40°\cos 20°-\cos 40°\sin 20°)}{\cos 40°}=\frac{2\sin 20°+\sin(60°-20°)}{\cos 40°}$$

$$=\frac{2\sin 20°+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20°-\frac{1}{2}\sin 20°}{\cos 40°}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\sin 20°+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20°}{\cos 40°}=\frac{\sqrt{3}\sin(20°+30°)}{\cos 40°}=\sqrt{3}.$$

【解答】 $\sqrt{3}$

264．已知 $\sin\theta_1-\sin\theta_2=-\frac{2}{3}$，$\cos\theta_1-\cos\theta_2=\frac{2}{3}$，且 θ_1、θ_2 为锐角，则 $\tan(\theta_1-\theta_2)=$________．

【精析】　将已知两式平方再相加，可得$\cos(\theta_1-\theta_2)=\frac{5}{9}$.

因$\sin\theta_1-\sin\theta_2=-\frac{2}{3}<0$，且$-\frac{\pi}{2}<\theta_1-\theta_2<\frac{\pi}{2}$，所以得$\theta_1<\theta_2$.

于是$\sin(\theta_1-\theta_2)=-\frac{2\sqrt{14}}{9}$.

从而可求 $\tan(\theta_1-\theta_2)$.

【解答】　$-\frac{2\sqrt{14}}{5}$

265．锐角α、β满足$\sin\beta\csc\alpha=\cos(\alpha+\beta)$，$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，则$\tan\beta$的最大值是________.

【精析】$\sin\beta=\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$.

移项整理，得 $\sin\beta(1+\sin^2\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta$.

所以$\tan\beta=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{\tan\alpha}{1+2\tan^2\alpha}=\frac{1}{\cot\alpha+2\tan\alpha}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【解答】　$\frac{\sqrt{2}}{4}$

266．设α、β为锐角，且$3\sin\alpha=2\sin\beta$，$3\cos\alpha+2\cos\beta=3$，求$\beta+\frac{\alpha}{2}$的度数为________.

【解答】　由$3\sin\alpha=2\sin\beta$ 得$\frac{\sin\alpha}{2}=\frac{\sin\beta}{3}$.

由此逆用正弦定理，构造△ABC，使 $A=\alpha$，$B=\beta$，$C=180°-(\alpha+\beta)$，BC＝2，AC＝3.

在△ABC 中，运用射影定理得：

$AB=3\cos\alpha+2\cos\beta=3=AC$

$\therefore B=C$，即$\beta=180°-(\alpha+\beta)$，$\therefore\beta+\frac{\alpha}{2}=90°$

267．设 $n\in N$ 且 $\sin\alpha+\cos\alpha=-1$，则 $\sin^n\alpha+\cos^n\alpha$的值为________.

【解答】　由条件$\sin\alpha+\cos\alpha=2\times(-\frac{1}{2})$.

故设$\sin\alpha=-\frac{1}{2}-d$，$\cos\alpha=-\frac{1}{2}+d$.

由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得$(-\frac{1}{2}+d)^2+(-\frac{1}{2}-d)^2=1$.

解得$d=\pm\frac{1}{2}$．

若$d=\frac{1}{2}$，则$\sin\alpha=-1$，$\cos\alpha=0$．

若$d=-\frac{1}{2}$，则$\sin\alpha=0$，$\cos\alpha=-1$．

$\therefore \sin^n\alpha+\cos^n\alpha=(-1)^n$．

268．设$0<\theta<\pi$，则$\sin\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$的最大值是________．

【精析】　设$y=\sin\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$，则$y^2=4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}$．

$\therefore y^2=2\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\leq 2\times(\frac{2}{3})^3=\frac{16}{27}$，

$\therefore y\leq\frac{4\sqrt{3}}{9}$，$\therefore y_{max}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$．

269．$\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin20°\cos80°$的值为________．

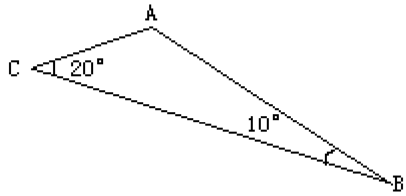


图 44

【精析与解答】本题利用三角恒等变形，通过和、差、倍、半角的三角函数及和差化积、积化和差的公式进行变换，能够求出值来，但是通过构造三角形几乎可以一步到位．原式可化为$\sin^2 20°+\sin^2 10°+\sqrt{3}\cdot\sin20°\cdot\sin10°$，从结构上看，很像解三角形中的余弦定理，这就启发我们构造一个以20°、10°为内角的三角形，如图44，为了使边长等于sin20°、sin10°，可以让这个三角形的外接圆半径R=1/2，则由正弦定理得AB=sin20°，AC=sin10°，BC=sin150°，由余弦定理得：$\sin^2 150°=\sin^2 20°+\sin^2 10°-2\sin20°\cdot\sin10°\cdot\cos 150°$即$\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin20°\cos80°=1/4$．

270．已知$\sin\alpha+\sin\beta=a(-2<a<2)$，则$\sin(\alpha+\beta)$的取值范围为________．

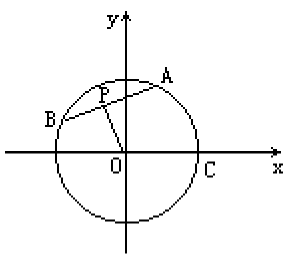


图 45

【解答】如图45，设角α、β的终边与单位圆分别交于A、B两点，那么A、B两点的坐标分别为A(cosα、sinα)、B(cosβ，sinβ)，设弦

AB 的中心为 $P(x_0, y_0)$，由已知

$x_0 \in [-\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}, \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}]$.

$\because \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \tan\angle COP = \frac{y_0}{x_0}$,

$\because |4-3| > |3-\frac{7}{3}|$,

$\therefore$ 当 $k=4$，即 $x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{5}{2}$，$z=0$ 时，$u_{最大} = -\frac{1}{2}$.

$\frac{2x_0y_0}{x_0{}^2+y_0{}^2} = \frac{x_0 a}{x_0{}^2+\frac{a^2}{4}}$

令 $f(x) = \frac{xa}{x^2+\frac{a^2}{4}}$,

(1) 当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的示意图如图 46 所示.

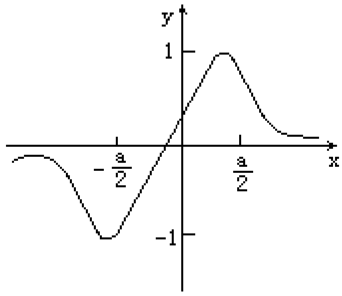


图 46

①若 $\sqrt{2}<a<2$，则 $\frac{\sqrt{4-a^2}}{2} < \frac{a}{2}$，在 $[-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}, \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}]$ 上 $f(x)$ 是增函数，$x=\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$ 时，$f(x)$ 取最大值 $\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}$；$x=-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$ 时，$f(x)$ 取最小值 $-\frac{a}{2}\cdot\sqrt{4-a^2}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)$ 的范围为 $[-\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}, \frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}]$.

②若 $0<a\le\sqrt{2}$，则 $\frac{a}{2}$，在 $[-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}, \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}]$ 上，$x=\frac{a}{2}$ 时，$f(x)$ 取最大值 1；$x=-\frac{a}{2}$ 时，$f(x)$ 取最小值 -1，所以 $\sin(\alpha+\beta)$ 的范围是 $[-1, 1]$.

(2) 当 $a=0$ 时，$f(x)=0$.

(3) 当 $a<0$ 时，仿 (1) 讨论得：

① $-2<a<-\sqrt{2}$，$\sin(\alpha+\beta)$ 的范围是 $[\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}, -\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}]$.

②若 $-\sqrt{2}\le a<0$，$\sin(\alpha+\beta)$ 的范围是 $[-1, 1]$.

综上所述，当 $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$ 时，$\sin(\alpha+\beta)$ 的取值范围是 $[-1, 1]$；

当$-2<a<-\sqrt{2}$或$\sqrt{2}<a<2$时，$\sin(\alpha+\beta)$的取值范围是$[-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$，$\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}]$．

271．函数$y=\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x+1}$的值域为______．

【解答】　变形$y=\frac{\sin x\cos x-0}{\sin x+\cos x-(-1)}$，此式是由坐标为$(-1,0)$的点A与作标为(cosx＋sinx，sinxcosx)的点 P 连线的斜率构成的，而动点 P 在

$\begin{cases} u=\sin x+\cos x\ (|u|\leq\sqrt{2}且u\neq-1), \\ v=\sin x\cdot\cos x\ (|v|\leq 1/2,) \end{cases}$　$u^2=2(v+1/2)$的抛物线上，此抛物线的开口向上，顶点为(0，－1/2)，焦参数 p＝1，作出图 47，则 $k_{AP_2}<y<k_{AP_1}$．

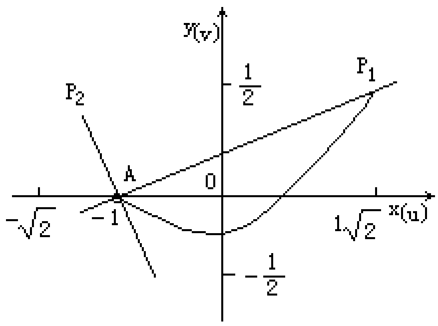


图47

则$k_{AP_1}=\frac{1/2-0}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$，

$k_{AP_2}=\frac{1/2-0}{-\sqrt{2}+1}=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$．

故所求函数的值域是：

$y\in(-(\sqrt{2}+1)/2,(\sqrt{2}-1)/2)$．

272．已知 sinα＋sinβ＝a(－2＜a＜2)，
则 cosα＋cosβ的取值范围为_________．

【解答】如图 48，设角α、β的终边与单位圆分别交于 A、B 两点，那么 A、B 两点的坐标分别为 A(cosα，sinα)，B(cosβ，sinβ)，设弦 AB 的中点为 $P(x_0,y_0)$，则

$x_0=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}$，$y_0=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}=\frac{a}{2}$．

显然当α、β变化时，弦 AB 的中点轨迹为弦 CD：

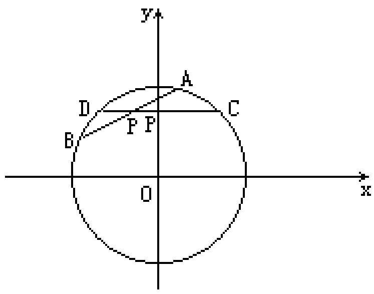


图 48

$y=\frac{a}{2}(-\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}\le x\le\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2})$，

即$x_0\in[-\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}，-\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}]$.

$\therefore\cos\alpha+\cos\beta\in[-\sqrt{4-a^2}，\sqrt{4-a^2}]$.

273．化简：$(\cot18°+\tan18°+\cot36°+\tan36°)\cdot\tan36°=$________.

【精析】从结构看，既有正切，又有余切，不统一，为此，全部化为余切.

原式$=(\cot18°+\cot72°+\cot36°+\cot54°)\cdot\cot54°$

$=(\cot18°+\cot36°+\cot54°+\cot72°)\cdot\cot54°$ (**)

可见，(**)式的确存在一种和谐美：括号内，四个余切值排列整齐，角度逐级增大；另外，$18°+72°=36°+54°=90°$，注意到这些和谐关系，就不难发现解题策略：把四个余切重新组合，并用余切的和差化积公式：

$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$，分别把$\cot18°$与$\cot72°$，$\cot36°$与$\cot54°$相加，使其同时出现$\sin90°=1$这一相同的特殊结果.

原式$=[(\cot18°+\cot72°)+(\cot36°+\cot54°)]\cdot\cot54°$

$=(\frac{\sin90°}{\sin18°\cdot\sin72°}+\frac{\sin90°}{\sin36°\sin54°})\cdot\cot54°$

$=(\frac{2}{2\sin18°\cos18°})+(\frac{2}{2\sin36°\cos36°})\cdot\cot54°$

$=(\frac{2}{\sin36°}+\frac{2}{\sin72°})\cdot\cot54°$

$=\frac{2(\sin72°+\sin36°)}{\sin36°\cdot\sin72°}\cdot\cot54°=\frac{4\sin54°\cos18°}{\sin36°\cdot\cos18°}\cdot\cot54°$

$=4\cdot\tan54°\cdot\cot54°=4$.

274．求$\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin20°\cdot\cos50°$的值为________.

【解答】原式$=\sin^2 20°+\sin^2 40°+\sin20°\cdot\sin40°=\sin^2 20°+\sin^2 40°-2\sin20°\cdot\sin40°\cdot\cos120°$，由此结构式联想到余弦定理，在△ABC 中，视$\angle A=20°$，$\angle B=40°$，$\angle C=120°$，$a=\sin20°$，$b=\sin40°$，$c=\sin120°$.

$\therefore$原式$=a^2+b^2-2ab\cos120°$

$=c^2=\sin^2 20°=\dfrac{3}{4}$.

275．已知 $\sin\alpha+2\cos\beta=2$，则 $2\sin\alpha+\cos\beta$ 的取值范围是________.

【解答】设 $x=\sin\alpha$，$y=\cos\beta$，$t=2\sin\alpha+\cos\beta$，则有 $x+2y=2$，$2x+y=t(|x|\le1，|y|\le1)$．t 的取值范围即线段 $x+2y=2$ 与平行线段 $2x+y=t(|x|\le1，|y|\le1)$ 相交时，$2x+y=t$ 在 y 轴上截距的取值范围，由图49易得：当 $2x+y=t$ 过点 $B(1，\dfrac{1}{2})$ 时，$t_{max}=\dfrac{5}{2}$.

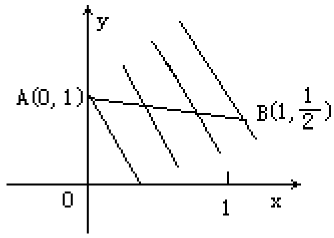


图 49

当 $2x+y=t$ 过点 $A(0，1)$ 时，$t_{min}=1$.

所以 $2\sin\alpha+\cos\beta$ 的取值范围是 $[1，\dfrac{5}{2}]$.

276．已知 $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，则 $\cos\alpha\sin\beta$ 的取值范围为________.

【解答】设 $t=\cos\alpha\sin\beta$，

$\because \sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha\sin\beta=t$，

$\therefore \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]=\dfrac{1}{2}$，$[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]=t$，

即 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=1$，$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2t$.

令 $x=\sin(\alpha+\beta)$，$y=\sin(\alpha-\beta)$，则有 $x+y=1$，$x-y=2t(|x|\le1，|y|\le1)$.

t 的取值范围即线段 $x+y=1$ 与 $x-y=2t(|x|\le1，|y|\le1)$ 相交时，$x-y=2t$ 在 y 轴上截距的相反数一半的取值范围．如图 50，

当 $x-y=2t$ 通过点 $A(0，1)$ 时，$t_{min}=-\dfrac{1}{2}$．当 $x-y=2t$ 通过点 $B(1，0)$ 时，$t_{max}=\dfrac{1}{2}$．$\therefore \cos\alpha$、$\text{sni}\beta$ 取值范围是 $[-\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{2}]$.

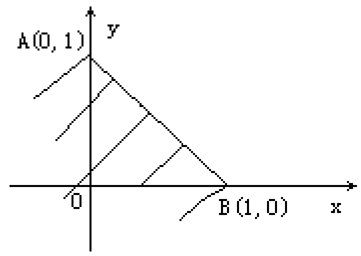


图 50

277．函数 y＝sinx＋cosx＋sinxcosx 的值域为________．

【精析】此函数可看作是由函数$y=u+\frac{u^2-1}{2}$与$u=\sin x+\cos x$复合而成的．

【解答】易知该函数的定义域为 R．

令$u=\sin x+\cos x$，则$y=u+\frac{u^2-1}{2}$．

$\because u=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，$\therefore -\sqrt{2}\leq u\leq\sqrt{2}$．

$\because y=u+\frac{u^2-1}{2}=\frac{1}{2}(u+1)^2-1$，

$\therefore$当$u=-1$时，函数取得最小值为-1；当$u=\sqrt{2}$时，函数取得最大值为$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$．因此，所求函数的值域为$[-1，\frac{1}{2}+\sqrt{2}]$．

278．函数$y=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$在$(0，\frac{\pi}{2})$内的最小值为__________．

【解答】$y=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geq\frac{2}{\sqrt{\sin x\cos x}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}}\geq 2\sqrt{2}$．当$x=\frac{\pi}{4}$时，$\sin x=\cos x$，$\sin 2x=1$，上式中的两个“≥”中的等号同时成立，所以$y\geq 2\sqrt{2}$是“精确的”不等式，因而$2\sqrt{2}$是$y$的最小值．

279．函数$f(\alpha)=\frac{\sin\alpha-1}{\cos\alpha-2}$的值域为__________．

【解答】设$\frac{\sin\alpha-1}{\cos\alpha-2}=k$，则把所求的问题转化为求经过$x^2+y^2=1$上的一点 M(cosα，sinα)和点 P(2，1)的直线的斜率 k 的取值范围问题，为此只要求 k 的最值．

而当这条直线与这个圆相切时，k 取最值，这样只要出过点 P(2，1)的两条切线斜率即可．设切线方程为 y－1＝k(x－2)即 kx－y－2k

$+1=0$，由于圆心$(0,0)$到切线的距离等于半径1，即$\dfrac{|k\cdot 0-0-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$.

解得 $k=0$或$k=\dfrac{4}{3}$．$f(\alpha)$的值域为$[0,\dfrac{4}{3}]$.

280．设$\dfrac{\tan(\theta-\frac{\pi}{12})}{\tan(\theta+\frac{\pi}{12})}=\dfrac{1}{3}$，则$\sin 2\theta$的为_______.

【解答】$\because \dfrac{\tan(\theta+\frac{\pi}{12})}{\tan(\theta-\frac{\pi}{12})}=\dfrac{3}{1}$，

$\therefore \dfrac{\tan(\theta+\frac{\pi}{12})+\tan(\theta-\frac{\pi}{12})}{\tan(\theta+\frac{\pi}{12})-\tan(\theta-\frac{\pi}{12})}=\dfrac{3+1}{3-1}$，

$\therefore \dfrac{\sin(\theta+\frac{\pi}{12})\cos(\theta-\frac{\pi}{12})+\cos(\theta+\frac{\pi}{12})\sin(\theta-\frac{\pi}{12})}{\sin(\theta+\frac{\pi}{12})\cos(\theta-\frac{\pi}{12})-\cos(\theta+\frac{\pi}{12})\sin(\theta-\frac{\pi}{12})}$

$=2$，即$\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$，$\therefore \sin 2\theta=1$.

281．函数$y=\dfrac{2\sin x-1}{\cos x+1}$的值域为_____.

【解答】去分母，整理，得 $2\sin x-y\cos x=1+y$.

$\therefore \sqrt{4+y^2}\sin(x+\varphi)=1+y(\tan\varphi=-\dfrac{y}{2})$，

$\therefore \sin(x+\varphi)=\dfrac{1+y}{\sqrt{4+y^2}}$，$\therefore \left|\dfrac{1+y}{\sqrt{4+y^2}}\right|\le 1$，

解之，得$y\le\dfrac{3}{2}$，故函数值域为$(-\infty,\dfrac{3}{2})$.

三、解答题

282．若$|a|<1$，$|b|<1$，

求证：$|ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}|\le 1$.

【证明】$\because |a|<1$，$|b|<1$，

$\therefore$ 设 $a=\sin\alpha$，$b=\sin\beta$，

则$ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$

$=\sin\alpha\sin\beta\pm\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)}$

$=\sin\alpha\sin\beta\pm\cos\alpha\cos\beta$

$=\pm\cos(\alpha\pm\beta)$

$\because |\pm\cos(\alpha\pm\beta)|\le 1$

283．已知$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{1}{2}$，$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=-\frac{2}{3}$，求$\cos(\alpha-\beta)$与$\cos(\alpha+\beta)$的值．

【解答】 由$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{1}{2}$，

得$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$．

由$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=-\frac{2}{3}$，

得$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=3\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$．

于是有$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=3\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$，即$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3}$．

由万能代换公式，得

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{3})^2}{1+(\frac{1}{3})^2}=\frac{4}{5}.$$

因$\cos(\alpha-\beta)=2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1$，所以$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{9}{10}$．

则$\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{10}$．

将$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$及$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=3\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$两式相乘，得

$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{2}(1-2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{6}{5}$．

故$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{10}$，$\cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=-\frac{2}{5}$．

284．已知a、b为非零实数，且满足$\frac{a\sin\frac{\pi}{5}+b\cos\frac{\pi}{5}}{a\cos\frac{\pi}{5}-b\sin\frac{\pi}{5}}=\tan\frac{8\pi}{15}$，求$\frac{b}{a}$的值．

【解答】将原式右边分子、分母同除以$a\cos\frac{\pi}{5}$，可变形为$\frac{\tan\frac{\pi}{5}+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}\tan\frac{\pi}{5}}=$

$\tan\frac{8\pi}{15}$．所以 $\frac{b}{a}=\frac{\tan\frac{8\pi}{15}-\tan\frac{\pi}{5}}{1+\tan\frac{8\pi}{15}\tan\frac{\pi}{5}}=\tan(\frac{8\pi}{15}-\frac{\pi}{5})=\sqrt{3}$.

285．已知 $\tan\frac{\theta}{2}=2$．化简 $\frac{1+\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta}{1-\cos\theta-2\cos^2\theta}$，并求它的值.

【解答】原式 $=\frac{2\cos^2\theta+2\cos2\theta\cdot\cos\theta}{-\cos2\theta-\cos\theta}=\frac{2\cos\theta(\cos\theta+\cos2\theta)}{-(\cos\theta+\cos2\theta)}$

$=-2\cos\theta$.

$\because\tan\frac{\theta}{2}=2$，$\therefore$ 原式 $=-2\cos\theta=\frac{-2(1-\tan^2\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{6}{5}$.

286．求函数 $y=\frac{1-\cos(\pi-2\alpha)}{\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}}-\cos^2(\frac{\pi}{4}-\beta)$ 的最大值.

【解答】$y=\frac{1+\cos2\alpha}{\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}}-\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-2\beta)}{2}$

$=\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin2\beta=\frac{1}{2}(\sin2\alpha-\sin2\beta)-\frac{1}{2}$

$=\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 当 $\sin(\alpha-\beta)=-1$ 时，$y_{max}=0$.

287．设函数 $f(x)=1-\frac{1}{2}\cos2x+a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(a\in R)$ 的最大值为3，试求 a 的值

【解答】$f(x)=(\sin x+\frac{a}{4})^2+\frac{1}{2}-\frac{a^2}{16}$

①若 $\frac{a}{4}\geq0$，则当 $\sin x=1$ 时，$f(x)$ 有最大值．由 $(1+\frac{a}{4})^2+\frac{1}{2}-\frac{a^2}{16}=3$，有 $a=3$.

②若 $\frac{a}{4}<0$，则当 $\sin x=-1$ 时，$f(x)$ 有最大值.

由 $(-1+\frac{a}{4})^2+\frac{1}{2}-\frac{a^2}{16}=3$，有 $a=-3$.

$\therefore a=\pm3$.

288．已知 $\cos(a-\frac{\beta}{2})=-\frac{1}{9}$，$\sin(\frac{a}{2}-\beta)=\frac{2}{3}$，且 $a\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，求 $\cos(a+\beta)$ 的值.

【解答】$\because \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\pi$，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$．

$\because \cos(\alpha-\frac{\beta}{2})=-\frac{1}{9}$，

$\therefore \sin(\alpha-\frac{\beta}{2})=\frac{4\sqrt{5}}{9}$．

$\because \sin(\frac{\alpha}{2}-\beta)=\frac{2}{3}$，$\therefore \cos(\frac{\alpha}{2}-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{3}$．

$\therefore \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[(\alpha-\frac{\beta}{2})-(\frac{\alpha}{2}-\beta)\right]=\frac{7\sqrt{5}}{27}$．

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=-\frac{239}{729}$．

289．已知$\tan\alpha-\tan\beta=2\tan^2\alpha\tan\beta$，求$\frac{(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}$的值．

【解答】$\because \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$，$\therefore \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$=\frac{2\sin^2\alpha\cdot\sin\beta}{\cos^2\alpha\cdot\cos\beta}$，

$\therefore \sin(\alpha-\beta)\cdot\cos\alpha=2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$

$\therefore \sin(\alpha-\beta)\cdot\cos\alpha=-\sin\alpha[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$，

$\therefore \sin(\alpha-\beta)\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\cos(\alpha-\beta)=-\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)$，

$\therefore -\sin\beta=-\frac{1}{2}[\sin(2\alpha+\beta)+\sin(-\beta)]$，

$\therefore 3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$，$\therefore \frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}=3$．

290．在△ABC中，已知$\csc C=\frac{\cos A+\cos B}{\sin A+\sin B}$．试判断△ABC的形状．

【解答】$\sin(A+B)=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}=\tan\frac{A+B}{2}$．

即$2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos^2\frac{A+B}{2}=\sin\frac{A+B}{2}$．

$\because 0<\frac{A+B}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin\frac{A+B}{2}>0$，$\cos\frac{A+B}{2}>0$．

由上式得$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{4}$．

故$A+B=\frac{\pi}{2}$，即△ABC是直角三角形．

291．在△ABC 中，三内角 A、B、C 满足：sinA·(cosB＋cosC)＝sinB＋sinC，若 AB＝3cm，AC＝4cm．求 $S_{\triangle ABC}$ 的值．

【解答】在△ABC 中，A＝π－(B＋C)，∴sinA＝sin(B＋C)．

∴sin(B＋C)·(cosB＋cosC)＝sinB＋sinC

$\therefore 2\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}\cdot 2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}=2\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}$，

$\therefore 2\cos^2\frac{B+C}{2}=1$．

∴1＋cos(B＋C)＝1，∴cos(B＋C)＝0，

$\therefore B+C=\frac{\pi}{2}$，$\therefore A=\frac{\pi}{2}$．

∵AB＝3cm，AC＝4cm，

$\therefore$ Rt△ABC的面积$S=\frac{1}{2}AB\times AC=6(cm^2)$．

292．在△ABC 中，已知 acosA＝bcosB，求证△ABC 为等腰或直角三角形．

【解答】∵在△ABC 中，已知 acosA＝bcosB，

$\therefore a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\Rightarrow(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$，

得 a＝b 或 $c^2=a^2+b^2$

∴△ABC 是等腰三角形或直角三角形．

293．在△ABC中，三边a、b、c成等差数列，且$\sqrt{3}\cdot\cos\frac{B}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$

(1)求证：$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$；

(2)求$\tan\frac{A+C}{2}$的值．

【解答】(1)略．

(2)由$\sqrt{3}\cos\frac{B}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$，得

$\sqrt{3}\sin\frac{A+C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$，

即$\sqrt{3}(\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2})=2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$．

两边同除以$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$，并整理得$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$．

$$\therefore\tan\frac{A+C}{2}=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}}=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{3}.$$

294．在△ABC 中，三内角 A、B、C 满足 sinA·cosB－sinB＝sinC－sinA·cosC，若 S△ABC＝6cm²，且三边满足 a－2b＋c＝0，试求△ABC 三边的长度．

【解答】由已知得 $\sin A\cdot(\cos B+\cos C)=\sin B+\sin C$

∵△ABC 中，$A=\pi-(B+C)$，

∴$\sin A=\sin(B+C)$.

∴$\sin(B+C)\cdot(\cos B+\cos C)=\sin B+\sin C$

等式的解集为$(0,\ a^2)$

∴$1+\cos(B+C)=1$，∴$\cos(B+C)=0$.

∴$B+C=\frac{\pi}{2}$，∴$A=\frac{\pi}{2}$．由题得$\begin{cases}\frac{1}{2}bc=6,\\ b^2+c^2=a^2,\\ a-2b+c=0,\end{cases}$

∴$a=5$，$b=4$，$c=3$.

295．在△ABC中，若$\sin^2A-\cos^2A=\frac{1}{2}$，试比较$b+c$与$2a$的大小.

【解答】由$\sin^2A-\cos^2A=\frac{1}{2}$，得$\cos 2A=-\frac{1}{2}$.

∴$A=\frac{\pi}{3}$或$A=\frac{2\pi}{3}$.

设△ABC 外接圆半径为 $R(R>0)$，则由正弦定理，得

∴$b+c-2a=2R(\sin B+\sin C-2\sin A)$

$=2R[2\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}-2\sin A]$.

当$A=\frac{\pi}{3}$时，$b+c-2a=2\sqrt{3}R(\cos\frac{B-C}{2}-1)$，

当$B=C$时，$\cos\frac{B-C}{2}=1$，∴$b+c=2a$，

当$B\neq C$时，$\cos\frac{B-C}{2}<1$，∴$b+c-2a<0$，

当$A=\frac{2\pi}{3}$时，$b+c-2a=2R(\cos\frac{B-C}{2}-\sqrt{3})<0$，

即 $b+c<2a$.

296．设 $z>0$，$x>z$，$y>z$，求证：

$\sqrt{(x+z)(y+z)}+\sqrt{(x-z)(y-z)}\le 2\sqrt{xy}$.

【证明】∵$x>z>0$，$y>z>0$，

∴$0<\frac{z}{x}<1$，$0<\frac{z}{y}<1$，于是可设

$\frac{z}{x}=\cos\alpha$，$\frac{z}{y}=\cos\beta$，$(0<\alpha,\ \beta<\frac{\pi}{2})$

而$\sqrt{\frac{(x+z)(y+z)}{xy}}+\sqrt{\frac{(x-z)(y-z)}{xy}}$

$=\sqrt{(1+\frac{z}{x})(1+\frac{z}{y})}+\sqrt{(1-\frac{z}{x})(1-\frac{z}{y})}$

$=\sqrt{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}+\sqrt{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}$

$=2(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2})=2\cos(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})\leq 2$，

∴原不等式成立．

297．已知 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\geq 1$，求 $|\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma|$ 的最大值．

【解答】由 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，

得　$-2\sin^2\alpha-2\sin^2\beta-2\sin^2\gamma=-2$，

$1-2\sin^2\alpha+1-2\sin^2\beta+1-2\sin^2\gamma=-2+3=1$，

即 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=1$　　　　①

构造对偶式 $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=A$　　　　②

①^2+②^{2}得

$1+A^2=3+2\cos 2\alpha\cos 2\beta+2\cos 2\alpha\cos 2\gamma+2\cos 2\beta\cos 2\gamma$

$+2\sin 2\alpha\sin 2\beta+2\sin 2\alpha\sin 2\gamma+2\sin 2\beta\sin 2\gamma$

$=3+2[\cos(2\alpha-2\beta)+\cos(2\alpha-2\gamma)+\cos(2\beta-2\gamma)]\leq 3+6=9$，

∴$A^2\leq 8$，$|A|\leq 2\sqrt{2}$．

∴当 $\cos(2\alpha-2\beta)=\cos(2\alpha-2\gamma)=\cos(2\beta-2\gamma)=1$，

即 $\alpha=\beta=\gamma$ 时，$|\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma|_{最大}=2\sqrt{2}$．

298．在 $1\leq x^2+y^2\leq 2$ 条件下，求 $z=x^2-xy+y^2$ 的最大值和最小值．

【解答】由于 $1\leq x^2+y^2\leq 2$，可设

$x=R\cos\theta$，$y=R\sin\theta$

$(0\leq\theta\leq 2\pi，1\leq R^2\leq 2)$

则 $z=x^2-xy+y^2$

$=R^2\cos^2\theta-R^2\cos\theta\sin\theta+R^2\sin^2\theta$

$=R^2(1-\frac{1}{2}\sin 2\theta)$

∴当 $R^2=2$，$\sin 2\theta=-1$ 时，$x_{min}=3$

$R^2=1$，$\sin 2\theta=1$时，$z_{min}=\frac{1}{2}$．

299．求函数$y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$的最小值．

【解答】设 $2x=\tan\alpha$，

则 $1+4x^2=1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，

$\therefore y=-\frac{\tan\alpha}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\sec\alpha$，

即$4y\cos\alpha+\sin\alpha=\pm\sqrt{3}$，

$\sqrt{(4y)^2+1}\cdot\sin(\alpha+\psi)=\pm\sqrt{3}$.

其中ψ由 $\tan\psi=4y$ 确定.

$\therefore\sin(\alpha+\psi)=\frac{\pm\sqrt{3}}{\sqrt{(4y)^2+1}}$，

则$|\frac{\pm\sqrt{3}}{\sqrt{(4y)^2+1}}|\le 1$，$y^2\ge\frac{1}{8}$

可求出y的最小值为$y_{min}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

300．在△ABC 中，内角 B 等于内角 A、C 的平均数，且 tanAtanC $=2+\sqrt{3}$，求角A、B、C的大小.

【解答】由条件，得 2B＝A＋C，且 A＋B＋C＝180°，则 3B＝180°，B＝60°．又 tanA＋tanB＋tanC＝tanAtanBtanC，

则 tanA＋tanC＝tanAtanBtanC－tanB

$=(2+\sqrt{3})\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$=3+\sqrt{3}$.

∴tanA，tanC 是方程

于是，当$a>1$时，原不等式的解集为$(a^2，+\infty)$；当$0<a<1$，原不

故 A＝45°，C＝75°；或 A＝75°，C＝45°.

301．在△ABC中，$\cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$，试判定△ABC的形状.

【解答】由条件等式平方，

得 $\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C+2(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)=3$

$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$　　①

$\therefore\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C=1$　　②

②－①，得 $\cot^2A+\cot^2B+\cot^2C-\cot A\cot B-\cot B\cot C-\cot C\cot A=0$，$(\cot A-\cot B)^2+(\cot B-\cot C)^2+(\cot C-\cot A)^2=0$.

当且仅当

cotA＝cotB、cotB＝cotC、cotC＝cotA，

即 A＝B＝C＝60°时成立.

于是，△ABC 是正三角形.

302．在△ABC 中，tanA＋tanC＝2tanB，

求证：$\cos(C+B-A)=\frac{4+5\cos 2C}{5+4\cos 2C}$.

【证明】由条件 tanA＋tanB＋tanC＝3tanB.

而 tanA＋tanB＋tanC＝tanAtanBtanC，

则 tanAtanBtanC＝3tanB.

∵tanB≠0，tanC≠0，且 tanA＝3cotC，

∴cos(C＋B－A)

$=\cos[(C+B+A)-2A]=-\cos 2A$

$=-\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\dfrac{(3\cot C)^2-1}{(1+3\cot C)^2}$

$=\dfrac{9-\tan^2 C}{9+\tan^2 C}$ ①

又 $\dfrac{4+5\cos 2C}{5+4\cos 2C}$

$=(4+5\times\dfrac{1-\tan^2 C}{1+\tan^2 C})\times(5+4\times\dfrac{1-\tan^2 C}{1+\tan^2 C})^{-1}$

$=\dfrac{9-\tan^2 C}{9+\tan^2 C}$. ②

①=②

$\therefore\cos(C+B-A)=\dfrac{4+5\cos 2C}{5+4\cos 2C}$.

303．在△ABC中，已知$a=2b\cos C$，$\sin A\sin(\dfrac{B}{2}+C)=\sin C(\sin\dfrac{B}{2}+\sin A)$，求△ABC 各角的度数.

【解答】∵$a=b\cos C+c\cos B=2b\cos C$，∴$b\cos C=c\cos B$，

又 $b=2R\sin B$，$C=2R\sin C$.

∴$\sin B\cos C=\sin C\cos B$，即 $\sin(B-C)=0$，

∴$B=C$，$A=\pi-2B$.

$\therefore\sin 2B\cdot\sin\dfrac{3B}{2}=\sin B(\sin\dfrac{B}{2}+\sin 2B)$，即

$2\cos B\sin\dfrac{3B}{2}=\sin\dfrac{B}{2}+\sin 2B$.

又∵$2\cos B\sin\dfrac{3B}{2}=\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{5B}{2}$，

$\therefore\sin\dfrac{5B}{2}=\sin 2B$，推得$2\sin\dfrac{B}{4}\cos\dfrac{9B}{4}=0$.

$\because 0<B<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\dfrac{B}{2}\neq 0$.

$\therefore\cos\dfrac{9B}{4}=0$，故$\dfrac{9B}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即$B=\dfrac{2\pi}{9}$.

所以△ABC的三个角为：$A=\dfrac{5\pi}{9}$，$B=C=\dfrac{2\pi}{9}$.

304．△ABC 为锐角三角形，证明：

$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geq 3\sqrt{3}$.

【证明】∵A，B，C 均为锐角，

∴$\tan A>0$，$\tan B>0$，$\tan C>0$.

因此$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}$.

又由 $A+B+C=180°$，可知

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$，

从而有$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C}$

即$(\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C)^{2/3}\geq 3$。

$\therefore\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geq 3\sqrt{3}$

305．在△ABC 中，求证：

$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$。

【证明】由 A＋B＋C＝180°，易得

$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=1$。

又∵$\tan\frac{A}{2}>0$，$\tan\frac{B}{2}>0$，$\tan\frac{C}{2}>0$，从而由平均值不等式，得

$1=\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}$

$\geq 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\cdot\tan^2\frac{B}{2}\cdot\tan^2\frac{C}{2}}$。

$\therefore 3\sqrt[3]{\tan^2\frac{A}{2}\cdot\tan^2\frac{B}{2}\cdot\tan^2\frac{C}{2}}\leq\frac{1}{3}$，从而得

$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$。

306．已知$\frac{x+y}{1-xy}=\sqrt{2}$，求$\frac{|1-xy|}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{y^2+1}}$的值。

【解答】设$x=\tan\alpha$，$y=\tan\beta$，α，$\beta\in(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$，则$\frac{x+y}{1-xy}$

$=\tan(\alpha+\beta)=\sqrt{2}$，

于是$\frac{|1-xy|}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{y^2+1}}$

$=\frac{|1-\tan\alpha\cdot\tan\beta|}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}\cdot\sqrt{\tan^2\beta+1}}=\left|\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cdot\sec\alpha\sec\beta}\right|$

$=|\cos(\alpha+\beta)|=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha+\beta)}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

307．已知$m_1=\frac{a+b}{a-b}$，$m_2=\frac{c+d}{c-d}$，$m_3=\frac{ac-bd}{ad+bc}(abc\neq 0)$，

求证：$m_1+m_2+m_3=m_1\cdot m_2\cdot m_3$

【精析】从欲证的结论，可联想到$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，

则$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$，

【证明】 $m_1=\dfrac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}$，$m_2=\dfrac{1+\frac{d}{c}}{1-\frac{d}{c}}$，

令 $\frac{b}{a}=\tan\alpha$，$\frac{d}{c}=\tan\beta$，

则 $m_1=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)$

∵$t\geq 0$，∴$t>1$，∴$\sqrt{\log_a x-1}>1$，$\log_a x>2$．

$=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=\cot(\alpha+\beta)$

$=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta)$

∵$(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)+(\dfrac{\pi}{4}+\beta)+(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta)=\pi$

∴$\tan(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)+\tan(\dfrac{\pi}{4}+\beta)+\tan(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta)$

$\tan(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)\cdot\tan(\dfrac{\pi}{4}+\beta)\cdot\tan(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta)$

即 $m_1+m_2+m_3=m_1\cdot m_2\cdot m_3$．

308．在非直角△ABC 中，化简

cotAcotB＋cotBcotC＋cotCcotA．

【解答】非直角△ABC 中，tanA＋tanB＋tanC＝tanA·tanB·tanC，且 tanAtanBtanC≠0，

故 $\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A\tan B\tan C}=1$．

∴cotAcotB＋cotBcotC＋cotCcotA

$=\dfrac{1}{\tan A\tan B}+\dfrac{1}{\tan B\tan C}+\dfrac{1}{\tan C\tan A}$

$=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A\tan B\tan C}=1$．

309．在△ABC 中，求证：

$\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$．

【证明】左边$=\dfrac{-\cos(B+C)}{\sin B\sin C}+\dfrac{-\cos(C+A)}{\sin C\sin A}+\dfrac{-\cos(A+B)}{\sin A\sin B}$

＝－cotBcotC＋1－cotCcotA＋1－cotAcotB＋1

＝3－(cotBcotC＋cotCcotA＋cotAcotB)

＝3－1＝2．

310．设△ABC 中，tanA、tanB、tanC 为连续自然数，最长边 c＝10，求边 a、b 的长．

【解答】设 tanA＝n－1，tanB＝n，tanC＝n＋1，n≥2 且 n∈N，
由 tanA＋tanB＋tanC＝tanAtanBtanC，
得 $3n=n(n^2-1)$，
解得 n＝2，于是，
tanA＝1，tanB＝2，tanC＝3
且 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.
故 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=10\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{10}{3\sqrt{10}}=\frac{10\sqrt{5}}{3}$；
同理 $b=\frac{20\sqrt{2}}{3}$.

311．已知 $\frac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\frac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$，求证：$\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=1$.
【证明】设 $\sin^2 A=a$，$\sin^2 B=b$.
则由已知得 $\frac{(1-a)^2}{1-b}+\frac{a^2}{b}=1$.
即 $b(1-a)^2+a^2(1-b)=b(1-b)$.
整理得 $(a-b)^2=0$，∴a＝b.
$\therefore \frac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=\frac{(1-b)^2}{1-a}+\frac{b^2}{a}$
$=1-a+a=1$.

312．求证：4tan10°＋2tan40°＋tan20°－tan70°＝0
【证明】左边＝4cot80°＋2tan40°＋tan20°－tan70°
＝2(2cot80°＋tan40°)＋tan20°－tan70°
＝2cot40°＋tan20°－tan70°
＝cot20°－tan70°＝0

313．求证：$\tan x+\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-2\cot 2x$
【证明】∵cotx－tanx＝2cot2x
∴tanx＝cotx－2cot2x，
$\therefore \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\cot x$
$\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}=\frac{1}{2^2}\cot\frac{x}{2^2}-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\cdots$
…
$\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^{n-1}}$
相加，可得所证结论成立.

314．求和$S_n=\tan\frac{x}{2}\sec x+\tan\frac{x}{4}\sec\frac{x}{2}+\cdots+\tan\frac{x}{2^n}\sec\frac{x}{2^{n-1}}$

【解答】tanxsec2x$=\tan x\frac{1+\tan x^2}{1-\tan^2 x}=\tan x\frac{2-(1-\tan^2 x)}{1-\tan^2 x}$

$$=\tan x(\frac{2}{1-\tan^2 x}-1)$$

=tan2x-tanx

把x改为$\frac{x}{2^k}$，则有$\tan\frac{x}{2^k}\sec\frac{x}{2^{k-1}}=\tan\frac{x}{2^{k-1}}-\tan\frac{x}{2^k}$

令k＝1，2，…，n，然后各式相加，消去右边的相同项，即得

S_n＝tanx－$\tan\frac{x}{2^n}$．

315．求和S_n＝$\frac{1}{1+\tan x\cdot\tan 2x}+\frac{1}{1+\tan 2x\cdot\tan 4x}+\cdots+\frac{1}{1+\tan nx\cdot\tan 2nx}$

【解答】$\frac{1}{1+\tan kx\tan 2kx}=\frac{1}{1+\tan kx\frac{2\tan kx}{1-\tan^2 kx}}=\frac{1-\tan^2 kx}{1+\tan^2 kx}$

$=\mathrm{co}2kx=\frac{1}{\sin x}\sin x\cos 2kx=\frac{1}{2\sin x}[\sin(2k+1)x-\sin(2k-1)x]$

令k＝1，2，…，n，然后相加消去右边的相同项即得

S_n＝$\frac{\sin(2n+1)x-\sin x}{2\sin x}$．

316．如图51，在△ABC中，a＝10，c－b＝6．

求证：$\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$＝$\frac{1}{4}$．

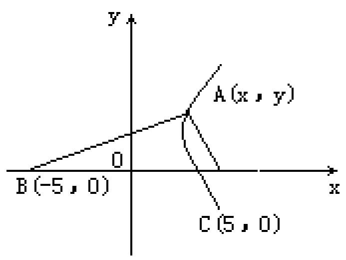


图 51

【证明】由 a＝10，c－b＝6，可知|BC|＝10，|AB|－|AC|＝6．即动点A到两定点B、C的距离的差为定值，由双曲线定义知，A(x，y)在双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}$＝1的右支上．

由双曲线的焦点半径公式得

|AB|＝$\frac{5}{3}$x＋3，|AC|＝$\frac{5}{3}$x－3，

故$\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\frac{\sin B}{1+\cos B}\cdot\frac{1+\cos C}{\sin C}$

$$=\frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{1+\cos C}{1+\cos B}$$

$$=\frac{|AC|}{|AB|}\cdot\frac{1+\frac{5-x}{|AC|}}{1+\frac{5+x}{|AB|}}=\frac{|AC|+5-x}{|AB|+5+x}$$

$$=\frac{\frac{5}{3}x-3+5-x}{\frac{5}{3}x+3+5+x}=\frac{2x+6}{8x+24}=\frac{1}{4}.$$

317．设α、β为锐角，且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$，求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

【证明】∵ $\alpha+\beta+\pi-(\alpha+\beta)=\pi$，

∴α，β，π－α－β可作为一个三角形的三个内角.

依余弦定理得

$\sin^2(\pi-\alpha-\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\pi-\alpha-\beta)$

即 $\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$ ①

又∵ $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\geq\sin^2(\alpha+\beta)$ ②

②代入①得 $\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)\leq 0$.

∵ $\sin\alpha>0$，$\sin\beta>0$.

∴ $\cos(\alpha+\beta)\leq 0$，$\alpha+\beta\geq\frac{\pi}{2}$

另一方面 $\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)$

∵ $0<\alpha+\beta<\pi$ ∴ $\sin(\alpha+\beta)\leq 1$,

∴ $\cos 2\alpha+\cos 2\beta\geq 0$,

即 $2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\geq 0$,

又 $\cos(\alpha-\beta)>0$，∴ $\cos(\alpha+\beta)\geq 0$.

∴ $\alpha+\beta\leq\frac{\pi}{2}$

利用上面二个结论可得 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

318．在△ABC中，A、B、C为三个内角，a、b、c为三个角的对边，求证：对任意实数θ，有 $a\cos(\theta-B)+b\cos(\theta+A)=c\cos\theta$.

【证明】∵ $a\cdot\frac{b}{2R}=b\cdot\frac{a}{2R}$，∴ $a\sin B=b\sin A$.

∴ $a\sin\theta\sin B-b\sin\theta\sin A=0$. ①

由射影定理得：$c=a\cos B+b\cos A$

∴ $c\cos\theta=a\cos\theta\cos B+b\cos\theta\cos A$ ②

①+②得：$a\cos(\theta-B)+b\cos(\theta+A)=c\cos\theta$

319．在△ABC 中，求证：$a\cos A+b\cos B=c\cos(A-B)$

【证明】左边$=(b\cos C+c\cos B)\cos A+(a\cos C+c\cos A)\cos B$

$=\cos C(b\cos A+a\cos B)+2c\cos A\cos B$

$=c\cos C+2c\cos A\cos B$

$=c(\cos C+2\cos A\cos B)$

$=c[\cos C+\cos(A+B)+\cos(A-B)]$

$=c[-\cos(A+B)+\cos(A+B)+\cos(A-B)]$

$=c\cos(A-B)=$右边．

320．在△ABC中，求证：$\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$．

【证明】①当△ABC 为钝角或直角三角形时，不等式显然成立．

②当△ABC 为锐角三角形时，

$\because a=b\cos C+c\cos B\ge2\sqrt{bc\cos B\cos C}$

$b=c\cos A+a\cos C\ge2\sqrt{ca\cos A\cos C}$

$c=a\cos B+b\cos A\ge2\sqrt{ab\cos B\cos A}$

三式相乘化简即得$\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$．

321．在△ABC 中，三边 a、b、c 成等比数列．

求证：$2a\cos^2\frac{C}{2}+2c\cos^2\frac{A}{2}\ge3b$．

【证明】∵a、b、c 成等比数列，∴$b^2=ac$．

左边$=a(1+\cos C)+c(1+\cos A)$

$=a+c+a\cos C+c\cos A$

$=a+c+b\ge2\sqrt{ac}+b=3b=$右边．

322．已知$\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})=e^x$，求证：$\tan\theta=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$．

【证明】$\because\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})=\tan\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}$

$$=\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}+\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$=\sec\theta+\tan\theta=e^x$．

$\therefore\sec\theta=e^x-\tan\theta$．

两边平方后，得 $1+\tan^2\theta=e^{2x}-2e^x\tan\theta+\tan^2\theta$，

$\therefore\tan\theta=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$．

323．设 k∈R，且关于 x 的二次方程 $kx^2+(2k-3)x+k-2=0$ 的两个实根分别是 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，求 $y=[1-\cos2(\alpha+\beta)]\cdot\csc2(\alpha+\beta)$ 的取值范围．

【解答】由已知得$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{3-2k}{k}$，$\tan\alpha\tan\beta=\frac{k-2}{k}$，

$\therefore\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}-k$.

由$k\neq0$且$\Delta\geq0$得$k\leq\frac{9}{4}$且$k\neq0$.

$\therefore\tan(\alpha+\beta)\geq-\frac{3}{4}$且$\tan(\alpha+\beta)\neq\frac{3}{2}$.

$\therefore y=\frac{1-\cos2(\alpha+\beta)}{\sin2(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta)\geq-\frac{3}{4}$且$\neq\frac{3}{2}$.

若$y=0$，则$\cos2(\alpha+\beta)=1$，此时$\sin2(\alpha+\beta)=0$，式子$y=\frac{1-\cos2(\alpha+\beta)}{\sin2(\alpha+\beta)}$无意义，故$y\neq0$.

综上$y\in[-\frac{3}{4}，0]\cup(0，\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2}，+\infty)$.

324．已知$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\beta$，求证：$3\sin\alpha=\sin(\alpha+2\beta)$.

【精析与解答】考察条件与结论间的差异，

①函数名称的差异是正弦与正切；

②角的差异分别是$\alpha+\beta$，β与α，$\alpha+2\beta$．通过观察不难得到这样的关系：$(\alpha+\beta)-\beta=\alpha$，$(\alpha+\beta)+\beta=\alpha+2\beta$，即求证中的两角$\alpha$和$\alpha+2\beta$可通过已知中所涉及的两个$\alpha+\beta$和$\beta$的运算式来表示，由此可根据条件向$(\alpha+\beta)-\beta$与$(\alpha+\beta)+\beta$的正弦变形.

【证明】由已知$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\beta$可得$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\beta}{\cos\beta}$.

$\therefore\sin(\alpha+\beta)\cos\beta=2\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$．0　　①

又$\because\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=3\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$，

即$\sin(\alpha+2\beta)=3\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$.　　②

又由①得

$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$

即$\sin\alpha=\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$.　　③

把③代入②得

$\sin(\alpha+2\beta)=3\sin\alpha$.

325．已知α、β为锐角，且$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$，$3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0$，

求证：$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

【精析】①可看出角的差异是α与2α，2β与β；②从结论$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$可以看出：用倍角公式把已知两等式中$2\alpha$化为$\alpha$，$\beta$化为$2\beta$为宜．由此得到如下证法.

【证明】已知两等式可变形为：

$3\sin^2\alpha=\cos2\beta$，$3\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\beta$.

于是$\cos(\alpha+2\beta)$

$=\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta$

$=\text{coc}\alpha\cdot3\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot3\sin\alpha\cos\alpha$

$=0$.

又$\because 0<\alpha+2\beta<\frac{3}{2}\pi$，

$\therefore \alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

326．求证：$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$．

【精析】①可看出等式两边角、函数名称都有差异；②解题思路：将单角化为半角，由繁到简，这是证明三角等式的一般方法．因为等式右边繁于左边，所以可从右端证到左端．

【证明】右边$=\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$

$=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})}{2\cos\frac{\alpha}{2}(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})}$

$=\tan\frac{\alpha}{2}=$左边．

327．已知$\tan^2\alpha=1+2\tan^2\beta$，求证：$\cos^2\beta=1+\cos2\alpha$．

【证明】$\tan^2\alpha=1+2\tan^2\beta\xrightarrow{\text{等式两边加上1}}$

$1+\tan^2\alpha=2(1+\tan^2\beta)\xrightarrow{\text{平方关系}}$

$\sec^2\alpha=2\sec^2\beta\xrightarrow{\text{倒数关系}}$

$\cos^2\beta=2\cos^2\alpha\xrightarrow{\text{倍角公式}}$

$\cos^2\beta=1+\cos2\alpha$．

328．求证：$\dfrac{3-4\cos2A+\cos4A}{3+4\cos2A+\cos4A}=\tan^4A$．

【证明】$\because$左边$=\dfrac{2-4\cos2A+2\cos^2 2A}{2+4\cos2A+2\cos^2 2A}$

$=\dfrac{(1-\cos2A)^2}{(1+\cos2A)^2}=(\dfrac{1-\cos2A}{1+\cos2A})^2$

$=(\tan^2A)^2=$右边．

$\therefore$原等式成立．

329．在实数集上解方程组．

$$\begin{cases}\sqrt{x(1-y)}+\sqrt{y(1-x)}=\dfrac{1}{2} & ①\\ \sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}=\dfrac{\sqrt{3}}{4} & ②\end{cases}$$

【解答】由②知 $x(1-x)\geq 0$，$y(1-y)\geq 0$，

$\therefore 0\leq x\leq 1$，$0\leq y\leq 1$，且当 $0\leq x\leq 1$，$0\leq y\leq 1$ 时，①也有意义，故可令 $x=\sin^2\alpha$，$y=\sin^2\beta$，其中 α、β 适合 $0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$，$0\leq\beta\leq\frac{\pi}{2}$，于是原方程组化为

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}\\ \sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}.$$

注意到 $\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin2\alpha+\sin2\beta)=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$，则进一步可化成

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2} & ③\\ \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{4} & ④\end{cases}$$

④÷③得：$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤

$\because 0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$，$0\leq\beta\leq\frac{\pi}{2}$，$\therefore$ 由③、⑤可得 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，$\alpha-\beta=\pm\frac{\pi}{6}$.

$$\therefore\begin{cases}\alpha_1=\frac{\pi}{6}\\ \beta_1=0\end{cases};\begin{cases}\alpha_2=0\\ \beta_2=\frac{\pi}{6}\end{cases};\begin{cases}\alpha_3=\frac{\pi}{2}\\ \beta_3=\frac{\pi}{3}\end{cases};\begin{cases}\alpha_4=\frac{\pi}{3}\\ \beta_4=\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

$\therefore$ 原方程组解为 $(x，y)$ 是 $(\frac{1}{4}，0)$；$(0，\frac{1}{4})$；$(1，\frac{3}{4})$；$(\frac{3}{4}，1)$.

330．已知 $0<\alpha<\pi$，求证：$\tan\frac{\alpha}{2^n}-\cot\alpha>n$．$(n\geq 2)$

【证明】由 $\frac{\alpha}{2^n}$ 与 α 知，可补序列：$\frac{\alpha}{2^{n-1}}$，$\frac{\alpha}{2^{n-2}}$，…，$\frac{\alpha}{2}$，

则 $\cot\frac{\alpha}{2^n}-\cot\alpha=(\cot\frac{\alpha}{2^n}-\cot\frac{\alpha}{2^{n-1}})+(\cot\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\cot\frac{\alpha}{2^{n-2}})+\cdots$

$+(\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha)$.

当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cot\theta-\cot2\theta=\frac{1+\tan^2\theta}{2\tan\theta}\geq 1$，(*) 当且仅当 $\tan\theta=1$(即 $\theta=\frac{\pi}{4}$)时等号成立，分别令：$\theta=\frac{\alpha}{2^n}$，$\frac{\alpha}{2^{n-1}}$，…，$\frac{\alpha}{2}$，可知(*)式右

端每一个括号内的值都不小于1；又因 $n\geq 2$，等号不可能同时成立．故

$$\cot\frac{\alpha}{2^n}-\cot\alpha>n(n\geq 2).$$

331．在△ABC中，证明 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\leq\frac{9}{4}$，当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时等号成立．

【证明】先用倍角公式降次，再经过和差化积后配方．

$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$

$=\frac{1}{2}[(1-\cos 2A)+(1-\cos 2B)]+(1-\cos^2C)$

$=2-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)-\cos^2C$

$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2C$

$=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2C$

$=2-[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)]^2+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\leq 2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$，

当且仅当 $\cos^2(A-B)=1$ 且 $\cos C=\frac{1}{2}\cos(A-B)$，即 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时，等号成立．

332．设 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x-3=0$ 的两个实根，求 $\sin^2(\alpha+\beta)-3\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-3\cos^2(\alpha+\beta)$ 的值．

【解答】由题设条件和韦达定理，得

$\tan\alpha+\tan\beta=3$，$\tan\alpha\tan\beta=-3$．

$\therefore\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3}{4}$．

$\therefore\sin^2(\alpha+\beta)-3\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-3\cos^2(\alpha+\beta)$

$=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}[\tan^2(\alpha+\beta)-3\tan(\alpha+\beta)-3]$

$=-3$．

333．解方程 $\tan(x-\frac{\pi}{4})=\frac{2-\cos x}{2+\cos x}$．

【解答】原方程变形为 $\frac{\tan x-1}{1+\tan x}=\frac{2-\cos x}{2+\cos x}$，应用比例性质，得 $\tan x=\frac{2}{\cos x}$，即 $\sin x=2$，此方程无解．

注意到 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 虽对变形后的方程无意义，但它却适合原方程，故 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 为原方程的解．

334．已知 $a\sin a-b\cos a=0(a\neq 0)$，求证 $a\cos 2a+b\sin 2a=a$．

【证明】由题意，得$\tan a=\frac{b}{a}$，

于是$\sin 2a=\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+(\frac{b}{a})^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$，

$\cos 2a=\frac{1-(\frac{b}{a})^2}{1+(\frac{b}{a})^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$，

$\therefore a\cos 2a+b\sin 2a=\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{2ab^2}{a^2+b^2}=a$.

335．求证：$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

【证明】$\because\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$， ①

$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$ ②

∴①−②，得$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

336．求$y=\frac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}$的最值.

【解答】利用万能代换，设$\tan\frac{x}{2}=t$，则

$y=\frac{-11t^2+2t+1}{-7t^2-6t-3}$. ①

$\because(-6)^2-4\times(-7)\times(-3)<0$，

$\therefore -7t^2-6t-3<0$，

于是，可将①式整理成

$(7y-11)t^2+2(3y+1)t+3y+1=0$. ②

设$y\neq\frac{11}{7}$. 由于t是实数，故由②得$\Delta\geq 0$，即

$\Delta=4[(3y+1)^2-(7y-11)(3y+1)]=16(3y+1)(3-y)\geq 0$，

$\therefore -\frac{1}{3}\leq y\leq 3$.

由于当$t=-\frac{1}{2}$时，$y=\frac{11}{7}$，

$\therefore -\frac{1}{3}\leq y\leq 3$.

∴y的最大值是3，最小值是$-\frac{1}{3}$.

337．已知$S_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{2^3}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$．求证：对于正整数m、n，当m＞n时，$|s_m-s_n|<\frac{1}{2^n}$．

【证明】记$a_k=\frac{\sin k}{2^k}(k\in N)$，则$|a_k|\le\frac{1}{2^k}$．于是当m＞n时，

$|S_m-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|$

$\le|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_m|$

$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^m}$

$=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}[1-(\frac{1}{2})^{m-n}]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}[1-(\frac{1}{2})^{m-n}]<\frac{1}{2^n}$．

338．已知：$\cos(\theta-\alpha)=a$，$\sin(\theta-\beta)=b$，求证：

$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2+b^2-2ab\sin(\alpha-\beta)$．

【证明】把 $a=\cos(\theta-\alpha)$，$b=\sin(\alpha-\beta)$代入待证式的右边，得

右边$=\cos^2(\theta-\alpha)+\sin^2(\theta-\beta)-2\cos(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\frac{1}{2}[1+\cos 2(\theta-\alpha)]+\frac{1}{2}[1-\cos 2(\theta-\beta)]-[\sin(2\theta-\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\sin(\alpha-\beta)$

$=1+\sin(2\theta-\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)-\sin(2\theta-\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\cos^2(\alpha-\beta)$．

339．在△ABC 中，证明$\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C\ge\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A$．

【证明】令 $\tan A=x$，$\tan B=y$，$\tan C=z$，则原不等式为

$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$①

为证①，即证不等式

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge 0$，②

将不等式②左边配方，得$\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\ge 0$．

故原不等式成立．

340．已知△ABC的三边长为a，b，c，求证：$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$．

【证明】由$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$及余弦定理，有$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\le\frac{a^2}{2bc}$，

$\therefore\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$．

同理可得：$\sin\frac{B}{2}\leq\frac{b}{2\sqrt{ac}}$，$\sin\frac{C}{2}\leq\frac{c}{2\sqrt{ab}}$．

$\therefore\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{a}{2\sqrt{bc}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{ac}}\cdot\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{8}$．

341．已知定义在 R^+ 上的函数 $f(x)$ 满足条件：①对定义域上任意的 x、y 都有 $f(x)+f(y)=f(xy)$；②当 $x>1$ 时，$f(x)>0$．试求：

(1)求证：$f(\frac{1}{x})=-f(x)$；

(2)证明：$f(x)$ 在 R^+ 上为增函数；

(3)若 $f(3)=1$，且 a 为正实数时，解关于 x 的不等式

$f(x)-f(\frac{1}{2a-x})\geq 2$

【证明】(1)令 $x=y=1$，由 $f(x)+f(y)=f(xy)$

得：$f(1)+f(1)=f(1)$，$\therefore f(1)=0$．

令 $y=\frac{1}{x}$，由 $f(x)+f(y)=f(xy)$ 可得：

$f(1)=f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})=0$，

$\therefore f(\frac{1}{x})=-f(x)$．

(2)设 $x_2>x_1>0$，由(1)证明结论有 $-f(x_1)=f(\frac{1}{x_1})$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(\frac{1}{x_1})=f(\frac{x_2}{x_1})$．

$\because\frac{x_2}{x_1}>1$，由题设②可得 $f(\frac{x_2}{x_1})>0$，

$\therefore f(x_2)>f(x_1)$，则 $f(x)$ 在 R^+ 上为增函数．

【解答】(3)原不等式与 $f(x)+f(2a-x)\geq 2$ 同解．

$\because 2=1+1=f(3)+f(3)=f(9)$

$\therefore f[x\cdot(2a-x)]\geq f(9)$，从而据(2)中 $f(x)$ 在 R^+ 是增函数的结论可得：

$$\begin{cases}a>0\\x>0\\2a-x>0\\x(2a-x)\geq 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\0<x<2a\\x^2-2ax+9\leq 0\end{cases}$$

①当 $\Delta_x=4a^2-36<0$，即 $0<a<3$ 时，上述不等式组无解；

②当 $\Delta_x=4a^2-36=0$，即 $a=3$ 时，可得

$f(x)+f(2a\cdot x)=f(9)$，即 $f[x(6-x)]=f(9)$

从而得 $x(6-x)=9$，$\therefore x=3$

③当 $\Delta_x=4a^2-36>0$，即 $a>3$ 时．

由 $x^2-2ax+9\leq 0$ 解得：

$a-\sqrt{a^2-9}<x<a+\sqrt{a^2-9}$.

$(\because a>0,\ a-\sqrt{a^2-9}>0,\ a+\sqrt{a^2-9}<2a)$

综上所述：当 a＜3 时，不等式无解；

当 a＝3 时，不等式的解为 x＝3；

当$a>3$时，不等式的解为$a-\sqrt{a^2-9}<x<a+\sqrt{a^2-9}$.

342．n 为自然数，实数 a＞1，解关于 x 的不等式

$\log_a x-4\log_{a^2}x+12\log_{a^3}x-\cdots+n(-2)^{n-1}\log_{a^n}x>\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$.

【精析】不等式的左边由数列形式给出，由对数的运算性质，a 的指数可以提作对数符号前面的分母，这样便可求和，要去掉不等式两边的公因式$\frac{1-(-2)^n}{3}$时，则要分n为偶数和奇数进行讨论.

【解答】由$\log_{a^n}x=\frac{1}{n}\log_a x$，易见

左端$=[1-2+\cdots+(-2)^{n-1}]\log_a x=\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a x$

∴原不等式化为

$\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a x>\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$.

①当n为偶数时，$\frac{1-(-2)^n}{3}<0$，原不等式化为

$\log_a(x^2-a)>\log_a x$，

由$\begin{cases}x>0\\x^2-a>x\end{cases}$ 得解集为

$\{x|x>\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}$

②当n为奇数时，$\frac{1-(-2)^n}{2}>0$，原不等式化为：

$\log_a(x^2-a)<\log_a x$，

其解集为$\{x|\sqrt{a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}$.

综上得：

n为奇数时，解集为$\{x|\sqrt{a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}$；

n为偶数时，解集为$\{x|x>\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}$.

343．解不等式 $\log_a(x+1-a)>1$.

【精析】 由对数不等式变形为代数不等式要对 a 进行分类讨论.

【解答】　①当$a>1$时$\Rightarrow\begin{cases}x+1-a>0\\x+1-a>a\end{cases}\Rightarrow x>2a-1$

②当$0<a<1$时$\Rightarrow\begin{cases}x+1-a>0\\x+1-a<a\end{cases}\Rightarrow a-1<x<2a-1$

综上得：当 $a>1$ 时，不等式的解为$\{x|x>2a-1\}$；当 $0<a<1$ 时，不等式的

解为$\{x|a-1<x<2a-1\}$.

344．函数 $f(x)$在$[0，1]$上连续，$f(0)=f(1)$，且对任意不同的 x_1，$x_2\in[0，1]$都有：

$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$.

求证：$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

【证明】　因为 $f(x)$在$[0，1]$上连续，所以 $f(x)$在$[0，1]$有最大值和最小值，不妨设最大值 $M=f(t_1)$，最小值 $m=f(t_2)$，t_1，$t_2\in[0，1]$.

①当$|t_1-t_2|\le\frac{1}{2}$时，$|f(x_2)-f(x_1)|\le|f(t_1)-f(t_2)|\le|t_1-t_2|$

$\therefore|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

②当$|t_1-t_2|>\frac{1}{2}$时，设$t_1<t_2$，即$t_2-t_1>\frac{1}{2}$.

$|f(x_2)-f(x_1)|\le|f(t_1)-f(t_2)|$

$=|f(t_1)-f(0)+f(1)-f(t_2)|$

$\le|f(t_1)-f(0)|+|f(1)-f(t_2)|$

$<|t_1-0|+|1-t_2|=1-(t_2-t_1)$

$<\frac{1}{2}$

若 $t_2<t_1$，同样可得：

$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

故对任意 x_1，$x_2\in[0，1]$，都有：

$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

345．已知a、b、c$\in\mathbf{R}$，求证：$a^2-\frac{4}{3}b+\lg2$、$b^2-2c+\lg11$、$c^2-a+\lg5$ 中至少有 1 个值大于零.

【精析】　单独判断各个代数式值的符号很困难．根据 a^2、b^2、c^2 以及 a、b、c 有规律地分布在 3 个代数式中的特征，又需证 3 个代数式中至少有 1 个值大于零的要求，可考虑 3 个代数式的和.

【证明】 $(a^2-\frac{4}{3}b+\lg 2)+(b^2-2c+\lg 11)+(c^2-a+\lg 5)=(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{2}{3})^2+(c-1)^2+\lg 11-\frac{25}{36}>0$，由此得到，$a^2-\frac{4}{3}b+\lg 2$，$b^2-2c+\lg 11$，$c^2-a+\lg 5$中至少有1个值大于零．

346．已知$x_i\in\mathbf{R}(i=1，2，3，\cdots，n，n\geq 2)$满足：$\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$，

求证：$|\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}|\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$．

【证明】 $\because\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$，

$\therefore|\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}|$

$|\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})\sum\limits_{i=1}^{n}x_i|$

$|\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(\frac{1}{i}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n})|$

$\leq\sum\limits_{i=1}^{n}|\frac{1}{i}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}|\cdot|x_i|$．

设$f(i)=\frac{1}{i}-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})$．

当$i=1$时，$f(i)\leq f(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$，

当$i=n$时，$f(i)\geq f(n)=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}$，

于是$|f(i)|=|\frac{1}{i}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}|\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$．

又$\because\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$，

$\therefore|\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}|\leq(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n})\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$．

347．求证抛物线$y=x^2-x-\frac{a}{2}$，$y=x^2-ax+a+10$，$y=x^2-x+\frac{a}{2}-7$中至少有1条在x轴的上方．

【精析】 由于二次项的系数都大于零，因此这 3 条抛物线的开口都向上，要证明至少有 1 条在 x 轴的上方，只需证判别式$\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$中至少有 1 个小于 0，即至少有 1 条抛物线与 x 轴无交点，故只要能证$\triangle_1+\triangle_2+\triangle_3<0$ 即可．

【证明】 因为$\triangle_1+\triangle_2+\triangle_3=1+2a+a^2-4a-40+1-2a^2+28=$

$-a^2-2a-10=-(a-1)^2-9<0$，故$\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$中至少有 1 个小于零，又 3 条抛物线的开口向上，所以至少有 1 条抛物线在 x 轴上方．

利用结论：若 $A_1+A_2+\cdots+A_n\geq nk$，则 A_1，A_2，…，A_n 中至少有 1 个不小于 k．

348．如图52，已知函数$y=\frac{(ax+b)}{x^2+1}$的最大值为4，最小值为-1，试求 a、b 的值．

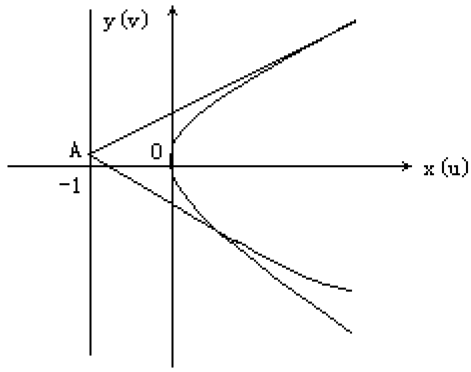


图 52

【精析】 变形为$y=\frac{ax-(-b)}{x^2-(-1)}$，可以看出点A坐标为$(-1，-b)$与动点 $M(x^2，ax)$连线的斜率构成上式，而动点 M 在

$$\begin{cases} u=x^2(u\geq 0) \\ v=ax \end{cases}$$

即 $v^2=a^2u$ 的抛物线上，而点 A 在 $u=-1$ 的直线上，现在问题转化成为直线 $u=-1$ 上的一点，向抛物线 $v^2=a^2u$ 引 2 条切线，求当其切线斜率分别为 4 和-1 时的 a、b 值．此时切线过$(-1，-b)$，抛物线焦参数 $p=a^2/2$，由已知斜率的抛物线切线方程 $y=kx+p/2k$ 知：

$$\begin{cases} -b=4\cdot(-1)+\dfrac{\frac{a^2}{2}}{2\times 4} & ① \\ -b=(-1)\cdot(-1)+\dfrac{\frac{a^2}{2}}{2\times(-1)} & ② \end{cases}$$

即$\begin{cases} -b=-4+\dfrac{a^2}{16}， \\ -b=1-\dfrac{a^2}{4}． \end{cases}$ 解得$a=\pm 4$，$b=3$．

349．已知 $f(x)=x^2+px+q(p，q\in R)$，求证：

$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$中至少有一个不少于$\frac{1}{2}$．

【证明】 假设$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$都小于$\frac{1}{2}$，

则$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|<\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$　　①

而$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|$

$=|1+p+q|+|4+2p+q|+|9+3p+q|$

$\geq|1+p+q|+|(8+4p+2q)-(9+3p+q)$

$=|1+p+q|+|-1+p+q|$

$\geq|1+p+q-(-1+p+q)|=2$

即$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|\geq 2$　　②

显然①和②矛盾，从而假设不成立．

$\therefore|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$．

350．已知 x、y、z 满足 $x+y+z=1$，$x^2+y^2+z^2=1/2$，求 x、y、z 的取值范围．

【精析】　这个已知条件中，x、y、z 是轮换的，把哪一个作为主变量均可．

【解答】　因为 $x+y+z=1$，所以 $z=1-x-y$，故 $x^2+y^2+(1-x-y)^2=1/2$．

整理得：$y^2+(x-1)y+(x^2-x+1/4)=0$．

因为 $y\in R$，所以$\triangle=(x-1)^2-4(x^2-x+1/4)\geq 0$．

得 $0\leq x\leq 2/3$．同理可求：$0\leq y\leq 2/3$，$0\leq z\leq 2/3$．

351．已知 $1\leq x^2+y^2\leq 2$，求证：

$\frac{1}{2}\leq x^2+xy+y^2\leq 3$．

【证明】　令$x=t\cos\theta$，$y=t\sin\theta$，其中$1\leq t\leq\sqrt{2}$，$0\leq\theta\leq 2\pi$，则

$x^2+xy+y^2=t^2(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta)$．

又 $1\leq t^2\leq 2$，$-1\leq\sin 2\theta\leq 1$．

$\therefore x^2+xy+y^2\leq 2(1+\frac{1}{2}\times 1)=3$，

$x^2+xy+y^2\geq 1\times[1+\frac{1}{2}\times(-1)]=\frac{1}{2}$．

故$\frac{1}{2}\leq x^2+xy+y^2\leq 3$．

352．已知 x，$y\in R$，$1\leq x^2+y^2\leq 4$，求 $u=x^2+xy+y^2$ 的最值．

【解答】　设 $x=t\cos\theta$，$y=t\sin\theta$，t 为参数．

因 $1\leq x^2+y^2\leq 4$，故 $1\leq t^2\leq 4$．

$\therefore u=t^2(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)=t^2(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta)$．

当 $t^2=4$，且 $\sin\theta=1$ 时，$u_{最大}=6$；当 $t^2=1$，且 $\sin 2\theta=-1$ 时，$u_{最小}=\frac{1}{2}$．

353．求证：$3^n>2^{n-1}(n+2)$，其中 $n>2$ 且 $n\in N$．

【证明】　当 $n>2$ 时，

$3^n=(2+1)^n=2^n+C_n^1 2^{n-1}+C_n^2 2^{n-2}+\cdots+C_n^n>2^n+C_n^1 2^{n-1}=2^n+n\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}(2+n)$.

即：$3^n>2^{n-1}(n+2)$.

354．设a、b、c都是正数，$ab+bc+ca=1$，求证：$a+b+c\geq\sqrt{3}$.

【证明】 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]+3(ab+bc+ca)$

$\geq 3(ab+bc+ca)=3$.

即：$a+b+c\geq\sqrt{3}$.

355．若 $a\geq b>0$，求证：$n(a-b)b^{n-1}\leq a^n-b^n\leq n(a-b)a^{n-1}(n\in N)$.

【证明】 由乘法公式，有

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

又 $a\geq b>0$，先把公式中最右边括号里的 b 换成 a，有

$a^n-b^n\leq(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}a+\cdots+aa^{n-2}+a^{n-1})$.

$=(a-b)\cdot na^{n-1}=n(a-b)a^{n-1}$.

再把公式最右边括号里的 a 换成 b，有

$a^n-b^n\geq(a-b)(b^{n-1}+b^{n-2}b+\cdots+b\cdot b^{n-2}+b^{n-1})$

$=(a-b)\cdot nb^{n-1}=n(a-b)b^{n-1}$.

$\therefore n(a-b)b^{n-1}\leq a^n-b^n\leq n(a-b)a^{n-1}$.

356．设 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$a^2+b^2=c^2$，求证：

$a^n+b^n<c^n(n\in N，n\geq 3)$.

【证明】 $\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$，

设 $\frac{a}{c}=\cos\theta$，$\frac{b}{c}=\sin\theta$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，则有

$(\frac{a}{c})^n+(\frac{b}{c})^n=(\cos\theta)^n+(\sin\theta)^n<\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

故 $a^n+b^n<c^n$.

357．求证：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2(n\in N)$.

【证明】 当$n=1$时，原不等式显然成立，当$n>1$时，$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$

$=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n})$

$=2-\frac{1}{2}<2$.

所以原不等式对一切$n\in N$成立.

358．当 $-1\leq x\leq 0$ 时，求函数 $y=2^{x+2}-3\times 4^x$ 的最大值和最小值.

【解答】 $y=-3(2^x-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3}$．当$-1\leq x\leq 0$时，$\frac{1}{2}\leq 2^x\leq 1$，显然由二次函数的性质可得$y_{最小}=1$，$y_{最大}=\frac{4}{3}$．

359．已知 $y^2-4xy+4x^2+2x-1=0$，求 y 的最值．

【解答】 由已知，变形得 $4x^2-2(2y-1)x+(y^2-1)=0$，$x\in R$，则$\triangle\geq 0$，即有$4(2y-1)^2-16(y^2-1)\geq 0$．故$y\leq\frac{5}{4}$，因此，$y_{最大}=\frac{5}{4}$，无最小值．

360．在任意三角形内求一点，使它到三边距离之积为最大．

【解答】 如图 53，设三角形三边长为 a，b，c，面积为 S，三角形内一点 P 到三边的距离分别为 x，y，z，

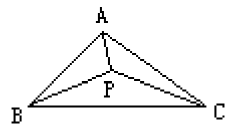


图 53

$\therefore ax+by+cz=2S$(定值)，

$\because ax\cdot by\cdot cz\leq(\frac{ax+by+cz}{3})^3$．

即$xyz\leq\frac{8S^3}{27abc}$($ax=by=cz$时等号成立)．从而，当此点为三角形的重心时(这时△PAB，△PAC，△PBC 面积相等)，它到三边距离之积为最大．

361．求函数$y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$的最值．

【解答】 令$t=\sqrt{x^2+4}$，则$t\geq 2$，

$$y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}=t+\frac{1}{t}$$，在$[1,+\infty)$内递增，

故$y_{最小}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，无最大值．

362．已知 a、b、c 是不全相等的正数，求证：

$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc$．

【证明】 因 $b^2+c^2\geq 2bc$，$a>0$，故 $a(b^2+c^2)\geq 2abc$．

同理，$b(c^2+a^2)\geq 2abc$，$c(a^2+b^2)\geq 2abc$．

因 a、b、c 不全相等，故以上三式中至少有一式不取“＝”号．

故 $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc$．

363．已知：$a>b>0$，$c<d<0$，$m<0$，求证：$\frac{m}{a-c}>\frac{m}{b-d}$．

【证明】 因 $c<d<0$，故 $-c>-d>0$，又因 $a>b>0$，故 $a-c>b-d>0$．

$\therefore \dfrac{1}{a-c} < \dfrac{1}{b-d}$．

又因$m<0$，故$\dfrac{m}{a-c} > \dfrac{m}{b-d}$．

364．已知 x，y，z∈(0，1)，求证：$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$．

【证明】 如图54，构造边长为1的正三角形ABC，设|AD|=x，|BE|=y，|CF|=z．

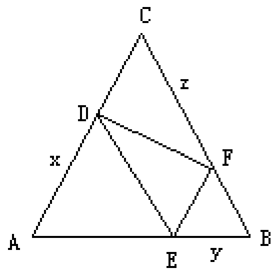


图 54

由面积关系：$S_{\triangle ADE}+S_{\triangle FEB}+S_{\triangle CDF}<S_{\triangle ABC}$，所以$\dfrac{1}{2}z\cdot(1-x)\sin60°+\dfrac{1}{2}x(1-y)\sin60°+\dfrac{1}{2}y(1-z)\sin60°<\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin60°$．

$\therefore x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$．

365．试求函数$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}\,(x>0)$的最大值．

【解答】 构造辅助函数$g(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}$，则$g(x)>0$，细心的读者可能已经发现 f(x)g(x)=1(推知 f(x)>0)．这样问题即转化为求 g(x)的最小值了．

$g(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1}\geq 2+\sqrt{3}$．(“＝”$\Leftrightarrow x=1$)

$\therefore f(x)_{最大}=\dfrac{1}{g(x)_{最小}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$．

366．解不等式$\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{a+x}{a-2x}\leq1\,(a\neq0)$．

【解答】 原不等式等价于

$(\dfrac{a+x}{a-2x}-\dfrac{1}{2})(\dfrac{a+x}{a-2x}-1)\leq0\Leftrightarrow\dfrac{3x(4x+a)}{2(a-2x)^2}\leq0\Leftrightarrow x(x+\dfrac{a}{4})\leq0(\because a\neq0)$．

(1)当 a<0 时，原不等式的解集为[0，－a/4]；

(2)当 a>0 时，原不等式的解集为[－a/4，0]．

367．求证：$1000^{1999}>1999!$．

【精析与解答】 式中的$1999!\xrightarrow{一般性联想}n!\xrightarrow{接近联想}n!$

$=1\cdot 2\cdot 3\cdots n$，$\xrightarrow{\text{接近联想}}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}>\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n}$，即$\dfrac{1}{2}(n+1)>$ $\sqrt[n]{n!}$所以$(\dfrac{n+1}{2})^n>n!$，故当$n=1999$时问题得证.

368．设 $x>0$，$y>0$，$z>0$，求证：

$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}>\sqrt{z^2-zx+x^2}$.

【精析】 这是一个代数不等式的证明问题，从数式的结构．$x^2-xy+y^2=x^2+y^2-2xy\cos 60°$ 可以发现它有立体几何图形的背景.

【证明】 如图 55，构造四面体 V－ABC，使∠AVB＝∠BVC=∠CVA=60°，且 VA=x，VB=y，VC=z，由余弦定理有

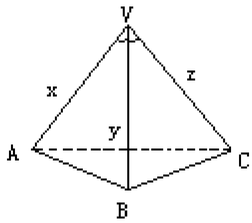


图 55

$AB=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos 60°}$，

$=\sqrt{x^2-xy=y^2}$，

同理，$BC=\sqrt{y^2-yz+z^2}$，$CA=\sqrt{z^2-zx+x^2}$.

在△ABC 中，由于 AB＋BC＞CA，故有

$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}>\sqrt{z^2-zx+x^2}$.

369．若 a，b．c，d∈R，且 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，求证：$-1\le ac+bd\le 1$.

【精析】 看到条件 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，联想到公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，从而可设 $a=\cos\alpha$，$b=\sin\alpha$，$c=\cos\beta$，$d=\sin\beta$，则 $ac+bd=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$.

因$|\cos(\alpha-\beta)|\le 1$，故$|ac+bd|\le 1$.

第五章　反三角函数

一、选择题

370．(1)$\arcsin\frac{3}{5}-\arcsin(-\frac{4}{5})$等于

[　　]

A．$\arcsin\frac{7}{25}$　　B．$-\arcsin\frac{7}{25}$

C．$\arcsin\frac{24}{25}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

【精析】　因为$\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{4}{5}$，所以，原式$=\arccos\frac{4}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$．

【解答】　D

(2)若$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则$\arcsin[\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)]+\arccos[\sin(\pi+\alpha)]$等于

[　　]

得：$-a-bi=(a+bi)(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})+(-1)+(-i)$，

【精析】　利用特殊值法求解最简便．

在$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$中，取$\alpha=\frac{\pi}{4}$，代入便可选A．

【解答】　A

371．设函数y=arctanx的图象沿x轴正方向平移2个单位所得的图象是C，又设图象C′与C关于原点对称，那么，C′的对应函数是

[　　]

A．$y=-\arctan(x-2)$

B．$y=\arctan(x-2)$

C．$y=-\arctan(x+2)$

D．$y=\arctan(x+2)$

【精析】　与图象C对应的函数是$y=\arctan(x-2)$．因C′与C关于原点对称，故C′对应函数应为$-y=\arctan(-x-2)$，或$y=\arctan(x+2)$．

【解答】　D

372．如果θ是第三象限角，那么直线$x\cos\theta+y\sin\theta+1=0$的倾斜角的大小是

[　　]

A．$\arctan(-\cot\theta)$

B．$\arctan(-\tan\theta)$

C．$\pi-\arctan(\cot\theta)$

D．$\pi-\arctan(\tan\theta)$

【精析】　由已知，直线斜率$k=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta<0$，故倾斜角为

钝角．而A．B．均为$(-\frac{\pi}{2}，0)$中的角，给予排除．

又 $\tan[\pi-\arctan(\tan\theta)]\neq-\cot\theta$，亦排除 D．

【解答】 C

373．二次函数 f(x)的首项系数为正，且满足关系式 f(x)＝f(2－x)，$x\in R$．那么不等式$f(\frac{\arccos x}{4})>f[\frac{\arccos(1-x)}{4}]$的解集为

[ ]

A．$\{x|\frac{1}{2}<x<1\}$　　B．$\{x|\frac{1}{2}<x\leq 1\}$

C．$\{x|-\frac{1}{2}<x<1\}$　　D．$\{x|-\frac{1}{2}<x\leq 1\}$

【精析】 因 x∈R，f(x)＝f(2－x)，令 x=1－t(t∈R)，则 f(1－t)＝f(1＋t)．这说明二次函数的对称轴为 x＝1．又二次函数的开口向上，故此二次函数当 x≤1 时为减函数，当 x≥1 时为增函数．

由$0\leq\frac{\arccos x}{4}\leq\frac{\pi}{4}<1$及$0\leq\frac{\arccos(1-x)}{4}\leq\frac{\pi}{4}<1$，有$\frac{\arccos x}{4}<\frac{\arccos(1-x)}{4}$．又反余弦函数为减函数，可得不等式组$\begin{cases}x>1-x\\|x|\leq 1\\|1-x|\leq 1\end{cases}$，解得$\frac{1}{2}<x\leq 1$．

【解答】 B

374．已知$\arctan(1+x)+\arctan(1-x)=\frac{\pi}{4}$，则$\arccos\frac{x}{2}$等于

[ ]

A．$\frac{\pi}{3}$或$-\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{4}$或$-\frac{\pi}{4}$

C．$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

【精析】 将已知$\arctan(1+x)+\arctan(1-x)=\frac{\pi}{4}$，两边取正切，得$\frac{\tan[\arctan(1+x)]+\tan[\arctan(1-x)]}{1-\tan[\arctan(1+x)\cdot\tan[\arctan(1-x)]}=1$，即$\frac{(1+x)+(1-x)}{1-(1+x)(1-x)}=1$．求得$x=\pm\sqrt{2}$．

于是，$\arccos\frac{x}{2}=\arccos(\pm\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$．

【解答】 C

375．已知 ab＜0，若直线 ax＋by＋c=0 的倾斜角为θ，且θ满足$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1+\sin\theta}-\sqrt{1-\sin\theta}$，则θ的值是

[ ]

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\arctan(-\frac{4}{3})$

C．$\arctan(-\frac{4}{3})$或$\arctan\frac{4}{3}$　　D．$\arctan\frac{4}{3}$

【精析】 因为直线斜率$\tan\theta=-\frac{a}{b}>0$，所以$0<\theta<90°$，又由已知

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2}-\sqrt{(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})^2}$$

$$=\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}-\left|\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right|,$$

当$\sin\frac{\theta}{2}\geq\cos\frac{\theta}{2}$时，$\cos\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}$，即$\cos\frac{\theta}{2}=0$，这是不可能的．

当$\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$时，$\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}$，$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$，$\frac{\theta}{2}=\arctan\frac{1}{2}$，

$\theta=2\arctan\frac{1}{2}$

易证$2\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{4}{3}$（两边取正切即可）．

【解答】 D

376．方程 cosx=arcsinx 的实根数数目是

[　　]

A．1个　　B．2个

C．3个　　D．无穷多个

【精析】 画出$-1\leq x\leq 1$时$y=\cos x$及$y=\arcsin x$的简图，可知选A．

【解答】 A

377．设x_1、x_2是方程$x^2-(\sin\frac{\pi}{5})x+\cos\frac{\pi}{5}=0$的两个根，则$\arctan x_1+\arctan x_2$的值是

[　　]

A．$\frac{\pi}{10}$　　B．$\frac{3\pi}{10}$

C．$\frac{2\pi}{5}$　　D．$\frac{\pi}{5}$

【精析】 设$\alpha=\arctan x_1$，$\beta=\arctan x_2$，则$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}$．

又由韦达定理，有$x_1+x_2=\sin\frac{\pi}{5}$，$x_1x_2=\cos\frac{\pi}{5}$．

所以$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}}{1-\cos\frac{\pi}{5}}=\cot\frac{\pi}{10}$．

由$x_1\cdot x_2=\cos\frac{\pi}{5}>0$，$x_1+x_2=\sin\frac{\pi}{5}>0$，有$x_1>0$，$x_2>0$．

故$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$．

于是$0<\alpha+\beta<\pi$，而在区间$(0,\pi)$中正切值等于$\frac{\pi}{10}$的角仅有一个．从而$\alpha+\beta=\frac{\pi}{10}$．

【解答】 D

378．若$x<-1$，则$\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}$的值是

[ ]

A．$-\frac{3\pi}{4}$　　B．$\frac{3\pi}{4}$

C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{5\pi}{4}$

【解答】 A

379．若$\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$，则$\arcsin\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}=$

[ ]

A．$x+\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}-x$

C．$\frac{3\pi}{4}-x$　　D．$x-\frac{3\pi}{4}$

【解答】 C

380．已知函数 y=cosx，x∈[－5π，－4π]，那么它的反函数为

[ ]

A．y＝arccosx

B．y=－4π－arccosx

C．y＝－4π＋arccosx

D．y=4π－arccosx

【解答】 B

381．正切曲线 y＝tanωx(ω为常数且ω＞0)的相邻两支截直线 y=1 和 y＝2 所得线段长分别为 m、n，则 m、n 的大小关系为

[ ]

A．m＞n

B．m<n

C．m=n

D．不确定

【解答】 C

382．方程 $\sin^2x+\cos x+k=0$ 有解，常数 k 的取值范围是

[ ]

A．$-1\le k\le \frac{5}{4}$　　B．$-\frac{5}{4}\le k\le 1$

C．$-\frac{5}{4}\le k\le 0$　　D．$0\le k\le \frac{5}{4}$

【解答】 B

383．若要使关于 x 的方程 $\sin^2x-2a\sin x+3a=0$ 有实数解，则实数 a 的取值范围是

[ ]

A．$a\le 0$ 或 $a\ge 3$

B．$-1\le a\le 0$

C．$-1\le a\le -\frac{1}{5}$

D．$-\frac{1}{5}\le a\le 0$

【解答】 B

384．函数 $y=\arccos(x-2)$ 的图象为 C，函数 $f(x)$ 的图象与 C 关于原点对称，则 $f(x)$ 的解析式是

[ ]

A．$y=\arccos(x+2)-\pi$

B．$y=\pi-\arccos(x+2)$

C．$y=\arccos(x+2)+\pi$

D．$y=-\arccos(x+2)$

【解答】 A

385．已知 $\alpha=2\arctan\frac{3}{4}$，$\beta=\frac{\arccos(-\frac{3}{4})}{2}$，$\gamma=\arccos\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{3}$，则α、β、γ的大小关系是

[ ]

A．$\alpha<\beta<\gamma$

B．$\alpha>\beta>\gamma$

C．$\gamma>\alpha>\beta$

D．$\gamma>\beta>\alpha$

【解答】 C

386．已知函数 $f_1(x)=2^x$，$f_2(x)=\cos(-x)$，$f_3(x)=\arcsin x$，$f_4(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arccot}x$，任取两个相乘得若干个函数，其中奇函数有

[ ]

A．6 个　　B．4 个

C．3 个　　D．2 个

【解答】 D

387．函数$f(x)=\sqrt{\operatorname{arc}\cot x-\arctan x}$的定义域是

[ ]

A．(－∞，1]

B．[－1，1]

C．[1，＋∞)

D．$(0，\frac{\pi}{4}]$

【解答】 A

388．在锐角三角形 ABC 中，y＝arccos(sinA)＋arccos(sinB)＋arccos(sinC)的取值集合是

[ ]

A．$\{\frac{\pi}{2}\}$　　B．$\{\frac{3\pi}{2}\}$

C．0，π　　D．$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$

【解答】 A

389．已知函数$y=\arccos x-\frac{\pi}{2}$，则该函数

[ ]

A．是奇函数且是增函数

B．是奇函数且是减函数

C．是偶函数且是增函数

D．是偶函数且是减函数

【解答】 B

390．下列四个式子中，正确的是

[ ]

A．$\sin(\arccos\frac{2}{3})>\sin(\arccos\frac{1}{3})$

B．$\tan(\arccos\frac{2}{3})>\tan(\arccos\frac{1}{3})$

C．$\sin[\arccos(-\frac{2}{3})]>\sin[(\arccos(-\frac{1}{3})])$

D．$\tan[\arccos(-\frac{2}{3})]>\tan[(\arccos(-\frac{1}{3})]$

【解答】 ∵y＝arccosx 在[－1，1]上是减函数，∴$0<\arccos\frac{2}{3}<\arccos\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\arccos(-\frac{1}{3})<\arccos(-\frac{2}{3})<\pi$，再根据正弦，正切函数在区间$(0，\frac{\pi}{2})$、$(\frac{\pi}{2}，\pi)$内的单调性可知，正确结论只能是$\tan[\arccos(-\frac{2}{3})]>\tan[(\arccos(-\frac{1}{3})]$．故选D．

391．函数 f(x)=|sinx|＋|cosx|的值域是

[ ]

A．$[0,\sqrt{2}]$　　　　　B． $[1,2]$

C． $[0,1]$　　　　　D． $[1,\sqrt{2}]$

【精析】 本题可借助于单位圆(如图 56 所示)．

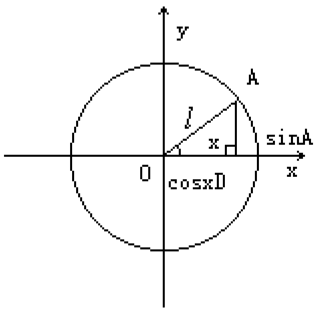


图 56

∵|AD|＋|OD|≥|OA|，

∴|sinx|＋|cosx|≥1．

又∵|sinx|≤1，|cosx|≤1，且|sinx|，|cosx|不能同时为 1，

∴|sinx|＋|cosx|＜2．于是知 1≤f(x)＜2，故应选 D．

392．若(a＋1)(b＋1)＝2，则 arctana＋arctanb 等于

[　　]

A．$\frac{\pi}{6}$　　　　　B．$\frac{\pi}{4}$

C．$\frac{\pi}{3}$　　　　　D．$\frac{\pi}{2}$

【精析】 赋予 a、b 满足条件的特值：a=0，b=1，则易得 arctana＋arctanb $=\frac{\pi}{4}$，故应选B．

393．当$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$的

[　　]

A．最大值是 1，最小值是－1

B．最大值是1，最小值是$-\frac{1}{2}$

C．最大值是 2，最小值是－2

D．最大值是 2，最小值是－1

【精析】 易知$f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，由于$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$，则$-\frac{\pi}{6}\leq x+\frac{\pi}{3}\leq\frac{5\pi}{6}$，如图57所示．由单位圆上的正弦线，即得$-\frac{1}{2}\leq\sin(x+\frac{\pi}{3})\leq 1$．答案应选D．

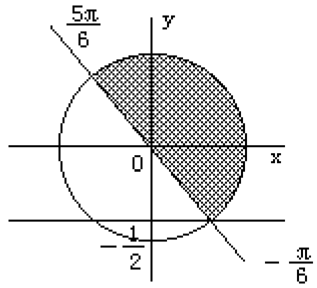


图 57

394．若 0＜a＜1，在[0，2π]上 sinx≥a 的 x 的取值范围是

[　　]

A．[0，arcsina]

B．[arcsina，π－arcsina]

C．[π－arcsina，π]

D．[arcsina，$\frac{\pi}{2}$＋arcsina]

【精析】　在单位圆中，如图 58，利用正弦线在[0，2π]内作出正弦值为 a 的锐角 arcsina 及正弦值为 a 的钝角π－arcsina，显然满足 sinx≥a 的 x 的范围是 arcsina≤x≤π－arcsina．答案应选 B．

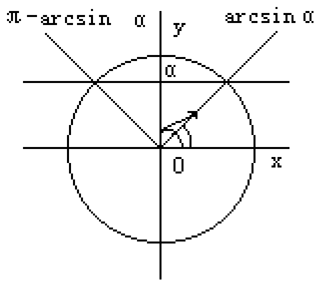


图 58

395．函数y = sinx，x∈[$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$]的反函数为

[　　]

A．y=arcsinx，x∈[－1，1]

B．y=－arcsinx，x∈[－1，1]

C．y=π＋arcsinx，x∈[－1，1]

D．y=π－arcsinx，x∈[－1，1]

【精析】　在单位圆中，在 x 所在区域内，任选一个角 x，不防设其为钝角，如图 59，利用 x 的正弦线，可画出正弦值与 x 的正弦值相等的锐角 arcsiny．显然，x＋arcsiny＝π．故 x=π－arcsiny．所以 y=sinx，x∈[$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$]的反函数是y = π－arcsinx，x∈[－1，1]．

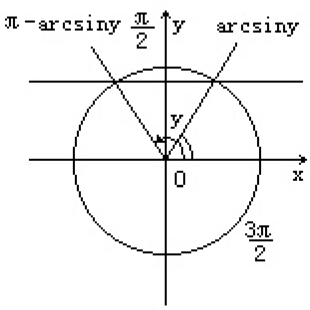


图 59

答案应选D．

396．**设**$a=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$**，**$b=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$**，**$c=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$**，则**a**，**b**，**c**的大小关系是**

[　　]

A．a＞b＞c
B．a＞c＞b
C．b＞c＞a
D．b＞a＞c

【精析】　显然，这里是比较三个锐角的大小，它们的正弦值，余弦值，正切值都为$\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.57$**，借助于单位圆中的三角函数线，如图**60**，便可以简捷地得到b＞a＞c．**

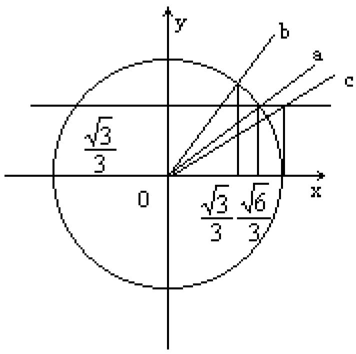


图 60

答案应选D．

397．$\cos[\arcsin(-\frac{4}{5})-\arccos(-\frac{3}{5})]$**的值等于**

[　　]

A．-1　　B．$-\frac{7}{25}$

C．$\frac{7}{25}$　　D．$-\frac{\sqrt{10}}{5}$

【精析】 在单位圆中画出角$\arcsin(-\frac{4}{5})$的正弦线MP和余弦线OM及角$\arccos(-\frac{3}{5})$的正弦线M_1P_1和余弦线OM_1，如图61，易知$|MP|=|M_1P_1|=\frac{4}{5}$，$|OM|=|OM_1|=\frac{3}{5}$，故$Rt\triangle OMP\cong Rt\triangle OM_1P_1$，则P，O，$P_1$三点共线，所以$\arcsin(-\frac{4}{5})-\arccos(-\frac{3}{5})=-\pi$，故$\cos[\arcsin(-\frac{4}{5})-\arccos(-\frac{3}{5})]=-1$。

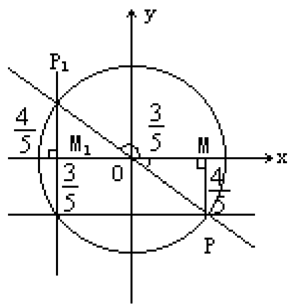


图 61

答案应选 A.

398．若 $0<\alpha<\pi/2$，则 $\arcsin[\cos(\pi/2+\alpha)]+\arccos[\sin(\pi+\alpha)]=$

[　　]

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$-\frac{\pi}{2}$

C．$\frac{\pi}{2}-2\alpha$　　D．$-\frac{\pi}{2}-2\alpha$

【精析】 依诱导公式，原式$=\arcsin[\sin(-\alpha)]+\arccos[\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)]$，因为$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$-\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$，$\frac{\pi}{2}+\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$即$-\alpha$与$\frac{\pi}{2}+\alpha$各在反正弦函数和反余弦函数的值域内，则原式$=-\alpha+(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\frac{\pi}{2}$，选A.

二、填空题

399．函数 $y=(\arcsin x)^2+2\arcsin x-1$ 的最大值是________，最小值是________.

【精析】 配方得 $y=(\arcsin x+1)^2-2$.

当$x=1$时，$y_{max}=(\frac{\pi}{2}+1)^2-2=\frac{\pi^2}{4}+\pi-1$.

当 $\arcsin x+1=0$，即 $x=-\sin 1$ 时，$y_{min}=0-2=-2$.

【解答】 $\frac{\pi^2}{4}+\pi-1$，-2

400．函数 y＝arcsin(arccosx)的定义域为________．

【精析】 函数$y=\arcsin(\arccos x)$中的x一定要满足$\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\0\leq\arccos x\leq 1\end{cases}$

即$\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\\cos 1\leq x\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$．解得$\cos 1\leq x\leq 1$．

【解答】 $\cos 1\leq x\leq 1$

401．函数 y＝arcsin(1－x)＋arccos2x 的值域为________．

【精析】 先求出自变量x的范围，x应满足$\begin{cases}-1\leq 1-x\leq 1\\-1\leq 2x\leq 1,\end{cases}$解得$0\leq x\leq\frac{1}{2}$．

在$[0,\frac{1}{2}]$上，函数$\arcsin(1-x)$，$\arccos 2x$都是减函数，所以

$\arcsin(1-\frac{1}{2})\leq\arcsin(1-x)\leq\arcsin(1-0)$，

$\arccos(2\times\frac{1}{2})\leq\arccos 2x\leq\arccos(2\times 0)$．

两式相加得$\frac{\pi}{6}\leq y\leq\pi$．

【解答】 $\frac{\pi}{6}\leq y\leq\pi$

402．若$I=\{x|\tan(\arctan x)=x\}$，$A=\{x|\arcsin(\sin x)=x\}$，$B=\{x|\cos(\arccos x)=x\}$，$C=\{x|\frac{1}{\arccos(\cos x)}=\frac{1}{x}\}$，则$B\cap\overline{C}=$__________，$\overline{A}\cap\overline{B}=$__________．

【精析】 显然，$I=\mathbf{R}$，$A=\{x|x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\}$，

B={x|x∈[1，1]}，C＝{1|x∈(0，π]}，

$B\cap\overline{C}=\{x|x\in[-1,0]\}$，利用集合中的摩根定律，有$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\{x|x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\}$．

【解答】 {x|x∈[－1，0]；{x|x∈(－∞，－1)∪(1，＋∞)}

403．已知|x|≤1，则点 P(sin(arcsinx)，cos(arcsinx))的轨迹所表示的图形为________．

【精析】 此题是将解析几何中的轨迹问题与反三角函数结合起来的一道题．

当 x 在|x|≤1 上变动时，P 是一动点，令 P 点坐标为(x′，y′)，

则$\begin{cases}x'=\sin(\arcsin x),\\y'=\cos(\arcsin x)\end{cases}$．将两式平方相加，得$x'^2+y'^2=1$．因$-\frac{\pi}{2}$

$\le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$，所以$\cos(\arcsin x) \ge 0$，则$y' \ge 0$．而$-1 \le \sin(\arcsin x) \le 1$，$-1 \le x' \le 1$，

故所求轨迹方程为$y' = \sqrt{1-x'^2}$．

【解答】　上半单位圆周(包括直径上的两个端点)

404．已知关于 x 的方程 $\sin^2 x + \cos x + k = 0$ 有解，k 的取值范围________．

【解答】　原方程可变形为

$k = \cos^2 x - \cos x - 1 = (\cos x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$，由于　　$-1 \le \cos x \le 1$，

$\therefore (\cos x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} \in [-\frac{5}{4}，1]$．

因此要使方程有解，只须满足$k \in [-\frac{5}{4}，1]$．

405．已知$x \in [0，\frac{\pi}{2}]$时，不等式$\cos 2x - 3 > 2k\cos x - 4k$恒成立，实数 k 的范围________．

【解答】　由$\cos 2x - 3 > 2k\cos x - 4k$，$x \in [0，\frac{\pi}{2}]$，

整理得$k > \frac{2-\cos^2 x}{2-\cos x}$

令$f(x) = \frac{2-\cos^2 x}{2-\cos x} = -[2-\cos x + \frac{2}{2-\cos x}] + 4 \le 4 - 2\sqrt{2}$，当且仅当$2 - \cos x = \frac{2}{2-\cos x}$，即$\cos x = 2 - \sqrt{2}$时取等号，$\therefore k > 4 - 2\sqrt{2}$，

即k的取值范围是$(4-2\sqrt{2}，+\infty)$．

406．设$\theta \in [0，\frac{\pi}{2}]$，$\cos^2\theta + 2m\sin\theta - 2m - 2 < 0$恒成立，m的取值范围为________．

【解答】　设 $x = \sin\theta$，则原不等式可化为 $x^2 - 2mx + 2m + 1 > 0$，即 $x^2 + 1 > 2m(x-1)$．

由$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，得$0 \le x \le 1$．

设 $f(x) = x^2 + 1$，$g(x) = 2m(x-1)$，则 f(x)的图象是顶点为(0，1)、开口向上的一段抛物线弧$\overset{\frown}{AB}$；g(x)的图象为斜率为2m的线段CD(如图62)．

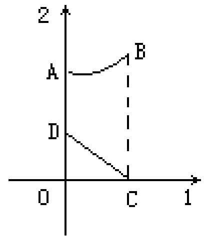


图 62

∵$x^2+1>2m(x-1)$恒成立，∴只须直线$g(x)$在抛物线弧$\overset{\frown}{AB}$的下方，因此$1>-2m$，∴$m>-\frac{1}{2}$．

407．已知 sinx＋cosx=m，在[0，π]内有且只有两个不同的解，实数 m 的取值范围为________．

【精析】 $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{m}{\sqrt{2}}$，又$0\leq x\leq\pi$，故$\frac{\pi}{4}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{5\pi}{4}$，如图63，在$[\frac{\pi}{4}，\frac{5\pi}{4}]$内，欲使一个正弦值对应两个不同的角，则$\frac{\pi}{4}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3\pi}{4}$，且$x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\sin(x+\frac{\pi}{4})<1$，即$\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\frac{m}{\sqrt{2}}<1$，故$1\leq m<\sqrt{2}$．

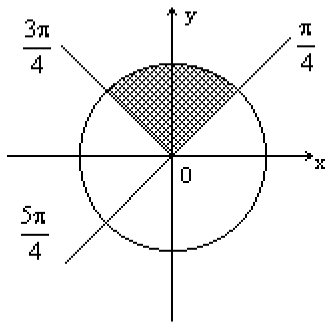


图 63

408．函数$f(x)=\arccos x+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arccot}x$的值域为________．

【解答】 ∵x∈[−1，1]，

∴$\arccos x\in[0，\pi]$，$\operatorname{arccot}x\in[\frac{\pi}{4}，\frac{3\pi}{4}]$，故$f(x)\in[\frac{\pi}{8}，\frac{11\pi}{8}]$．

∴ $z_1=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})i$，$z_2=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})i$

∴$(\frac{z_1+z_2}{2})^{10}=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10}=(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10}=\boldsymbol{\omega}^{10}=\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

其中$\omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

【精析】　对于此类问题，笔者曾在前文中给出四种求解方法，其中不乏有构造抛物线模型的方法，下面再奉一种构造双曲线模型的方法．

【解答】　令$u=\frac{\sin x}{2}$，$v=\frac{2}{\sin x}$，则$u\cdot v=1(0<u\leq\frac{1}{2}$，$2\leq v<+\infty)$表示双曲线的一段(如图64)，而 f(x)＝u＋v 表示的是直线 v=－u＋f(x)在v轴上的截距，易求得$f(x)_{\min}=\frac{5}{2}$，故所要求函数的值域为$[\frac{5}{2}$，$+\infty)$．

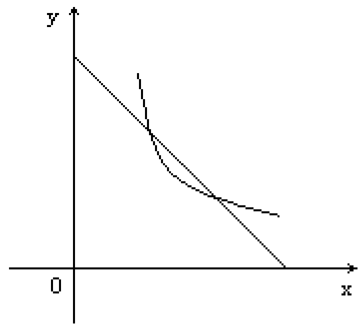


图 64

410．求 cot(arccot3＋arccot7＋arccot13＋arccot21)之值=________．

【精析】　将求四个角之和的三角函数值的问题，通过分组去求两个角的和的三角函数值的问题，简化运算过程．

设 A=arccot3，B=arccot7，C=arccot13，D＝arccot21，E＝A＋B，F＝C＋D，原问题等价于求 cot(E＋F)之值，根据公式：$\cot(x+y)=\frac{\cot x\cdot\cot y-1}{\cot x+\cot y}$，不难计算得：$\cot E=\cot(A+B)=2$，$\cot F=\cot(C+D)=8$．

原式$=\cot(E+F)=\frac{2\times8-1}{2+8}=1$．

三、解答题

411．计算$\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b})+\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b})$的值，其中$a\neq0$，$|\frac{a}{b}|\leq1$．

【解答】　设$\arccos\frac{a}{b}=\alpha$．因$a\neq0$，$|\frac{a}{b}|\leq1$，所以$0<\alpha\leq\pi$且$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$．

原式＝$\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2})+\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})=\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}$

$$=\frac{(1-\tan\frac{\alpha}{2})^2+(1-\tan\frac{\alpha}{2})^2}{(1-\tan\frac{\alpha}{2})(1+\tan\frac{\alpha}{2})}$$

$$=2\times\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\cos\alpha}=\frac{2b}{a}.$$

$\because\ 3\in[\frac{7}{3}，4]$，

$\therefore$ 当$k=3$，即$x=y=z=1$时，$u_{最小}=-1$.

【证明】 令$\arctan x=\alpha$，$\arctan\frac{1-x}{1+x}=\beta$，则$\tan\alpha=x$，$\tan\beta=\frac{1-x}{1+x}$．因为$x>-1$，所以

$\alpha=\arctan x>\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$，即$-\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$．

又$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{3\pi}{4}<\alpha+\beta<\pi$，

而$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\cdot\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x^2}{1+x^2}=1$，

在$(-\frac{3\pi}{4}，\pi)$内，只有$\frac{\pi}{4}$的正切值等于1，所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$．原式得证．

413．方程 $x^2+3a^2\cos(\arcsin x)-2a(3a-2)-1=0$ 有惟一解，试确定参数 a 的取值．

【精析】 借助函数的奇偶性及解的惟一性可求出参数 a 的值．

【解答】 令 $f(x)=x^2+3a^2\cos(\arcsin x)-2a(3a-2)-1$，则易知 f(x)是偶函数，即 $f(-x)=f(x)$．若 x_0 是 $f(x)=0$ 的解，则$-x_0$ 也是 $f(x)=0$ 的解．又 $f(x)=0$ 的解惟一，则 $x_0=-x_0$，$\therefore x_0=0$，因此 $x=0$ 是原方程的解．代入便得 $3a^2-2a(3a-2)-1=0$，即 $3a^2-4a+1=0$，解得 $a=1$，$a=\frac{1}{3}$．

414．已知方程$2\cos2x+4\sin x+m-2=0$在［$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$］上有一解、两解、无解，求相应的 m 的取值．

【精析】 先化简得 $4\sin^2x-4\sin x-m=0$，令 $t=\sin x$ 得 $4t^2-4t=m$ 在$[-1，1]$上有一解、两解或无解．构造函数 $y=m$ 与 $y=4t^2-4t$，$t\in$［-1，1］，转化为直线与抛物弧交点问题．

【解答】 作图$y=4t^2-4t=4(t-\frac{1}{2})^2-1$，$t\in[-1，1]$，$y=m$为

一族垂直于 y 轴的平行线．

由图 65 得：①m＜－1 或 m＞8 时无解；

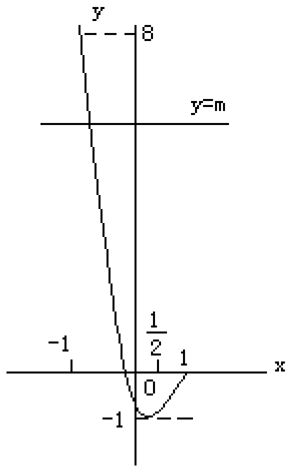


图 65

②0＜m＜8 或 m＝－1 时有惟一解；

③－1＜m≤0 时有两解．

415．解方程$\sin^2 x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=0$．

【解答】 由于 cosx≠0(若 cosx＝0，则 sinx＝0，而 sinx 与 cosx 不能同时为 0，故 cosx≠0)，所以可在方程的两边同除以 $\cos^2 x$，得

$\tan^2 x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\tan x-1=0$

解得$\tan x=\sqrt{3}$或$\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$．

由$\tan x=\sqrt{3}$得$x=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in \mathbf{Z})$．

再由$\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$得$x=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in \mathbf{Z})$．

所以，原方程的解集是

$\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{3}$或$x=k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in \mathbf{Z}\}$

416．实数 k 为何值时，方程 $4\sin^2 x+4\sin x-k^2+k-2=0$ 有实数解？

【解答】 原方程变形为

$k^2-k=4\sin^2 x+4\sin x-2$，即$k^2-k=4(\sin x+\frac{1}{2})^2-3$，

∵$-1\le \sin x\le 1$，

$\therefore -3\le 4(\sin x+\frac{1}{2})^2-3\le 6$，$\therefore -3\le k^2-k\le 6$．

解得$-2\le k\le 3$

即当$-2\le k\le 3$时，原方程有实数解．

417．已知$A=\{(x，y)|x=m+2\cos\theta，y=\sqrt{3}\sin\theta，\theta$为参数$\}$，$B=\{(x，y)|x=t^2+\frac{3}{2}，y=\sqrt{6}t，t$为参数$\}$，或$A\cap B\neq\varnothing$，试求m的取值范围．

【精析与解答】 A表示中心是动点(m，0)的椭圆系$\frac{(x-m)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．B表示抛物线$y^2=6x-9=6(x-\frac{3}{2})$．(如图66)当m变化时，椭圆中心沿x轴向左或向右平移；$A\cap B\neq\varnothing$当且仅当抛物线的顶点$(\frac{3}{2}，0)$落在椭圆长轴两顶点$A_1(m-2，0)$和$A_2(m+2，0)$之间，因此$m-2\leq\frac{3}{2}\leq m+2$，解得$-\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{7}{2}$．

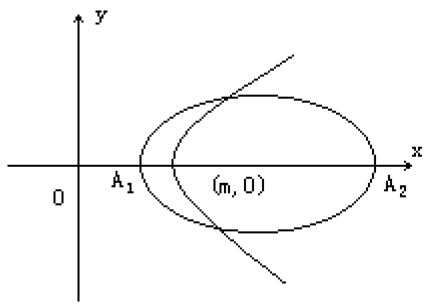


图 66

418．函数$f(x)=|\cos^2x+2\cos x\cdot\sin x-\sin^2x+Ax+B|$，在$0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi$上的最大值M与参数A、B有关，问A、B取什么值时，M为最小？证明你的结论．

【解答】 $f(x)=|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+Ax+B|$．

当$A=B=0$时$f(x)$成为$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$．

在区间$[0，\frac{3}{2}\pi]$上，有三个点：$x_1=\frac{\pi}{8}$，$x_2=\frac{5\pi}{8}$；$x_3=\frac{9\pi}{8}$使$f(x)$取得最大值$\sqrt{2}$．以下用反证法证明它就是要求的最小的M的值．

若设$\max[f(x)|0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi]\leq\sqrt{2}$，

则原有：$f(\frac{\pi}{8})\leq\sqrt{2}$．

$f(\frac{5}{8}\pi)\leq\sqrt{2}$，$f(\frac{9}{8}\pi)\leq\sqrt{2}$，

即$\begin{cases}|\sqrt{2}+\dfrac{\pi}{8}A+B|\leq\sqrt{2}\\|-\sqrt{2}+\dfrac{5\pi}{8}A+B|\leq\sqrt{2}\\|\sqrt{2}+\dfrac{9\pi}{8}A+B|\leq\sqrt{2}\end{cases}$ ①

即$\begin{cases}-2\sqrt{2}\leq\dfrac{\pi}{8}A+B\leq 0 & ②\\-2\sqrt{2}\leq-\dfrac{5\pi}{8}A+B\leq 0 & ③\\-2\sqrt{2}\leq\dfrac{9\pi}{8}A+B\leq 0 & ④\end{cases}$

由②＋③与③＋④分别可得 A≥0 与 A≤0 故必有 A=0，但当 A=0，$B\neq 0$时有：

$\max[f(x)|0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi]$

$=\max\{\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+B|0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi\}$

$=\sqrt{2}+|B|>\sqrt{2}$

与假设矛盾，从而对任何 A、B 不同时为 0 时，

$\max$ $[f(x)\}0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi]$ $>\max[f(x)|0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi]=\sqrt{2}$.

于是问题得以证明．

419．已在数列的通项$a_n=\sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}+\cos\frac{2n\pi}{3}(n\in\mathbf{N})$，求数列$|a_n|$中最大项与最小项的值．

【解答】 $a_n=\sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}+\cos\frac{2n\pi}{3}=2\sin(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6})$.

$\therefore T=\frac{2\pi}{\omega}=3$.

故此正弦曲线的图象周期为3，先画出$y=f(x)=2\sin(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6})$的图象，再取 n=1，2，3，…，构造数列图形(图略)，易知 n＝1 时为最高点，$n=2$时为最低点，最大项值为$a_1=\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}=1$，最小项值为$a_2=-2$.

420．解方程$\sqrt{1-\cos 2x}=\sin x+\cos x$.

【解答】 原方程两边平方，得 1－cos2x=1＋sin2x，即 tan2x=－1．故$2x=k\pi-\frac{\pi}{4}$，$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$.

经检验，当 k＝0，1 时所得解适合原方程，k=2，3 时为增根(就$\frac{k\pi}{2}$而言，因2π为周期，故可将整数k分为$k=4m$，$k=4m+1$，$k=4m$

＋2，k=4m＋3，m∈Z，仅检验 0，1，2，3).

故$x=2m\pi-\frac{\pi}{8}$或$x=2m\pi+\frac{3\pi}{8}$，m∈Z为原方程的解.

421．已知a、b是不相等的正数，求函数$y=\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}+\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x}$的最值.

【解答】 因 a，b 是不相等的正数，cosx 与 sinx 不能同时为 0，故 y＞0.

$\therefore y^2=a+b+2\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}\sin^2 2x+ab}$.

当$\sin^2 2x=1$时，$y^2_{最大}=2(a+b)$，$y_{最大}=\sqrt{2(a+b)}$.

当$\sin^2 2x=0$时，$y^2_{最小}=a+b+2\sqrt{ab}$，$y_{最小}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

第六章　不等式

一、选择题

422．下列四个不等式：

①$x^2+3>2x$

②$a^2+b^2\geq 2(a-b-1)$

③$a^5+b^5\leq a^3b^2+a^2b^3$

④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$

其中恒成立的是

[　　]

A．①②

B．①③

C．①②④

D．均恒成立

【精析】　本题考查不等式等价变形的常用方法，以及因式分解和配方的基本技能运用能力．①显然成立；③当 $a=1$，$b=0$ 时，不成立；④显然有条件限制，所以只可能是①②成立，事实上，$a^2+b^2\geq 2(a-b-1)$可化为$(a-1)^2+(b+1)^2\geq 0$，显然成立，故选 A．

【解答】　A

423．设 $a>1$，$b>1$，且 $ab-(a+b)=1$，那么

[　　]

A．$a+b$有最小值$2(\sqrt{2}+1)$

B．$a+b$有最大值$(\sqrt{2}+1)^2$

C．ab有最大值$\sqrt{2}+1$

D．ab有最小值$2(\sqrt{2}+1)$

【精析】　由 $ab-(a+b)=1$，得 $ab-a-b+1=2$，即$(a-1)(b-1)=2$．则$a+b=(a-1)+(b-1)\geq 2\sqrt{(a-1)(b-1)}+2$．所以$a+b\geq 2\sqrt{2}+2=2(\sqrt{2}+1)$当且仅当$a-1=b-1=\sqrt{2}$，即$a=b=1+\sqrt{2}$时，$a+b=2(\sqrt{2}+1)$．

【解答】　A

424．函数$y=\frac{3^x}{3^x+1}$的值域是

[　　]

A．$(0,+\infty)$

B．$(-\infty,1)$

C．$(0,1)$

D．$[0,1]$

【精析】 由函数解析式$y=\frac{3^x}{3^x+1}$反解出$3^x=\frac{y}{1-y}$，由$3x>0$，得不等式$\frac{y}{1-y}>0\Leftrightarrow y(y-1)<0$．解得$0<y<1$．

【解答】 C

425．(1)函数$f(x)=x+\frac{1}{x-2}(x>2)$，$g(x)=(\frac{1}{2})^{x^2-2}(x\neq 0)$，则$f(x)$与g(x)的大小关系是

[ ]

A．f(x)>g(x)

B．f(x)≥g(x)

C．f(x)<g(x)

D．f(x)≤g(x)

【精析】 $f(x)=x-2+\frac{1}{x-2}+2$．因为$x-2>0$，即$x-2+\frac{1}{x-2}\geq 2$，所以$f(x)\geq 4$．又因为$x^2-2>-2$，所以$g(x)=(\frac{1}{2})^{x^2-2}<(\frac{1}{2})^{-2}=4\leq f(x)$．

【解答】 A

(2)若$2a>b>0$，则$a+\frac{4}{(2a-b)\cdot b}$的最小值为

[ ]

A．3　　B．1

C．8　　D．12

【精析】 由$2a>b>0$，有$a-\frac{b}{2}>0$，$a+\frac{4}{(2a-b)\cdot b}=a+\frac{1}{(a-\frac{b}{2})\cdot\frac{b}{2}}$

$=(a-\frac{b}{2}+\frac{b}{2})+\frac{1}{(a-\frac{b}{2})\cdot\frac{b}{2}}$．

因为$(a-\frac{b}{2})\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{(a-\frac{b}{2})\cdot\frac{b}{2}}=1$，所以原式≥3．

当且仅当$a-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}=\frac{1}{(a-\frac{b}{2})\cdot\frac{b}{2}}$，即$a=b=2$时，原式有最小值3．

【解答】 A

426．已知$M=\{x|2^{2x^2}<2^{3x}\}$，$N=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>0\}$，则$M\cap N$为

[ ]

A．$\{x|0<x<\frac{3}{2}\}$　　B．$\{x|\frac{3}{2}<x<2\}$

C．$\{x|1<x<\frac{3}{2}\}$　　D．$\{x|0<x<2\}$

【精析】 解不等式$2^{2x^2}<2^{3x}\Leftrightarrow 2x^2<3x$．所以$M=\{x|0<x<\frac{3}{2}\}$．解不等式$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>0\Leftrightarrow 0<x-1<1$，即$1<x<2$．所以$N=\{x|1<x<2\}$．

【解答】 C

427．若$a>1$，且$0<b<1$，则不等式$a^{\log_b(x-3)}>1$的解为

[　　]

A．$x>3$

B．$x<4$

C．$3<x<4$

D．$x>4$

【精析】 原不等式$\Leftrightarrow \log_b(x-3)>0\Leftrightarrow 0<x-3<1$，即$3<x<4$．

【解答】 C

428．不等式$|\frac{x}{x-2}|>\frac{x}{2-x}$的解集是

[　　]

A．$\{x|0<x<2\}$

B．$\{x|x>2$ 或 $x<0)\}$

C．$\{x|x<0\}$

D．$\{x|x>2\}$

【精析】 当$x<0$时，$2-x>0$，此时$\frac{x}{2-x}<0$，且$|\frac{x}{x-2}|>0$，不等式必成立．当$x>2$时，$2-x<0$，此时$\frac{x}{2-x}<0$，不等式也成立．故$x<0$ 和 $x>2$ 都是原不等式的解．

【解答】 B

429．不等式组$\begin{cases} x>0 \\ \frac{3-x}{3+x}>\left|\frac{2-x}{2+x}\right| \end{cases}$的解集是

[　　]

A．$\{x|0<x<3\}$

B．$\{x|0<x<\sqrt{6}\}$

C．$\{x|0<x<2\}$

D．$\{x|0<x<2.5\}$

【精析】 原不等式变形为$\frac{3-x}{x+3}>\frac{|x-2|}{x+2}\Leftrightarrow(3-x)(x+2)>|x-2|(x+3)\Leftrightarrow\begin{cases} x-2\geq 0 \\ -x^2+x+6>(x-2)(x+3) \end{cases}$或$\begin{cases} x-2<0 \\ -x^2+x+6>(2-x)(x+3) \end{cases}$

解之得$2\leq x<\sqrt{6}$，或$0<x<2$．

所以原不等式解集为$[2,\sqrt{6})\cup(0,2)=(0,\sqrt{6})$．

【解答】 B

430．命题甲：$ax^2+2ax+1>0$ 的解集是 R，命题乙：$0<a<1$，则命题甲是乙成立的

[ ]

A．充分非必要条件

B．必要非充分条件

C．充分必要条件

D．既非充分又非必要条件

【精析】 若 $a\neq0$，那么二次不等式 $ax^2+2ax+1>0$ 的解集是 R 的充要条件是：$a>0$，且$\triangle<0$，即$(2a)^2-4a<0$．解得 $0<a<1$．当 $a=0$ 时，$ax^2+2ax+1=1>0$ 恒成立．故原不等式的解集是 R 的充要条件是：$0<a<1$，或 $a=0$．因而若乙成立，则甲必成立，反之若甲成立，乙未必成立，甲是乙成立的必要非充分条件．

【解答】 B

注意：此题最容易错选 C．这是由于把原不等式看作一元二次不等式，而漏掉 $a=0$ 这一特殊情形所造成的．

431．(1)若不等式$ax^2+bx+2>0$的解集是$\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\}$，则$a+b$的值为

[ ]

A．-14　　　　B．-10

C．10　　　　D．14

【精析】 原不等式的解集在$-\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$之间，可得$a<0$，且方程$ax^2+bx+2=0$的两个实数根为$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{3}$．根据韦达定理得$x_1\cdot x_2=\frac{2}{a}$，且$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$，由此得关于a、b的方程组$\frac{2}{a}=-\frac{1}{6}$且$\frac{-b}{a}=-\frac{1}{6}$．解之得$a=-12$，$b=\frac{1}{6}a=-2$．所以$a+b=-12-2=-14$．

【解答】 A

(2)若不等式$|x-4|-|x-3|>a$ 有解，则 a 的取值范围是

[ ]

A．$a>1$　　　　B．$a<1$

C．$a\leq1$　　　　D．$a\geq1$

【精析】 设 $f(x)=|x-4|-|x-3|\leq|(x-4)-(x-3)|$，则 $f(x)\leq1$ 对一切 $x\in R$ 恒成立，即 $f(x)>1$ 不可能．因此要使不等式 $f(x)>a$ 有解，必须 $a<1$．

【解答】 B

注意：设不等式$|x-4|-|x-3|\leq a$ 的解集为 R 时，a 的取值范围为 A(全集为 R)，那么使不等式$|x-4|-|x-3|>a$ 有解的 a 的取值范围是

$\overline{A}$(想一想，为什么？).

432．(1)设实数 a、b 满足 $ab\geq 0$，那么下列不等式成立的是

[　　]

A．$|a+b|<|a-b|$

B．$|a+b|=|a|+|b|$

C．$|a+b|<|a|+|b|$

D．$|a-b|>||a|-|b||$

【精析】　可用特殊值检验，取 $a=2$，$b=1$，则 $|a+b|=3=|a|+|b|$．

【解答】　B

(2)设 $a>1$，方程 $|x+\log_a x|=|x|+|\log_a x|$ 的解是

[　　]

A．$0\leq x\leq 1$

B．$x\geq 1$

C．$x\geq a$

D．$0<x\leq a$

【精析】　因为 $|x+\log_a x|\leq|x|+|\log_a x|$，其中等式成立的充要条件是 $x\cdot\log_a x\geq 0$，由 $x>0$，有 $\log_a x\geq 0$，即 $x\geq 1$．

【解答】　B

433．(1)设a、b∈$\mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$．若 $a+b=2$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值等于

[　　]

A．1　　　　B．3

C．2　　　　D．4

【精析】　因为 $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，即 $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$，其中 $a+b=2$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2$．

【解答】　C

(2)设 $x>y>z$，$n\in\mathbf{N}$，且 $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}\geq\frac{n}{x-z}$ 恒成立，则n的最大值是

[　　]

A．2　　　　B．3

C．4　　　　D．5

【精析】　原不等式变形为 $n\leq(x-z)(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z})$．此不等式恒成立的充要条件是 n≤右式的最小值．

令 $a=x-y$，$b=y-z$，则 $x>0$，$y>0$，且 $x-z=a+b$，由(1)证 $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$，即 $(x-z)(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z})\geq 4$，所以 $n\leq 4$．

【解答】　C

434．设 a、b、c∈R，且 a、b、c 不全相等，则不等式 $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ 成立的一个充要条件是

[　　]

A．a、b、c全为正数

B．a、b、c全为非负实数

C．a＋b＋c≥0

D．a＋b＋c＞0

【精析】　将$a^3+b^3+c^3-3abc$分解因式得$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+a)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$，而a、b、c不全相等$\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2>0$，则$a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0\Leftrightarrow a+b+c\geq 0$．

【解答】　C

435．不等式$\sqrt{x^2-5x+6}>x-1$的解集为

[　　]

A．$(-\infty, 1)$　　　　B．$(1, +\infty)$

C．$[1, \frac{5}{3})$　　　　D．$(-\infty, \frac{5}{3})$

【解答】　∵$x^2-5x+6>0$，则有$x<2$，排除B．；又$x\leq 1$时不等式成立，排除A．C．

$\therefore(-\infty, \frac{5}{3})$为解集，故选D．

436．不等式$\frac{1}{2^x-1}>\frac{1}{1-2^{x-1}}$的解集是

[　　]

A．$(0, \log_2 3)\cup(1, +\infty)$

B．$(0, 2-\log_2 3)\cup(1, +\infty)$

C．$(0, 1)\cup(\log_2 3, +\infty)$

D．$(0, 1)\cup(2+\log_2 3, +\infty)$

【解答】　首先$2^x-1\neq 0$，$1-2^{x-1}\neq 0$，$\therefore x\neq 0$，$x\neq 1$，排除A．；又$\begin{cases}2^x-1>0\\1-2^{x-1}<0\end{cases}$即$x>1$时不等式成立，故排C．D．$\therefore(1, +\infty)\subset$解集，故选B．

437．已知函数$y=\frac{5x^2-3kx+50}{4x^2-10x+25}\geq 1$的最小值是1．则实数k为

[　　]

A．$(0, 10]$　　　　B．$[0, 10)$

C．$[0, 10]$　　　　D．0或10

【解答】　判别式法是求二次分式函数最值的重要方法，但应注意能否取到等号，何时取到等号，本题考生易错选A．B．C．病因是依题意可得$\frac{5x^2-2kx+50}{4x^2-10x+25}\geq 1$，即有$x^2-2(k-5)x+25\geq 0$忽视y取最小值时．两式均应取等号，其判别式△＝0，故k只能取0或10，选D．

438．若$\log_a \frac{1}{2} < 1$，则a的取值范围是

[　　]

A．$(\frac{1}{2}，1)$　　　　B．$(\frac{1}{2}，+\infty)$

C．$(0，\frac{1}{2}) \cup (1，+\infty)$　　　　D．$(0，\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}，+\infty)$

【解答】　由于对数函数的单调性依 a∈(0，1)和 a∈(1，+∞)两种情况来确定，所以若用对数函数单调性思考本题，也应分两种情况来讨论．当$a > 1$时，$y = \log_a x$是增函数，则由$\log_a \frac{1}{2} < 1$，有$\log_a \frac{1}{2} < \log_a a$，得$a > 1$；当$0 < a < 1$时，$y = \log_a x$是减函数，则由$\log_a \frac{1}{2} < 1$，有$\log_a \frac{1}{2} > \log_a a$，得$0 < a < \frac{1}{2}$；

∴a的取值范围是$(0，\frac{1}{2}) \cup (1，+\infty)$，应选C．

439．设全集为 R，A＝{x|x^2－5x－6＞0}，B={x|x－5|＜a}(a 是常数)，且 11∈B，则

[　　]

A．$\overline{A} \cup B = \mathbf{R}$　　　　B．$A \cup \overline{B} = \mathbf{R}$

C．$\overline{A} \cup \overline{B} = \mathbf{R}$　　　　D．$A \cup B = \mathbf{R}$

【解答】　D

440．设全集$I = R$，$M = \{x|\lg x > 0\}$，$N = \{x|\frac{1}{x} > 1\}$，那么

[　　]

A．$M \subset N$　　　　B．$M \supset N$

C．$M \cap N = \varnothing$　　　　D．$M \cup N = \mathbf{R}^-$

【解答】　C

441．a，b∈R，那么“$a^2+b^2<1$”是“ab＋1＞a＋b”的

[　　]

A．充分且必要条件

B．必要但不充分条件

C．充分但不必要条件

D．既不充分也不必要条件

【解答】　C

442．设集合$A = \{x|1 < x < 2\}$，$B = \{x|x < a\}$，若$A \subset B$，则实数a的取值范围是

[　　]

A．[2，+∞)

B．(2，+∞)

C．(－∞，1]

D．(1，+∞)

【解答】 A

443．不等式$\sqrt{x+2}>x$的解区间是

[ ]

A． [－2，2)

B．(－1，2)

C． [0，2)

D．(－∞，2)

【解答】 A

444．已知 0＜x＜1，那么下列各式中成立的是

[ ]

A．$x^{\frac{1}{3}}<\lg x<3^x$

B．$\lg x<x^{\frac{1}{3}}<3^x$

C．$\lg x<3^x<x^{\frac{1}{3}}$

D．$x^{\frac{1}{3}}<3^x<\lg x$

【解答】 B

445．已知 0＜a＜b＜1，则 a^{-b} 与 b^{-a} 的大小关系是

[ ]

A．$a^{-b}>b^{-a}$

B．$a^{-b}<b^{-a}$

C．$a^{-b}=b^{-a}$

D．不确定

【解答】 A

446．若 a＜b，则下列不等式中成立的是

[ ]

A．$a^2>b^2$

B．$\frac{a}{b}>1$

C．$|a|>-b$

D．$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

【解答】 C

447．设全集是R，集合$M=\{x|\lg|x|+1|\le 0\}$，则$\overline{M}$等于

[ ]

A．$\{x|x<-2\}\cup\{-1\}$

B．$\{x|x>0\}\cup\{-1\}$

C．$\{x|x<-2\}\cup\{x|x>0\}$

D．$\{x|x<-2\}\cup\{x|x\ge 0\}\cup\{-1\}$

【解答】 D

448．与不等式 $\lg(x+1)<0$ 同解的不等式是

[ ]

A．$(x+1)^2<1$

B．$x+1<1$

C．$\frac{1}{x+1}>1$

D．$\sqrt{x+1}<1$

【解答】 C

449．不等式$ax^2+bx+2>0$的解集是$(-\frac{1}{2}，\frac{1}{3})$，则$a-b$等于

[ ]

A．-4　　B．14

C．-10　　D．10

【解答】 C

450．已知 $a\in R$，且 $\log_a(2a^2+1)<\log_a 3a<0$，则 a 的取值范围是

[ ]

A．$0<a<\frac{1}{3}$　　B．$0<a<\frac{1}{2}$

C．$\frac{1}{2}<a<1$　　D．$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$

【解答】 B

451．如果 $0<\log_a 2<\log_b 2$，则 a、b 的关系是

[ ]

A．$0<a<b<1$

B．$0<b<a<1$

C．$a>b>1$

D．$b>a>1$

【解答】 C

452．当 $x<-2$ 时，下列不等式一定成立的是

[ ]

A．$x^2+x>x+4$

B．$x^2+x<x+4$

C．$\frac{x+3}{x+2}>0$

D．$\sqrt{2-x}<\sqrt{2+x}$

【解答】 A

453．已知 a、$b\in R^+$，则下列不等式不一定成立的是

[ ]

A．$a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq 2\sqrt{2}$

B．$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$

C．$\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\geq a+b$

D．$\frac{2ab}{a+b}\geq\sqrt{ab}$

【解答】 D

454．不等式$\sqrt{a^2-x^2}<2x+a(a>0)$的解集是

[ ]

A．$\{x|-\frac{a}{2}<x<a\}$

B．$\{x|x>0$或$x<-\frac{4}{5}a\}$

C．$\{x|-a\le x<-\frac{4}{5}a$或$0\le x<a\}$

D．$\{x|0<x\le a\}$

【解答】 D

455．下列四个命题中，不正确的是

[ ]

A．若$0<a<\frac{1}{2}$，则$\cos(1+a)<\cos(1-a)$

B．若$0<a<1$，则$\frac{1}{1-a}>1+a>\sqrt{2a}$

C．若实数x、y满足$y=x^2$，则$\log_2(2^x+2^y)$的最小值是$\frac{7}{8}$

D．若 a、b∈R，则 $a^2+b^2+ab+1>a+b$

【解答】 C

456．若对于任意实数 x，不等式$|x+1|-|x-2|>a$ 恒成立，则 a 的取值范围是

[ ]

A．$(-\infty，3)$

B．$(-\infty，3]$

C．$(-\infty，-3)$

D．$(-\infty，-3]$

【解答】 C

457．f(x)是定义在(−2，2)上单调递减的奇函数，当 $f(2-a)+f(2a-3)<0$ 时，a 的取值范围是

[ ]

A．(0，4)

B．$(0，\frac{5}{2})$

C．$(\frac{1}{2}，\frac{5}{2})$

D．$(1，\frac{5}{2})$

【解答】 D

458．已知 $y=f(x+2)$是偶函数，且当 x>2 时，f(x)为减函数，则 $a=f(1.1^{0.9})$，$b=f(0.9^{1.1})$，$c=f(\log_{0.9}1.1)$的大小关系是

[ ]

A．a＜b＜c

B．b＜c＜a

C．c＜b＜a

D．b＜a＜c

【解答】 C

459．设$M=a+\frac{1}{a-2}(2<a<3)$，$N=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+\frac{1}{16})$，$x\in\mathbf{R}$，则M、N的大小关系是

[ ]

A．M＞N

B．M=N

C．M＜N

D．不能确定

【解答】 A

460．命题甲：$x\in\{x|\frac{2x+1}{x}\leq 0\}$；命题乙：$x\in\{x|\log_3(2x+1)<0\}$，则甲是乙的

[ ]

A．充分非必要条件

B．必要非充分条件

C．充要条件　　　　D．既非充分又非必要条件

【解答】 B

461．命题甲：a＞b＞0；命题乙：$\lg a^2-\lg b^2>0$，那么，甲是乙的

[ ]

A．充分且不必要条件　　B．必要且不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分又不必要条件

【解答】 A

462．某商店卖A、B两种价格不同的商品，由于商品A连续两次提价20%，同时商品B连续两次降价20%，结果都以每件23.04元售出，若商店同时售出这两种商品各一件，则与价格不升不降的情况比较，商店盈利情况是

[ ]

A．多赚5.92元　　B．少赚5.92元

C．多赚28.92元　　D．盈利相同

【解答】 B

463．如果z∈(0，1)，那么x＞y＞1成立的必要条件是

[ ]

A．$x^z<y^z$　　B．$z^x<z^y$

C．$\log_z x>\log_z y$　　D．$\log_x z<\log_y z$

【解答】 B

464．不等式$\log_{(x-1)}(2x-3)>\log_{(x-1)}(x-2)$成立的一个充分但不必要条件是

[　　]

A．x＞2　　　　B．x＞4

C．1＜x＜2　　　　D．x＞1

【解答】　B

465．a、b是实数，则使|a|＋|b|＞1成立的充分不必要条件是

[　　]

A．$|a+b|\geq 1$　　　　B．$|a|\geq \frac{1}{2}$且$|b|\geq \frac{1}{2}$

C．$a\geq 1$　　　　D．$b<-1$

【解答】　D

466．已知函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2kx+k)$的值域是全体实数，则k的取值范围是

[　　]

A．0＜k＜1　　　　B．0≤k≤1

C．k≤0或k≥1　　　　D．k=0或k≥1

【解答】　C

467．若x∈(1，2)时，不等式$(x-1)^2<\log_a x$恒成立，则a的取值范围是

[　　]

A．(0，1)　　　　B．(1，2)

C．(1，2]　　　　D．[1，2]

【解答】　C

468．不等式$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x-4)>\log_{\frac{1}{3}}(2x+10)$的解集是

[　　]

A．{x|－2＜x＜7}

B．{x|x＜－1或x＞4}

C．{x|－2＜x＜－1或4＜x＜7}

D．{x|x＞－5}

【解答】　C

469．对于定义域是R的任何奇函数f(x)，都有

[　　]

A．f(x)－f(－x)＞0(x∈R)

B．f(x)－f(－x)≤0(x∈R)

C．f(x)f(－x)≤0(x∈R)

D．f(x)f(－x)＞0(x∈R)

【解答】　C

470．“$0.1^{\lg x^2}>1$”是“$|x|<1$”的

[　　]

A．必要不充分条件　　　　B．充分不必要条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

【解答】　B

471．a、b、c 均为正数是 $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ 成立的

[　　]

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【解答】　A

472．记 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，$p=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2$，$q=(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\cdots+(x_n-a)^2$，若 $a\neq\bar{x}$，则一定有

[　　]

A．p＞q　　B．p＜q

C．p、q 的大小不定　　D．以上都不对

【解答】　B

473．设二次函数 f(x)对 x∈R 恒有 f(1－x)=f(1＋x)，且其图象开口向上，若 $p=f(10^{\frac{1}{2}\lg 2})$，$q=f(\tan\dfrac{2\pi}{3})$，$r=f(\sin\alpha+\cos\alpha)$，$\alpha\in[0,\ \dfrac{\pi}{2}]$，则 p、q、r 的大小关系为

[　　]

A．p＞q＞r　　B．q＞p＞r

C．q＞r≥p　　D．q＞p≥r

【解答】　D

474．已知定义在 R 上的偶函数 f(x)在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(\dfrac{1}{3})=0$，则满足 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的 x 的取值范围是

[　　]

A．$(0,\ \dfrac{1}{2})$　　B．$(2,\ +\infty)$

C．$(\dfrac{1}{2},\ 1)\cup(2,\ +\infty)$　　D．$(0,\ \dfrac{1}{2})\cup(2,\ +\infty)$

【解答】　D

475．已知 0＜x＜1，那么下列各式中成立的是

[　　]

A．$x^{\frac{1}{3}}<\lg x<3^x$　　B．$\lg x<x^{\frac{1}{3}}<3^x$

C．$\lg x<3^x<x^{\frac{1}{3}}$　　D．$x^{\frac{1}{3}}<3^x<\lg x$

【解答】　B

476．已知 m＞n＞1，0＜a＜1，下列四个式子中正确式子的个数是

[　　]

①$m^a<n^a$　　②$\log_a m>\log_a n$

③$a^m<a^n$　　④$\log_m a<\log_n a$

A．0　　B．1

C．2　　　　　　　　　　D．3

【解答】　B

477．不等式$\sqrt{2x+3}>x+1$的解区间是

[　　]

A．$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　　　B．$[-\frac{3}{2},-1]$

C．$[-\frac{3}{2},\sqrt{2})$　　　　D．$(-\frac{3}{2},\sqrt{2})$

【解答】　C

478．已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，α、β为方程 $f(x)=x$ 的两根，且$0<\alpha<\beta<\frac{1}{a}$，$0<x<a$，给出下列不等式：

①$x<f(x)$，②$a<f(x)$，③$x>f(x)$，④$a>f(x)$．

其中成立的是

[　　]

A．①与④　　　　B．②与③

C．①与②　　　　D．③与④

【解答】　A

479．$\begin{cases}2<x+y<4\\0<xy<3\end{cases}$ 是$\begin{cases}0<x<1\\2<y<3\end{cases}$的

[　　]

A．充要条件　　　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　　　D．既不充分又不必要条件

【解答】　由不等式性质有$\begin{cases}0<x<1\\2<y<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2<x+y<4\\0<xy<3\end{cases}$，但反之不然．∵取 x=1，y=2 时，显然满足前者而不满足后者，故 C 正确

480．不等式组$\begin{cases}x<0,\\\left|\frac{3-x}{3+x}\right|<\frac{2-x}{2+x}\end{cases}$的解集是

[　　]

A．$\{x|-2<x<0\}$　　　　B．$\{x|-\frac{5}{2}<x<0\}$

C．$\{x|-\sqrt{6}<x<0\}$　　　　D．$\{x|-3<x<0\}$

【解答】　A

481．已知函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-ax+5)$在$[-1,+\infty)$上是减函数，则实数 a 的取值范围是

[　　]

A．$a\le-6$　　　　B．$-\sqrt{60}<a<-6$

C．$-8<a\le-6$　　　　D．$-8\le a\le-6$

【解答】　B

482．若奇函数 $y=f(x)(x\neq 0)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x-1$，那么使 $f(x-1)<0$ 的 x 的集合是

[　　]

A．$\{x|1<x<2\}$

B．$\{x|-1<x<0\}$

C．$\{x|x<0$ 或 $1<x<2\}$

D．$\{x|x<-2$ 或 $-1<x<0\}$

【解答】　C

483．设 $x>0$，$y>0$，且 $x+y\leq 4$，则下列不等式中恒成立的是

[　　]

A．$\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1$

C．$\sqrt{xy}\geq 2$　　D．$\frac{1}{xy}\geq 1$

【解答】　B

484．$|x-a|<m$ 和 $|y-a|<m$ 是 $|x-y|<2m$ 的

[　　]

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充分且必要条件　　D．既不充分又不必要条件

【解答】　A

二、填空题

485．若幂函数 $y=x^n$(n 为有理数，$0<x<1$)的图象在直线 $y=x$ 的上方，则幂指数 n 的取值范围是________．

【精析】　由于幂函数图象形态变化较复杂，且与幂指数 n 的取值情况密切相关，故本题应抓住 n 的不同取值进行分类研究，由此可得当 $n<0$、$n=0$ 及 $0<n<1$ 时，结论成立，综合得 n 的取值范围为 $(-\infty,1)$．

486．已知 $x\geq 0$，$y\geq 0$，且 $x+2y=1$，则 $2x+3y^2$ 的最小值等于________．

【解答】　$\frac{3}{4}$

487．设 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$，则不等式 $|f^{-1}(x)|>1$ 的解集是________．

【解答】　$\{x|x<0$ 且 $x\neq -1\}$

488．不等式 $\sqrt{4x-x^2}>ax(a<0)$ 的解区间是________．

【解答】　$(0,4]$

489．若点 $P(4,a)$ 到直线 $4x-3y=1$ 的距离不大于 3，则 a 的取值范围是________．

【解答】　$[0,10]$

490．已知集合 $A=\{x|2^{2x}-2^{x+1}-8=0\}$，$B=\{x|\sqrt{x+a}<x\}$，且 $4\subset B$，则实数 a 的取值范围是________．

【解答】　$-2\leq a<2$

491．设 a，b，$c\in R^+$，$a+b+c=1$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值为________．

【解答】 $\sqrt{3}$

492．已知 a=|x+yi|(x，y∈R)，无穷数列{a^n}各项的和为 1，则 x^2y^4 的最大值为________．

【解答】 $\frac{1}{432}$

493．关于 x 的不等式 $\log_a x>\log_{a+1} x$(其中 a＞1)的解集是________．

【解答】 (1，10)

494．当 x=8 时，$\log_a(x^2-x-6)>\log_a(4x+8)$成立，则此不等式的解集为________

【解答】 {x|x＞7}

495．不等式$\frac{(x-2)^2(x-3)^3}{x+1}<0$的解集为________．

【解答】 －1＜x＜2 或 2＜x＜3

496．已知集合 A={x|－1≤x≤a}，如果恒有{y|y=x＋1，x∈A}={y|y=x^2，x∈A}，求 a 的取值________．

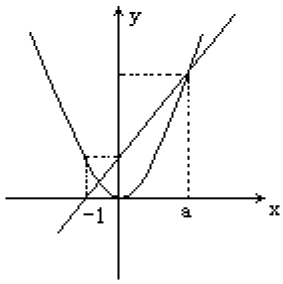


图 67

【精析】 由题意可知，两函数 y=x＋1 与 y=x^2 在给定区间[－1，a]上有相同的值域，可求得两函数图象的交点坐标为$(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}，\frac{3\pm\sqrt{5}}{2})$，再结合图象67分析可得$a=0$或$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$即为所求．

497．若不等式$y^2-2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})y+1<0$对任意$x\in\mathbf{R}^+$恒成立，求y的取值范围________．

【解答】 原不等式变形得$y^2+1<2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})y$，显然可知$y>0$，两边同时除以y，得$\frac{y^2+1}{y}<2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})$ (*)

对于$x\in\mathbf{R}^+$，$2(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})\geq 4$，

故欲使(*)式对$x\in\mathbf{R}^+$恒成立，只须$\frac{y^2+1}{y}<4$，即$y^2-4y+1<0$ (y＞0)．

由此解得$2-\sqrt{3}<y<2+\sqrt{3}$．

498．已知函数 f(x)=x^2＋ax＋3，当 x∈[－2，2]时，不等式 f(x)

＞a 恒成立，求 a 的取值范围________．

【解答】 设 $g(x)=f(x)-a=x^2+ax+(3-a)$，其图像为开口向上的抛物线．

要使得对于 $x\in[-2,2]$ 恒有 $g(x)>0$ 成立，只须满足：

①$\Delta=a^2-4(3-a)<0$，解得 $-6<a<2$．

②$\begin{cases}\Delta=4(3-a)\geq 0\\ g(-2)=7-3a>0\\ g(2)=7+a>0\\ (-\frac{a}{2}-2)(-\frac{a}{2}+2)>0\end{cases}$ 解得 $-7<a\leq 6$

综合得，当 $-6<a<2$ 时，不等式 $g(x)>0$，即 $f(x)>a$ 在 $x\in[-2,2]$上恒成立．

499．已知不等式 $\dfrac{kx^2+kx+6}{x^2+x+2}>2$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，求 k 的取值范围________．

【精析】 $\because x^2+x+2=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$

∴原不等式等价于 $kx^2+kx+6>2(x^2+x+2)$，即

$(k-2)x^2+(k-2)x+2>0$

①当 $k=2$ 时，结论显然成立；

②当 $k\neq 2$ 时，设 $f(x)=(k-2)x^2+(k-2)x+2$．

则由 $\begin{cases}a=k-2>0\\ \Delta=(k-2)^2-8(k-2)<0\end{cases}$ 可得 $2<k<10$．

500．求函数 $y=\dfrac{2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ 的最值________．

【解答】 $\because 1-x^2\geq 0$ 且 $x\neq 0$．

∴令 $x=\sin\theta$，$\theta\in[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]$，则有

$y=\dfrac{2+\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2(1+\sin\theta)}{1+\cos\theta}=(1+\tan\frac{\theta}{2})^2$

$\because \frac{\theta}{2}\in[-\frac{\pi}{4},0)\cup(0,\frac{\pi}{4}]$，

$\therefore -1\leq\tan\frac{\theta}{2}\leq 1$ 且 $\tan\frac{\theta}{2}\neq 0$．

当 $\tan\frac{\theta}{2}=1$ 时，$y_{max}=4$，此时 $x=1$．

当 $\tan\frac{\theta}{2}=-1$ 时，$y_{min}=0$，此时 $x=-1$．

501．已知当 $x\in[0,1]$时，不等式 $2m-1<x(m^2-1)$恒成立，试求 m 的取值范围________．

【精析】 函数 $f(x)=kx+b$，$x\in[\alpha,\beta]$的图象是一条线段，此线段恒在 x 轴上方的充要条件是其两个端点均在 x 轴上方，即有 $f(\alpha)$

＞0 且 f(β)＞0．同样地，此线段恒在 x 轴下方的充要条件为 f(α)＜0 且 f(β)＜0．由此本题可解：

设 $f(x)=(m^2-1)x-(2m-1)$

令$\begin{cases} f(0)=1-2m>0 \\ f(1)=m^2-2m>0 \end{cases}$ 解得$m<0$．

502．函数$y=\sqrt{3x+5}+\sqrt{x-2}$的值域为________．

【解答】 设$\begin{cases} 3x+5=y^2\sin^4\alpha \\ x-2=y^2\cos^4\alpha \end{cases}$ $(0<\alpha\le\frac{\pi}{2})$消去$x$并由$y>0$，解得

$$y^2=\frac{-11}{2(\cos^2\alpha+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}}$$

当$\cos^2\alpha=0$时，$y_{min}=\sqrt{11}$．

故原函数值域$[\sqrt{11}$，$+\infty)$．

503．解不等式$x\sqrt{1+x^2}+1>x^2$．

【解答】 设$x=\tan\theta\ (-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$，原不等式化为$\tan\theta\sec\theta>-1+\tan^2\theta$，即 $2\sin^2\theta-\sin\theta-1<0$

解得$-\frac{1}{2}<\sin\theta<1$，$\therefore -\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \tan\theta>-\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴原不等式的解集为$\{x|x>-\frac{\sqrt{3}}{3}\}$．

504．若不等式$|x-3|+|4-x|>m$对任意 $x\in R$ 恒成立，则 m 的取值范围应是________．

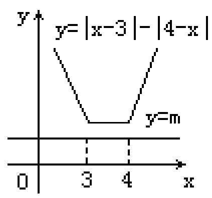


图 68

【精析】 可用图 68 来求解：作出函数 $y=|x-3|+|4-x|$和 $y=m$ 的示意图．

由图象易知，当且仅当 $m<1$ 时，恒有 $f(x)>m$ 成立．

505．设不等式$\sqrt{x}+\sqrt{y}\le k\sqrt{x+y}$对一切$x>0$，$y>0$恒成立，则实数 k 的范围为________．

【解答】 $\because \sqrt{x}+\sqrt{y}\le k\sqrt{xy}$对$x>0$且$y>0$恒成立，

$\therefore k \geq \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$ 对$x>0$且$y>0$也恒成立．

令 $w=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$，则$w^2=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+y}=1+\dfrac{2\sqrt{xy}}{x+y}\leq 1+\dfrac{2\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}}$，

即 $w\leq\sqrt{2}$，又$w>0$，

$\therefore$当且仅当$x=y$时，$w_{max}=\sqrt{2}$．

$\therefore w\in(0，\sqrt{2}]$

$\therefore$要使$k\geq\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$成立，只须 $k\geq w_{max}$，即$k\geq\sqrt{2}$，故所求k的范围为$[\sqrt{2}，+\infty)$．

506．已知$x，y\in\mathbf{R}^+$，$x+2y=1$，则$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$的最小值为__________．

【解答】 设参数$k>0$，则$k+(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})=k(x+2y)+(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})=(kx+\dfrac{1}{x})+(2ky+\dfrac{1}{y})\geq 2\sqrt{k}(1+\sqrt{2})$

当且仅当$\begin{cases}kx=\dfrac{1}{x}\\2ky=\dfrac{1}{y}\end{cases}$即$\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{1}{k}}\\y=\sqrt{\dfrac{1}{2k}}\end{cases}$时，上式中等号成立，代入$x+2y=1$得$k=3+2\sqrt{2}$．回代可得$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq 3+2\sqrt{2}$．

$\therefore x=\sqrt{2}-1$，$y=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$时，$(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})_{\text{最小}}=3+2\sqrt{2}$．

507．设$f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}$，其中$a$是实数，$n$是任意给定的自然数且$n\geq2$，如果$f(x)$当$x\in(-\infty，1]$时有意义，则$a$的取值范围为________．

【解答】 要使函数有意义，必须$1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a>0$，

即 $a>-[(\dfrac{1}{n})^x+(\dfrac{2}{n})^x+\cdots+(\dfrac{n-1}{n})^x]$　　　　(*)

令 $f(x)=-[(\dfrac{1}{n})]^x+(\dfrac{2}{n})^x+\cdots+(\dfrac{n-1}{n})^x]$，由于$n\geq2$，且$x\in(-\infty，1]$，

$\therefore$ $(\frac{1}{n})^x$，$(\frac{2}{n})^x$，…，$(\frac{n-1}{n})^x$ 均为增函数，

$\therefore$ $(\frac{1}{n})^x+(\frac{2}{n})^x+\cdots+(\frac{n-1}{n})^x$ 也是减函数，

$\therefore$ $f(x)=-[(\frac{1}{n})^x+(\frac{2}{n})^x+\cdots+(\frac{n-1}{n})^x]$为增函数，

故 $f_{max}=\max f(x)=f(1)=-[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}]=\frac{1-n}{2}$，

要使$(*)$式恒成立，只须$a>f_{max}=\frac{1-n}{2}$.

故所求a的范围为$(\frac{1-n}{2}，+\infty)$.

508．已知不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{12}\log_a(a-1)+\frac{2}{3}$对所有大于 1 的自然数 n 均成立，则实数 a 的取值范围为________.

【解答】 令$f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$，

则$f(n+1)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+2}$，

$\therefore$ $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$

故 f(n+)>f(n)，

由此可知关于自然数 n 的函数 f(n)在[2，+∞)上是单调递增函数，

故 $f_{min}=\min f(n)=f(2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$，要使不等式恒成立，则

$\frac{1}{12}\log_a(a-1)+\frac{2}{3}<\frac{7}{12}$，又$a>1$

由此解得 $1<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore$ a的取值范围为$(1，\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

509．实数 x，y 适合条件 $1\le x^2+y^2\le 2$，则函数 $2x^2+3xy+2y^2$ 的值域是________.

【解答】 令 x=rcosα，y=rsinα，则

$x^2+y^2=r^2\in[1，2]$

$2x^2+3xy+2y^2=2r^2+3r^2\cos\alpha\sin\alpha=r^2(2+\frac{3}{2}\sin2\alpha)$，

∴当 $r^2=2$，且 $\sin2\alpha=1$，即 $x=y=\pm1$ 时，函数取得最大值 7；

当$r^2=1$，且$\sin2\alpha=-1$，即$x=-y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时，函数取得最小值$\frac{1}{2}$.

故函数$2x^2+3xy+3y^2$的值域为$[\frac{1}{2}，7]$．

510．已知a，b，c为非负数，且$a+b+c=1$，则$y=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$的最大值________．

【解答】 ∵a+b+c=1

$\therefore y^2=4(a+b+c)+3+2\sqrt{(4a+1)(4b+1)}+2\sqrt{(4b+1)(4c+1)}+2\sqrt{(4a+1)(4c+1)}\leq 4(a+b+c)+3+(4a+1+4b+1)+(4b+1+4c+1)+(4a+1+4c+1)=12(a+b+c)+9=21$，$\therefore y\leq\sqrt{21}$．

∴当且仅当$a=b=c=1/3$时，$y_{最大}=\sqrt{21}$．

511．设 a，b∈R^+，且 a+b=6，则 a^2b^4 的最大值为________．

【解答】 $a^2b^4=(ab^2)^2=(a\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot 4)^2\leq 4^2[(\frac{a+b/2+b/2}{3})^3]^2$

$=4^2(\frac{a+b}{3})^6=1024$．

∴当且仅当$\begin{cases}a=\frac{b}{2}\\ a+b=6\end{cases}$ 即$\begin{cases}a=2\\ b=4\end{cases}$时，$(a^2b^4)_{最大}=1024$．

512．函数$y=x+\frac{8}{x^2}(x>0)$的最小值为________．

【解答】 $y=x+\frac{8}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{8}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{8}{x^2}}=3\sqrt[3]{2}$

当且仅当$\frac{x}{2}=\frac{8}{x^2}$，即$x=2\sqrt[3]{2}$，得$y_{最小}=3\sqrt[3]{2}$．

513．若$0<x<\frac{1}{3}$，则$y=x^2(1-3x)$的最大值为________．

【解答】 $\because 0<x<\frac{1}{3}$，$\therefore 1-3x>0$．

$\therefore\ y=x^2(1-3x)=x\cdot x\cdot(1-3x)$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}(1-3x)\leq\frac{4}{9}(\frac{\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+1-3x}{3})^3=\frac{4}{243}.$$

当且仅当$\frac{3x}{3}=1-3x$，即$x=\frac{2}{9}$时，等号成立．

$\therefore\ y_{最大}=\frac{4}{243}$．

同乘以$(\frac{1}{2}A_1A_2)^2$，即可，

【解答】 令$\sqrt{1-x}=t$，则$x=1-t^2(t\geq 0)$．

$\therefore\ y=1-t^2+t=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}\leq\frac{5}{4}$．

$\therefore\ f(x)$的最大值为$\frac{5}{4}$，此时$x=\frac{3}{4}$．

515．已知不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{12}\log_a(a-1)+\frac{2}{3}$对一切大于 1 的自然数 n 都成立，试求 a 的最大值________．

【解答】 设$f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，

$f(n+1)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$，

$f(n+1)-f(n)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(n+1)}>0$，

$\therefore f(n+1)>f(n)$，$f(n)$是关于 n 的增函数．

$\therefore f(n)\geq f(2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$．

依题意$f(n)\geq\frac{1}{12}\log_a(a-1)+\frac{2}{3}$对于大于1的自然数n恒成立，

$\therefore\frac{1}{12}\log_a(a-1)+\frac{2}{3}\leq\frac{7}{12}\Rightarrow\log_a(a-1)\leq-1\Rightarrow\begin{cases}a>1.\\a-1\leq\frac{1}{a}.\end{cases}$

$\Rightarrow 1<a\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．

$\therefore\ a_{max}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．

516．函数$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$的值域为________．

【解答】 令$x=\tan\theta$，$\theta\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$，则

$y=\sec\theta+\tan\theta=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\cot(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})$．

由$\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\in(0,\ \frac{\pi}{2})\Rightarrow y\in(0,\ +\infty)$．

517．$f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$的最大值为________

【解答】 $f(x)=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-2)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2}$．

问题转化为求抛物线 $y=x^2$ 上一点 P(x，y)到点 A(3，2)，B(0，1)距离之差的最大值．(下略)

518．如图69，关于实数x的不等式$|x-\frac{(a+1)^2}{2}|\leq\frac{(a+1)^2}{2}$与$x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leq 0$($a\in\mathbf{R}$)的解集依次记为A和B，求使$A\subseteq B$的a的范围________．

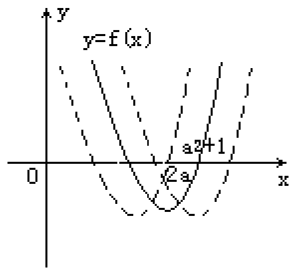


图69

【精析】 此题是1990年上海高考题,解此题的关键是参数讨论.解第二个不等式时，由于左边二次三项式的二根带有参数，不能确定根的大小，故需讨论，由于集合A和B的端点带有参数，在求$A\subseteq B$时又需讨论．讨论过程十分繁琐，如果构造二次函数，通过函数图象求解十分方便．

【解答】 由$|x-\frac{(a+1)^2}{2}|\leq\frac{(a-1)^2}{2}$，得

$-\frac{(a-1)^2}{2}\leq x-\frac{(a+1)^2}{2}\leq\frac{(a-1)^2}{2}$，

$\therefore 2a\leq x\leq a^2+1$．

考察函数$f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$的图象，得出$A\subseteq B$的充要条件是函数$y=f(x)$的图象与x轴的两交点横坐标都能介于$2a$、a^2+1之间，故$A\subseteq B$当且仅当

$\begin{cases}f(1+a^2)\leq 0\\ f(2a)\leq 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a(a-3)(a^2-1)\leq 0\\ a^2-1\geq 0\end{cases}$

所以，a的取值集合是$\{a|1\leq a\leq 3$ 或 $a=-1\}$．

519．已知x，y，$z\in\mathbf{R}^+$，且满足方程组$\begin{cases}x^2+xy+\frac{1}{3}y^2=25,\\ \frac{1}{3}y^2+z^2=9,\\ z^2+xy+x^2=16.\end{cases}$

则$xy+2yz+3xz$的值为________．

【解答】 原方程组可变形为

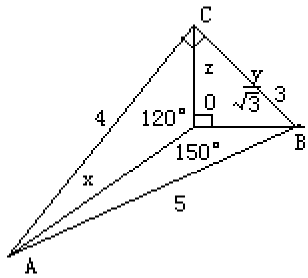


图 70

$$\begin{cases} x^2+(\frac{y}{\sqrt{3}})^2-2x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\cos150°=5^2, \\ (\frac{y}{\sqrt{3}})^2+z^2=3^2, \\ z^2+x^2-2xy\cos120°=4^2. \end{cases}$$

依据上述三式构造直角△ABC，如图 70，设 0 为△ABC 内一点．

$|OA|=x$，$|OB|=\frac{y}{\sqrt{3}}$，$|OC|=y$

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}$

即 $\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}xz\sin120°+\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\sin150°+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z$

故 $6=\frac{\sqrt{3}}{4}xz+\frac{xy}{4\sqrt{3}}+\frac{yz}{2\sqrt{3}}$

$xy+2yz+3xz=24\sqrt{3}$

520．若不等式 $x^2-5x+6<0$ 的解集也满足关于 x 的不等式 $2x^2-9x+a<0$，则 a 的取值范围为________．

【解答】 设 $f(x)=2x^2-9x+a$，作其草图 60，根据 $x^2-5x+6<0$ 的解集 $(2,3)$ 是 $2x^2-9x+a<0$ 的解集的子集可知：$\begin{cases} f(2)\le0 \\ f(3)\le0 \end{cases}$

解得 $a\le9$．

521．解不等式 $\sqrt{2x+5}>x+1$，则 x 的值为________．

【解答】 设 $f(x)=\sqrt{2x+5}$，$g(x)=x+1$．在同一坐标系内画出函数的图象，交点为 $(2,3)$．由图象可知原不等式的解是 $-\frac{2}{5}\le x<2$．

522．x，y，z 均为非负数，且满足 $x=y+z-1=4-y-2z$，则 $u=2x^2-2y-z$ 的最值为________．

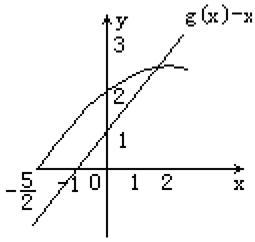


图71

【解答】 设 x＋y＋z=k，结合原条件得

$|x|^2+2|x|=a$，从而有$|x|=-1+\sqrt{1+a}(a\geq 0)$

∴ 当$a\geq 0$时，原方程有实数根$x=\pm(-1+\sqrt{1+a})$

解得 $x=\frac{k-1}{2}$，$y=\frac{3k-7}{2}$，$z=4-k$ 代入u得 $u=\frac{1}{2}(k^2-6k+9)-1=\frac{1}{2}(k-3)^2-1$

∵ x，y，z均为非负数，

∴ $\frac{k-1}{2}\geq 0$，$\frac{3k-7}{2}\geq 0$，$4-k\geq 0$

解得 $\frac{7}{3}\leq k\leq 4$

∵ $3\in[\frac{7}{3}，4]$，

∴ 当$k=3$，即$x=y=z=1$时，$u_{最小}=-1$.

∵ $|4-3|>|3-\frac{7}{3}|$，

∴ 当$k=4$，即$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{5}{2}$，$z=0$时，$u_{最大}=-\frac{1}{2}$.

523．a，b，c，d∈R，$a^2+b^2+c^2+d^2\leq 1$．则 $M=(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4$的最大值为________．

【解答】 由 M 联想构造对偶式：

$M=(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4$，

$N=(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4$．

∵$a^2+b^2+c^2+d^2\leq 1$，

$M+N=6(a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2)$

$=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\leq 6$，

∵$N\geq 0$，∴$M\leq 6$，

∴当$\begin{cases}N=0\\a^2+b^2+c^2+d^2=1\end{cases}$

即$a=b=c=d=\frac{1}{2}$时，$M_{最大}=6$.

524．设 $a=\lg z+\lg[x(yz)^{-1}+1]$，$b=\lg x^{-1}+\lg(xyz+1)$，$c=\lg y+\lg[(xyz)^{-1}+1]$记 a，b，c 中的最大数为 M，则 M 的最小值为_______．

【精析】 化简a,b,c得$a=\lg(xy^{-1}+z)$,$b=\lg(yz+x^{-1})$,$c=\lg[(xz)^{-1}+y]$.

设N为$xy^{-1}+z$，$yz+x^{-1}$，$(xz)^{-1}+y$中的最大数，则有$M=\lg N$．∵x，y，z均为正数，于是$N^2\ge(xy^{-1}+z)[(xz)^{-1}+y]=[(yz)^{-1}+yz]+(x+x^{-1})\le 2+2=4$，所以$N\ge 2$，仅当x=y=z=1时取等号．

∴$M=\lg N=\lg 2$．

525．$z=\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{3}x+y+1}+\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{3}x+y+1}$的最小值为________．

【解答】 $z=\sqrt{x^2+y^2-2y+1}+\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{3}x+y+1}$

$+\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{3}x+y+1}$

即为$z=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2}$

$+\sqrt{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2}$．

z的几何意义是：平面上一点(x，y)到三点A(0，1)，B($-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{1}{2}$)，C($\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{1}{2}$)的距离之和．

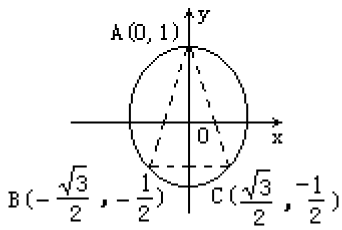


图72

如图72所示，易知$AB=BC=CA=\sqrt{3}$所以△ABC为正三角形．

z的最小值即平面上的一点P到三点A、B、C距离之和|PA|＋|PB|＋|PC|的最小值．

由几何知识可知，P点应是△ABC的费马点，由于△ABC是正三角形，其费马点是正三角形的中心0，即P点与0点重合时，即：P(0，0)使得z=|PA|＋|PB|＋|PC|取得最小值，这个最小值等于

$\sqrt{0^2+1^2}+\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}+\sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=3$．

526．函数$f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$的最大值为________．

【解答】 由$f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-2)^2}-\sqrt{x^2+(x^2-1)^2}$可知函数f(x)的几何意义是：

在抛物线$y=x^2$上的点P(x，x^2)分别到点A(3，2)和点B(0，1)的距离之差．

如图73，因点A在抛物线下方，点B在抛物线上方，故直线AB和抛

物线相交，交点由方程组

$$\begin{cases} y = x^2 \\ \dfrac{y-1}{x-0} = \dfrac{2-1}{3-0} \end{cases}$$决定，消去y得方程$3x^2-x-1=0$．

由于该方程常数项为负，故方程必有负根．

因三角形两边之差小于第三边，所以，当点P位于负根所对应的交点C时，$f(x)$有最大值$|AB|=\sqrt{10}$．

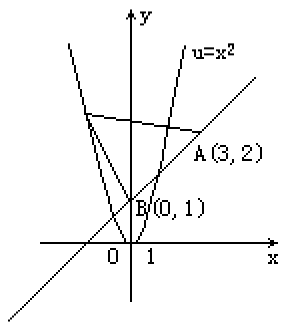


图73

527．$y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-10x+26}$的最小值为________．

【精析】 $y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-10x+26}$

$=\sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x-5)^2+1}$

$=\sqrt{(x-1)^2+(0+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(0+1)^2}$，

其中$\sqrt{(x-1)^2+(0+2)^2}$可以看成x轴上的点到点$A(1,-2)$的距离，$\sqrt{(x-5)^2+(0+1)^2}$可以看成x轴上的点到点$B(5,-1)$的距离．

因此，

$y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-10x+26}=\sqrt{(x-1)^2+(0+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(0+1)^2}$的几何意义就是x轴上的点到A，B两点的距离之和．

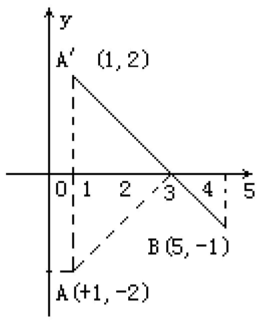


图74

求$y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-10x+26}$的最小值就是求x轴上的点到A，B两点的距离之和的最小值．

如图74，作A(＋1，－2)关于x轴的对称点A′(1，2)．根据平面几何知识，A′B就是所求的最小值，易知$y_{min}=A'B=\sqrt{(1-5)^2+(2+1)^2}$=5．

设P的坐标为$(x, 0)$．则由$\dfrac{x-1}{5-x}=\dfrac{2}{1}$得$x=\dfrac{11}{3}$．

所以当$x=\dfrac{11}{3}$时，y取最小值为5．

528．若$x^2+y^2=169$，则函数$f(x, y)=\sqrt{24y+10x+338}+\sqrt{24y-10x+338}$的最大值为________．

【精析】 表面看$f(x, y)=\sqrt{24y+10x+338}+\sqrt{24y-10x+338}$无法利用距离公式，但只要注意到条件 $x^2+y^2=169$ 就可以想到如下办法．

【解答】 由 $x^2+y^2=169$ 知

$f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2+24y+10x+169}+$

$\sqrt{x^2+y^2+24y-10x+169}$

$=\sqrt{(x+5)^2+(y+12)^2}$

$=\sqrt{(x-5)^2+(y+12)^2}$．

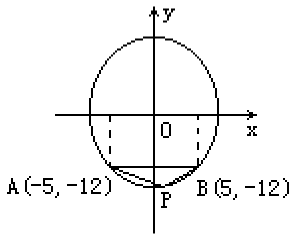


图75

可视 f(x，y)是圆 $x^2+y^2=169$ 上的点 P(x，y)到圆上两定点 A(－5，－12)，B(5，－12)的距离之和|PA|＋|PB|(见图 75)．

因|PA|＋|PB|=△ABP 周长－|AB|(其中|AB|为定长 10)．

所以，当△ABP 周长最大时，|PA|＋|PB|就取是最大值．由于三角形一边长确定后，仅当这个三角形为等腰三角形时，周长最大，此时 P 点

的坐标为$(0, 13)$．因此，$f(x, y)_{max}=f(0, 13)=10\sqrt{26}$

529．实数x，y满足$4x^2-5xy+4y^2=5$，设$S=x^2+y^2$，则$\dfrac{1}{S_{max}}+\dfrac{1}{S_{min}}$的值为________．

【精析】 $\because \dfrac{x^2+y^2}{2}\geq|xy|$，

$\therefore -\dfrac{x^2+y^2}{2}\leq xy\leq\dfrac{x^2+y^2}{2}$，

$-\dfrac{5(x^2+y^2)}{2}\leq 5xy\leq\dfrac{5}{2}(x^2+y^2)$，

$4x^2+4y^2-\frac{5}{2}(x^2+y^2)\leq 5\leq 4x^2+4y^2+\frac{5}{2}(x^2+y^2)$，

$\therefore \frac{3S}{2}\leq 5\leq \frac{13S}{2}$． $\therefore \frac{10}{13}\leq S\leq \frac{10}{3}$．

$\therefore S_{max}=\frac{10}{3}$，$S_{min}=\frac{10}{13}$．

$\therefore \frac{1}{S_{max}}+\frac{1}{S_{min}}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$．

530．若任意实数$x>y>z>t>0$，要使$\log_{\frac{x}{y}}1993+\log_{\frac{y}{z}}1993+\log_{\frac{z}{t}}1993\geq k\log_{\frac{x}{t}}1993$，则k的最大值是________．

【精析】 条件化为

$$k\leq \frac{\log_{\frac{x}{y}}1993+\log_{\frac{y}{z}}1993+\log_{\frac{z}{t}}1993}{\log_{\frac{x}{t}}1993}$$

$=g(x，y，z，t)$，只需 $k_{max}=\{g(x，y，z，t)\}_{min}$ 即可，由调和平均值不等式$g(x，y，z，t)\geq \frac{9}{(\lg_{1993}\frac{x}{y}+\lg_{1993}\frac{y}{z}+\lg_{1993}\frac{z}{t})\cdot \lg_{\frac{x}{t}}1993}=9$，

$\therefore k_{max}=9$

531．设n为自然数，a，b为正实数，且满足$a+b=2$，则$\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}$的最小值是________．

【精析与解答】 $2=a+b\geq 2\sqrt{ab}$，

$\therefore ab\leq 1$，$\therefore a^nb^n\leq 1$．

又$\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}=\frac{1+a^n+b^n+1}{(1+a^n)(1+b^n)}\geq \frac{1+a^n+b^n+a^nb^n}{1+a^n+b^n+a^nb^n}=1$，

$\therefore (1+\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n})_{min}=1$，$a=b=1$时取到．

532．设 n 为自然数，对任意实数 x，y，z 恒有$(x^2+y^2+z^2)^2\leq n(x^4+y^4+z^4)$成立，则 n 的最小值是________．

【精析与解答】 $(x^2+y^2+z^2)^2\leq n(x^4+y^4+z^4)$，$2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\leq(n-1)(x^4+y^4+z^4)$，

$n-1\geq \frac{2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{x^4+y^4+z^4}$，

只需$n-1\geq\{\frac{2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{x^4+y^4+z^4}\}_{max}=2$，

得 $n\geq 3$，$\therefore n_{min}=3$．

533．函数$y=\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2-4x+8}$的值域为________．

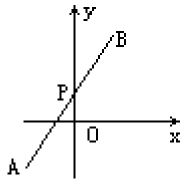


图76

【解答】 原函数可变形为$y=\sqrt{(x+2)^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+2^2}$，函数值y可视为x轴上的点P(x，0)到两个定点A(－2，－1)、B(2，2)的距离之和．如图76，则y=|PA|＋|PB|≥|AB|=5．故所求函数的值域为[5，＋∞)．

534．设x、y、z∈$\mathbf{R}^+$，且$x+y+z=1$，则$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$的最小值为________．

【解答】 $\lambda>0$，由已知得$\lambda(x+y+z-1)=0$，∴$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$

$=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}+\lambda(x+y+z-1)$

$=(\frac{1}{x}+\lambda x)+(\frac{4}{y}+\lambda y)+(\frac{9}{z}+\lambda z)-\lambda$

$\geq 2\sqrt{\lambda}+4\sqrt{\lambda}+6\sqrt{\lambda}-\lambda=12\sqrt{\lambda}-\lambda$，要取得等号，当且仅当$\frac{1}{x}=\lambda x$，$\frac{4}{y}=\lambda y$，$\frac{9}{z}=\lambda z$时，解得$x=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$，$y=\frac{2}{\sqrt{\lambda}}$，$z=\frac{3}{\sqrt{\lambda}}$，将其代入$x+y+z=1$得$\lambda=36$，此时$12\sqrt{\lambda}-\lambda=36$．

∴$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$的最小值为36．

535．函数$y=|x+2-\sqrt{1-x^2}|$的值域为________．

这是一道典型的三角换元法求值域问题．虽然下面的解法并不简单，但富有创造性．

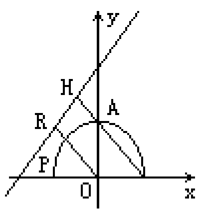


图77

【解答】 原函数可变形为$\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{|1\cdot x+(-1)\sqrt{1-x^2}+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$这样，$\frac{\sqrt{y}}{2}$可视为动点P(x，$\sqrt{1-x^2}$)到直线$x-y+2=0$的距离，又P点的轨迹为半圆$x^2+y^2=1(0\leq y\leq 1)$．如图77，过0点作直线$x-y+2=0$的垂线分别交半圆、直线于$P_0$、R．

易求$P_0(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$．观看图形可以知当$x\in[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}]$时，$\frac{y}{\sqrt{2}}$单调递减．当$x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$时，$\frac{y}{\sqrt{2}}$单调递增．又$|P_0R|=\sqrt{2}-1$，$|AH|=\frac{|1-0+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故所求函数的值域为$[2-\sqrt{2},3]$．

536．函数$f(t)=\frac{\sqrt{1-t^2}+1}{t-2}$的值域为________．

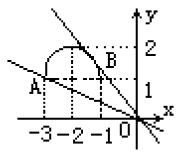


图78

【解答】 令$\begin{cases} y=\sqrt{1-t^2}+1 \\ x=t-2 \end{cases}$

则$(x+2)^2+(y-1)^2=1$，且$x>1$．

所以点$P(x,y)$在如图78所示的半圆上运动，$f(t)=y/x$表示直线OP的斜率．由解析几何知识容易求得：$k_{OA}=-1/3$，$k_{OB}=-4/3$，所以函数的值域为$[-4/3,-1/3]$．

537．函数$f(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$的值域为________．

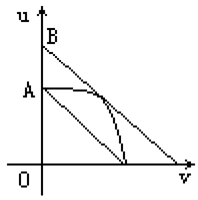


图79

【解答】 令$u=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$，$v=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$，则$u^2+v^2=2(u\geq 0,v\geq 0,u\neq 1,v\neq 1)$，表示的是圆弧(如图79)，$f(x)=\sqrt{2}u+v$表示的是直线$v=-\sqrt{2}u+f(x)$在v轴上的截距，易求得$f(x)_{min}=|OA|=\sqrt{2}$，$f(x)_{max}=|OB|=\sqrt{6}$．又$u\neq 1$，$v\neq 1$，故$f(x)\neq 1+\sqrt{2}$，从而所求函数的值域为$[\sqrt{2},1+\sqrt{2}]\cup(1+\sqrt{2},\sqrt{6}]$．

538．已知a，b，c是实数，且$b+c=8$，$bc=a^2-12a+52$，则$a+2b+3c$的值为________．

【解答】 由已知条件得$c=8-b$，代入另一式整理得$b^2-8b+a^2-12a+52=0$．

∵b是实数，

∴$\Delta=(-8)^2-4(a^2-12a+52)\geq 0$．

即$-4(a-6)^2\geq 0$，

$\therefore (a-6)^2=0$，$a=6$．
$\therefore bc=16$，于是 $b=c=4$．
$\therefore a+2b+3c=26$．

539．若 x，$y\in \mathbf{R}$，且 $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=3$，则 $u=x^2+y^2$ 的值域为________．

【解答】 视直角坐标系中的原点及 x 轴正半轴为极坐标系中的极点及极轴，由直角坐标与极坐标的互化公式得 $p^2=\dfrac{3}{2\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})}$．从而有 $u=x^2+y^2=p^2\geq\dfrac{3}{2}$，即所求值域为 $[\dfrac{3}{2}$，$+\infty)$．

540．已知 $m\in[-1，0)\cup(0，1]$，则函数 $f(m)=\dfrac{m^2}{m+2}$ 的最大值为________．

【解答】 当 $m\in[-1，0)\cup(0，1)$ 时，显然 $f(m)>0$，
(1)当 $0<m\leq 1$ 时，
$\dfrac{1}{f(m)}=\dfrac{2}{m^2}+\dfrac{1}{m}\geq 3$，
当且仅当 $m=1$ 时取等号，故此时 $f(m)_{max}=\dfrac{1}{3}$．
(2)当 $-1\leq m<0$ 时，$\dfrac{1}{f(m)}=(\dfrac{2}{m^2}+2)+\dfrac{1}{m}-2\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{m^2}\cdot 2}+\dfrac{1}{m}-2$
$=\dfrac{4}{|m|}+\dfrac{1}{m}-2=-\dfrac{3}{m}-2\geq 1$，
当且仅当 $m^2=1$ 且 $m=-1$ 即 $m=-1$ 时取等号，此时 $f(m)_{max}=1$．
由(1)(2)可知，$f(m)_{max}=1$．

541．函数 $y=\dfrac{-1+2e^x}{2+e^x}$ 的值域为________．

【精析】 该题的常规解法为反函数法及不等式法．然而，若对函数施以变形 $y=\dfrac{-3+2(1+e^x)}{1+(1+e^x)}$，联想到定比分点坐标公式，则得到以下新颖解法．

【解答】 原函数可变形为 $y=\dfrac{-3+2(1+e^x)}{1+(1+e^x)}$，设数轴上三点 P_1、P、P_2 的坐标分别为 -3、m、2，P 分 P_1P_2 所成的比 $\lambda=1+e^x$，则 $\lambda>1$，$y=m$．由 P_1P_2 的中点为 $-\dfrac{1}{2}$，故所求函数的值域为 $y\in(-\dfrac{1}{2}，2]$．

542．对于满足 $0\leq p\leq 4$ 的所有实数 p，求使不等式 $x^2+px>4x+p-3$ 成立的 x 的取值范围________．

【精析】 一般地，要把 x 看成主元，较难．如果把 p、x 的位置交换，情况就不同了．

【解答】 将不等式变形得 $p(1-x)<x^2-4x+3$，即 $p(1-x)<(x$

$-1)(x-3)$．

①当 $1-x>0$ 即 $x<1$ 时，$p<3-x$．又因为 $p\le 4$，所以 $p\le 4<3-x$，$x<-1$．

②当 $1-x<0$，即 $x>1$ 时，$p>3-x$，又因为 $p\ge 0$，所以 $p\ge 0>3-x$，$x>3$．

因此 x 的取值范围是 $x<-1$ 或 $x>3$．

543．函数$f(t)=t-2-\sqrt{t^2-6t+8}$的值域为________．

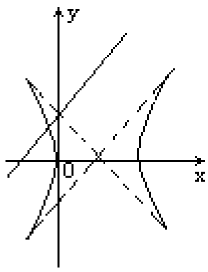


图80

【解答】 令$\begin{cases}x=t-2\\ y=\sqrt{t^2-6t+8}\end{cases}$

则$(x-1)^2-y^2=1$，且 $y>0$．

所以点 P(x，y)在如图 80 所示的双曲线(x 轴上方的部分)上运动，f(t)表示过 P 点的斜率为 1 的直线 $x-y-f(t)=0$ 在 x 轴上的截距．

根据解析几何知识容易求得：

$f(t)\in(-\infty,0]\cup(1,2]$．

544．函数$y=2x^2(5-3x)(0<x<\frac{5}{3})$的最大值为________．

【解答】 $\because 0<x<\frac{5}{3}$，$\therefore \frac{3x}{2}>0$，$5-3x>0$，

$\therefore y=2x^2\times(5-3x)=\frac{4}{9}\times 2\times\frac{9}{4}x^2(5-3x)=\frac{8}{9}\times\frac{3x}{2}\times\frac{3x}{2}\times(5-3x)\le$

$\frac{8}{9}[\frac{\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+(5-3x)}{3}]^3=\frac{1000}{243}$，当且仅当$\frac{3x}{2}=5-3x$即$x=\frac{10}{9}$时，$y_{max}=\frac{1000}{243}$．

545．已知 $2b^2-a^2=1$，则$|2b-a|$的最小值为________．

【解答】 $|2b-a|^2=4b^2+a^2-4ab$，又$\because 2ab\le a^2+b^2$，$\therefore -4ab\ge -2a^2-2b^2$，$|2b-a|^2\ge 4b^2+a^2-2a^2-2b^2=2b^2-a^2=1$，故$|2b-a|_{min}=1$．

546．函数$y=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}(x\in\mathbf{R})$的最小值为________．

【解答】 $\because x\in\mathbf{R}$，$\therefore \sqrt{x^2+1}\ge 1>0$，

$\therefore\ y=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=2$，当且

仅当$\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$即$x=0$时，有$y_{min}=2$．

547．函数$f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+4x+13}$的值域为________．

【解答】 由于$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x+2)^2+9}$，在坐标平面上选取三点 A(1，1)，B(－2，－3)，P(x，0)，可见 P 点在 x 轴上运动，A，B 两点在 x 轴的异侧，由平面几何知识知：f(x)=|PA|＋|PB|＞|AB|=5．当且仅当 A、B、P 三点共线即 x=1/4 时，上式取“=”号．

故函数 f(x)的值域为[5，＋∞)．

548．$y=3x+\dfrac{1}{x^2}(x>0)$的最小值为________．

【解答】 ∵$x>0$，∴$\dfrac{3x}{2}>0$，$\dfrac{1}{x^2}>0$，

$\therefore y=3x+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{3x}{2}+\dfrac{1}{x^2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{18}$．当且仅当$\dfrac{3x}{2}=\dfrac{1}{x^2}$，即$x=\dfrac{\sqrt[3]{18}}{3}$时，有$y_{min}=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{18}$．

549．求函数$f(x)=\sqrt{2x+1}+\sqrt{4-3x}$的值域________．

【解答】 由柯西不等式：$ac+bd\leq\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$有

$$f(x)=\sqrt{2(x+1/2)}+\sqrt{3(4/3-x)}\leq\sqrt{2+3}\cdot\sqrt{(x+1/2)+(4/3-x)}$$
$$=\sqrt{330}/6.$$

当且仅当 2：3=(x＋1/2)：(4/3－x)，即 x=7/30 时上式取“=”号．

又函数的定义域是$[-1/2，4/3]$，且$f(-1/2)=\sqrt{22}/2$，$f(4/3)=\sqrt{33}/3$，故函数的值域是$[\sqrt{33}/3，\sqrt{330}/6]$．

550．函数 $f(x)=x^2(3-x)(x\in R^+)$的值域为________．

【解答】 (1)x∈[3，＋∞)时，f(x)∈(－∞，0]；(2)x∈(0，3]时，

$$f(x)=\frac{1}{2}x\cdot x\cdot(6-2x)\leq\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x+x+(6-2x)}{3}\right]^3=4$$

(当且仅当 x=3/2 时取“=”号)

综合(1)(2)此函数的值域为(－∞，4]．

551．函数$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$的值域为________．

【解答】 设 x=tanθ(－π/2＜θ＜π/2)，则 $f(x)=\sin\theta+\cos2\theta=-2\sin^2\theta+\sin\theta+1=-2(\sin\theta-1/4)^2+9/8$．

因为－1＜sinθ＜1，所以此函数的值域为(－2，9/8]．

552．已知 $3x^2+2y^2=6x$，那么 x^2+y^2 的最大值是________．

【解一】 由已知得，$y^2=3x-\dfrac{3}{2}x^2$，

$$\therefore x^2+y^2=-\frac{1}{2}x^2+3x=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}.$$

又由$y^2=3x-\frac{3}{2}x^2\geq 0$，得$0\leq x\leq 2$，

$\therefore (x^2+y^2)_{max}=4$，此时$x=2$，$y=0$。

【解二】 由已知，得$(x-1)^2+\frac{2y^2}{3}=1$。

可令 $x=1+\cos\theta$，$y=\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta$，

则 $x^2+y^2=-\frac{1}{2}\cos^2\theta+2\cos\theta+\frac{5}{2}$

$=-\frac{1}{2}(\cos\theta-2)^2+\frac{9}{2}$。

则当 $\cos\theta=1$时，$(x^2+y^2)_{max}=4$。

553．函数$y=x^2(1-3x)(0\leq x\leq\frac{1}{3})$的值域为________。

【解答】 当$0\leq x\leq\frac{1}{3}$时，$y\geq 0$，且当$x=0$或$x=\frac{1}{3}$时，$y=0$。

当$0<x<\frac{1}{3}$时，

$y=x^2(1-3x)=\frac{4}{9}[\frac{3}{2}x\cdot\frac{3}{2}x\cdot(1-3x)]$

$\leq\frac{4}{9}[\frac{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+(1-3x)}{3}]^3=\frac{4}{243}$。

当$x=\frac{2}{9}$时取等号，故所求值域为$[0,\frac{4}{243}]$。

554．已知$0<x<\frac{1}{a}$（a为正常数），则函数$y=a^2x^2(1-ax)$的最大值为________。

【解答】 为了凑出和为定值，并且使等号成立，要用平均拆项的方法.

$y=a^2x^2(1-ax)=4\times\frac{ax}{2}\times\frac{ax}{2}(1-ax)\leq 4[\frac{\frac{ax}{2}+\frac{ax}{2}+(1-ax)}{3}]^3=\frac{4}{27}$。

即函数$y=a^2x^3(1-ax)$的最大值为$\frac{4}{27}$，此时由$\frac{ax}{2}=1-ax$得$x=\frac{2}{3a}$。

555．如图 81 所示，四面体 P－ABC 的六条校长之和为定值 L，且∠APB=∠BPC=∠CPA=90°，则其体积 V 的最大值为________。

【解答】 设 AP=x，BP=y，CP=z，

由$V=\frac{1}{6}xyz$，即$xyz=6V$，

又$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3\sqrt[3]{6V}$，

故 $L=x+y+z+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}$

$\geq 3\sqrt[3]{6V}+\sqrt{2xy}+\sqrt{2yz}+\sqrt{2zx}$

$\geq 3\sqrt[3]{6V}+3\sqrt[3]{\sqrt{8x^2y^2z^2}}$

$=3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{6V}$．

$\therefore V\leq \frac{1}{6}(\frac{\sqrt{2}-1}{3}L)^3=\frac{5\sqrt{2}-7}{162}L^3$．

此时 x=y=z，取得最大值．

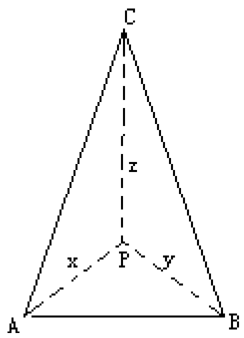


图81

556．函数 $y=\frac{\sqrt{7x-2}}{x}(\frac{1}{3}\leq x\leq 2)$的最小值为________．

【解答】 $\because \frac{1}{3}\leq x\leq 2$，$\therefore (x-\frac{1}{3})(x-2)\leq 0$．

即 $2x^2-7x+2\leq 0$，$\therefore \frac{7x-2}{x^2}\geq 3(\because x\neq 0)$．

故 $\frac{7x-2}{x}\geq \sqrt{3}$．当且仅当$x=\frac{1}{3}$或$x=2$时，上式取等号．

故$y=\frac{\sqrt{7x-2}}{x}(\frac{1}{3}\leq x\leq 2)$的最小值为$\sqrt{3}$．

557．函数$y=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2 b^2}$ (a，b，c>0)的最小值为________．

【精析】 这是一代数中的函数求值问题，从 a，b，c 的范围，及 x，c，－x 可以发现它有立体几何图形背景．

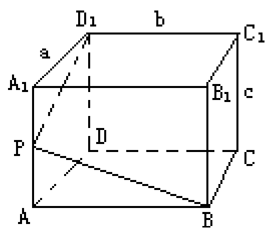


图 82

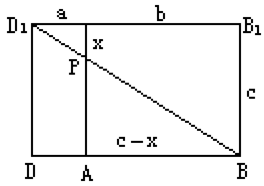


图83

【解答】 如图 82，构造长方体 $A_1B_1C_1D_1$－ABCO 使 AB=b，AD=a，BB_1=c，设 P 是棱 AA_1 上任意一点，A_1P=x，则 AP=c－x，

由勾股定理有 $D_1P=\sqrt{x^2+a^2}$，$BP=\sqrt{(c-x)^2+b^2}$ 令 $y=D_1P+BP=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2}$，利用侧面展开图83当且仅当 D_1、P、B共线时，

即当 $x=\dfrac{ac}{a+b}$ 时，$y=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2}$ 有最小值 $y_{min}=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$．

558．若a，b，c∈$\mathbf{R}^+$，a＋b＋c＝3，则 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}$ 的最大值为________．

【解答】 $\sqrt{2a+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{(2a+1)\cdot 3}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{2a+1+3}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(a+2)$．

同理，$\sqrt{2b+1}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}(b+2)$，$\sqrt{2c+1}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}(c+2)$．所以 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}[(a+2)+(b+2)+(c+2)]=3\sqrt{3}$．要求的最大值为 $3\sqrt{3}$，当且仅当 a=b=c=1 时取得最大值．

三、解答题

559．若 $\lg a_1\cdot\lg a_2\cdots\lg a_n=1$，$a_1$，$a_2$，…，$a_n$∈(0，1)，求证：$(1-\lg a_1)(1-\lg a_2)\cdots(1-\lg a_n)\ge 2^n$．

【精析与解答】 因为 a_1，a_2，…，a_n∈(0，1)，

所以 $\lg a_1$，$\lg a_2$，…，$\lg a_n$ 均为负数．

又知 $\lg a_1\cdot\lg a_2\cdots\cdots\lg a_n=1>0$，

所以 $\lg a_1$，$\lg a_2$，…，$\lg a_n$ 的个数为偶数．

因为 1与 $-\lg a_1$ 为正数，所以 $1+(-\lg a_1)\ge 2\sqrt{-\lg a_1}$．

同理：$1-\lg a_2\ge 2\sqrt{-\lg a_2}$，…

$1-\lg a_n\ge 2\sqrt{-\lg a_n}$，所以

$(1-\lg a_1)(1-\lg a_2)\cdot\cdots(1-\lg a_n)\ge 2^n\sqrt{(-1)^n\lg a_1\cdots\lg a_n}$．

因为 n 为偶数，$\lg a_1\cdot\lg a_2\cdots\lg a_n=1$，

所以 $(1-\lg a_1)(1-\lg a_2)\cdots(1-\lg a_n)\ge 2^n$．

注意：有的学生对 a_1，a_2，…，a_n∈(0，1)，$\lg a_1$，$\lg a_2$，…，$\lg a_n$ 均为负数判断不清楚，甚至有的学生误认为是正数．产生错误的原因是对对数的单调性认识不清楚．$y=\log_a x$，a∈(0，1)为单调递减函数，当 x

>1 时，$y<0$；当 $0<x<1$ 时，$y>0$；当 $x=1$ 时，$y=0$.

$a\in(1,+\infty)$为单调递增函数，当 $x>1$ 时，$y>0$；当 $0<x<1$ 时，$y<0$；当 $x=1$ 时，$y=0$. 本题目给的对数函数底数为 10，是单调递增函数，又因为真数在 0 与 1 之间，所以对数为负数.

有的学生对 $\lg a_1\cdot\lg a_2\cdots\lg a_n=1$，对数的个数为偶数没有察觉．其原因是对偶数个负数为正数、奇数个负数为负数分辨不清．其发生的原因是在初中学习有理数的乘除法没有打好基础.

也有的学生不知道证明此题要用到算术—几何平均不等式，其原因没有深挖本题的内涵，不会根据题目的条件去“顺藤摸瓜”，找出解决本题的有力的数学工具.

首先要加强对数概念的教学，尤其是加强对数函数单调性的教学，高中代数课本上册 P56 的图表是对数函数性质的重要依据，必须让学生牢牢把握住，并且能灵活运用．根据对数函数的单调性编选一些题目练习，教师要亲自批改作业，发现问题再做针对性的练习，使成绩不断提高．另外，加强综合题的练习，边练边要总结出解题的规律.

560．证 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}(n\geq 2)$

【证明】 设 $x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{13}{24}$，

则 $x_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{13}{24}$

于是 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$

$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$，

$\therefore$ $\{x_n\}$为单调递增数列，

又 $x_2-\frac{13}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{13}{24}>0$，

故可知 $x_n>0$，即

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

561．已知 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$，且 $0<x_1<x_2<1$，求证：$f(x_2)>f(x_1)$.

【精析与解答】 依题意可得，

$f(x_1)=\frac{x_1}{1+x_1^2}$，$f(x_2)=\frac{x_2}{1+x_2^2}$，假若 $f(x_2)>f(x_1)$成立，即假若 $\frac{x_2}{1+x_2^2}>\frac{x_1}{1+x_1^2}$成立，

则只须 $\dfrac{x_2}{1+x_2^2}-\dfrac{x_1}{1+x_1^2}>0$成立，即

$\dfrac{x_2(1+x_1^2)-x_1(1+x_2^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}>0$成立，这只须

$\dfrac{(x_2-x_1)+x_1^2x_2-x_1x_2^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}>0$成立’所以只须

$\dfrac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}>0$成立，

$(1+x_1^2)(1+x_2^2)>0$，显然成立，所以只须

$(x_2-x_1)(1-x_1x_2)>0$ 成立，由已知，得

$0<x_1<x_2<1$，所以 $x_2-x_1>0$，

且 $x_1x_2<1$，所以 $1-x_1x_2>0$，由此，

$(x_2-x_1)(1-x_1x_2)>0$ 成立，以上推理每一步均可逆，

所以 $f(x_2)>f(x_1)$．

本题实质说明了函数

$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$在$(0，1)$上是增函数．

注意：有的学生不认真审题，没有发现证明本题是解决函数单调性的问题，证明本题总是要找差、变形、判断符号方可顺利解决，而错误地用了均值不等式．题目给的条件 $0<x_1<x_2<1$，是定义域，有不少学生没有发现，而把定义域给扩大．有的学生解题路子对了，但运算过程发生错误，主要是因式分解．因式分解错了，判断符号也就错了，证明不了 $f(x_2)>f(x_1)$．

解题没有综合概念，证明不等式或解不等式有的题目并不是只考查不等式知识，而还考查了代数函数、三角函数甚至几何知识．初中的因式分解很重要，在各种运算中经常用到．初中学习时，没有把因式分解学习扎实，遇到问题而不易解决．

教师在讲解不等式时，除了讲不等式知识外，还要谈到解决不等式时，也要考虑到其它数学知识，尤其在高中阶段更是如此，小题小综合，大题大综合，除了讲解外，还要定期定时进行不等式的综合练习，教师要全批全改，个别订正，进行辅导．

562．设 S_n 和 T_n 分别为等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和，对于任意一个$n\in N$都有 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+1}{4n+27}$，求$\dfrac{a_{11}}{b_{11}}$的值．

【精析与解答】 $S_{21}=\dfrac{21(a_1+a_{21})}{2}$

$$=\frac{10(a_1+a_{21})+10(a_1+a_{21})+(a_1+a_{21})}{2}$$

$$=10(a_1+a_{21})+\frac{2a_{11}}{2}=10(a_1+a_{21})+a_{11}$$

$$=21a_{11}.$$

同理可求，$T_{21}=21b_{11}$.

所以$\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{S_{21}}{T_{21}}=\frac{7\cdot 21+1}{4\cdot 21+27}=\frac{148}{111}=\frac{4}{3}$.

故$\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{4}{3}$.

注意：有不少学生不知道 m＋n=p＋q 的重要性质，因而不能推导出$\frac{a_{11}}{b_{11}}=\frac{S_{21}}{T_{11}}$，而发生错误，也有的学生直接用等差数列前n项和公式表达了$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$和$T_n=\frac{n(a_1'+a_n')}{2}$，列出等式，而把题算“瞎”了，发生错误.

只知道死背公式，而不注意数学思想方法的学习，只知道就题论题而不注意升华，只知道死套公式而不注意在原公式的基础上加以引申，得到新的性质和结论．另一方面，教师在讲完数列之后，要系统的给学生讲一些书本所没有的重要性质．因为许多重要性质要应用，尤其在高考题目中应用更为广泛．如果教师不做以上的补充，学生见到此类型的题目，就会束手无策.

教师应该给出这个重要性质，讲解时要深入浅出，先从感性上给以认识，然后再提高到理性上来，有等差数列

2，4，6，8，10，12，写出相应项的表达式：

a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6.

可以举出：

$a_1+a_5=a_2+a_4=a_6=2+10=4+8=12$.

$a_1+a_6=a_3+a_4=a_2+a_5=2+12=6+8=4+10$.

……………………

最后，将重要性质给以严格证明.

在等比数列中，也有相应的重要性质：若 m＋n=p＋q(m，n，p，q∈N)，则

$$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q.$$

只要把以上两个重要性质讲清楚，解此类型题就化险为夷了.

563．已知函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\leq 0),\\ n\{x-(n-1)\}+f(n-1) & (n-1\leq x\leq n，n\in\mathbf{N}).\end{cases}$$

(1)在区间 0≤x≤3 上描绘 y=f(x)的图形；

(2)求 f(n)；

(3)设 S(a)(a≥0)为由 x 轴，y=f(x)与 x=a 所围成的面积，a 为自然数 n 时，求 S(n)－S(n－1)；

(4)求 S(n)；

(5)求满足 S(a)≥100 的最小的自然数 a.

【精析与解答】 (1)f(0)=0①，当 n－1≤x≤n 时，f(x)=n{x－(n

$-1)\}+f(n-1)$②．在②中，令 $n=1$，$0\le x\le 1$ 时，

$f(x)=x+f(0)=x$,所以 $f(1)=1$.在②中,令 $n=2$,$1<x\le 2$ 时,$f(x)=2(x-1)+f(1)=2x-1$,所以 $f(2)=3$．在②中,令 $n=3$,$2<x\le 3$ 时,$f(x)=3(x-2)+f(2)=3x-3$(如图 84)．

(2)在②中，$f(n)=n+f(n-1)$，

所以 $f(n)-f(n-1)=n$，

即 $f(1)-f(0)=1$，

$f(2)-f(1)=2$，

…………

$f(n)-f(n-1)=n$，

将以上各式相加，

$$f(n)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1).$$

(3)由②得，当 $n-1\le x\le n$ 时，

$$f(x)=n\{x-(n-1)\}+\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=nx-\frac{n(n-1)}{2}$$

(用$f(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$的结论)．

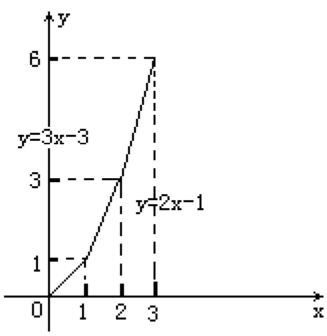


图84

当 $n\ge 1$ 时，因为 $S(n)-S(n-1)$是由 $y=f(x)$，直线 $x=n-1$，$x=n$ 及 x 轴所围成的梯形面积，所以 $S(n)-S(n-1)=$

$$\frac{1}{2}\{f(n-1)+f(n)\}\cdot 1=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}=\frac{1}{2}n^2.$$

$$(4)S(n)=S(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1).$$

$$(5)S(a)=\frac{1}{12}a(a+1)(2a+1)\ge 100.$$

由于 $f(x)>0(x>0)$，

所以 $S(7)=\frac{1}{12}\times7\times8\times15=70<100$．

$S(8)=\frac{1}{12}\times8\times9\times17=102>100$．

所以 a 的最小自然数为 8．

注意：有的学生对分段函数很不熟悉，不会解递推数列的题，有的会解一部分，而没有发现用递推数列的数学工具去完成解题的任务，也有的学生数论知识过差而不会解(4)和(5)，这是一道综合性很强的题目，对数学基础差的学生不能把握题目的全体，顾此失彼，由于以上种种原因而造成错误．

分段函数和递推数列的知识均没有学好，没有初步的数论知识，解综合题的能力过差，分段函数主要的矛盾是定义域，有的学生有时把定义域搞错而造成“全军覆没”．

加强分段函数的教学，在讲解分段函数时，一定要辅助于图象，用数形结合的方法其效果才显著．要专题讲好递推数列，通过累加法、累乘法求通项公式，常见的典型的递推数列题目往往先求通项公式，其次求前 n 项和，然后求前 n 项和的极限，俗称递推数列的三部曲．

也要进行简单的数论教学，比如说，奇数、偶数的性质；合数、质数的性质；数的整除性等，这些都要系统地给学生讲，笔者任教高中数学近 40 年，大部分时间任高三课程，每年辅导高三学生总复习时总发现几乎全体学生对数论的基本知识不懂，极个别学生知道数论知识也是通过“奥校”而获得的．除此而外，应该把以上知识综合起来而编制出习题再进行讲解，让学生解针对性强的习题，教师批改后，指出存在的问题，让学生再练习．

564．设函数 $f(x)=\frac{1}{x+2}+\lg\frac{1-x}{1+x}$．

(1)判断 f(x)的单调性，并加以证明；

(2)若 f(x)的反函数为 $f^{-1}(x)$，证明 $f^{-1}(x)=0$ 有惟一解；

(3)解关于 x 的不等式 $f[x(x-\frac{1}{2})]<\frac{1}{2}$．

【精析与解答】 (1)略；(2)$\because f(0)=\frac{1}{2}+\lg1=\frac{1}{2}$，

$\therefore f^{-1}(\frac{1}{2})=0$，即 $f^{-1}(x)=0$ 有一根 $x=\frac{1}{2}$．

假设 $f^{-1}(x)=0$ 还有一解 $x_0\neq\frac{1}{2}$，则 $f^{-1}(x_0)=0$，即 $f(0)=x_0=\frac{1}{2}$，

矛盾，故 $x=\frac{1}{2}$ 是 $f^{-1}(x)=0$ 的惟一解．

(3)由 $f[x(x-\frac{1}{2})]<f(0)$，得 $0<x(x-\frac{1}{2})<1$，解得 $(\frac{1-\sqrt{17}}{4}，0)\cup$

$(\frac{1}{2}，\frac{1+\sqrt{17}}{4})$．

565．设关于实数 x 的不等式

$|x-\frac{(a+1)^2}{2}|\leq\frac{(a-1)^2}{2}$和$x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leq 0(a\in\mathbf{R})$的解集依次为A、B，求使$A\subseteq B$的实数a的取值范围．

【精析与解答】 $|x-\frac{(a+1)^2}{2}|\leq\frac{(a-1)^2}{2}\Rightarrow 2a\leq x\leq a^2+1$．

$x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leq 0\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\2\leq x\leq 3a+1\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\3a+1\leq x\leq 2.\end{cases}$

又$\because A\subseteq B$，$\therefore$当$a\geq\frac{1}{3}$时需$2a\geq 2$且$a^2+1\leq 3a+1\Rightarrow 1\leq a\leq 3$．

当$a<\frac{1}{3}$时需$2a\geq 3a+1$且$a^2+1\leq 2\Rightarrow a=1$．

故 a 的范围是 1≤a≤3 或 a=－1

566．设 $f(x)=x^2+bx+c$，$x\in[-m,m](m>0)$．

(1)用定义证明：当 $b<-2m$ 时，$f(x)$在$[-m,m]$上是减函数；

(2)求证：当 $b<-2m$ 时，在$[-m,m]$上总存在一个 x，使得$|f(x)|\geq m|b|$．

【精析与解答】 (1)略；(2)假设在$[-m,m]$上总存在一个 x，使得$|f(x)|\geq m|b|\Leftrightarrow$ 在$[-m,m]$上总存在一个x，使得$f(x)\leq mb$，或$f(x)\geq -mb\Leftrightarrow f(x)_{max}\geq -mb$或$f(x)_{min}\leq mb\Leftrightarrow f(-m)\geq -bm$或$f(m)\leq mb\Leftrightarrow\leq mb\Leftrightarrow m^2-bm+c\geq -bm$或$m^2+bm+c\leq mb\Leftrightarrow m^2+c\geq 0$或$m^2+c\leq 0$．显然 $m^2+c\geq 0$ 与 $m^2+c\leq 0$ 总有一种情况是成立的．

∴在$[-m,m]$上总存在一个 x，使得$|f(x)|\geq m|b|$．

567．已知 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in R)$的定义域为$[-1,1]$．

(1)记$|f(x)|$的最大值为M，求证：$M\geq\frac{1}{2}$；

(2)求出(1)中的$M=\frac{1}{2}$时，$f(x)$的表达式．

【精析与解答】 (1)由题意 $M\geq|f(0)|$，$M\geq|f(1)|$，$M\geq|f(-1)|$．

$\therefore 4M\geq 2|f(0)|+|f(1)|+|f(-1)|=2|b|+|1+a+b|\cdot|1-a+b|$
$\geq|1+a+b+1-a+b-2b|=2$，

$\therefore M\geq\frac{1}{2}$．

(2)由$M=\frac{1}{2}$时$|f(0)|=|b|\leq\frac{1}{2}$，

$\therefore -\frac{1}{2}\leq b\leq\frac{1}{2}$．

同理有$-\frac{1}{2}\leq 1+a+b\leq\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}\leq 1-a+b\leq\frac{1}{2}$．

两式相加$-1\leq 2+2b\leq 1$，$\therefore -\frac{3}{2}\leq b\leq -\frac{1}{2}$．

又$-\frac{1}{2}\leq b\leq\frac{1}{2}$，$\therefore b=-\frac{1}{2}$．

当$b=-\frac{1}{2}$时，由$-\frac{1}{2}\le 1+a+b\le\frac{1}{2}\Rightarrow -1\le a\le 0$；由$-\frac{1}{2}\le 1-a+b\le\frac{1}{2}\Rightarrow 0\le a\le 1$，即$a=0$.

$\therefore f(x)=x^2-\frac{1}{2}$.

568．某种商品，原来定价每件 p 元，每月将卖出 n 件，假若定价上涨x成(这里x成：即$\frac{x}{10}$，$0<x\le 10$)，每月卖出数量将减少y成，而售货金额变成原来的 z 倍.

(1)设$y=ax$，其中a是满足$\frac{1}{3}\le a<1$的常数，用a来表示当售货金额最大时的 x 值；

(2)若$y=\frac{2}{3}x$，求使售货金额比原来有所增加的x的取值范围.

【精析与解答】 (1)由题意知某商品定价上涨 x 成时，上涨后的定价，每月卖出数量、每月售货金额分别是$p(1+\frac{x}{10})$元、$n(1-\frac{y}{10})$件、npz元，因而$npz=p(1+\frac{x}{10})\cdot n(1-\frac{y}{10})$，

$\therefore z=\frac{1}{100}(10+x)(10-y)$.

在$y=ax$的条件下，$z=\frac{1}{100}\{-a[x-\frac{5(1-a)}{a}]^2+100+\frac{25(1-a)^2}{a}\}$由于$\frac{1}{3}\le a\le 1$，则$0<\frac{5(1-a)}{a}\le 10$．要使售货金额最大，即使$z$值最大，此时$x=\frac{5(1-a)}{a}$.

(2)由$z=\frac{1}{100}(10+x)(10-\frac{2}{3}x)>1$，解得$0<x<5$.

569．$n\in N$，$n\ge 3$，试证$(n+1)^n<n^{n+1}$.

【证明】 设$x_n=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$，则$x_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}$，

易知 $x_n>0$，由$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}\times\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

$=\frac{(n+1)^{2n+2}}{[n(n+2)]^{n+1}}=\frac{(n^2+2n+1)^{n+1}}{(n^2+2n)^{n+1}}>1$，

故数列$\{x_n\}$为单调递增数列，即

$x_{n+1}>x_n>x_{n-1}>\cdots>x_4>x_3$，又$x_3=\frac{3^4}{4^3}>1$

所以 $x_n>1$，即 $x^{n+1}>(n+1)^n$.

570．设函数 $f(x)=ax+b$，且有 $2a^2+6b^2=3$，求证：对于任意的 x

$\in[-1，1]$，恒有$|f(x)|\leq\sqrt{2}$．

【精析】　这是一道源于前题却又有所发展变化的命题，虽然难度增大了，但其思想方法还是相通的，所谓$|f(x)|\leq\sqrt{2}$，从图象看，即指此线段位于直线$y=\pm\sqrt{2}$所围成之带状区域内．

【证明】　由$2a^2+6b^2=3$，可得$\frac{a^2}{\frac{3}{2}}+\frac{b^2}{\frac{1}{2}}=1$

故可设 $a=\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta$，$b=\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta$，

即$(-\frac{1}{2}i\pm\frac{\sqrt{3}}{2})^3=-i$．选D．

那么当$n=k+1$时，有$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{(k+1)^2}$．显然$1+\frac{1}{(k+1)^2}$

571．设 $b>a>1$，a，$b\in N$，比较$(a!)^{b-1}$与$(b!)^{a-1}$的大小．

【解答】　令 $b=a+k(k\in N)$，则

$(a!)^{b-1}=(a!)^{a+k-1}$

$=(a!)^{a-1}\cdot(a!)^k\leq(a!)^{a-1}\cdot(a^{a-1})^k$

$<(a!)^{a-1}[(a+1)^{a-1}\cdot(a+2)^{a-1}\cdots(a+k)^{a-1}]$

$=[(a+k)!]^{a-1}=(b!)^{a-1}$

$\therefore(a!)^{b-1}<(b!)^{a-1}$

572．设 $x\in R$，求证：

$(x^2+4x+5)(x^2+4x+2)+2x^2+8x\geq-10$．

【证明】　令 $x^2+4x=y$，$\because x\in R$，$\therefore y\geq-4$．

原不等式$\Leftrightarrow(y+5)(y+2)+2y+10\geq0$．

$\Leftrightarrow(y+\frac{9}{2})^2-\frac{1}{4}\geq0$　　　　(*)

$\because$ $y\geq-4$，$\therefore(y+\frac{9}{2})^2\geq\frac{1}{4}$．

从而(*)成立，当且仅当$y=-4$，即$x=-2$时，不等式取等号，故原不等式成立．

573．已知 $x+y+z=m$

求证 $x^2+y^2+z^2\geq\frac{m^2}{3}$．

【证明】　设$x=\frac{m}{3}+t_1$，$y=\frac{m}{3}+t_2$，$z=\frac{m}{3}+t_3$，则有$t_1+t_2+t_3=0$，从而有$x^2+y^2+z^2=(\frac{m}{3}+t_1)^2+(\frac{m}{3}+t_2)^2+(\frac{m}{3}+t_3)^2=\frac{m^2}{3}+t_1^2+t_2^2+t_3^2\geq\frac{m^2}{3}$．

当且仅当$x=y=z=\frac{m}{3}$时等号成立．

574．已知 a、b∈R^+且 a＋b=1．

求证：$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geq\frac{25}{4}$．

【证明】 由a、b∈$\mathbf{R}^+$且$a+b=1$，可设$a=\frac{1}{2}+t$，$b=\frac{1}{2}-t(-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2})$．

从而有$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab}=\frac{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}t^2+t^4}{\frac{1}{4}-t^2}\geq\frac{\frac{25}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{25}{4}$．

当且仅当$t=0$，即$a=b=\frac{1}{2}$时，上式取等号．

575．试确定实数 a 的值，使不等式

$(x+1)a^2-(3x+1)a-2(2x+1)>0$

对任意 x 恒成立．

【精析】 原不等式貌似一个一元二次不等式，但细察题意，这里讨论的对象是 x，故应将原式按 x 进行重新组合成

$(a^2-3a-4)x+(a^2-a-2)>0$

这就转化为一个一次函数的问题了．

一般地，对于一次函数 y=kx＋b，其图象是一条直线，欲使函数值恒大于 0，即直线位于 x 轴上方，只有一种可能，那就是该直线平行于 x 轴且它在 y 轴上的截距为正，即有 k=0，b＞0．

由此，本题易解：令$\begin{cases}a^2-3a-4=0\\a^2-a-2>0\end{cases}$

解之可得 a=4 为所求．

576．求函数$y=x^2+\frac{1}{x^2-3}$的最值．

【解答】 (1)当$x^2-3>0$时，有

$y=x^2-3+\frac{1}{x^2-3}+3$

$\geq2\sqrt{(x^2-3)\cdot\frac{1}{x^2-3}}+3=5$，

当且仅当$\begin{cases}x^2-3>0\\x^2-3=\frac{1}{x^2-3}\end{cases}$，即$x=\pm2$时，上式取等号．故y在$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$上有最小值5．

(2)当 $x^2-3<0$ 时，有

$-y=-(x^2-3)+\frac{1}{-(x^2-3)}-3\geq -1$，

$\therefore y\leq 1$，

当且仅当$\begin{cases}x^2-3<0\\ x^2-3=\frac{1}{x^2-3}\end{cases}$即$=\pm\sqrt{2}$时，上式取等号，故y在$(-\sqrt{3}$，$\sqrt{3})$上有最大值1．

577．已知函数$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，证明：

对任意不小于3的自然数n，恒有$f(n)>\frac{n}{n+1}$．

【证明】　要证$f(n)>\frac{n}{n+1}(n\in\mathbf{N}$且$n\geq 3)$，只须证$\frac{2^n-1}{2^n+1}>\frac{n}{n+1}$，即须证$1-\frac{2}{2^n+1}>1-\frac{1}{n+1}$，也就是要证明$2^n-1>2n$．

$\because 2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n$

$\therefore 2^n-C_n^0=C_n^1+C_n^{n-1}+(C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^n)$

$=2n+(C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^n)$

$\because C_n^0=1$，$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^n>0$．

$\therefore 2^n-1>2n$．

从而得$n\in\mathbf{N}$且$n\geq 3$时，$f(n)>\frac{n}{n+1}$．

578．解不等式$\sqrt{\log_a x-1}>3-\log_a x(a>0$且$a\neq 1)$．

【精析】　此题是综合无理不等式，根据不等式的结构应先分$3-\log_a x<0$及$3-\log_a x\geq 0$进行讨论解答，而且还对a分$a>1$或$0<a<1$进行讨论，分类讨论过程很繁，若结合换元，则可简化讨论．

【解答】　设$\sqrt{\log_a x-1}=t(\geq 0)$，则$\log_a x=t^2+1$，

$\therefore$　原不等式化为$t>3-(t^2+1)$，

即$t^2+t-2>0$，$\therefore (t+2)(t-1)>0$．

$\because t\geq 0$，$\therefore t>1$，$\therefore \sqrt{\log_a x-1}>1$，$\log_a x>2$．

于是，当$a>1$时，原不等式的解集为$(a^2$，$+\infty)$；当$0<a<1$，原不等式的解集为$(0$，$a^2)$

579．a、$b\in\mathbf{R}^+$，$a+b=1$．求证$ab+\frac{1}{ab}\geq\frac{17}{4}$．

【精析】　待证式左边是函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$的形式，由$1=a+b\geq 2\sqrt{ab}$，可知定义域为$0<ab\leq\frac{1}{4}$．又$f(ab)=ab+\frac{1}{ab}$在$0<ab\leq\frac{1}{4}$内属于严格单调下降，所以知$f_{\min}(ab)=f(\frac{1}{4})=\frac{17}{4}$，即$ab+\frac{1}{ab}\geq\frac{17}{4}$．

580．证明不等式$\frac{x}{1-2^{x}}<\frac{x}{2}(x\neq 0)$．

【精析】 通常作法是按$x>0$或$x<0$分类讨论，若没$f(x)=\frac{x}{1-2^{x}}-\frac{x}{2}($
$x\neq 0)$．

利用函数奇偶性证则非常简单．

【证明】 设$f(x)=\frac{x}{1-2^{x}}-\frac{x}{2}(x\neq 0)$．

$\because f(-x)=\frac{-x}{1-2^{-x}}+\frac{x}{2}$

$=\frac{-x\cdot 2^{x}}{2^{x}-1}+\frac{x}{2}$

$=\frac{x}{1-2^{x}}[1-(1-2^{x})]+\frac{x}{2}$

$=\frac{x}{1-2^{x}}-x+\frac{x}{2}$

$=\frac{x}{1-2^{x}}-\frac{x}{2}=f(x)$，

$\therefore f(x)$是偶函数，其图象关于 y 轴对称．

$\because$当 $x>0$ 时，$1-2^{x}<0$，故 $f(x)<0$，

当 $x<0$ 时，$-x>0$，故 $f(x)=f(-x)<0$．

$\therefore$当 $x\neq 0$ 时，恒有 $f(x)<0$，即

$\frac{x}{1-2^{x}}<\frac{x}{2}\quad(x\neq 0)$．

581．解不等式$\frac{8}{(x+1)^{3}}+\frac{10}{x+1}+x^{3}+5x>0$．

【精析】 按常规解法，需化成六次不等式，不易求解，若将原不等式变形，利用函数的奇偶性、单调性可转化成简单不等式求解．

【解答】 原不等式变形为

$(\frac{2}{x+1})^{3}+5(\frac{2}{x+1})>-(x^{3}+5x)$．

令 $f(x)=x^{3}+5x$，则$f(\frac{2}{x+1})>-f(x)$，

$\because f(-x)=(-x)^{3}+5(-x)$

$=-(x^{3}+5x)=-f(x)$，

$\therefore f(\frac{2}{x+1})>f(-x)$，$\frac{2}{x+1}>-x$，

解得 $x>-1$，

故原不等式的解为$\{x|x>-1\}$．

582．若 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$．

求证：$3^{a}+3^{b}<4$．

【证明】 由题意可知$0<a<1\Rightarrow 1<3^{a}<3$，

$\therefore (3^{a}-1)(3^{a}-3)<0$，

得 $3^{2a}-4\times 3^{a}+3<0$，

$\therefore 3^{2a}+3<4\times 3^{a}$，得 $3^{a}+3^{1-a}<4$，

又 $\because$ $a+b=1$，得$b=1-a$

$\therefore$ $3^{a}+3^{b}<4$.

583．a，b∈**N**，则$\sqrt{2}$在$\frac{b}{a}$与$\frac{2a+b}{a+b}$之间.

【精析】 对本题，同学们往往被两个分式到底哪一个比$\sqrt{2}$大，哪一个比$\sqrt{2}$小所困，但用上述结论便可避困直入

【证明】 $\because (\sqrt{2}-\frac{b}{a})(\sqrt{2}-\frac{2a+b}{a+b})$

$=\frac{\sqrt{2}a-b}{a}\cdot\frac{(\sqrt{2}-2)a+(\sqrt{2}-1)b}{a+b}$

$=\frac{-(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}a-b)^{2}}{a(a+b)}$

$\because$a，b∈**N**，$\therefore a(a+b)>0$

$\therefore -\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}a-b)^{2}}{a(a+b)}<0$

$\therefore (\sqrt{2}-\frac{b}{a})(\sqrt{2}-\frac{2a+b}{a+b})<0$

∴原命题成立.

584．求证：$\frac{1}{3}\leq\frac{x^{2}-x+1}{x^{2}+x+1}\leq 3$

【证明】 欲证原命题，即证

$(\frac{x^{2}-x+1}{x^{2}+x+1}-\frac{1}{3})(\frac{x^{2}-x+1}{x^{2}+x+1}-3)\leq 0$

即 $\frac{2x^{2}-4x+2}{3(x^{2}+x+1)}\cdot\frac{-2x^{2}-4x-2}{x^{2}+x+1}\leq 0$

即 $-\frac{4}{3}\cdot\frac{(x-1)^{2}(x+1)^{2}}{(x^{2}+x+1)^{2}}\leq 0$，

上式显然成立，故原命题成立.

这种方法不仅可以用于不等式的证明，也可以用于不等式的求解.

585．解不等式$|x^{2}-4|\leq x+2$.

【解答】 (1)当 $x+2<0$ 时，显然无解.

(2)当 $x+2\geq 0$ 时，有

$-x-2\leq x^{2}-4\leq x+2$，

即$(x^{2}-4+x+2)(x^{2}-4-x-2)\leq 0$

$(x+2)^{2}(x-1)(x-3)\leq 0$

得 $1\leq x\leq 3$ 或 $x=-2$.

586．若$q<0<p$，解不等式$q<\frac{1}{x}<p$．

【解答】 由$q<\frac{1}{x}<p$，即$(q-\frac{1}{x})(p-\frac{1}{x})<0$

即 $\frac{(qx-1)(px-1)}{x^2}<0$

∵ $q<0<p$，

故得解集为$\{x|x>\frac{1}{p}或x<\frac{1}{q}\}$．

587．设 $n>2$ 且 n 为整数，求证：

$\log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1)<1$

【证明】 由$0<\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$，得$ab\leq(\frac{a+b}{2})^2$

∵当 $n>2$ 时，$\log_n(n-1)$、$\log_n(n+1)$是不等的正数．

则 $\log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1)<[\frac{\log_n(n-1)+\log_n(n+1)}{2}]^2$

$=[\frac{\log_n(n^2+1)}{2}]^2<(\frac{\log_n n^2}{2})^2=(\frac{2\log_n n}{2})^2=1$．

588．已知 a，b，$c\in R^+$，$a+b+c=1$，求证：

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3}$

【证明】 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}\leq3$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\leq2$

$\Leftrightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq1$．

∵a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，从而有

$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$，$\sqrt{bc}\leq\frac{b+c}{2}$，$\sqrt{ca}\leq\frac{c+a}{2}$．

又因$a+b+c=1$，所以由三式相加，即得

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq\frac{2(a+b+c)}{2}=1$，故原不等式成立．

589．设$a>b>0$，求证：$a+\frac{1}{(a-b)b}\geq3$．

【精析】 右边的“3”提示需运用三个正数的平均值不等式，故需配项．

【证明】 ∵$a>b>0$，∴$a-b>0$．

$\therefore a+\frac{1}{(a-b)b}=(a-b)+b+\frac{1}{(a-b)b}$

$\geq3\sqrt[3]{\frac{(a-b)b}{(a-b)b}}=3\times\sqrt[3]{1}=3$．

590．已知 a_1，a_2，…，$a_m\in R^+$，且 $a_1a_2\cdots a_n=1$，

求证：$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geq3^n$．

【证明】 $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)$
$=(1+1+a_1)(1+1+a_2)\cdots(1+1+a_n)$
$\geq 3\sqrt[3]{a_1}\cdot 3\sqrt[3]{a_2}\cdot\cdots\cdot 3\sqrt[3]{a_n}$
$=3^n\cdot\sqrt[3]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}=3^n$,
$\therefore (2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geq 3^n$.

591．若x，y，z均为正数，且$x+y+z=k$，求证：$x^2y^2z\leq\frac{k^6}{432}$．

【证明】 由 $x+y+z=k$，可得

$\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+z=k$．

因为 x，y，z 均为正数，

所以 $6\sqrt[6]{(\frac{x}{2})^2(\frac{y}{3})^3\cdot z}\leq k$，即

$x^2y^3z\leq\frac{2^2\cdot 3^3}{6^6}k^6$，$\therefore x^2y^3z\leq\frac{k^6}{432}$．

592．半径为1的圆的内接三角形面积是$\frac{1}{4}$，三角形的三边是a、b、c，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$．

【证明】 由三角形面积公式有$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}$，又据$R=1$，由正弦定理，知$\sin C=\frac{c}{2R}=\frac{c}{2}$．

$\therefore\frac{1}{4}abc=\frac{1}{4}$，即$abc=1$，从而有

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}=2\sqrt{\frac{abc}{ab}}=2\sqrt{c}$；

同理可得$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 2\sqrt{a}$，$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{b}$．

三式相加，并除以2，即得

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$．

593．解不等式$\sqrt{5-4x-x^2}\geq x$．

【解答】 不等式同解于

$\begin{cases}x\geq 0,\\5-4x-x^2\geq 0,\\5-4x-x^2\geq x^2,\end{cases}$ 或$\begin{cases}x<0,\\5-4x-x^2\geq 0.\end{cases}$

解得$-5\leq x\leq -1+\frac{\sqrt{14}}{2}$．

594．已知a，b，$c\geq 0$且$a+b+c=1$求证：$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$

$\leq\sqrt{21}$

【证明】 令$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}=S$，

又设$\sqrt{4a+1}=\frac{S}{3}+t_1$，$\sqrt{4b+1}=\frac{S}{3}+t_2$，

$\sqrt{4c+1}=\frac{S}{3}+t_3$，其$t_1+t_2+t_3=0$

$\therefore(4a+1)+(4b+1)+(4c+1)$

$=(\frac{S}{3}+t_1)^2+(\frac{S}{3}+t_2)^2+(\frac{S}{3}+t_3)^2$

由$a+b+c=1$，上式可变为

$s^2=21-3(t_1^2+t_2^2+t_3^2)\leq 21$

$\therefore S\leq\sqrt{21}$，原命题得证．

595．设$a>b>c$，求证：$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{4}{a-c}$

【证明】 由$(a-b)+(b-c)=a-c$，

可令 $a-c=S$，$a-b=\frac{S}{2}+t$，$b-c=\frac{S}{2}-t$，

其中$S>0$，$-\frac{2}{1}<t<\frac{2}{1}$，代入原不等式得

$$\frac{1}{\frac{S}{2}+t}+\frac{1}{\frac{S}{2}-t}\geq\frac{4}{S}$$

整理得 $t^2\geq 0$，此式显然成立．

故原命题得证．

596．设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两个根x_1，x_2满足$0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$．当$x\in(0,x_1)$时，证明：$x<f(x)<x_1$．

【证明】 令 $F(x)=f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c$．由 x_1,x_2 是方程 $f(x)-x=0$ 的两根，有 $F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$．

当 $x\in(0,x_1)$时，由 $x_2>x_1$ 及 $a>0$，知 $F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)>0$，即 $F(x)=f(x)-x>0$，

$\therefore f(x)>x$．

$x_1-f(x)=x_1-[x+F(x)]$

$=x_1-x-a(x-x_1)(x-x_2)$

$=a(x_1-x)[\frac{1}{a}+x-x_2]$．

$\because 0<x<x_1<x_2<\frac{1}{a}$，

$\therefore x_1-x>0$，$\frac{1}{a}+x-x_2>0$，

得 $x_1>f(x)$，

$\therefore x<f(x)<x_1$．

597．对于大于 1 的自然数 n，证明：

$$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$$

【证明】 设 $f(n)=(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})\Big/\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$，

则 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{2n+2}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}>\frac{2n+2}{\frac{(2n+1)+(2n+3)}{2}}=1$，$f(n)>0$，

所以 f(n+1)＞f(n)

$\therefore f(n)>f(2)=\frac{8}{3\sqrt{5}}>1$，**由** $\frac{\sqrt{2n+1}}{2}>0$，$f(n)>1$**得原不等式成立．**

598．已知 a＞0，a≠1 试求方程 $\log_a(x-ak)\log_{a}{}^{2}(x^2-a^2)$ **有解的 k 的范围．**

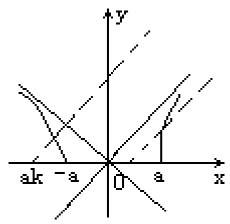


图 85

【精析与解答】 本题用通常的代数解法是比较麻烦，但是用图形帮助则很简单．因为方程有解，相当于曲线$y=x-ak(x>ak)$**及**$y=\sqrt{x^2-a^2}(x^2>a^2)$**有公共点．**$ak$**为直线**$y=x-ak$**在**$x$**轴上的截距，曲线**$y=\sqrt{x^2-a^2}$**是双曲线**$x^2-y^2=a^2$**在**$x$**轴上方的部分，从图**85**中可以看出当**ak

＜－a 和 0＜ak＜a 时，有解即 k＜－1 或 0＜k＜1．

599．已知 n 为自然数，实数 a＞1，解关于 x 的不等式．

$\log_a x-4\log_a^2 x+12\log_a^2 x+\cdots+n(-2)^{n-1}\log_a^n x>$

$(\frac{1}{3})[1-(-2)^n]\log_a(x^2-a)$．

【精析与解答】 把已知不等式用换底公式及数列求和公式可化简为：

$[1-(-2)^n]\log_a x>[1-(-2)^n]\log_a(x^2-a)$．

对 n 进行奇偶数分类讨论

n 为奇数时， $1-(-2)^n>0$**，不等式** $\log_a x>\log_a(x^2-a)$**；**

n 为偶数时， $1-(-2)^n<0$**，不等式为**

$\log_a x<\log_a(x^2-a)$**．如图 86，作出 y=x(x＞0)及 y=x²－a(y＞0)的图象，就可以得出不等式的解．**

当n**为奇数时，直线在抛物线的上方，有**$x_A<x<x_B$**即**$\sqrt{a}<x<\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$，

当 n 为偶数时直线在抛物线的下方，有 $x>x_A$，即

$x>\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$.

其中 x_B 是直线 $y=x(x>0)$ 与抛物线 $y=x^2-a(y>0)$ 的交点 B 的横坐标，可由 $x=x^2-a$ 解出来，而 x_A 则是抛物线与 x 轴的交点 A 的横坐标.

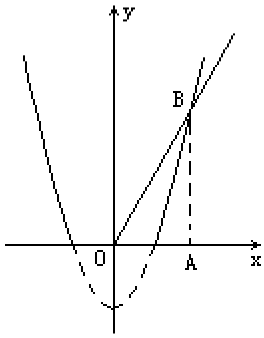


图 86

600. 已知 $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，求证：x、y、z 中至少有 1 个等于 1.

【精析】 欲证 x、y、z 中至少有 1 个等于 1，只要证 $x-1$、$y-1$、$z-1$ 三者中至少有 1 个为零，则只需证 $(x-1)(y-1)(z-1)=0$ 即可.

【证明】 由已知条件有 $x+y+z=1$，$xy+yz+xz=xyz$.

又因为 $(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-(xy+xz+yz)(x+y+z)-1=0+1-1=0$，

故 $x-1$、$y-1$、$z-1$ 三者中至少有 1 个为零，即 x、y、z 中至少有 1 个等于 1.

601. 解不等式：$-2<\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-10x+28}<2$.

【解答】 原不等式即是

$|\sqrt{(x-1)^2+3}-\sqrt{(x-5)^2+3}|<2$.

令 $3=y^2$，则

$|\sqrt{(x-1)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}|<2 \qquad (*)$

由双曲线的定义可知，满足不等式(*)的 (x，y) 在双曲线 $(x-3)^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的两支之间的区域内，因此，原不等式与不等式组

$$\begin{cases}(x-3)^2-\frac{y^2}{3}<1\\ y^2=3\end{cases}$$

同解，故原不等式的解集为

$3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}$.

602. 设 $0<x<1$，$a>0$ 且 $a\neq1$，试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

【解答】 $\because |\log_a(1+x)|=\frac{|\lg(1+x)|}{\lg a}$，

$|\log_a(1-x)|=\frac{|\lg(1+x)|}{|\lg a|}$，

又$\because \lg(1+x)>0$，$\lg(1-x)<0$，

$\therefore |\lg(1+x)|-|\lg(1-x)|=\lg(1+x)+\lg(1-x)$

$=\lg(1-x^2)<0$，

$\therefore |\lg(1+x)|<|\lg(1-x)|$，

$\therefore |\log_a(1+x)|<|\log_a(1-x)|$.

603．若关于x的不等式$\sqrt{1-x^2}>ax+b$的解集为$(-\frac{2}{3}，\frac{1}{2})$，求实数a，b的值．

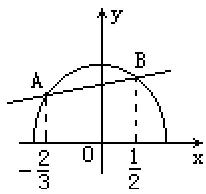


图87

【解答】 设$y_1=\sqrt{1-x^2}$，$y_2=ax+b$.

当$x=-\frac{2}{3}$时，$y_1=\frac{\sqrt{5}}{3}$；当$x=\frac{1}{2}$时，$y_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

要使$\sqrt{1-x^2}>ax+b$的解集为$(-\frac{2}{3}，\frac{1}{2})$，如图87易知，直线$y_2=ax+b$恰好通过$A(-\frac{2}{3}，\frac{\sqrt{5}}{3})$和$B(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{4})$．因此有$\begin{cases}-\frac{2}{3}a+b=\frac{\sqrt{5}}{3}，\\ \frac{1}{2}a+b=\frac{\sqrt{3}}{4}.\end{cases}$

解得$a=\frac{3\sqrt{3}-4\sqrt{5}}{14}$，$b=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{7}$.

604．解关于x的不等式$|\log_a x^2|<|\log_a x|+2$.

【精析】 化为$|1+2\log_a x|<|\log_a x|+2$后，通常分$\log_a x<-1/2$，$-1/2\le\log_a x<0$，$\log_a x\ge0$三种情况去绝对值号，再分$a>1$或$0<a<1$进行讨论，这样做过程冗长，极易致误．改变一下操作过程，思路十分清晰，过程也简捷．即原不等式两边平方，得

$|1+2\log_a x|^2<(|\log_a x|+2)^2$.

即$4(\log_a x)^2+4\log_a x+1<(\log_a x)^2+4|\log_a x|+4$.

① $\begin{cases}\log_a x\ge0\\ (\log_a x)^2<1\end{cases}$ 得$0\le\log_a x\le1$

② $\begin{cases}\log_a x<0\\ 3(\log_a x)^2+8\log_a x-3<0\end{cases}$

解得$-3<\log_a x<0$．

综上可知$-3<\log_a x<1$．

故原不等式知：当 $a>1$ 时，解集为 $a^{-3}<x<a$；当 $0<a<1$ 时，解集为 $a<x<a^{-3}$．

605．已知a，b，c$\in\mathbf{R}^+$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq\sqrt{2}(a+b+c)$．

【证明】 以a＋b＋c为边长作正方形(如图88)，则$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=|BC|+|CD|+|AB|\geq|AD|=\sqrt{2}(a+b+c)$．

∴不等式得证．

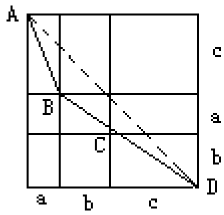


图 88

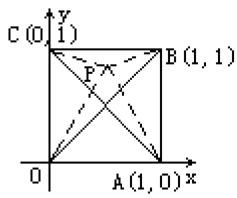


图 89

606．如图 89，设 $0<x<1$，$0<y<1$，求证：

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y^2)}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geq2\sqrt{2}$$

【精析】 由不等式左端的结构特点，可以联想到动点 P(x，y)到四个定点 O(0，0)，A(1，0)，B(1，1)，C(0，1)的距离之和．

另由题设知：P 在边长为 1 的正方形 OABC 内部．

由$(|OP|+|BP|)+(|CP|+|AP|)\geq(|OB|+|AC|)=2\sqrt{2}$

问题得证．

607．若a≠b，则$|\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}|<|a-b|$

【精析】 如图 90，在直角坐标系中取三点，A(a，0)，B(b，0)，C(0，1)则$|AC|=\sqrt{1+a^2}$，$|BC|=\sqrt{1+b^2}$，$|AB|=|a-b|$．

在△ABC 中，$||AC|-|BC||<|AB|$．

故问题得证．

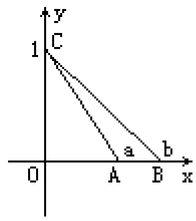


图90

608．已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，当 $-1\le x\le 1$ 时有 $-1\le f(x)\le 1$ 求证：当 $-2\le x\le 2$ 时，有 $-7\le f(x)\le 7$．

【精析】 $y=f(x)=ax^2+bx+c$，当 $-1\le x\le 1$ 时，限定 $-1\le f(x)\le 1\Rightarrow|f(0)|\le 1$，$|f(-1)|\le 1$，$|f(1)|\le 1$．

由 $\begin{cases} f(-1)=a-b+c \\ f(1)=a+b+c \\ f(0)=c \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{f(-1)+f(1)-2f(0)}{2} & ① \\ b=\dfrac{f(-1)-f(-1)}{2} & ② \\ c=f(0) & ③ \end{cases}$

由此易得

$|f(-2)|=|4a-2b+c|$

$=|3f(-1)+f(1)-3f(0)|\le 7$，

$|f(2)|=|4a+2b+c|$

$=|f(-1)+3f(1)-3f(0)|\le 7$，

∴①当对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}\notin[-2,2]$ 时，$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上是单调函数，从而 $|f(x)|\le\max\{|f(-2)|,|f(2)|\}$，

∴ $|f(x)|\le 7$．

②当对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}\in[-2,2]$ 时，

$|f(-\dfrac{b}{2a})|=|c-\dfrac{b^2}{4a}|\le|c|+\dfrac{1}{2}|b||\dfrac{b}{2a}|$．

又 $|c|=|f(0)|\le 1$，

$|b|=\dfrac{1}{2}|f(1)-f(-1)|\le 1$，

$|\dfrac{b}{2a}|\le 2$，

∴ $|f(-\dfrac{b}{2a})|\le 1+1=2$．而 $|f(x)|\le\max\{|f(-2)|,|f(2)|,|f(-\dfrac{b}{2a})|\}$，

∴ $|f(x)|\le 7$．

609．设 x_1，x_2，…，x_n 都是正数，求证：

$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geq x_1+x_2+\cdots+x_n$.

【精析与解答】 添项用均值不等式

$\frac{x_1^2}{x_2}\geq 2x_1$，$\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\geq 2x_2$，…，

$\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\geq 2x_n$.

以上 n 个不等式相加即得.

610．已知 a、b、c 是实数，函数

$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当 $-1\leq x\leq 1$ 时，$|f(x)|\leq 1$.

(1)证明：$|c|\leq 1$；

(2)证明：当 $-1\leq x\leq 1$ 时，$|g(x)|\leq 2$；

(3)设 $a>0$，当 $-1\leq x\leq 1$ 时，$g(x)$ 的最大值为 2，求 f(x)

【精析】 (1)当 $-1\leq x\leq 1$ 时，限定 $-1\leq f(x)\leq 1$

$\Rightarrow |f(0)|\leq 1$，$|f(-1)|\leq 1$，$|f(1)|\leq 1$，从例608①～③式可得

$a+b=f(1)-f(0)$，

$b-a=f(0)-f(-1)$，$c=f(0)$

$\therefore |c|=|f(0)|\leq 1$.

(2)$y=g(x)=ax+b$ 在$[-1，1]$上的图象是一条线段，

$\therefore |g(x)|\leq \max\{|g(-1)|，|g(1)|\}$.

又$|g(-1)|=|b-a|=|f(0)-f(-1)|$

$\leq |f(0)|+|f(-1)|\leq 1+1=2$，

$|g(1)|=|a+b|=|f(1)-f(0)|$

$\leq |f(1)|+|f(0)|\leq 1+1=2$.

故此结论成立.

(3)$a>0$ 时，$g(x)=ax+b$ 在$[-1，1]$上是增函数，

$\therefore [g(x)]_{max}=g(1)=a+b=2$，

即 $f(1)-f(0)=2$，

又$|f(1)|\leq 1$，$|f(0)|\leq 1$，

$\therefore f(1)=1$，$f(0)=-1$.

又 $f(x)\geq -1$，即 $f(x)\geq f(0)$，根据二次函数的性质，直线 $x=0$ 为 f(x)

图象的对称轴，由此得$-\frac{b}{2a}=0$，即$b=0$.

$\therefore a=2$，$f(x)=2x^2-1$.

611．f(x)和 g(x)是定义在[0，1]上的函数，求证：存在 x_0，y_0 使 $0\leq x_0\leq 1$，$0\leq y_0\leq 1$，且$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geq\frac{1}{4}$.

【证明】 如果对一切 x，$y\in[0，1]$.

$|xy-f(x)-g(y)|<\frac{1}{4}$.

考虑在端点的特殊值得：

$1=|1\times1-f(1)-g(1)-[1\times0-f(1)-g(1)]-[0\times1-f(0)-g(1)]+[0\times0-f(0)-g(0)]|$

$\le|1\times1-f(1)-g(1)|+|1\times0-f(1)-g(0)|+|0\times1-f(0)-g(1)|+|0\times0-f(0)-g(0)|$

$\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$．矛盾．

从而原命题成立．

612．证明不等式，其中 x，y，z∈R^+，

(1) $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}>\sqrt{x^2+zx+z^2}$

(2) $\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}>\sqrt{z^2-zx+x^2}$

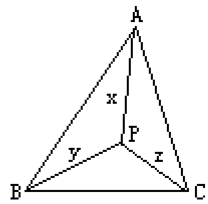


图 91

【精析】 (1)如图91所示，$\sqrt{x^2+xy+y^2}=\sqrt{x^2-2xy\cdot\cos120°+y^2}$表示以 x、y 为边，夹角为 120°的三角形的第三边构造△ABC，P 为△ABC 内部一点，且

|PA|=x，|PB|=y，|PC|=z

∠APB=∠BPC=∠CPA=120°

则|AB|＋|BC|＞|AC|，问题得证

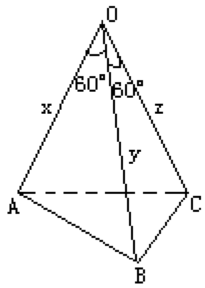


图 92

(2)如图92所示，$\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt{x^2-2xy\cdot\cos60°+y^2}$表示以x，y 为边，夹角 60°的三角形的第三边，构造项点为 O 的四面体 O－ABC．

使∠AOB=∠BOC=∠COA=60°

|OA|=x，|OB|=y，|OC|=z

则$|AB|=\sqrt{x^2-xy+y^2}$，

$|BC|=\sqrt{y^2-yz+z^2}$，

$|CA|=\sqrt{z^2-xz+x^2}$

在△ABC 中，|AB|＋|BC|＞|AC|，问题得证．

613．设x，y∈$\mathbf{R}^+$，且$x+y=1$，求证$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})\ge9$．

【证明】 设$x=\frac{a}{a+b}$，$y=\frac{b}{a+b}$，其中a，b∈$\mathbf{R}^+$，则$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1+\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}+\frac{(a+b)^2}{ab}=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{(a^2+ab+b^2)+ab}{ab}\geq 3+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+\frac{3ab+ab}{ab}=3+2+4=9$．

即 $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})\geq 9$．

614．若实数 x，y 满足|x|＋|y|≤1，求 $w=x^2-xy+y^2$ 的最大值和最小值．

【解答】 若 xy≥0,则 $w=|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos 60°$,构造以|x|，|y|为两边且夹角为60°的三角形，那么第三边$\sqrt{w}\geq 0$，(当且仅当$x=y=0$ 时，上式中等号成立)．

据三边关系有$\sqrt{w}\leq|x|+|y|\leq 1$．(当|x|，|y|有且只有一个为零时，$\sqrt{w}=|x|+|y|$成立)，0≤w≤1．

若 xy＜0，则

$w=|x|^2+|y|^2-2|x||y|\cos 120°$，构造以|x|，|y|为两边且夹角为120°

的三角形，显然有$0<\sqrt{w}<|x|+|y|$，$0<w<1$．

综上所述，$w_{最小}=0$，$w_{最大}=1$．

615．若x，y，z∈$\mathbf{R}^+$，且$x+y+z=1$，求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的最小值．

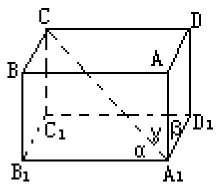


图93

【解答】 如图 93 所示，构造长方体 A_1C 与三条棱 A_1B_1，A_1D_1，A_1A的夹角为α，β，γ，∈$(0,\frac{\pi}{2})$．

由于 x＋y＋z=1，

并且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$

$=\frac{A_1B_1^2}{A_1C^2}+\frac{A_1D_1^2}{A_1C^2}+\frac{A_1A^2}{A_1C^2}=1$，

故设 $x=\cos^2\alpha$，$y=\cos^2\beta$，$z=\cos^2\gamma$，

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}$

$$=\frac{A_1B_1^2+A_1D_1^2+A_1A^2}{A_1B_1^2}+\frac{A_1B_1^2+A_1D_1^2+A_1A^2}{A_1D_1^2}+\frac{A_1B_1^2+A_1D_1^2+A_1A^2}{A_1A^2}$$

$$=3+(\frac{A_1D_1^2}{A_1B_1^2}+\frac{A_1B_1^2}{A_1D_1^2})+(\frac{A_1A^2}{A_1B_1^2}+\frac{A_1B_1^2}{A_1A^2})+(\frac{A_1A^2}{A_1D_1^2}+\frac{A_1D_1^2}{A_1A^2})$$

$\geq 3+2+2+2=9$．

当$\frac{A_1D_1}{A_1B_1}=\frac{A_1B_1}{A_1D_1}$，$\frac{A_1A}{A_1B_1}=\frac{A_1B_1}{A_1A}$，$\frac{A_1A}{A_1D_1}=\frac{A_1D_1}{A_1A}$，

即$a=\beta=r$，$x=y=z=\frac{1}{3}$时，$(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})_{最小}=9$．

616．设 f(x)是定义在(0，∞)上的增函数，f(2)=1，且对于定义域内任意 x、y 有 f(x·y)=f(x)＋f(y)．

(1)求 f(4)之值；

(2)解关于x的不等式：$f(\frac{1}{x})+f(x^2+a)\leq 2$．

【解答】 (1)由条件得 f(4)=f(2)＋f(2)=2

(2)由条件，求解的不等式等价于：

$$\begin{cases} f(x+\frac{a}{x})\leq 2 \\ x>0且x^2+a>0 \end{cases}$$

由$f(x+\frac{a}{x})\leq 2$，得$x+\frac{a}{x}\leq 4$，即$x^2-4x+a\leq 0$　　　(*)

①当 16－4a＜0，即 a＞4 时，不等式无解；

②当 16－4a=0，即 a=4 时，不等式的解为 x=2；

③当$16-4a>0$，即$a<4$时，不等式(*)的解为：$2-\sqrt{4-a}\leq x\leq 2+\sqrt{4-a}$从而原不等式的解为：

(i)若$0<a<4$，不等式的解为：$2-\sqrt{4-a}\leq x\leq 2+\sqrt{4-a}$

(ii)若 a=0 时，不等式的解为：0＜x≤4；

(iii)若$a<0$时，不等式的解为：$\sqrt{a}<x\leq 2+\sqrt{4-a}$

617．设 a，b∈R，并且方程 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 至少有一个实数解，试确定 a^2+b^2 的最小可能值．

【解答】 设x_0是方程的一个实根，则$x_0\neq 0$，代入方程可得$x_0^2+ax_0+b+\frac{a}{x_0}+\frac{1}{x_0^2}=0$，设$a^2+b^2=R^2$．

构造直线l：$(x_0+\frac{1}{x_0})a+b+(x_0^2+\frac{1}{x_0^2})=0$和圆$a^2+b2=R^2$(将a和b作为变量)．

依题意，直线和圆必有公共点，因此圆心到直线的距离小于(或等于)半径，则

$$\frac{|x_0^2+\frac{1}{x_0^2}|}{\sqrt{(x_0+\frac{1}{x_0})^2+1}}\leq R，\frac{(x_0^2+\frac{1}{x_0^2})^2}{x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+3}\leq R^2，$$

$$\frac{1}{R^2}\leq\frac{x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+3}{(x_0^2+\frac{1}{x_0^2})^2}=\frac{1}{x_0^2+\frac{1}{x_0^2}}+\frac{3}{(x_0^2+\frac{1}{x_0^2})^2}$$

$\leq\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$，

$\therefore R^2\geq\frac{4}{5}$．

当且仅当$x_0^2=\frac{1}{x_0^2}$，**即**$x_0=\pm1$**时等号成立，并代入**

方程得$\begin{cases}2a+b=-2\\ a^2+b^2=\frac{4}{5}\end{cases}$ **和**$\begin{cases}b-2a=-2\\ a^2+b^2=\frac{4}{5}\end{cases}$ **解之，知**

当$a=\pm\frac{4}{5}$，$b=-\frac{2}{5}$**时**，$(a^2+b^2)_{最小}=\frac{4}{5}$．

618．若实数 x 满足|3x－2|＋|3x＋1|≤6．求 y=lg(x²－2x＋3)的最值．

【解答】　若题设的特征，构造椭圆复数方程如下：

|z－2|＋|z－(－1)|=6，

那么|z－2|＋|z－(－1)|≤6 就表示复平面内以(2，0)，(－1，0)为焦点，长轴为6**，中心在**$(\frac{1}{2}，0)$**的椭圆及内部区域．由中心**$(\frac{1}{2}，0)$**可求得左，右顶点分别为**$(-\frac{5}{2}，0)$**和**$(\frac{7}{2}，0)$**．设** $z=3x+iy$**，则复数**z**的实部**$3x$**应满足** $-\frac{5}{2}\leq3x\leq\frac{7}{2}$，

即$-\frac{5}{6}\leq x\leq\frac{7}{6}$．

y=lg(x²－2x＋3)=lg[(x－1)²＋2]

当$x=1\in[-\frac{5}{6}，\frac{6}{7}]$**时**，$y_{最小}=\lg2$．

当$x=-\frac{5}{6}$**时**$(|\frac{6}{7}-1|<|1-(-\frac{5}{6})|)$，

$y_{最大}=\lg[(-\frac{5}{6}-1)^2+2]=\lg\frac{193}{36}$．

619．**求证**：$-4\leq\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}\leq1$．

【精析】 本题通常令$\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}=y$**，化成关于**$x$**的一元二次方程后利用判别式来证，下面我们用定比分点公式证明．**

令$x_1=-4$**，**$x_2=1$**，**$x_P=\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}$**，**

$$\lambda=\frac{x_p-x_1}{x_2-x_p}=\frac{\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}}{1-\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}}=\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2.$$

∴ λ∈[0，∞)．

∴P 是 P_1P_2 **的内分点，**$x_1\leq x_P\leq x_2$**，**

即$-4\leq\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}\leq 1$**．**

$\lambda=0(P=P_1$**，**$x=-\dfrac{1}{3})$**时，** $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}=-4$**，**

$\lambda\to\infty(P=P_2$**，**$x=-2)$**时，** $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}=1$**．**

第七章　数列

一、填空题

620．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$d>0$，首项$a_1>0$，$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ia_{i+1}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$____________．

【精析与解答】　据$a_{i+1}-a_i=d$，可得

$$\frac{1}{a_ia_{i+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right),\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\therefore S_n=\frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+nd}\right)=\frac{1}{a_1d}$$

621．已知数列$\{a_n\}$为等差数列(公差$d\neq0$)，$\{a_n\}$中的部分项组成的数列a_{k1}，a_{k2}，…，a_{kn}，…恰为等比数列．且其中$k_1=1$，$k_2=5$，$k_3=17$，则$k_1+k_2+\cdots+k_n=$________．

【精析与解答】　由a_1，a_5，a_{17}成等比数列，得$a_5^2=a_1\cdot a_{17}$，

$\therefore(a_1+4d)^2=a_1(a_1+16d)$

从而据$d\neq0$，得$a_1=2d$．

设数列$\{a_{k_n}\}$的公比为q，则$q=\frac{a_5}{a_1}=3$．

$\therefore a_{k_n}=a_1\cdot3^{n-1}$，又$a_{k_n}=a_1+(k_n-1)d$．

$\therefore 2d\cdot3^{n-1}=2d+(k_n-1)d$，$\therefore k_n=2\cdot3^{n-1}-1$．

可见数列$\{k_n\}$是由一个等比数列与一个常数列的差所组成，故

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=2\cdot\frac{1-3^n}{1-3}-n=3^n-n-1.$$

622．数列$\{a_n\}$中，$a_1=-\frac{2}{3}$，其前n项和S_n满足$a_n=S_n+\frac{1}{S_n}+2$ $(n\geq2)$，则数列$\{a_n\}$的前n项之和S_n为________．

【解答】　$\because n\geq2$时，$a_n=S_n+\frac{1}{S_n}+2=S_n-S_{n-1}$

$\therefore\ S_n=-\frac{1}{S_{n-1}+2}$，从而由$S_1=a_1=-\frac{2}{3}$，可得

$S_2=-\frac{3}{4}$，$S_3=-\frac{4}{5}$，$S_4=-\frac{5}{6}$

于是猜想：$S_n=-\frac{n+1}{n+2}\ (n\in\mathbf{N})$

以下用数学归纳法证明(略)．

623．数列：1，$a+a^2$，$a^2+a^3+a^4$，$a^3+a^4+a^5+a^6$，…($a\neq 0$，1)的前n项之和等于________．

【精析与解答】 抓通项：$a_n=a^{n-1}(1+a+\cdots+a^{n-1})$找规律：

$\because a_n=a^{n-1}\cdot\frac{1-a^n}{1-a}(a^{n-1}-a^{2n-1})$，可见数列$\{a_n\}$是由两个等比数列的差组成，故其前n项之和可化归为两个等比数列和的差，即得

$$S_n=\frac{1}{1-a}[\frac{1-a^n}{1-a}-\frac{a(1-a^{2n})}{1-a^2}]$$

$$=\frac{(1-a^n)(1-a^{n+1})}{(1-a)^2(1+a)}.$$

624．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_p=q$，$a_q=p$($p\neq q$，p、$q\in N$)，则a_{p+q}的值为________．

【解答】 设d为$\{a_n\}$的公差，则点(p，a_p)，(q，a_q)、(p＋q，a_{p+q})均为直线$f(x)=dx+a_1-d$上的点，因此有$\frac{a_q-a_p}{q-p}=\frac{a_{p+q}-a_q}{(p+q)-q}$．从而据题设有$\frac{a_{p+q}-p}{(p+q)-q}=\frac{p-q}{q-p}=-1$，整理即得$a_{p+q}=0$．

625．已知$\{a_n\}$为等差数列，且有$a_{100}=304$，$a_{300}=904$，则a_{1000}=________．

【解答】 设d为$\{a_n\}$的公差，则点A(100，304)、(300，904)、$(1000，a_{1000})$都在直线$f(x)=dx+a_1-d$上，从而有$\frac{904-304}{300-100}=\frac{a_{1000}-904}{1000-300}$整理得$a_{1000}=3004$．

626．设S_n表示等差数列的前n项和，且$S_9=18$，$S_n=240$，若$a_{n-4}=30$($n>9$)，则n的值为________．

【精析】 此题常规解法是设出基本量a_1，d列方程组来解，但较繁．若利用整体思维，则可少走弯路，使计算迅速又合理．

【解答】 由$S_9=18$，即$\frac{9(a_1+a_9)}{2}=18\Rightarrow a_1+a_9=4\Rightarrow a_5=2$，又$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_5+a_{n-4})}{2}=\frac{n(2+30)}{2}=240\Rightarrow n=15$．

627．已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，且$a_3a_{11}=36$，则$a_5a_7a_9$=________．

【解答】 设$\{a_n\}$为常数列$a_n=C>0$，

由$a_3a_{11}=36$得C=6，

∴$a_5a_7a_9=216$，故填216．

628．等差数列$\{a_n\}$中，$a_5+a_{10}+a_{15}+a_{20}=2$，则$S_{24}$=________．

【解答】 设$\{a_n\}$为常数列$a_n=C$，

由$a_5+a_{10}+a_{15}+a_{20}=2$，

得$C=\frac{1}{2}$，$S_{24}=24\cdot\frac{1}{2}=12$，故填12．

629．已知$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，如果 S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项和，那么$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=$ ________．

【解答】 设$a_n=n$，则$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$．

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}$，故填$2$．

630．已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d\neq0$，且 a_1、a_3、a_9 成等比数列，则$\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}$的值$=$ ________．

【解答】 设 $a_n=n$ 则

$\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=\frac{1+3+9}{2+4+10}=\frac{13}{16}$，故填$\frac{13}{16}$．

631．等差数列$\{a_n\}$的前 m 项和为 30，前 2m 项和为 100，则它的前 3m 项和为________．

【解答】设 $S_n=An^2+Bn$，则

$$\begin{cases}S_m=Am^2+Bm=30, & ①\\ S_{2m}=4Am^2+2Bm=100. & ②\end{cases}$$

②－①得 $3Am^2+Bm=70$，

$\therefore S_{3m}=9Am^2+3Bm=210$．

632．$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}]=$ ________．

【解答】 $\because\frac{1}{(3k+1)(3k-2)}=\frac{1}{3}[\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}]$．

$\therefore\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$=\frac{1}{3}[(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})]$

$=\frac{1}{3}[1-\frac{1}{3n+1}]$．

$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}]=\frac{1}{3}$．

633．某等差数列前 n 项和 $S_n=a$，前 2n 项和 $S_{2n}=b$，则 S_{3n} 的值为________．

【精析】 本题直接用求和公式求亦不麻烦，但用中间项更简洁．

【解答】 将该数列由列举法写出 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots$，$a_{n-1}$，$a_n\cdot a_{n+1}$，…，$a_{2n}\cdot a_{2n+1}$，…，$a_{3n-1}\cdot a_{3n}$，注意大括号括住的 n 项，

其和为$S_{2n}-S_n=b-a$，即$\sum\limits_{i=n+1}^{2n}a_i=b-a$，而这$n$项的中间项$M=\frac{b-a}{n}$．

则整个数列$3n$项中间项亦为$\frac{b-a}{n}$，

$\therefore S_{3n} = 3n \cdot \dfrac{b-a}{n} = 3b - 3a$.

634．设 S_n，T_n 分别为两等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 前 n 项之和，若对 n $\in N$，均有 $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{7n+1}{4n+27}$，则 $\dfrac{a_9}{b_9} = $ ________.

【精析】 本题如果利用常规方法，比较困难的，但如果利用中间项，便迎刃而解.

【解答】 如果把 a_9 与 b_9 分别看作数列 a_1，a_2，…，$a_{2\cdot 9-1}$ 与数列 b_1，b_2，…，$b_{2\cdot 9-1}$ 的中间项，则有

$S_{17}=a_9 \cdot 17$，$T_{17}=b_9 \cdot 17$

将两式相比，得 $\dfrac{a_9}{b_9} = \dfrac{S_{17}}{T_{17}}$

而把原式中 $\dfrac{S_n}{T_n} = \dfrac{7n+1}{4n+27}$ **代入得**

$\dfrac{a_9}{b_9} = \dfrac{7 \cdot 17 + 1}{4 \cdot 17 + 27} = \dfrac{24}{19}$.

635．设 $f(x) = \dfrac{3^x}{3^x + \sqrt{3}}$，**则** $f(\dfrac{1}{101}) + f(\dfrac{2}{101}) + \cdots + f(\dfrac{100}{101}) = $ ________.

【精析】 直接求和几乎不可能，而隐蔽的信息是 $\dfrac{1}{101} + \dfrac{100}{101} = 1$，$\dfrac{2}{101} + \dfrac{99}{101} = 1$，…，**于是猜想：如果** $x_1 + x_2 = 1$，**则** $f(x_1) + f(x_2)$ **是一个常数，经检验，果然为 1，则所求之和为 50.**

636．已知三个实数 a，b，c 成等比数列，且 a＋b＋c=m(m＞0)，则 b 的取值范围为________.

【解答】 $\because \begin{cases} a+c = m-b, \\ a \cdot c = b^2, \end{cases}$ $\therefore$ a，c **是方程** $y^2 - (m-b)y + b^2 = 0$ **的两个实根，则 Δ≥0，即** $(m-b)^2 - 4b^2 \geq 0 \Rightarrow 3b^2 + 2mb - m^2 \leq 0$ $(m > 0)(b \neq 0)$，**从而求得** $b \in [-m, 0) \cup (0, \dfrac{m}{3}]$.

637．无穷等比数列 $\{a_n\}$ **的** $a_1 = 1$，**公比** $q > 0$，**则** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+2}}{S_n}$ **的值等于** ________.

【精析】 因等比数列的求和公式须分 q=1 和 q≠1 两种情况来表示，故讨论势在必然，因此本题蕴含着分类讨论思想.

【解答】 (1)若 q=1，则

$S_n=na_1=n$，$S_{n+2}=(n+2)a_1=n+2$，**于是**

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+2}}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n} = 1$.

(2)若$q\neq 1$，则$\dfrac{S_{n+2}}{S_n}=\dfrac{1-q^{n+2}}{1-q^n}$.

①若 $q>1$，则$\dfrac{1-q^{n+2}}{1-q^n}=\dfrac{\dfrac{1}{q^n}-q2}{\dfrac{1}{q^n-1}}\to q^2$，

②若$0<q<1$，则$\dfrac{1-q^{n+2}}{1-q^n}\to 1$.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n+2}}{S_n}=\begin{cases}1 & (0<q\leq 1)\\ q^2 & (q>1)\end{cases}$

638．设等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1>0$，前 n 项和为 S_n，若 $S_p=S_q(p\neq q)$，问 n 为________时，S_n 最大．

【解答】 $S_{p+q}=\dfrac{(p+q)(S_p-S_q)}{p-q}=0$

∵$a_1>0$，且 $S_p=S_q$，

∴公差 $d<0$.

又S_n为n的二次函数，且二次项的系数为$\dfrac{d}{2}$，常数项为零．

∴点$(n，S_n)$在形如 $y=ax^2+bx(a<0)$的抛物线上，如图 94 所示，由图象可知：

若$p+q$为偶数，则当$n=\dfrac{p+q}{2}$时，S_n最大；

若$p+q$为奇数，则当$n=\dfrac{p+q\pm 1}{2}$时，S_n最大．

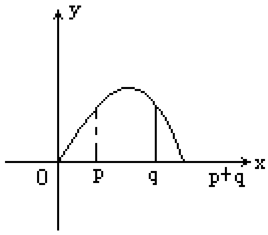


图94

639．在等差数列中，已知前 n 项的和为 n^2p，前 k 项的和为 k^2p，则前 p 项的和是_________.

【解答】 设 $S_n=n^2p$，$S_k=k^2p$，前 p 项的和为 S_p，则

$$\frac{S_{p+n+k}}{p+n+k}=\frac{S_{p+n}-S_k}{p+n-k}=\frac{\frac{p+n}{p-n}(S_p-S_n)-S_k}{p+n-k}$$

$$=\frac{(p+n)(S_p-n^2p)-(p-n)k^2p}{(p-n)(p+n+k)},$$

又 $\frac{S_{p+n+k}}{p+n+k}=\frac{S_{p+k}-S_k}{p+k-n}=\frac{\frac{p+k}{p-k}(S_p-S_k)-S_n}{p+k-n}$

$$=\frac{(p+k)(S_p-k^2p)-(p-k)n^2p}{(p-k)(p+k-n)}$$

$$\therefore\frac{(p+n)(S_p-n^2p)-(p-n)k^2p}{(p-n)(p+n-k)}$$

$=\frac{(p+k)(S_p-k^2p)-(p-k)n^2p}{(p-k)(p+k-n)}$，解之得 $S_p=p^3$.

640．一等差数列的前 r 项之和为 a，末 r 项之和为 b，这个等差数列各项之和为 S，则项数 n 为________．

【解答】　设前 n 项之和为 S_n，则 $S_n=S_1$，$S_r=a$，$S_{n-r}=S-b$，则

$$S_n=S_{(n-r)+r}=\frac{n(S_{n-r}-S_r)}{n-2r}=\frac{n(S-b-a)}{n-2r}$$

$\therefore\frac{n(S-b-a)}{n-2r}=S$，

解之得 $n=\frac{2rS}{a+b}$.

641．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-2$，且 $S_3=S_7$，则前 n 项和 S_n 取最小值时的项数 n 等于________．

【解答】　$\because S_7=S_3+S_4+12d$，即

$12d+S_4=0$

而 $S_4=4a_1+\frac{1}{2}\times4\times(4-1)d$.

$\therefore12d+4a_1+6d=0$，得 $d=\frac{4}{9}>0$，

因此 $a_5=a_1+4d=-\frac{2}{9}<0$，

$a_6=a_1+5d=\frac{2}{9}>0$.

故 S_n 取得最小值时，n=5．

642．等差数列的前 n 项和为 m，前 m 项和为 n(m>n)，则前 m+n 项的和为________．

【解答】　$\because S_{m+n}=S_m+S_n+mnd=m+n+mnd$

又 $\because \begin{cases} na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d=m \\ ma_1+\frac{1}{2}m(m-1)d=n \end{cases}$

解得 $d=-\frac{2(m+n)}{mn}$

$\therefore S_{m+n}=-m-n$.

643．已知在等差数列$\{a_n\}$中，$S_m=S_n$，$m\neq n$，则S_{m+n}=________．

【解答】　令 $S_n=an^2+bn$，a、b 为常数．

则由 $S_m=S_n$ 可知：

$am^2+bm=an^2+bn$，

即 $a(m+n)(m-n)+b(m-n)=0$

由于 $m\neq n$，

$\therefore a(m+n)+b=0$，

若 a=0，则由上式可知 b=0，

从而 $S_n=0$，

$\therefore S_{m+n}=0$

若 $a\neq 0$，

则 $m+n=-\frac{b}{a}$，

$\therefore S_{m+n}=a(m+n)^2+b(m+n)$

$=a\cdot(-\frac{b}{a})^2+b\cdot(-\frac{b}{a})=0$.

综上可知 $S_{m+n}=0$.

644．设S_n是等差数列$\{a_n\}$前n项之和，已知$\frac{1}{3}S_3$与$\frac{1}{4}S_4$的等比中项为$\frac{1}{5}S_5$，$\frac{1}{3}S_3$与$\frac{1}{4}S_4$的等差中项为1，则等差数列$\{a_n\}$的通项a_n为______．

【解答】　$\because \{a_n\}$是等差数列，

$\therefore$设 $S_n=an^2+bn$，(a、b 为常数)，

$\therefore S_3=9a+3b$，

$S_4=16a+4b$，

$S_5=25a+5b$，

由题意可得

$$\begin{cases} (\frac{1}{5}S_5)^2=\frac{1}{3}S_3\cdot\frac{1}{4}S_4 \\ \frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4=2 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} (5a+b)^2=(3a+b)(4a+b) \\ (3a+b)+(4a+b)=2 \end{cases}$

解得：$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

或$\begin{cases} a=-\dfrac{6}{5} \\ b=\dfrac{26}{5} \end{cases}$.

$\therefore S_n=n$或$S_n=-\dfrac{6}{5}n^2+\dfrac{26}{5}n$

由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 可得$\{a_n\}$的通项为

$a_n=1$或$a_n=-\dfrac{12}{5}n+\dfrac{32}{5}$.

645．已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=r(r>0)$，数列$\{a_na_{n+1}\}$为公比是$q(q>0)$的等比数列，$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}$，设 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=$ ＿＿＿＿＿＿.

【精析】 要求$\dfrac{1}{S_n}$的极限，要先求S_n；求S_n应先求b_n，然后再对q进行全面讨论.

【解答】 据题设有$\dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=q$，即$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q$

$\because b_n=a_{2n-1}+a_{2n}$，$b_{n+1}=a_{2n+1}+a_{2n+2}$

$\therefore \dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=\dfrac{(a_{2n-1}+a_{2n})q}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q$

又 $b_1=a_1+a_2=1+r$，所以$\{b_n\}$是首项为 $1+r$，公比为 $q(q>0)$的等比数列.

①当 $q=1$ 时，$S_n=n(1+r)$，从而有

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n(1+r)}=0$

②当 $0<q<1$ 时，易见

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q}{(1+r)(1-q^n)}=\dfrac{1-q}{1+r}$

③当$q>1$时，由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{q^n}=0$，易得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=0$.

综上得：当$0<q<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1-q}{1+r}$；

当$q\geq 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=0$.

646．不等于 0 的三个数 a、b、c 成等差数列，$a<0$，$a+1$、b、c 成等比数列，且 a、b、$c+2$ 成等比数列，则 a、b、c 的大小顺序是＿＿＿＿.

【精析】 $\because b=\dfrac{a+c}{2}$，且$b^2=(a+1)c$，

又 $b^2=a(c+2)$，∴$(a+1)c=a(c+2)$．

∴ $c=2a$，$b=\frac{3}{2}a$．又 ∵ $a<0$，

∴ $a>\frac{3}{2}a>2a$，即$a>b>c$．

【解答】 $a>b>c$．

647．$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，如果 S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项的和，那么$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=$________．

【精析】 由题意知无穷数列$\{\frac{na_n}{S_n}\}$如存在极限，则其极限值必是惟一常数，与数列$\{a_n\}$的形式无关，故不妨设$a_n=n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=2$．

648．α是1的n次方根，求$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}$的值为________．

【解答】 ∵α是1的n次方根，∴$\alpha^n=1$．

(1)当$\alpha\neq1$时，$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}=\frac{\alpha^{n-1}}{\alpha-1}=0$，

(2)当$\alpha=1$时，$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}=n$．

649．在等差数列$\{a_n\}$中，公差 $d>0$，且 $S_{10}=S_{20}<0$，问数列$\{a_n\}$的前________项和为最小．

【解答】 依题意作出函数 $S_n=f(n)$的草图．

∵$S_{10}=S_{20}$，

∴ $f(n)$的对称轴为$n=\frac{1}{2}(10+20)=15$．

故数列$\{a_n\}$的前 15 项的和最小．

650．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项之和 $S_n=5n^2+3n$，则其通项为________．

【解答】 由公式知：

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=8$；

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(5n^2+3n)-[5(n-1)^2+3n-1)]=10n-2$．

而 $n=1$ 时也满足 $a_n=10n-2$．

∴数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=10n-2$．

651．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项之和 $S_n=n^2+n+1$，则 $a_n=$________．

【解答】 当 $n=1$ 时，$a_1=s_1=3$；

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n+1)-[(n-1)^2+(n-1)+1]=2n$．

而 $n=1$ 时，$a_1=3$ 不满足 $a_n=2n$，

$$\therefore a_n=\begin{cases}3 & (n=1)\\ 2n & (n\geq2)\end{cases}$$

以上两例解法，浅显简易，但这也是处理问题的基本思路．

652．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 与 a_n 有下列关系：$a_1=1$，$a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}(n\geq 2)$，则$a_n$等于_________．

【解答】　当 n=1 时，$a_1=1=S_1$；

当 $n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，代入$a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}$

得 $S_n-S_{n-1}=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}$，

整理后可得 $S_{n-1}-S_n=2S_{n-1}S_n$．

$\therefore \frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2(n\geq 2)$．

由此可知，数列$\{\frac{1}{S_n}\}$是以$\frac{1}{S_1}=1$为首项、$d=2$为公差的等差数列．

$\therefore \frac{1}{S_n}=1+2(n-1)=2n-1$，

即 $S_n=\frac{1}{2n-1}(n\in\mathbf{N})$．

$\therefore$ 当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2(n-1)-1}=\frac{2}{-4n^2+8n-3}$．

由于 $a_1=1$ 不满足此式，故得

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \frac{2}{-4n^2+8n-3} & (n\geq 2)\end{cases}$$

653．等比数列 b_1、b_2、b_3 和为定值 $a(a>0)$，且其公比 $q<0$，求这三项之积 $b_1b_2b_3$ 的最小值是________．

【解答】　$\because b_1+b_2+b_3=a$　　　　　　　(1)

又 b_1，b_2，b_3 是公比为 q 的等比数列，

$\therefore b_1(1+q+q^2)=a$

由$1+q+q^2=(q+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，$a>0$，可得$b_1>0$，再由$q<0$，可得 $b_2<0$，$b_3>0$．

因为均值不等式的变形公式$abc\leq(\frac{a+b+c}{3})^3$成立的条件是$a$，$b$，$c\in R^+$，当且仅当 a=b=c 时取等号，所以此题不能直接应用上述公式求解，应适当变形后才能应用．

$\because b_1b_2b_3<0$，$\therefore$考察$-b_1b_2b_3=b_1(-b_2)b_3\leq(\frac{b_1-b_2+b_3}{3})^3$，当且仅当 $b_1=-b_2=b_3$ 时，上式取等号．

由 $b_1=-b_2=b_3$，并结合①可得 $b_1=b_3=a$，$b_2=-a$，此时 $b_1-b_2+b_3=3a$．

$\therefore -b_1b_2b_3 \leq a^3$即$b_1b_2b_3 \geq -a^3$(当且仅当$b_1=b_2=a, b_2=-a$时取等号).

故$b_1b_2b_3$的最小值为$-a^3$.

二、解答题

654．已知$a>0$，$a\neq 1$，数列$\{a_n\}$是首项为a，公比也为a的等比数列，令$b_n=a_n\lg a_n$．求数列$\{b_n\}$的前n项之和S_n．

【精析与解答】 要求S_n，需先考察b_n的特征，而$b_n=a_n\lg a_n$，故需从考察a_n入手，由题设可知：

$a_n=a\cdot a^{n-1}=a^n$，$\therefore b_n=a^n\lg a^n=na^n\lg a$

可见数列$\{b_n\}$通项b_n除常数因子 lga 外，仅含有一个等差数列$\{n\}$与一个等比数列$\{a_n\}$对应项之积na^n，故可用错位相减法求和．

令$S_n' = a+2a^2+\cdots+na^n$.

$\therefore aS_n' = a^2+\cdots+(n-1)a^n+na^{n+1}$，

$\therefore (1-a)S_n' = a+a^2+\cdots+a^n-na^{n+1}$

$$= \frac{a(1-a^n)}{1-a} - na^{n+1},$$

$$\therefore S_n' = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \frac{na^{n+1}}{1-a}$$

$$= \frac{a}{(1-a)^2}[1-(1+n-na)\cdot a^n].$$

$$\therefore S_n = \frac{a\lg a}{(1-a)^2}[1-(1+n-na)\cdot a^n].$$

655．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，令$b_n=\frac{1}{S_n}$且$a_3b_3=\frac{1}{2}$，$S_3+S_5=21$，求数列$\{b_n\}$的前n项之和．

【精析与解答】 由$\frac{a_3}{S_3}$，$S_3+S_5=21$，$\{a_n\}$为等差数列，可得：

$$\begin{cases} 2a_1+d = a_1+2d \\ 8a_1+13d = 21, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1. \end{cases}$$

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{n(n+1)}.$$

至此，已求出数列$\{b_n\}$的通项公式，又可看出$b_n=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，因而可用裂项相消法求和．即：

$$S_n = 2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]$$

$$= 2(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{2n}{n+1}$$

656．已知等差数列 a，b，c 中的三个数均为正数，且公差不等于零，求证：它们的倒数组成的数列$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$，不可能成等差数列．

【证明】 易见点$A(a，\frac{1}{a})$、$B(b，\frac{1}{b})$、$C(c，\frac{1}{c})$均在函数$y=\frac{1}{x}$的图象上．

如果$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$成等差数，则A、B、C三点均在斜率为$-\frac{1}{ab}$的直线上，这与A、B、C均在双曲线$y=\frac{1}{x}$上矛盾．故$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$不可能成等差数列．

657．在公差不为零的等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$中，已知 $a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_8=b_3$．

(1)求等差数列的公差 d 和等比数列的公比 q；

(2)是否存在常数 a、b，使得对一切自然数 n 都有 $a_n=\log_a b_n+b$ 成立？若存在求 a、b 的值；若不存在，说明理由．

【解答】 (1)依题意

$$\begin{cases} a_1+d=b_1q， \\ a_1+7d=b_1q^2， \end{cases} 即 \begin{cases} 1+d=q， \\ 1+7d=q^2. \end{cases} 解之得 \begin{cases} d=5， \\ q=6， \end{cases} 或 \begin{cases} d=0， \\ q=1 \end{cases} (舍去).$$

(2)由(1)知 $a_n=5n-4$，$b_n=6^{n-1}$．

假设满足题意的 a，b 存在，即有 $5n-4=n\log_a 6+b-\log_a b$．由待定系数法得

$$\begin{cases} 5=\log_a 6， \\ b-\log_a b=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} a=\sqrt[5]{6}， \\ b=1. \end{cases}$$

658．已知数列$\{a_n\}$，$a_1=8$，$a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$，其中 $n\in N$ 且$n\geq 2$，令$b_n=\frac{1}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的各项和S．

【精析与解答】 欲求$\{b_n\}$的各项之和，首先必需求出数列$\{b_n\}$的通项，即“抓通项”；而后分析通项的组成特征，即“找规律”，最后确定求和方法．

由已知可是：$a_n=S_{n-1}(n\geq 2)$，又在 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=S_{n-1}$，∴ $\frac{S_n}{S_{n-1}}=2$，

∴数列$\{S_n\}$为等比数列．

∴$S_n=S_1\cdot 2^{n-1}=2^{n+2}$，∴$a_n=2^{n+1}(n\geq 2)$．

∴当$n\geq 2$时，$b_n=(\frac{1}{2})^{n+1}$，由此可见，数列$\{b_n\}(n\geq 2)$为公比$q=$

$\frac{1}{2}$、首项$b_2=\frac{1}{8}$的等比数列，其各项之和可直接用公式$S=\frac{b_2}{1-q}$求之．

$\therefore S=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots=b_1+\frac{b_2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}$．

659．设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，S_n是其前 n 项和，证明：$\frac{1}{2}(\lg S_n+\lg S_{n+2})<\lg S_{n+1}$．

【证明】 $\because a_n>0$，$S_{n+1}=a_1+qS_n$，$S_{n+2}=a_1+qS_{n+1}$，

$\therefore S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=S_n(a_1+qS_{n+1})-(a_1+qS_n)S_{n+1}=a_1(S_n-S_{n+1})<0$，

$\therefore S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$，

由对数函数的性质知$\frac{1}{2}(\lg S_n+\lg S_{n+2})<\lg S_{n+1}$．

660．已知$x_1>0$，$x_1\neq1$，且$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$，$(n=1，2，\cdots)$，试证：数列$\{x_n\}$对任意自然数 n 都满足$x_n<x_{n+1}$或者对任意自然数 n 都满足$x_n>x_{n+1}$．

【证明】 易得$x_{n+1}-x_n=\frac{2x_n(1-x_n^2)}{3x_n^2+1}$．

由于$x_1>0$，由数列$\{x_n\}$的定义知$x_n>0(n\in N)$，所以$x_{n+1}-x_n$与$1-x_n^2$的符号相同．

若$x_1<1$，用数学归纳法证明$1-x_n^2>0$，$(n\in \mathbf{N})$．

显然$n=1$时，$1-x_n^2>0$．

设$n=k$时，$1-x_k^2>0$，则当$n=k+1$时，有$1-x_{k+1}^2=1-[\frac{x_k(x_k^2+3)}{3x_k^2+1}]^2$

$=\frac{(1-x_k^2)^3}{(3x_k^2+1)^2}>0$．

因此，对一切自然数n都有$1-x_n^2>0$，从而对一切自然数 n 都有$x_{n+1}>xn$

若$x_1>1$，同理可证，对一切自然数 n 都有$x_{n+1}<x_n$

661．设$\alpha>2$，给定数列$\{x_n\}$，其中$x_1=\alpha$，$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}(n=1$，2，…)求证：

(1) $x_n>2$．且$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1(n=1，2，\cdots)$；

(2) 若$\alpha\leq3$，则$x_n\leq2+\frac{1}{2^{n-1}}(n=1，2，\cdots)$．

【证明】 (1)先用数学归纳法证明$x_n>2(n\in N)$．

由条件$\alpha>2$及$x_1=\alpha$知不等式当 n=1 时成立．

假设不等式当 $n=k(k\geq 1)$ 时成立，即 $x_k>2$．那么，当 $n=k+1$ 时，

$$x_{k+1}=\frac{x_k^2}{2(x_k-1)}=\frac{1}{2}[(x_k-1)+\frac{1}{x_k-1}+2]>\frac{1}{2}(2+2)=2$$

所以不等式 $x_n>2(n=1,2,\cdots)$ 成立．

再证明 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1(n=1,2,\cdots)$，

由 $x_n>2$ 知 $x_n-x_{n+1}=\frac{x_n(x_n-2)}{2(x_n-1)}>0$．

所以 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1(n=1,2,\cdots)$．

(2)也可用数学归纳法证明，请读者自己完成．

662．若 $(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$

求证：x，y，z 成等差数列．

【证明】 令 $x=a+b$，$z=a-b$，代入已知等式得：

$(2b)^2-4(a+b-y)(y-a+b)=0$．

从而有 $(a-y)^2=0$，$\therefore a=y$．

$\therefore x+z=2a=2y$．

故 x、y、z 成等差数列．

663．对任意自然数 n，求证：

(1) $(1+1)(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{2n-1})>\sqrt{2n+1}$；

(2) $(1+1)(1+\frac{1}{4})\times\cdots\times(1+\frac{1}{3n-2})>\sqrt[3]{3n+1}$．

【证明】 (1)设 $A_n=(1+1)(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{2n-1})$

$$=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{2n}{2n-1}$$

构造对偶式：$B_n=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}$．

因为对任意自然数n都有 $\frac{2n}{2n-1}>\frac{2n+1}{2n}$．

$\therefore A_n>B_n$，

$\therefore A_n^2>A_nB_n=\frac{2n+1}{1}=2n+1$，从而有

$$A_n=(1+1)(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{2n-1})>\sqrt{2n+1}$$

(2)设 $A_n=(1+1)(1+\frac{1}{4})\times\cdots\times(1+\frac{1}{3n-2})$

$$=\frac{2}{1}\times\frac{5}{4}\times\frac{8}{7}\times\cdots\times\frac{3n-4}{3n-5}\times\frac{3n-1}{3n-2}$$

构造对偶式：$B_n=\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\frac{9}{8}\times\cdots\times\frac{3n-3}{3n-4}\times\frac{3n}{3n-1}$

$C_n=\frac{4}{3}\times\frac{7}{6}\times\frac{10}{9}\times\cdots\times\frac{3n-2}{3n-3}\times\frac{3n+1}{3n}$

因为对任意自然数 n，都有：

$1+\frac{1}{3n-2}=\frac{3n-1}{3n-2}>1+\frac{1}{3n-1}=\frac{3n}{3n-1}$

$1+\frac{1}{3n-2}=\frac{3n-1}{3n-2}>1+\frac{1}{3n}=\frac{3n+1}{3n}$

$\therefore A_n>B_n$ 且 $A_n>C_n$

$\therefore A_n^3>A_nB_nC_n=\frac{3n+1}{1}=3n+1$.

$\therefore (1+1)(1+\frac{1}{4})\times\cdots\times(1+\frac{1}{3n-2})>\sqrt[3]{3n+1}$

664．已知等差数列共 2n＋1 项，其奇数项之和为 280，偶数项和为 252，则该数列第 n＋1 项为多少？并求数列项数值．

【解答】　由于该数列有 2n＋1 项，又有

$n+1=\frac{(2n+1)+1}{2}$，

则第 n＋1 项为数列中间项．

设$a_{n+1}=M$，奇数项有$\frac{2(n+1)+1}{2}=n+1$项，

偶数项有$\frac{2(n+1)-1}{2}=n$项．

可得$\begin{cases}M(n+1)=280(\text{由性质②})\\ Mn=252\end{cases}$

两式相比求出$n=9$，则该数列有$2\times9+1=19$项又得出$M=\frac{252}{9}$ =28，即第 n＋1 项为 28．

665．已知数列$\{a_n\}$满足$2S_n^2=2a_nS_n-a_n(n\geq2)$，$a_1=2$，求$a_n$及$S_n$．

【解答】　将 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 代入题设等式得 $2S_nS_{n-1}=S_{n-1}-S_n$．

$\because a_1=2$，$\therefore S_n\neq0$，

$\therefore \frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$，即数列$\{\frac{1}{S_n}\}$是以 2 为公差，$S_1=\frac{1}{2}$为首项的等差数列，

有$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{2}+2(n-1)=\frac{1+4(n-1)}{2}$，得$S_n=\frac{2}{1+4(n-1)}$

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2}{1+4(n-1)}-\frac{2}{1+4(n-2)}(n\geq2)$，$a_1=2$．

666．证明：若一数列既是等比数列，又是等差数列，则它必为常数列．

【证明】　设 a、b、c 是该数列任意相邻三项，则有

$$\begin{cases}2b=a+c & ①\\ b^2=ac & ②\end{cases}$$

因此$(a+c)^2=4ac$

由公式②$(a-c)^2=(a+c)^2-4ac=0$，

∴$a=c$ 代入①得 $a=b=c$，

∴该数列为常数列．

667．已知$n\in N$，证明不等式$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$．

【证明】 $\because \frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}<\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$．

令$k=1$，2，…，$n-1$，得$n-1$个不等式，将其叠加得$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1<2\sqrt{n}$．

668．设$a>0$，$a\neq 1$，$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})(x\geq 1)$．

(1)求函数 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$和这个反函数的定义域；

(2)记$b_n=f^{-1}(n)$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，求证：当$\frac{1}{2}<a<2$时，对任意自然数n，都有$S_n<2^n-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$．

我们略去(1)，下面给出(2)的证明．

【证明】 $\because \frac{1}{2}<a<2$，$\therefore (2a)^n>1$且$a^n<2^n$．

于是$\frac{1}{2}(2^n+2^{-n})-\frac{1}{2}(a^n+a^{-n})=\frac{1}{2(2a)^n}[(2a)^n-1](2^n-a^n)>0$．

因此，在题设下，对任意自然数 n，都有$\frac{1}{2}(a^n+a^{-n})<\frac{1}{2}(2^n+2^{-n})$．

依设和(1)的结果，有 $b_n=f^{-1}(n)=\frac{1}{2}(a^n+a^{-n})$．

$\therefore S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2}(a+a^{-1})+\frac{1}{2}(a^2+a^{-2})+\cdots+\frac{1}{2}(a^n+a^{-n})$

$<\frac{1}{2}(2+2^{-1})+\frac{1}{2}(2^2+2^{-2})+\cdots+\frac{1}{2}(2^n+2^{-n})$

$=\frac{1}{2}(2+2^2+\cdots+2^n)+\frac{1}{2}(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n})$

$=(2^n-1)+\frac{1}{2}(1-2^{-n})=2^n-\frac{1}{2}(1+2^{-n})$．

∵对任意自然数 n，$2^{-n}\neq 1$，

$\therefore \frac{1}{2}(1+2^{-n})>\sqrt{1\times 2^{-n}}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$．

$\therefore 2^n - \frac{1}{2}(1+2^{-n}) < 2^n - (\frac{\sqrt{2}}{2})^n$.

$\therefore S_n < 2^n - (\frac{\sqrt{2}}{2})^n$ 对任意自然数n成立.

669．求和$S_n = C_n^0 + 3C_n^1 + \cdots + (2n+1)C_n^n$.

【解答】 $\because Sn = C_n^0 + 3C_n^1 + \cdots + (2n+1)C_n^n$,

又$S_n = (2n+1)C_n^n + (2n-1)C_n^{n-1} + \cdots + C_n^0$,

而$C_n^k = C_n^{n-k}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$，将上述两式相加得：

$2S_n = (2n+2)C_n^0 + (2n+2)C_n^1 + \cdots + (2n+2)C_n^n$

$= (2n+2)(C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n) = (2n+2) \times 2^n$.

$\therefore S_n = (n+1) \times 2^n$.

670．已知数列$\{a_n\}$的通项

$a_n = na^{2n} (0 < a < 1)$.

(1)如果对于任何自然数 n，都有 $a_n > a_{n+1}$，求 a 的取值范围；

(2)如果$\sqrt{\frac{m-1}{m}} < a < \sqrt{\frac{m}{m+1}} (m \in \mathbf{N})$，求证：$\{a_n\}$中存在惟一的最大项.

【解答】 (1) $\because \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)a^{2(n+1)}}{na^{2n}} = \frac{n+1}{n}a^2 < 1$

$\therefore a^2 < \frac{n}{n+1} (n \in \mathbf{N})$,

$\therefore$ 限定 $f(n) > a^2 \Leftrightarrow [f(n)]_{min} > a^2$,

其中函数$f(n) = \frac{n}{n+1} (n \in \mathbf{N})$,

又 $f(n) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ 在N上是增函数.

$\therefore [f(n)]_{min} = f(1) = \frac{1}{2}$，$\therefore a^2 < \frac{1}{2}$. 又$0 < a < 1$,

$\therefore 0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)由(1)易证，am、a_{m+1}、…a_n、…是递减数列，当且仅当 $a^2 < f(m)$ $= \frac{m}{m+1} (m \in \mathbf{N})$

$\Leftrightarrow 0 < a < \sqrt{\frac{m}{m+1}} (0 < a < 1)$,

从而由条件$0 < a < \sqrt{\frac{m}{m+1}}$知$a_m$，$a_{m+1}$，…，$a_n$，…是递减数列,

$\therefore a_m$ 是 a_m，a_{m+1}，…，a_n，…中的最大项.

671．设正数递增的等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$中，$a_1=b_1$，$a_2=b_2$. 求证：$n \geq 3$ 时，$b_n > a_n$.

【证明】 设公差为 $d > 0$，公比

$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=1+\frac{d}{a_1}$，其中$\frac{d}{a_1}>0$，

则$b_n=b_1q^{n-1}=a_1(1+\frac{d}{a_1})^{n-1}$

$=a_1[1+(n-1)\frac{d}{a_1}]+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}(\frac{d}{a_1})^2+\cdots]$

$>a_1[1+(n-1)\frac{d}{a_1}]$

$=a_1+(n-1)d=a_n$.

672．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\lg 100\sin^{n-1}\frac{\pi}{4}$，问此数列的前多少项和最大？并求这个最大值．

【解答】 $a_n=\lg\frac{25}{(\sqrt{2})^{n-5}}$，易知公差$d=-\lg\sqrt{2}<0$．容易验证，

$a_{14}=\lg\frac{25}{16\sqrt{2}}>0$；$a_{15}=\lg\frac{25}{32}<0$．

∴当 n=1，2，…，14 时 $a_n>0$，当 $n\geq 15$ 时，$a_n<0$．

即该数列前 14 项和最大，

且$S_{14}=28-\frac{91}{2}\lg 2$．

这是因为，若数列的前部分项为正，后面所有项为负，则数列的前部分和最大．

673．已知 $A_n=2+4+6+\cdots+2n$，$B_n=1+2+4+\cdots+2^{n-1}(n\in N)$

试判断 A_n 与 B_n 的大小关系．

【解答】 先取 n=1，2，3，…比较，观察归纳一般规律，再给出证明，由已知有：

$A_n=\frac{(2+2n)n}{2}=n(n+1)$，$B_n=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

当 n=1 时，$A_1=2$，$B_1=1$，有 $A_1>B_1$；

当 n=2 时，$A_2=6$，$B_2=3$，有 $A_2>B_2$；

当 n=3 时，$A_3=12$，$B_3=7$，有 $A_3>B_3$；

当 n=4 时，$A_4=20$，$B_4=15$，有 $A_4>B_4$；

当 n=5 时，$A_5=30$，$B_5=31$，有 $A_5<B_5$；

当 n=6 时，$A_6=42$，$B_6=63$，有 $A_6<B_6$．

由上可知，当 $1\leq n\leq 4$ 时，有 $A_n>B_n$；并猜想：当 $n\geq 5(n\in N)$时，有 $A_n<B_n$，即 $n(n+1)<2^n-1$．

下面用数学归纳法证上述猜想正确．

(1)当 n=5 时，不等式显然成立．

(2)假设 $n=k(k\geq 5)$时，$k(k+1)<2^k-1$ 成立，则$(k+1)(k+2)=k(k+1)+2(k+1)<2^k-1+2(k+1)$．

下面证明：当 $n\geq 5$ 时，$2^k>2(k+1)$成立．

①当 $k=5$ 时，$2^k=32$，$2(k+1)=12$，不等式成立．

②假设 $k=m$ 时，$2^m>2(m+1)$成立，则有 $2[(m+1)+1]=2(m+1)+2<2^m+2<2^m+2^m=2\times 2^m=2^{m+1}$．

综合①、②得知，当 $k\geq 5$ 时，$2^k>(2k+1)$成立，从而有$(k+1)(k+2)<2^k-1+2^k=2^{k+1}-1$，

即当 $n=k+1$ 时，不等式 $n(n+1)<2^n-1$ 成立．

综合(1)、(2)可知，对一切 $n\geq 5(n\in N)$都有不等式 $n(n+1)<2^n-1$ 成立，即 $n\geq 5$ 时，有 $A_n<B_n$．

674．a、b、c 三个正数成等差数列，公差 $d\neq 0$，求证：$a^n+c^n>2b^n(n\in N，n>1)$．

【精析】 不等式的左边是 a，c 的表达式，右边只有 b，应用已知条件可得：$a=b-d$，$c=b+d$，于是和二项式定理建立了联系，构造自然和谐．

$a^n+c^n-b^n=(b-d)^n+(b+d)^n-2b^n$

$=C_n^0b^n-C_n^1b^{n-1}d+C_n^2b^{n-2}d^2-C^nb^{n-3}d^3+\cdots+$

$(-1)^nC_n^nd^n+C_n^0b^n+C_n^1b^{n-1}d+C_n^2b^{n-2}d^2+C_n^3b^{n-3}$

$d^3+\cdots+C_n^md^m-2b^n$

$=C_n^2b^{n-2}d^2+C_n^4b^{n-4}d^4+C_n^6b^{n-6}d^6+\cdots$．

$\because b>0$，d 的偶次方大于零，

$\therefore C_n^2b^{n-2}+C_n^4b^{n-4}+C_n^6b^{n-6}d^6+\cdots>0$

即 $a^n+c^n-2b^n>0$，

$\therefore a^n+c^n>2b^n$．

675．从多个地方抽调了一批型号相同的联合收割机，收割一片小麦，若这些收割机同时到达，则 24 小时可收割完毕，但它们由于距离不同，是每隔一段相同的时间顺序投入工作的．如果第一台收割机总工作时间恰好是最后一台总工作时间的 5 倍，问这种收割方式在这片麦地上工作了多长时间？

【解答】 依题意，这些联合收割机投入工作的时间组成一个等差数列，这种方式的作业时间就是第一台机器的工作时间，问题转化为求等差数列的首项．

设这 n 台收割机的工作时间依次是 a_1，a_2，…，a_n 小时，依题意 a_1，a_2，…，a_n组成一个等差数列．又每台收割机每小时的工作效率为$\frac{1}{24n}$，则有：

$$\begin{cases} a_1=5a_n & ① \\ \frac{a_1}{24n}+\frac{a_2}{24n}+\cdots+\frac{a_n}{24n}=1. & ② \end{cases}$$

由②得$\frac{(a_1+a_n)\times n}{2\times 24n}=1$，

即 $a_1+a_n=48$．　　③

联立①与③解出 $a_1=40$(小时)．

答：这种收割方式在这片麦地上工作了 40 小时．

676．某林场原有木材存有量为 a，木材以每年 25%的增长率生长，而每年年底要砍伐的木材量为 x．

(1)写出一年后，两年后，三年后的木材存有量；

(2)猜想出 n 年后的木材存有量 Q_n 与 n 的关系式,并用数学归纳法证明；

(3)为实现经过 20 年后木材存有量翻两番的目标，每年的砍伐量最多应为多少？(lg2=0.3)

【解答】 (1)一年后木材存有量$Q_1=a(1+25\%)-x=\frac{5}{4}a-x$；

两年后木材存有量$Q_2=(\frac{5}{4})^2a-\frac{5}{4}x-x=\frac{16}{25}a-\frac{9}{4}x$；

三年后木材存有量$Q_3=(\frac{5}{4})^3a-(\frac{5}{4})^2x-\frac{5}{4}x-x=\frac{125}{64}a-\frac{61}{16}x$．

(2)猜想 n 年后，木材存有量

$Q_n=(\frac{5}{4})^na-(\frac{5}{4})^{n-1}x-(\frac{5}{4})^{n-2}x-\cdots-x$，即

$Q_n=(\frac{5}{4})^na-\frac{(\frac{5}{4})^n-1}{\frac{5}{4}-1}x=(\frac{5}{4})^na-4x[(\frac{5}{4})^n-1]$．

然后用数学归纳法证明，略．

(3)依题意$Q_{20}\geq 4a$，即

$(\frac{5}{4})^{20}a-4x[(\frac{5}{4})^n-1]\geq 4a$．

设$N=(\frac{5}{4})^{20}$，则$\lg N=20\lg\frac{5}{4}=20(1-3\lg 2)=20(1-0.9)=2$，

∴N=100．

则$100a-4\times 99x\geq 4a$，解得$x\leq\frac{8}{33}a$．

∴ 每年砍伐量最多应为$\frac{8}{33}a$．

677．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1$，$a_2=-\frac{1}{4}$，$a_n-a_{n-2}=\frac{3}{2}$，求出a_3，a_4，推测数列的通项公式，并加以证明．

【精析】 由$a_1=-1$，$a_2=-\frac{1}{4}$，$a_3=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$，$a_4=a_2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{5}{4}$，仍发现不了规律，无法猜想，这时我们若使$a_1$，$a_3$服从大局，变为$\{-\frac{4}{4}，-\frac{1}{4}，\frac{2}{4}，\frac{5}{4}，\cdots\}$，大胆猜想：

$a_n=\frac{1}{4}[-4+(n-1)\times 3]=\frac{1}{4}(3n-7)$

然后再用数学归纳法证明：假设 n≤k(k≥4)时猜想的公式成立，据题设易得 n=k+1 及 n=k+2 时，等式也成立，从而可知对 n∈N，

公式$a_n=\frac{1}{4}(3n-7)$成立．

678．设有 3n 项的等差数列，若它的前 n 项和为 A，中间的 n 项的和为B，最后的n项的和为C，证明：$B^2-AC=(\frac{A-C}{2})^2$．

【证明】　设前 n 项的和为 S_n，则有 $S_n=A$，$S_{2n}=A+B$，$S_{3n}=A+B+C$．

$S_{3n}=\frac{3n(S_{2n}-S_n)}{2n-n}$，

即 A＋B＋C=3(A＋B－A)，

$\therefore B=\frac{A+C}{2}$．

故 $B^2-AC=(\frac{A+C}{2})^2-AC=(\frac{A-C}{2})^2$．

679．已知数列$\{b^n\}$是等差数列，$b_1=1$，$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=145$．

(Ⅰ)求数列$\{b_n\}$的通项 b_n，

(Ⅱ)设数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\log_a(1+\frac{1}{b_n})(a>0$且$a\neq1)$，记$S_n$是数列$\{a_n\}$的前n项和，试比较$S_n$与$\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$的大小，并证明你的结论．

【解答】　(Ⅰ)$b_n=3n-2$，

(Ⅱ)由题意知$\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}=\log_a\sqrt[3]{3n+1}$，$S_n=\log_a[(1+1)(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{3n-2})]$．

要比较S_n与$\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$的大小，可先比较$(1+1)(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{3n-2})$与$\sqrt[3]{3n+1}$的大小．

设$f(n)=\frac{3}{\sqrt[3]{3n+1}}(1+1)(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{3n-2})$，则

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{3n+4}}(1+1)(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{3n+1})}{\frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}(1+1)(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{3n-2})}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3n+1}(3n+2)}{\sqrt[3]{3n+4}(3n+1)}=\frac{3n+2}{\sqrt[3]{3n+4}\times\sqrt[3]{(3n+1)^2}}$$

$$=\frac{3n+2}{\frac{(3n+4)+(3n+1)+(3n+1)}{3}}=\frac{3n+2}{3n+2}=1$$

即 f(n＋1)＞f(n)，

由递推可得 f(n)＞f(1)，

又$f(1)=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}>1$，

$\therefore (1+1)(1+\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{3n-2})>\sqrt[3]{3n+1}$.

680．在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=25$，S_n为其前n项的和且$S_9=S_{17}$，试问：数列$\{a_n\}$的前几项之和最大？这个最大值是多少？

【解答】 ∵$\{a_n\}$是等差数列，

∴令$S_n=an^2+bn$(a、b为常数)，由于$S_9=S_{17}$，

∴关于n的二次函数的对称轴方程是$n=\frac{9+17}{2}=13$，由此可知，$\{a_n\}$的前13项之和为最大．

又$a_1=25$，∴$a+b=25$，$-\frac{b}{2a}=13$，

∴$b=-26a$．

∴$a=-1$，$b=26$．

∴$S_n=-n^2+26n$，

最大值$S_{13}=-13^2+26\times13=169$．

681．设等差数列$\{a_n\}$中，$S_4=-62$，$S_8=-76$．

(1)求通项a_n及前n项和S_n；

(2)求和$\sum_{i=1}^{21}|a_i|$.

【解答】 (1)∵$S_8=S_4+S_4+16d$

∴公差d=3

又由$S_4=4a_1+\frac{1}{2}\times4(4-1)d$

解得$a_1=-20$，

∴$a_n=a_1+(n-1)d=3n-23$，

$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d=\frac{3}{2}n^2-\frac{43}{2}n$.

(2)由d=3＞0易知等差数列$\{a_n\}$为递增数列，

设$a_k\leq0$，且$a_{k+1}\geq0$，

即$\begin{cases}3k-23\leq0\\3k-20\geq0\end{cases}$

得$\frac{20}{3}\leq k\leq\frac{23}{3}(k\in\mathbf{N})$，$\therefore k=7$

$\therefore\sum_{i=1}^{21}|a_i|=-S_7+(a_8+a_9+\cdots+a_{21})$

$=-\frac{7}{2}(a_1+a_7)+\frac{14}{2}(a_8+a_{21})=364$.

682．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_7=-2$，$a_{20}=-28$．

(1)求通项a_n；

(2)若 $a_n<-8$，求 n 的范围；

(3)求 S_n 的最大值．

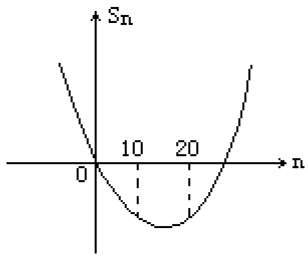


图95

【解答】 (1)如图 95，由已知得$\begin{cases}a_1+6d=-2\\a_1+19d=-28\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a_1=10\\d=-2\end{cases}$．

故 $a_n=-2n+12$．

(2)由 $a_n=-2n+12<-8$ 得 $n>10$．

$(3)S_n=a_1n+\frac{1}{2}n(n-1)d=-(n-\frac{11}{2})^2+\frac{121}{4}$，故当$n=5$或$6$时，$S_n$取得最大值，最大值为 30．

683．数列$\{a_n\}$中，$a_n=\lg\frac{160}{2^{n-1}}$，前n项和为$S_n$．

(1)当 S_n 取得最大值时，求 n；

(2)$|S_n|$为最小值时，求 n．

【解答】 $|S_n|=|-\frac{\lg 2}{2}n^2+\frac{2\lg 160+\lg 2}{2}\times n|$ 先画出$f(x)=|-\frac{\lg 2}{2}x^2+\frac{2\lg 160+\lg 2}{2}\times x|$的图象．

令$f(x)=0$，$x_1=0$，$x_2=\frac{2\lg160+\lg2}{2}\div\frac{\lg 2}{2}=9+\frac{2}{\lg 2}\approx15.6$，再取n=1，2，3，…画出数列图形，如图 96 所示．

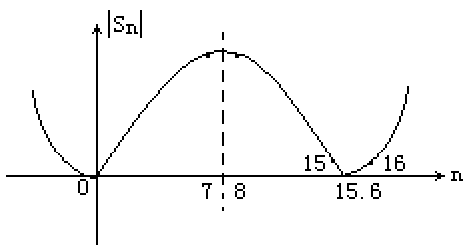


图96

∵$|15-15.6|>|15.6-16|$，

∴n=16 对应的点为最低点，该点的纵坐标$|S_{16}|$为最小值．

684．已知数列 $a_n=\begin{cases}2, & n=1\\-\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^{n-2}, & n\geq2,\end{cases}$ $n\in\mathbf{N}$，$b_n=9a_n^2+4a_{n+1}$．

求数列$\{b_n\}$中最大项与最小项的值．

【精析】 由$b_1=9a_1^2+4a_2=9\times4-1=35$．

当$n\geq2$，

$$b_n=9[-\frac{1}{3}\times(\frac{3}{4})^{n-1}]^2+4[-\frac{1}{3}\times(\frac{3}{4})^n]$$
$$=[(\frac{3}{4})^{n-1}-\frac{1}{2}]^2-\frac{1}{4}.$$

$\because\ 0<(\frac{3}{4})^{n-1}\leq\frac{3}{4}$，

$\therefore\ b_n<0$，$(n\geq2)$．

故可知在所有b_n中，$b_1=35$为最大，设$c_n=|(\frac{3}{4})^{n-1}-\frac{1}{2}|$，故当$c_n$为最小时，相应的$b_n$最小．

先画出$y=(\frac{3}{4})x$的图象(图97)．

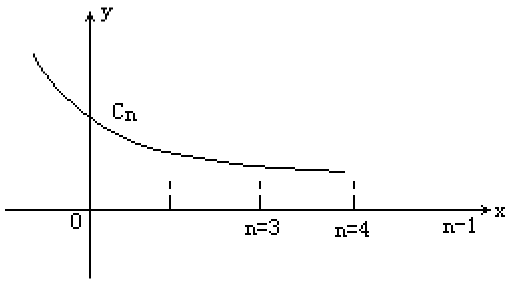


图97

由$n=3$时，$(\frac{3}{4})^{3-1}=\frac{9}{16}>\frac{1}{2}$．

$n=4$时，$(\frac{3}{4})^{4-1}=\frac{27}{64}<\frac{1}{2}$．

$\therefore A(0,\ \frac{9}{16})$点在$C(0,\ \frac{1}{2})$点上方，$B(0,\ \frac{27}{64})$在$C(0,\ \frac{1}{2})$点下方，又

$|AC|=|\frac{9}{16}-1|=\frac{1}{16}=\frac{4}{64}$，$|BC|=|\frac{27}{64}-\frac{1}{2}|=\frac{5}{64}$．

$\therefore|AC|<|BC|$，

$\therefore n-1=2$时，即$n=3$时，b_3为最小项，$b_3=-\frac{63}{256}$．

685．已知$a_1,a_2,\cdots,a_n>1(n>2)$，且$|a_{k+1}-a_k|<1$，$k=1,2,3,\cdots,n-1$．求证：

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}<2n-1.$$

【证明】 本题是一个条件为绝对值不等式的问题，为了充分运用这个条件我们先讨论然后借助数列求和的递推方法求证．

(1)若$a_k \leq a_{k+1}(k=1，2，\cdots，n-1)$，则$\frac{a_k}{a_{k+1}} \leq 1$．

故$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}<(n-1)+\frac{na_1}{a_1}=2n-1(n\geq 2)$．

(2)若有：$a_k > a_{k+1}$，由$|a_{k+1}-a_k|<1$得．

$a_k < a_{k+1}+1$．所以，

$\frac{a_k}{a_{k+1}}<1+\frac{1}{a_{k+1}}<2$．

在$1\leq k<n-1$中，若有 p 个 k 值使$a_k \leq a_{k+1}$，而另$(n-1-p)$个 k 值使$a_k > a_{k+1}$，

则$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\leq p+2(n-1-p)$，同时

$\frac{a_n}{a_1}=\frac{[(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1]}{a_1}<p+1$．因此

$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}<p+2(n-1-p)+p+1$

$=2n-1$．

686．设$b_n=(1+r)q^{n-1}$，$r=2^{19.2}-1$，$q=\frac{1}{2}$，求数列$\left\{\frac{\log_2 b_{n+1}}{\log_2 b_n}\right\}$的最大项和最小项的值．

【解答】 $\frac{\log_2 b_{n+1}}{\log_2 b_n}=\frac{\log_2[(1+r)q^n]}{\log_2[(1+r)q^{n-1}]}$

$=\frac{\log_2(1+r)+n\log_2 q}{\log_2(1+r)+(n-1)\log_2 q}$

$=1+\frac{1}{n-20.2}$

记$c_n=\frac{\log_2 b_{n+1}}{\log_2 b_n}$，则$c_n=1+\frac{1}{n-20.2}\Rightarrow c_n-1=\frac{1}{n-20.2}$．构造数列图形(图略)，知最高点$(21，c_{21})$，最低点$(20，c_{20})$，故最大项$c_{21}=2.25$，最小项$c_{20}=-4$．

687．设$\{a_n\}$是正数组成的数列，其前 n 项和为 S_n，并且对所有 S_n，$n\in N$，a_n与 2 的等差中项等于S_n与 2 的等比中项．

(1)写出数列$\{a_n\}$的前 3 项；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式．

【精析与解答】 据题意，对一切$n\in \mathbf{N}$，有$\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}$．所以，对 n=1、2、3 必成立．

(1)当$n=1$时，由$\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2S_1}=\sqrt{2a_1}$及$a_1>0$，得$a_1=2$；

当$n=2$时，由$\frac{a_2+2}{2}=\sqrt{2S_2}=\sqrt{2(a_1+a_2)}$及$a_1=2$，$a_2>0$，得$a_2$=6；

当$n=3$时，由$\frac{a_3+2}{2}=\sqrt{2S_3}=\sqrt{2(a_1+a_2+a_3)}$及$a_1=2$，$a_2=6$，$a_3>0$，得$a_3=10$．

所以数列$\{a_n\}$的前 3 项为 2，6，10．

(2)由(Ⅰ)知 $a_1=2$，$a_2=6$，$a_3=10$，由 $a_2-a_1=a_3-a_2=4$，可得出猜想：$a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$．

对猜想的结论用数学归纳法证明如下：

1)当 n=1 时，$a_1=4\times1-2=2$，由(Ⅰ)知公式成立．

2)假设 n=k 时，$a_k=4k-2$，据题意

$\frac{a_k+2}{2}=\sqrt{2S_k}$，解得$S_k=2k^2$．

又由题意$\frac{a_{k+1}+2}{2}=\sqrt{2S_{k+1}}=\sqrt{2(S_k+a_{k+1})}$，

将 $S_k=2k^2$ 代入并注意到 $a_{k+1}>0$，解得 $a_{k+1}=4k+2=4(k+1)-2$．即当 n=k＋1 时，猜想公式也正确．

综合 1)、2)，数列$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=4n+2$．

688．用分期付款方式购买家用电器一件，价格为 1150 元，购买当天先付 150 元，以后每月这一天都交付 50 元，并加付欠款的利息，月利率为 1%，若交付 150 元以后的第一个月开始算分期付款的第一月，问分期付款的第十个月该交付多少钱？全部贷款付清后，买这件家电实际花了多少钱？

【精析与解答】 购买时付了 150 元，欠款 1000 元，每月付 50 元，分 20 次付完，设每月付款数顺次组成数列$\{a_n\}$，则

$a_1=50+1000\times0.01=60$(元)，

$a_2=50+(100-50)\times0.01=(60-0.5)$(元)，

$a_3=50+(1000-50\times2)\times0.01=(60-0.5\times2)$(元)，

$a_4=50+(1000-50\times3)\times0.01=(60-0.5\times3)$(元)，

依此类推得

$a_{10}=50+0.5\times9=54.5$(元)，

$a_n=60-0.5(n-1)(1\le n\le20)$．

∴付款数$\{a_n\}$组成等差数列，公差 $d=-0.5$，全部贷款付清后付款总数=

$$S_{20}+150=\frac{(a_1+a_{20})20}{2}+150$$

$=(2a_1+19d)10+150$

$=(2\times60-19\times0.5)\times10+150=1255$(元)．

答：第十个月该交付 54.5 元，全部贷款付清后，买这件家电实际花了 1255 元．

689．设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$．(1)

求公差 d 的取值范围；(2)指出 S_1、S_2、…、S_{12} 中哪一个值最大，并说明理由．

【解答】 $\{a_n\}$是等差数列，故设 $S_n=an^2+bn$，如图 98．

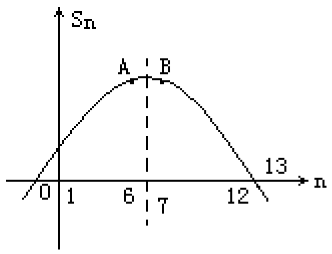


图98

∵$S_{12}>0$，$S_{13}<0$，

∴抛物线与 x 轴的另一个交点在 n=12 与 n=13 之间．

∴对称轴 l 的位置在 6 与 6.5 之间，

易知 n=6 对应的 A 点与对称轴的距离比 n=7 对应的点 B 与对称轴的距离为近，

故 A 为最高点，S_6 最大．

690．设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，S_n 是其前 n 项和．

(1) 证明：$\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$

(2)是否存在常数 c＞0 使得

$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$成立？并证明你的结论．

【精析与解答】 (1)略．

(2)假设存在常数 c＞0，使得

$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$$

成立，则有

$S_n-c>0$， ①

$S_{n+1}-c>0$， ②

$S_{n+2}-c>0$， ③

$(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2$． ④

由④得

$S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=c(S_n+S_{n+2}-2S_{n+1})$． ⑤

据均值不等式及①～④得

$S_n+S_{n+2}-2S_{n+1}=(S_n-c)+(S_{n+2}-c)-2(S_{n+1}-c)$

$\geq 2\sqrt{(S_n-c)(S_{n+2}-c)}-2(S_{n+1}-c)=0$．

因为 c＞0，所以等式⑤的右端非负，而据(1)的结论知等式⑤的左端$S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2<0$．矛盾！

故不存在常数 c＞0 使等式

$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$成立．

691．试证三个连续自然数的立方和能被 9 整除．

【证明】 设三数为 n，n＋1，n＋2，n∈N，则 $S_n=n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$．假设当 n=k 时，S_k 能被 9 整除，则 $S_{k+1}-S_k=9(k^2+3k+3)$，故 $S_{k+1}=S_k+9(k^2+3k+3)$，也能被 9 整除．获证．

692．用数学归纳法证明：

$$1\times(n^2-1^2)+2\times(n^2-2^2)+\cdots+n(n^2-n^2)=\frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}.$$

【精析】 待证式左边结构复杂，不易过渡，先变形为：$1\times n^2-1^3+2n^2-2^3+\cdots+n\times n^2-n^3=\frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}\Leftrightarrow(1+2+\cdots+n)n^2-(1^3+2^3+\cdots+n^3)=\frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}\Leftrightarrow 1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)n^2-\frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}\Leftrightarrow 1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$，至此，化生为熟，证明就容易了．

693．求证：$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1(n\geq 2，n\in\mathbf{N})$．

【精析】 假设当 $n=k$ 时，不等式成立，即有 $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<1$，那么当 $n=k+1$ 时，有 $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{(k+1)^2}$．显然 $1+\frac{1}{(k+1)^2}>1$，无法判断结论成立，于是想到将原命题结论加强，使取值范围更小一些，当 n=k＋1 时，能放缩为小于 1 的式子．例如变换为新命题：$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$，就容易用数学归纳法证明．

694．在 7 个数组成的数列中，奇数项的数成等差数列，偶数项的数成等比数列，首末两项与中间项的和等于 27，奇数项的和减去偶数项的积所得的差等于 42，试求中间项的值．

【精析与解答】 设奇数项依次为 x－3d，x－d，x＋d，x＋3d，偶数项依次为 $\frac{y}{q}$，y，yq，中间项为 y．则奇数项和为 4x，偶数项积为 y^3．

根据题意得 $\begin{cases}x-3d+x+3d+y=27，\\4x-y^3=42，\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+y=27，\\4x=y^3+42．\end{cases}$ 消去 x，得

$y^3+2y-12=0$，

$y^3-2y^2+2y^2-4y+6y-12=0$，

$(y-2)(y^2+2y+6)=0$．

∵ $y^2+2y+6=0$ 无实根，

∴中间项 y=2．

695．边长为 1 的正三解形 ABC 的各边都 n 等分，过各分点平行于其他两边的直线，将三角形 ABC 分成若干个小三角形，各小三角形的顶点

都称为结点，在每个结点上放置一个实数．

已知：如图 99 所示，(ⅰ)A、B、C 三点上放置的数分别为 a、b、c．

(ⅱ)在每个由有公共边的两个最小三角形组成的菱形之中，两组相对顶点的数之和相等．

试求：(1)放置最大数的点与放置最小数的点之间的最短距离 r；

(2)所有结点上的数的总和 S．

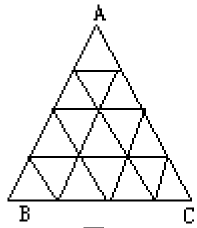


图99

【精析】 (1)显然所有结点都在所作直线和△ABC 的边界上，如图 100，观察可知任意三个相邻的结点三角形可组成等腰梯形，不妨假设其各结点放置数为 x、y、u、v、w，我们可证 u、v、w 成等差数列，事实上，由(ⅱ)得 x＋w=y＋v，y＋u=x＋v，两式相加得 2v=u＋w．由上我们推得，分别在所作直线及△ABC 边上的结点上所放置的数各自依次成等差数列，而等差数列中的最大数及最小数必在其两端(等差数列的单调性决定的)，故最大数及最小数属于{a，b，c}．

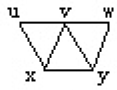


图100

①若 a=b=c，则在每个结点既是放置最大数的点又是放置最小数的点，故 r=0．

②若 a、b、c 中有两个不相等，不妨设 a=b＜c，则线段 AB 上的所有结点都是放置最小数的点，放置的数均是 a，当 n 是偶数时，AB 的中点恰好是结点，故$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$；当n是奇数时，AB中点不是结点，与中点相邻的两结点到C的距离最短，此时$r=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2n})^2}=\frac{1}{2n}\sqrt{3n^2+1}$．

③显然，当 a、b、c 互不相等时，r=1．

(2) AC上结点所放置数为 $a+\frac{k}{n}(c-a)(k=0，1，\cdots，n)$， BC上结点所放置的数为$b+\frac{k}{n}(c-b)(k=0，1，\cdots，n)$，与AB平行的直线上结点数依次成等差数列，故

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}[a+\frac{k}{n}(c-a)+b+\frac{k}{n}(c-b)](n-k+1)$$

$$=\frac{a+b}{2}\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)+\frac{2c-a-b}{2n}\sum_{k=0}^{n}k(n-k+1)$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(a+b)+\frac{1}{12}(n+1)(n+2)(2c-a-b)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(a+b+c).$$

696．设△ABC 是边长为 a 的正三角形，又在三边 AB、BC、CA 上各取一点 A_1、B_1、C_1 为顶点作正三角形 $A_1B_1C_1$，而$\angle B_1A_1B=\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{3})$，然后再依此方式顺次作出如图101所示的正三角形序列$A_2B_2C_2$，$A_3B_3C_3$，…，$A_nB_nC_n$，….设△$A_nB_nC_n$ 的面积为 S_n，现要使所有新作的三角形面积的和$\sum_{n=1}^{\infty}S_n$等于△ABC的面积，试确定α的值是多少？

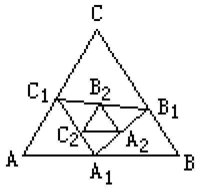


图101

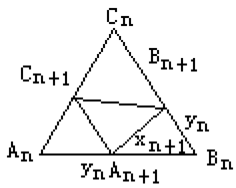


图102

【精析】 凭直觉意识到所有三角形面积形成无穷等比数列．为了证实这一想法，可从最简的情形入手，研究△$A_1B_1C_1$ 与△ABC 间的面积关系．令 $AB=x_0$，$A_1B_1=x_1$，$BB_1=y_0$，那么 $AA_1=y_0$，于是(如图 102)有：

$$x_0=y_0+x_1\cos\alpha+y_0\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}y_0+x_1\cos\alpha. \qquad ①$$

利用正弦定理，又有 $\dfrac{x_1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{y_0}{\sin\alpha}$.

即 $y_0=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x_1\sin\alpha$ ②

②代入①，得

$$x_0=\frac{3}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}x_1\sin\alpha+x_1\cos\alpha$$

$$=(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha)x_1=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})x_1.$$

于是 $\dfrac{x_1}{x_0}=\dfrac{1}{2\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})}$

我们完全可以用x_n替换x_0，x_{n+1}替换x_1(如图102，)即有$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})}$，也就是$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})^2=\dfrac{1}{4\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}$.

因此数列$\{S_n\}$是首项为S_1，公比为$\dfrac{1}{4\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}$的等比数列，这里

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，即$\dfrac{\pi}{6}<\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$．

所以$\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{4\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}<1$，

故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{1}{4\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}}$

依题设

$S_{\triangle ABC}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$，而$S_1=S_0\times\dfrac{1}{4\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}$，

$S_0=S_{\triangle ABC}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{S_{\triangle ABC}\frac{1}{4\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}}{1-\frac{1}{4\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{6})}}$

化简得 $\sin2(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$．

注意到$\theta<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，所以$\alpha=\dfrac{\pi}{12}$(惟一解)．

697．设实数 $a\neq0$，数列$\{a_n\}$是首项为 a，公比为$-a$ 的等比数列，记

$b_n=a_n\lg|a_n|$，$n=1$，$2\cdots$，

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，$n=1$，2，$\cdots$．

(1)求证：当$a\neq-1$时，对任意自然数n，都有$S_n=\dfrac{a\lg|a|}{(1+a)^2}[1+(-1)^{n+1}(1+n+na)a^n]$．

(2)诺 $0<a<1$ 时，是否存在自然数 M，使得对任意自然数 n 都有 $b_n\leq b_M$？证明你的结论．

【解答】 (1)依题设，有

$a_n=a(-a)^{n-1}=(-1)^{n-1}a^n$，

从而 $b_n=a_n\lg|a_n|=(-1)^{n-1}na^n\lg|a|(n=1,2\cdots)$．

于是 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=a\lg|a|[1-2a+3a^2+\cdots+(-1)^{n-1}\times na^{n-1}]$， ①

$aS_n=a\lg|a|[a-2a^2+3a^3+\cdots+(-1)^{n-1}na^n]$． ②

①+②，得$(1+a)S_n=a\lg|a|[1-a+a^2+\cdots+(-1)^{n-2}a^{n-1}+(-1)^{n-1}a^n]$.

因为 $a\neq-1$，所以 $1+a\neq0$，

故 $S_n=\dfrac{a\lg|a|}{1+a}[\dfrac{1-(-a)^n}{1-(-a)}+(-1)^{n-1}na^n]$.

即 $S_n=\dfrac{a\lg|a|}{(1+a)^2}[1+(-1)^{n+1}a^n(1+n+na)]$.

(2)这是一个数列中最大项存在性问题，因 $0<a<1$，故 n 为奇数时，$b_n<0$；n 为偶数时，$b_n>0$．只需考察 $n=2k$，$k\in N$ 时的情形．对于 $b_{2k}=2ka^{2k}\times\lg a^{-1}$，我们以函数的观点来研究它的单调性，作比

$$\frac{b_{2k+2}}{b_{2k}}=\frac{(2k+2)a^2}{2k}=(1+\frac{1}{k})a^2,$$

显然，当$\dfrac{1}{k}\geq\dfrac{1}{a^2}-1$时，$(1+\dfrac{1}{k})a^2\geq1$；当$\dfrac{1}{k}<\dfrac{1}{a^2}-1$时，$(1+\dfrac{1}{k})a^2<1$，这说明取$m$为不大于$(\dfrac{1}{a^2}-1)^{-1}$的最大整数，那么

$b_{2k+2}\geq b_{2k}(k\leq m)$，且 $b_{2k+2}<b_{2k}(k>m)$，

即有 $b_2\leq b_4\leq\cdots\leq b_{2m+2}$，且

$b_{2m+2}>b_{2m+4}>\cdots$，

所以可取 $M=2m+2$，则对任何自然数，都有 $b_n\leq b_M$.

698．设各项均为正数的数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足：a_n，b_n，a_{n+1}成等差数列，b_n，a_{n+1}，b_{n+1}成等比数列，且 $a_1=1$，$b_1=2$，$a_2=3$，求通项 a_n，b_n.

【解答】 由已知，得

$2b_n=a_n+a_{n+1}$， ①

$a_{n+1}^2=b_nb_{n+1}$. ②

因$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为正数列，则由②得

$a_{n+1}=\sqrt{b_nb_{n+1}}$，$a_{n+2}=\sqrt{b_{n+1}b_{n+2}}$.

代入①式，并同除以$\sqrt{b_{n+1}}$，得

$2\sqrt{b_{n+1}}=\sqrt{b_n}+\sqrt{b_{n+2}}$，

即$\{\sqrt{b_n}\}$为等差数列.

因$b_1=2$，$a_2=3$，$a_2{}^2=b_1b_2$，则$b_2=\dfrac{9}{2}$，所以

$$\sqrt{b_n}=\sqrt{2}+(n-1)(\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{2})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$$

故 $b_n=\dfrac{(n+1)^2}{2}$.

$$a_n=\sqrt{b_{n-1}b_n}=\sqrt{\frac{n^2}{2}\times\frac{(n+1)^2}{2}}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\ (n\geq 1).$$

699．$n^2(n\geq 4)$个正数排成 n 行 n 列：

a_{11}，a_{12}，a_{13}，…，a_{1n}

a_{21}，a_{22}，a_{23}，…，a_{2n}

…………

a_{n1}，a_{n2}，a_{n3}，…，a_{nn}

其中每一行的数成等差数列．

每一列的数成等比数列，并且所有公比相等，已知$a_{24}=1$，$a_{42}=\frac{1}{8}$，$a_{43}=\frac{3}{16}$，求$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

【精析】 数列 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 中通项为 $a_{kk}(1\leq k\leq n)$，由于第一行各数成等差数列，a_{11}，a_{12}，…，a_{1k} 每一列各数成等比数列，因此可考虑以 a_{1k} 为“中途点”，如图 103，建立“三角”关系．

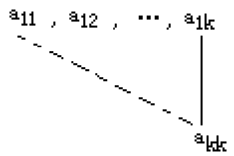


图103

【解答】 设数列$\{a_{1k}\}$的公差为 d，数列$\{a_{ik}\}$(i=1，2，…n)的公比为 q，则

$a_{1k}=a_{11}+(k-1)d$，

$a_{kk}=[a_{11}+(k-1)d]q^{k-1}$，于是，为计算 a_{kk}，须先求 a_{11}，d，q．依题设，可得

$$\begin{cases}a_{24}=(a_{11}+3d)q=1,\\ a_{42}=(a_{11}+d)q^3=\frac{1}{8},\\ a_{43}=(a_{11}+2d)q^3=\frac{1}{8}+dq^3=\frac{3}{16}.\end{cases}$$

解得 $a_{11}=d=q=\pm\frac{1}{2}$.

又n^2个数都是正数，所以$a_{11}=d=q=\frac{1}{2}$，从而$a_{kk}=\frac{k}{2^k}$.

故$S=\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\times\frac{1}{2^n}$.

则 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+2\times\frac{1}{2^3}+\cdots+(n-1)\frac{1}{2^n}+n\frac{1}{2^{n+1}}$.

两式相减，得

$S=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$．此即为所求．

700．证明：数列$\{a_n\}(a_n\neq0)$为等差数列的充要条件是：对任何整数$k>2$，等式$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{k-1}{a_1a_k}$成立．

【证明】　必要性．设$\{a_n\}$是等差数列，d 为公差，因此对任何 n ≥1有$a_{n+1}-a_n=d$，从而$\frac{1}{a_ia_{i+1}}\frac{1}{d}(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}})(i\geq1)$．

故$\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{1}{a_ia_{i+1}}=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_k})=\frac{1}{d}\frac{a_k-a_1}{a_1a_k}=\frac{k-1}{a_1a_k}$．

充分性．因对任何整数 k＞2，有已知等式成立，令 k=3，则

$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3}\Rightarrow a_1+a_3=2a_2$．

再分别令 k=n，n－1，n－2，则有

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}．\qquad ①$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}=\frac{n-2}{a_1a_{n-1}}．\qquad ②$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-2}}=\frac{n-3}{a_1a_{n-2}}．\qquad ③$$

①－②，得$\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}-\frac{n-2}{a_1a_{n-1}}$　④

②－③，得$\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}=\frac{n-2}{a_1a_{n-1}}-\frac{n-3}{a_1a_{n-2}}$　⑤

$\frac{④}{⑤}$并整理，得$2a_{n-1}=a_n+a_{n-2}$．

上式说明，当 n≥3 时，a_{n-2}、a_{n-1}、a_n成等差数列，由 n 的任意性，知$\{a_n\}$为等差数列．

701．设a_1，a_2，a_3，a_4，a_5为非零实数，且$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5)^2$．

求证：a_1，a_2，a_3，a_4，a_5成等比数列．

【证法 1】　将已知等式分别展开、化简，并移项配方，得$(a_1a_3-a_2^2)^2+(a_1a_4-a_2a_3)^2+(a_2a_4-a_3^2)^2+(a_1a_5-a_2a_4)^2+(a_3a_5-a_4^2)^2+(a_2a_5-a_3a_4)^2=0$．故$a_1a_3=a_2^2$，$a_1a_4=a_2a_3$，$a_2a_4=a_3^2$，

$a_1a_5=a_2a_4$，$a_3a_5=a_4^2$，$a_2a_5=a_3a_4$．

因而有$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}$．

故a_1，a_2，a_3，a_4，a_5成等比数列．

观察所给条件式，联想柯西不等式的结构，留意等号成立条件，可在不等中求出相等．

【证法 2】　由柯西不等式，知$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)\times(a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)\geq(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5)^2$，当且仅当$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}$时等号成立．

故欲使$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)=(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5)^2$成立，必须且只须$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}$．

即 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 成等比数列．

类比上述证明过程，便容易将其推广到一般情况．即若数列$\{a_n\}(n\geq3，a_n\neq0)$满足条件$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)^2(a_2^2+a_3^2+\cdots a_n^2)=(a_1a_2$ $a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5+\cdots+a_{n-1}a_n)^2$，则数列$\{a_n\}$是等比数列．

第八章　复数

一、选择题

702．如果复数 z 满足|z＋i|＋|z－i|=2，那么|z＋i＋1|的最小值是

[　　]

A．1　B．$\sqrt{2}$　C．2　D．$\sqrt{5}$

【解答】　取满足条件的复数 z=－i，则有|－i＋i＋1|=1，这说明|z＋i＋1|的最小值不大于 1，故应选 A．

703．设复数$z=i^2+\sqrt{3}i$，那么argz是

[　　]

A．$\frac{5\pi}{6}$　B．$\frac{\pi}{3}$　C．$\frac{2\pi}{3}$　D．$-\frac{4\pi}{3}$

【解答】　复数$z=i^2+\sqrt{3}i=-1+\sqrt{3}i$，所对应向量应在第二象限，且位于二、四象限平分线的上方．故有$\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$，从而选C．

704．如果 z∈C，且 z^2∈R，那么 z 是

[　　]

A．实数　　B．纯虚数

C．实数或纯虚数　　D．z 有可能是非纯虚数的虚数

【精析】　设$z=a+bi$，则$z^2=a^2-b^2+2abi$，$z^2\in R\Leftrightarrow 2ab=0\Leftrightarrow a=0$或 b=0．

当 a=0 时，z 是纯虚数，或 z=0；

当 b=0 时，z 是实数．

【解答】　C

705．复数$1+i$对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{2\pi}{3}$，所得到的向量对应的复数是

[　　]

A．$\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$　　B．$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$

C．$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$　　D．$\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$

【解答】　把复数 $1+i$对应向量按顺时针方向旋转$\frac{2\pi}{3}$，所得向量应在第四象限，且位于二、四象限平分线的下方，故应选 B．

706．已知复数 3－4i 的辐角主值为 θ，则 8＋6i 的辐角主值是

[　　]

A．$\frac{\pi}{2}-\theta$　　B．$2\pi-\theta$

C．$\theta-\frac{3\pi}{2}$　　D．$\theta+\frac{\pi}{2}$

【解答】 $\because |\frac{-4}{3}| \neq |\frac{6}{8}|$，∴排除B，

又$\because \theta \in (\frac{3\pi}{2}，2\pi)$，

$\therefore \frac{\pi}{2}-\theta \in (-\frac{3\pi}{2}，-\pi)$，$\theta-\frac{3\pi}{2} \in (0，\frac{\pi}{2})$，

$\theta+\frac{\pi}{2} \in (2\pi，\frac{5\pi}{2})$.

∴排除A、D，故选C.

707．已知复数z的模为2，则$|z-i|$的最大值为

[　　]

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．3

【解答】 如图104，由于z的模为2，则复数z在复平面的对应点是以原点为圆心，以z为半径的圆．设i的对应点为B，则求$|z-i|$的最大值就相当于求圆上的点和点B之间的最大距离．显然，AB的长就是所求的最大距离．易求$|AB|=3$．故选D．

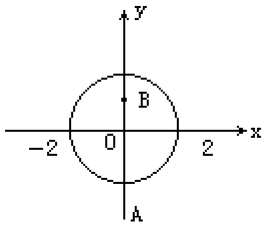


图104

708．已知复平面内，复数$z_1=2i$，对应点为A；$Z_2=-1$，对应点为B．将向量$\overrightarrow{AB}$绕点A逆时针方向旋转90°得向量$\overrightarrow{AC}$，则线段AC的中点D对应的复数为

[　　]

A．$2+i$　　B．$1-\frac{3}{2}i$

C．$1+\frac{3}{2}i$　　D．$2-i$

【解答】 只要依题意画出图形105，观察即可得结论，选C．

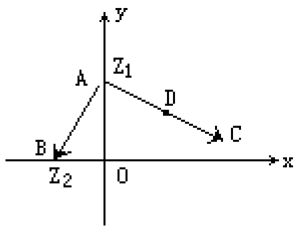


图105

709．方程$z^6=\bar{z}$在复数集上解的个数为

[　　]

A．5个　B．6个　C．7个　D．8个

【解答】 原方程两边同时取模$|z^6|=|\bar{z}|$，

即$|z^6|=|z|$，从而$|z|=0$，或$|z|=1$．

由$|z|=0$得$z=0$，显然是原方程的一根．

由$|z|=1$，方程两边同乘以z得

$z^7=z\times\bar{z}=|z|^2=1$，

而此方程显然有七个互不相等的非零解．

故原方程有八个解，答案应选D．

710．复数$\dfrac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$等于

[　　]

A．$1+\sqrt{3}i$　　B．$-1+\sqrt{3}i$

C．$1-\sqrt{3}i$　　D．$-1-\sqrt{3}i$

【精析】　本题运用复数的四则运算法则，可得出答案．但计算呆板费工费时．如果能注意到四个选项的复数在复平面上对应点分别恰在不同的四个象限内，那么，只须考虑复数的辐角之大小即可估算出正确的答案．事实上，$(2+2i)^4$和$(1-\sqrt{3}i)^5$的辐角主值分别为π和$\dfrac{\pi}{3}$，因而所求复数辐角主值为$\dfrac{2\pi}{3}$，复数对应点在第二象限，排除A，C，D，选B．

711．复数－i的1个立方根是i，它的另外2个立方根是

[　　]

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$　　B．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$

C．$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$　　D．$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$

【精析】　由题目所给信息，会联想到我们熟悉的1的2个虚数立方根，即$(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^3=1$，

为了得到－i的立方根，在等式两边同时乘以－i，考虑到$i^3=-i$，将左乘的$-i$换为i^3，得$i^3\times(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^3=-i$，

再逆用积的乘方的运算法则，得

$[i\times(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)]^3=-i$，

即$(-\dfrac{1}{2}i\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2})^3=-i$．选D．

二、填空题

712．设复数$z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0<\theta<\pi)$，$\omega=\dfrac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$，已知$|\omega|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\arg\omega<\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=$________．

【解答】 $\omega=\dfrac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}=\dfrac{1-\cos4\theta+i\sin4\theta}{1+\cos4\theta+i\sin4\theta}$

$=\dfrac{2\sin^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}{2\cos^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}$

$=\tan2\theta(\sin4\theta+i\cos4\theta)$，

从而得$|\omega|=|\tan2\theta|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

又∵$0<\theta<\pi$，∴$0<2\theta<2\pi$．

①当$\tan2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，得$\theta=\dfrac{\pi}{12}$或$\dfrac{7\pi}{12}$，则有$\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$，

这时$\arg\omega=\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$，适合题意．

②当$\tan2\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$时，得$\theta=\dfrac{5\pi}{12}$或$\dfrac{11\pi}{12}$，则有

$\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi)$，

这时$\arg\omega=\dfrac{11}{6}\pi>\dfrac{\pi}{2}$，不适合题意，舍去，

综合①、②知$\theta=\dfrac{\pi}{12}$或$\dfrac{7\pi}{12}$．

713．设复数z满足$\arg(z-3\bar{z})=\dfrac{5}{4}\pi$，$|z+1|=\sqrt{10}$，则复数$z=$______．

【解答】 设 z=a＋bi(a，b∈R)，则有

$z-3\bar{z}=(a+bi)-3(a-bi)=-2a+4bi$．

∵ $\arg(z-3\bar{z})=\dfrac{5}{4}\pi$， ①

∴ $\dfrac{4b}{-2a}=\tan\dfrac{5\pi}{4}=1$，即$a=-2b$ ②

由$|z+1|=\sqrt{10}$，得$(a+1)^2+b^2=10$ ③

解②、③得$\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-18/5\\b=9/5\end{cases}$

∴ $z=2-i$ 或 $z=-\dfrac{18}{5}+\dfrac{9}{5}i$．

由复数辐角主值概念知①与②并非等价，应限制点(－2a，4b)在第三象限，即应有$-2a<0$且$4b<0$，故$z=-\dfrac{18}{5}+\dfrac{9}{5}i$不合要求，应舍去．

答案为 z=2－i．

714．设|z|=1，z^5＋z=1，则 z 的值等于________．

【解答】 由$|1-z|=|z^5|=|z|^5=1$，有|z－1|=1，可见两圆|z－1|=1与|z|=1 的交点就是 z 的值，由图 106 中易见

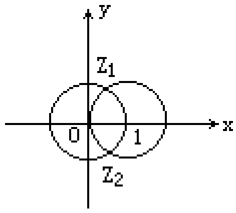


图106

$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

$z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

检验后可知，z_1和z_2都是原方程的解．

715．已知复数$z=1-\sin\theta+i\cos\theta(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$，则z的共轭复数$\bar{z}$的辐角主值等于________．

【解答】 设$\bar{z}=1-\sin\theta-i\cos\theta$的辐角主值为α，由$1-\sin\theta>0$，$-\cos\theta>0$，知α在$(0,\frac{\pi}{2})$上，又

$$\tan\alpha=\frac{-\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)}{1+\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)}=\tan(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})，$$

据$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$知$0<\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，

故得$\alpha=\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$．

716．复数z_1、z_2满足$|z_1|=|z_1+z_2|=3$，$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，k是任意实数，则$(\frac{z_1}{z_2})^{3k}+(\frac{z_1}{z_2})^{3k+1}+(\frac{z_1}{z_2})^{3k+2}$的值为__________

【精析】 本题的常规法是设$z_1=3(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$z_2=r(\cos\beta+i\sin\beta)$．但是若采用几何变换求解答则比较容易．

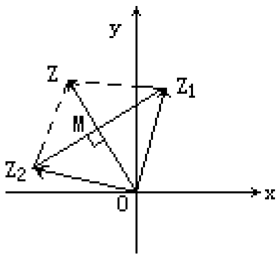


图107

【解答】 以复数z_1，z_2对应向量$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$为邻边作▱OZ_1ZZ_2，设其对角线交于M如图107，则由复数运算的几何意义知

$|Z_1Z_2|=|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，

$|OZ|=|z_1+z_2|=3$，

在△OZ_1M中，$|OM|=\frac{3}{2}$，$|Z_1M|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴$|OZ_1|^2=|OM|^2+|Z_1M|^2$，$OM\perp Z_1M$，

∴▱OZ_1ZZ_2为菱形，

∴$|OZ_2|=|z_2|=3$，

$\tan\angle Z_1OM=\frac{|MZ_1|}{|MO|}=\sqrt{3}$，

∴$\angle Z_1OM=60°$，$\angle Z_1OZ_2=120°$，

∴ $\frac{z_1}{z_2}=\cos120°+i\sin120°=w$或$\frac{z_1}{z_2}=\cos240°+i\sin120°=w$

∴ $(\frac{z_1}{z_2})^{3k}+(\frac{z_1}{z_2})^{3k+1}+(\frac{z_1}{z_2})^{3k+2}=0$。

717．已知z是虚数，$\frac{z^2}{\bar{z}}\in R$，设$z-w\bar{z}=0$，则$|w|=$__________，argw=________。

【解答】 依命题1，由

$\frac{z^2}{\bar{z}}\in R\Rightarrow\frac{z^2}{\bar{z}}=\frac{(\bar{z})^2}{z}\Rightarrow(\frac{z}{\bar{z}})^3=1$，

∵z是虚数，∴ $\frac{z}{\bar{z}}$是虚数，

∴ $\frac{z}{\bar{z}}$是1的两个虚立方根，

∴ $\frac{z}{\bar{z}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，又$w=\frac{z}{\bar{z}}$，

∴$|w|=|-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i|=1$，$\arg w=(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{2\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}$。

718．设$z+\frac{4}{z}\in R$，且$|z-2|=2$，则复数z等于____________

【解答】 ∵$z+\frac{4}{z}\in R$，

∴$(z+\frac{4}{z})-(\bar{z}+\frac{4}{\bar{z}})=0$，

∴ $(z-\bar{z})(1-\frac{4}{z\bar{z}})=0$，

∴ $z=\bar{z}$或$|z|=2$。

(1)当$z=\bar{z}$时，则$z\in R$，且由条件知$z\neq0$，由$|z-2|=4$知$z=4$。

(2)当|z|=2时，则 z是两圆|z|=2及|z－2|=2的交点对应的复数，画图观察分析(图略)，易得$z=1\pm\sqrt{3}i$。

故合条件的复数有三个：

$z_1=4$，$z_{2,3}=1\pm\sqrt{3}i$。

719．已知$f(z)=|1+z|-\bar{z}$，且$f(-z)=10+3i$，复数$z=$________．

【解答】 设z=x+yi，则

$f(-z)=|1-x-yi|-(-x+yi)=10+3i$

即$(\sqrt{(1-x)^2+y^2}+x)-yi=10+3i$，

由复数相等条件得$\begin{cases}\sqrt{(1-x)^2+y^2}+x=10\\ -y=3\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x=5\\ y=-3\end{cases}$ 故$z=5-3i$．

720．已知复数z_1、z_2满足$|z_1|=|z_2|=1$，且

$z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则$z_1=$________，$z_2=$________．

【解答】 由条件知$-(z_1+z_2)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，两边取模得

$|-(z_1+z_2)|=1$．

又$|z_1|=|z_2|=1$，$z_1+z_2-(z_1+z_2)=0$，

$\therefore z_1,z_2,-(z_1+z_2)$在复平面上的对应点均匀地分布在单位圆上．而$-(z_1+z_2)$是1的一个立方根，由复数方根的几何意义知$z_1$、$z_2$是1的另外两个立方根．

故$z_1=1$，$z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

或$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_2=1$．

721．设复数$z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$u=\cos\beta+i\sin\beta$，且$z+u=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$，则$\tan(\alpha+\beta)$的值为________．

【解答】 $\because|z|=|u|=|z+u|=1$，

$\therefore 1=|z+u|^2=(z+u)\overline{(z+u)}$

$=(z+u)(\bar{z}+\bar{u})=(z+u)(\frac{1}{z}+\frac{1}{u})$

$=\frac{(z+u)^2}{zu}$，

$\therefore zu=(z+u)^2$，

即$\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

$=(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i)^2=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$，

$\therefore\sin(\alpha+\beta)=\frac{24}{25}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}$，

$\therefore\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{24}{7}$．

722．已知$z=-\frac{2}{1+\sqrt{3}}i$，则$1+z+z^2+\cdots+z^{1997}$的值等于________．

【解答】 $\because z=-\frac{2}{1+\sqrt{3}i}=-\frac{2(1-\sqrt{3}i)}{4}$

$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\omega$

$\therefore 1+z+z^2+\cdots+z^{1997}$

$=1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{1997}$

$=\frac{1-\omega^{1998}}{1-\omega}$

$=\frac{1-\omega^2}{1-\omega}=1+\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$．

723．若复数z满足$z+|z|=2+8i$，则$|z|$的值等于________．

【解答】 由已知$z=(2-|z|)+8i$．

两边分别取模$|z|=\sqrt{(2-|z|)^2+8^2}$，

平方整理得 $|z|=17$．

724．已知$|z_1|=|z_2|=4$，且$|z_1+z_2|=4\sqrt{2}$，则$|z_1-z_2|=$________．

【精析】 由已知条件不难联想到本题隐含的图形(图 108)，$|z_1+z_2|$和$|z_1-z_2|$是以$\overline{OZ_1}$和$\overline{OZ_2}$为两邻边的平行四边形的两条对角线的长，由$|z_1|=|z_2|=4$．$|z_1+z_2|=4\sqrt{2}$知：四边形为正方形，故另一条对角线长$|z_1-z_2|=4\sqrt{2}$．

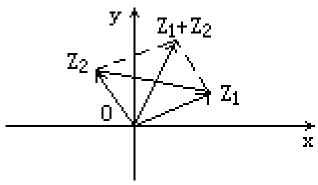


图 108

725．已知：复数$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$，$\arg z_1=\frac{\pi}{3}$，$\arg z_2=\frac{\pi}{6}$，$\arg z_3=\frac{7\pi}{8}$，则$\arg\frac{z_1+z_2}{z_3}=$________．

【解答】 $\because \frac{z_1}{z_2}=\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$，

$\therefore z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2$，$|z_1|^2=|z_2|^2$，$|z_1|=|z_2|$，

$\therefore z_1=|z_1|(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$，

$z_2=|z_1|(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$，

$z_3=|z_3|(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8})$，

$$\therefore \frac{z_1+z_2}{z_3}=\frac{|z_1|(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})}{|z_3|(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8})}$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_3|}\times\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}}$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_3|}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\times\frac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}}$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_3|}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}[\cos(-\frac{5\pi}{8})+i\sin(-\frac{5\pi}{8})]$$

$$=\frac{|z_1|}{|z_3|}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}[\cos(\frac{11\pi}{8})+i\sin(\frac{11\pi}{8})]，$$

$\therefore \arg\frac{z_1+z_2}{z_3}=\frac{11\pi}{8}$．

726．**设**$z_1=\sqrt{3}+i$，$z_2=1-i$，$z_3=\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}$，**则**$\frac{z_1\times z_2^3}{i^9\times \bar{z}_3^{5}}$**的值为________．**

【精析】　这是一个含乘、除、高次乘方的式子，先把各复数化为三角式再代入运算．

【解答】　$\because z_1=2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$；

$z_2=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})]$；

$\bar{z}_3=\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}=\cos(-\frac{5\pi}{12})+i\sin(-\frac{5\pi}{12})$，

$i^9=i^8\times i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$．

$$\therefore \frac{z_1\times z_2^3}{i^9\times \bar{z}_3^{5}}=\frac{2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})(\sqrt{2})^3[\cos(-\frac{3\pi}{4})+i\sin(-\frac{3\pi}{4})]}{(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})[\cos(-\frac{25\pi}{12})+i\sin(-\frac{25\pi}{12})]}$$

$=4\sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{25\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}-$

$\frac{\pi}{2}+\frac{25\pi}{12})]$

$=4\sqrt{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-4\sqrt{2}$.

727．复数 z 在复平面内对应的点为 Z，将点 Z 绕坐标原点按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$，再向左平移1个单位，向下平移1个单位，得到点 Z_1，此时点 Z_1 与 Z 恰好关于坐标原点对称，则复数 z＝________．

【精析】 如图109，$\vec{OZ}$ 按逆时针方向转 $\frac{\pi}{3}$ 后的复数是 $\vec{OM_1}$，再向左平移1个单位后的复数是 $\vec{OM_2}=\vec{OM_1}+\vec{M_1M_2}$，再向下平移1个单位后的复数是 $\vec{OZ_1}=\vec{OM_2}+\vec{M_2Z_1}=\vec{OM_1}+\vec{M_1M_2}+\vec{M_2Z_1}$

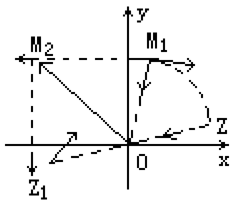


图 109

【解答】 设 z＝a＋bi(a，b∈R)，则 z_1＝－a－bi，依题意得：$-a-bi=(a+bi)(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})+(-1)+(-i)$，

即 $-a-bi=(a+bi)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(-1-i)$，

整理得：$(3a-\sqrt{3}b-2)+(\sqrt{3}a+3b-2)i=0$，

由复数相等得：$\begin{cases}3a-\sqrt{3}b-2=0\\ \sqrt{3}a+3b-2=0\end{cases}$

解之得：$\begin{cases}a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\\ b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\end{cases}$

故所求 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6})i$.

728．**已知复数 z 满足 $(z+1)(\bar{z}+1)=|z|^2$，且 $\frac{z-1}{z+1}$ 为纯虚数，则 $z=$ ________．**

【精析】 求 z 可先设出 z＝a＋bi(a，b∈R)，代入已知条件得出关于 a、b 的方程组，解之即得．

【解答】 ∵$(z+1)(\bar{z}+1)=|z|^2$，

∴ $z\times\bar{z}+z+\bar{z}+1=|z|^2$，

∴ $|z|^2=z\times\bar{z}$，∴$z+\bar{z}+1=0$ ①

设 z＝a＋bi(a，b∈R)，代入①得：

$2a+1=0$，即 $a=-\frac{1}{2}$ ②

又∵ $\frac{z-1}{z+1}$为纯虚数，即$\frac{a-1+bi}{a+1+bi}$为纯虚数，

∴ $\frac{(a-1)(a+1)+b^2}{(a+1)^2+b^2}=0$ ③

由②③得$a=-\frac{1}{2}$，$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

(或这样解：∵ $\frac{z-1}{z+1}$为纯虚数，∴ $\frac{z-1}{z+1}+\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=0$，∴$z\bar{z}=1$，即$|z|=1$，又∵z的实部为$-\frac{1}{2}$，∴z＝ω或$z=\overline{\omega}$。

729．若虚数 z 满足 $z^3=8$，则 z^3+z^2+2z+2 的值为________.

【解答】 ∵$z^3-2^3=0$，

∴$(z-2)(z^2+2z+2^2)=0$.

∵虚数 $z\neq2$，

∴$z^2+2z+2^2=0$.

∴$z^3+z^2+2z+2=z^3+(z^2+2z+2^2)-2=8-2=6$.

730．已知 z_1，z_2 是实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两虚根，且 $\frac{z_1^2}{z_2}$是实数，则$\frac{z_1}{z_2}$的值为__________.

【解答】 ∵z_1，z_2 是实系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两虚根.

∴$z_1=\bar{z}_2$。

又 $\frac{z_1^2}{z_2}\in\mathbf{R}\Leftrightarrow\frac{z_1^2}{z_2}=\frac{\bar{z}_1^2}{\bar{z}_2}=\frac{z_2^2}{z_1}$

∴$z_1^3=z_2^3$。

从而$(z_1-z_2)(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)=0$

由题意可知 $z_1\neq z_2$，

∴$z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$，

$(\frac{z_1}{z_2})^2+\frac{z_1}{z_2}+1=0$。

∴ $\frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

731．已知$z\in\mathbf{C}$，$2z-i\bar{z}=1$，则$z=$__________

【精析】 常规解法是设 z＝a＋bi，a，b∈R，代入方程后利用复

数相等的充要条件解之．现在我们用性质 4 求解．

【解答】 $2z-i\bar{z}=1$

两边取共轭复数得 $2\bar{z}+iz=1$．

从以上两式消去 $\bar{z}$，得 $z=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i$

732．已知 $|z-1|=2$，且 z 为纯虚数，则 z=________．

【解答】 由 $|z-1|=2$，得

$(z-1)(\bar{z}-1)=4$． ①

∵ z 为纯虚数，∴ $z=-\bar{z}$．

代入①得：$(z-1)(-z-1)=4$，

$(z-1)(z+1)=-4$，

∴ $z^2-1=-4$，即 $z^2=-3$

∴ $z=\pm\sqrt{3}i$．

733．$\dfrac{z+\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{3}}$ 为纯虚数，则 $|z|=$ __________．

【精析】 设 $\dfrac{z+\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{3}}=\omega$，切入思路有：(1)联想纯虚数定义，若 $\omega=a+bi$(a，b∈**R**)，则 $a=0$ 且 $b\neq0$；(2) $\omega=-\overline{\omega}$；(3) $\omega^2<0$；(4) $\omega i\in\mathbf{R}$；(5)设 $\omega=ai$($a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0$)等．

尽管切入思路较多，但联系结论(求|z|)看，选择(5)较好，因为思路(5)可通过假设解出 z，求|z|就显得容易了．

【解答】 设 $\dfrac{z+\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{3}}$($a\in\mathbf{R}$，$a\neq0$)，则 $z+\frac{1}{3}=zai-\frac{1}{3}ai$，$z=\dfrac{1+ai}{3(ai-1)}$．

故 $|z|=\dfrac{|1+ai|}{3|(ai-1)|}=\dfrac{1}{3}$．

734．已知 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\sqrt{2}$，则：

$\left|\dfrac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=$ __________．

【解答】 ∵ $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\sqrt{2}$，

$\therefore z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=z_3\overline{z_3}=2$，

$\therefore \dfrac{1}{z_1}=\dfrac{\overline{z_1}}{2}$，$\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{\overline{z_2}}{2}$，$\dfrac{1}{z_3}=\dfrac{\overline{z_3}}{2}$

$\therefore \left|\dfrac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|$

$=\left|\dfrac{\frac{1}{2}(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})}{z_1+z_2+z_3}\right|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|\overline{z_1+z_2+z_3}|}{z_1+z_2+z_3}=\dfrac{1}{2}$.

三、解答题

735．已知 $z\in C$，且 $11z^{10}+10iz^9+10iz-11=0$，求证 $|z|=1$．

【证明】 由已知等式得 $z^9=\dfrac{11-10iz}{11z+10i}$，设 $z=a+bi$，a，$b\in\mathbf{R}$，

$$|z^9|^2=\left|\frac{11-10iz}{11z+10i}\right|^2=\frac{11^2+220b+10^2(a^2+b^2)}{11^2(a^2+b^2)+220b+10^2}\qquad①$$

(1)若 $|z|\geq1$，则由①式可得

$11^2+220b+10^2(a^2+b^2)\geq11^2(a^2+b^2)+220b+10^2$，

整理得 $a^2+b^2\leq1$，即 $|z|\leq1$，由此得 $|z|=1$．

(2)若设 $|z|\leq1$，同理可得 $|z|\geq1$，$\therefore|z|=1$，

由(1)(2)可得 $|z|=1$．

736．设 x，$y\in\mathbf{R}$，如果复数 $z_1=2-\sqrt{3}x+xi$ 与复数 $z_2=\sqrt{3}y-1+(\sqrt{3}-y)i$ 的模相等，且 $\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\pi}{2}$，求复数 $\left(\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)^{10}$．

【精析】 由 $|z_1|=|z_2|$ 及 $\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\pi}{2}$，得 $\dfrac{z_1}{z_2}=i$，即 $z_1=z_2i$，从而可根据两复数相等的充要条件求出实数 x，y 的值．

【解答】 $\because|z_1|=|z_2|$，$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\dfrac{z_1}{z_2}=i$，即 $z_1=z_2i$

$\therefore 2-\sqrt{3}x+xi=[\sqrt{3}y-1+(\sqrt{3}-y)\cdot i]i$

即 $(2-\sqrt{3}x)+xi=(y-\sqrt{3})+(\sqrt{3}y-1)i$

根据两复数相等的充要条件，得

$$\begin{cases}2-\sqrt{3}x=y-\sqrt{3}.\\ x=\sqrt{3}y-1\end{cases}$$

解得 $x=y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore z_1=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})i$，$z_2=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})i$

$\therefore (\frac{z_1+z_2}{2})^{10}=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10}=(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10}=\omega^{10}=\omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

其中$\omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

737．设 a≥0，在复数集 C 中解方程 $z^2+2|z|=a$.

【精析】 一般的复数方程应设 z＝x＋yi(x，y∈R)代入化简后可由复数相等的条件化为方程组求解．

由于本题中的参数 a≥0，因此要对 a 全面讨论．

【解答】 设 z=x＋yi(x，y∈R)，则原方程化为

$x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=a$，从而有

$$\begin{cases}x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a & ①\\ 2xy=0 & ②\end{cases}$$

由②知 y=0 或 x=0，可见原方程有实根或纯虚根，下面分别讨论：

(1)若 y＝0，则 z=x，将 y＝0 代入方程①可得：

$|x|^2+2|x|=a$，从而有$|x|=-1+\sqrt{1+a}(a\geq 0)$

∴ 当$a\geq 0$时，原方程有实数根$x=\pm(-1+\sqrt{1+a})$

(2)若 x＝0 时，则 z＝yi．将 x=0 代入方程①可得：

$-|y|^2+2|y|-a=0$

i．若 a＝0，则$-|y|^2+2|y|=0$，从而得$|y|=2$，此时得原方程的纯虚根为：z=±2i．

ii．若$0<a\leq 1$，则$|y|=1\pm\sqrt{1-a}$，这时原方程的纯虚根为$z=\pm(1+\sqrt{1-a})i$或$z=\pm(1-\sqrt{1-a})i$

iii．若$a>1$，这时$\sqrt{1-a}$不是实数，∴原方程无纯虚根．

综上可知：当 a=0 时，原方程有实根 0 和纯虚根±2i；当 0＜a＜1 时，原方程有实根$\pm(1+\sqrt{1+a})$、纯虚根$\pm(1+\sqrt{1-a})i$和$\pm(1+\sqrt{1+a})i$；当$a>1$时，原方程无虚根，只有实根$\pm(-1+\sqrt{1+a})$．

738．将复数$z=\tan\alpha+i(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$化为三角形式．

【解答】 $z=\tan\alpha+i(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+i$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}(\sin\alpha+i\cos\alpha)$$

$$=(-\frac{1}{\cos\alpha})(-\sin\alpha-i\cos\alpha)$$

$$=(-\frac{1}{\cos\alpha})[-\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)-i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)]$$

$$=(-\frac{1}{\cos\alpha})[\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+i\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)]$$

739．在复数集C中解方程

$(x+1)^4+(x+2)^4+(x+3)^4=2$．

【解答】 令 $t=\frac{(x+1)+(x+2)+(x+3)}{3}=x+2$，则原方程可变为

$(t-1)^4+t^4+(t+1)^4=2$．

展开、整理得 $t^2(t^2+4)=0$．

$\therefore t_1=t_2=0$，$t_3=2i$，$t_4=-2i$．

从而 $x_1=x_2=-2$，$x_3=-2+2i$，$x_4=-2-2i$．

740．已知t是使 $\frac{t+3}{t-3}$ 为纯虚数的复数，求复数 $z=t+3+3\sqrt{3}i$ 的模与

与幅角主值的最值．

【解答】 $\because t\in \mathbf{C}$ 且 $\frac{t+3}{t-3}$ 为纯虚数，

$\therefore$ 不妨设 $\frac{t+3}{t-3}=bi(b\in\mathbf{R}，b\neq 0，t\neq\pm 3)$，于是得

$t=\frac{3(1+bi)}{-1+bi}(t\neq\pm 3)$

等式两边取模得 $|t|=3$ 且 $t\neq\pm 3$．

$\because z=t+3+3\sqrt{3}i$，

$\therefore t=z-(3+\sqrt{3}i)$，

$\therefore |z-(3+3\sqrt{3}i)|=3$，

$(z\neq 3\sqrt{3}$ 且 $z\neq 6+3\sqrt{3}i)$ 可知z在复平面上所对应的点的轨迹是以O′$(3，3\sqrt{3})$为圆心，3为半径的圆，但不包括点$(0，3\sqrt{3})$和$(6，3\sqrt{3})$(如图 110所示)．

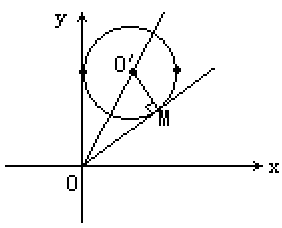


图 110

$\because$ 圆心O′$(3，\sqrt{3})$到原点的距离为6，圆的半径为3．

$\because |z|_{max}=9$，$|z|_{min}=3$．

过原点O作直线OM切⊙O′于M，连O′M，在Rt△OMO′中，

$|O'M|=3$，$|O'O|=6$，故$\angle MOO'=\frac{\pi}{6}$，又$\angle O'Ox=\frac{\pi}{3}$，故得

$(\arg z)_{\min}=\frac{\pi}{6}$，$\arg z$不存在最大值.

741．解方程 $x^6=-64$.

【解答】　因为$-64=64(\cos\pi+i\sin\pi)$，又知 n=6，所以

$x=2(\cos\frac{2k\pi+\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{6})$.

当$k=0$时，$x_1=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}+i$.

当$k=1$时，$x_2=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=2i$.

当$k=2$时，$x_3=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=-\sqrt{3}+i$.

当$k=3$时，$x_4=2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})=-\sqrt{3}-i$.

当$k=4$时，$x_5=2(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})=-2i$.

当$k=5$时，$x_6=2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})=\sqrt{3}-i$.

其六个根均匀分布在以原点为圆心、半径为 2 的圆周上，六个根为正六边形六个顶点(如图 111).

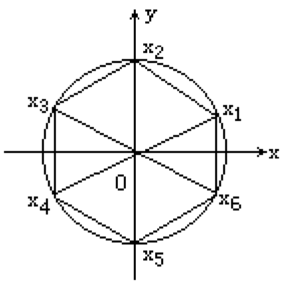


图 111

注意：－64 改写成三角式发生错误，不知利用复数的 n 次方根公式，或者知道利用公式，但是把公式记错了．对三角函数特殊角的函数值记不准，各个三角函数的函数值的正负号分辨不清楚，六个根的几何意义搞不清楚，由于以上种种原因而造成错误．

其所以发生以上种种错误，首先代数式化为三角式没有过关，要化为三角式，必须知道标准三角式的模型，其次得会准确地求出模和辐角，而要求出辐角主值必须对代数式有深刻的认识，比如 a＋bi(a，b∈R)，首先看 a，b 的符号，若 a＞0，b＜0，其辐角主值必在第四象限．利用求复数开 n 次方根公式时，计算弧度是重点，有些学生发生错误，这种类型题其解均匀分布在以原点为圆心、以$\sqrt[n]{|z|}$为半径的圆上，若知道这一点，也不会把题搞错，而能做出正确的解答．

系统学好复数代数式化为复数三角式的基本功．这种基本功包括对 a＋bi(a，b∈R)中 a、b 的深刻认识，有了 a、b 就有了模，有了 a、b

就有了辐角，在应用模$r=|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$时，防止发生计算上的错误，化为辐角主值时，看准 a、b 的符号，因为 a、b 的正负号决定第几象限角．这一切完成后，还要注意复数三角式的标准式，其标准式的模 r≥0，式子中间为“＋”号，正弦函数与余弦函数的辐角相等且余弦函数为实部，正弦函数为虚部．不要记错复数开 n 次方根公式，因为这个公式不好记．公式中的辐角为$\frac{2k\pi+\theta}{n}$，若求六次方根，或求 n (n∈N)次方根，k 从 0 开始，即第一个根为 k＝0，…，第二个根为 k=1，……，这种方程叫二项方程，形如 $a_nx^n+a_0=0$(a_0，a_n∈C，且 $a_n\neq0$)的方程叫做二项方程．任何一个二项方程都可以化成 $x^n=b$(b∈C)的形式，因此，都可以通过复数开方来求根．得出的根其几何位置一定在以原点为圆心、以$\sqrt[n]{|z|}$为半径均匀分布在圆上(z∈C)．

复数的代数式化为复数的三角式相当重要，不但复数的乘除法用三角式解起来方便，要用棣莫佛定理及复数的 n 次方根公式时，必须把复数的代数式化为复数的三角式．

742．设 $u^2\cos^2\theta+v^2\cot^2\theta=1$，令 z=u＋iv，求证：

$$\tan^2\theta=-\frac{1}{2}(1-|z^2|-|z^2-1|).$$

【证明】 $u^2\cos^2\theta+v^2\cot^2\theta=1$，就是uv平面上的椭圆$\frac{u^2}{\sec^2\theta}+\frac{v^2}{\tan^2\theta}=1$，它的两个焦点是(1，0)，(－1，0)．于是由椭圆定义，有

$$||z+1|+|z-1||=2|\sec\theta|$$

两边平方，得

$$|z+1|^2+|z-1|^2+2|z^2-1|=4\sec^2\theta \qquad (*)$$

据平行四边形法则，可知

$$|z+1|^2+|z-1|^2=2|z|^2+2|1|^2,$$

代入(*)得

$$|z^2|+|z^2-1|=2\sec^2\theta-1(|z|^2=|z^2|)$$

$$|z^2|+|z^2-1|=1+2\tan^2\theta$$

$$\therefore\tan^2\theta=-\frac{1}{2}(1-|z^2|-|z^2-1|).$$

743．已知方程 $z^2+(a+bi)z+(a-bi)=0$(a，b∈R)有实根，求 a．

【精析】 本题起关键作用的条件是原方程有实根，于是我们把实根代入方程，把方程左端的实虚部分开，再利用复数相等的条件得出两个关系式，进而得出结论．

【解答】 设方程的实根为α，那么

$$\alpha^2+(a+bi)\alpha+(a-bi)=0$$

即$(\alpha^2+a\alpha+a)+(b\alpha-b)i=0$

$$\therefore\begin{cases}\alpha^2+a\alpha+a=0 & (1)\\ b(\alpha-1)=0 & (2)\end{cases}$$

当$b\neq 0$时，由(2)式得$\alpha=1$，代入(1)得$a=-\frac{1}{2}$．

当 $b=0$ 时，原方程为

$z^2+az+a=0$

∵方程有实根，

$\therefore a^2-4a\geq 0$

$\therefore a\leq 0$ 或 $a\geq 4$．

744．在复平面上，一个正方形的四个顶点按逆时针方向依次为 Z_1，Z_2，Z_3，O(其中O为原点)，已知Z_2对应复数$z_2=1+\sqrt{3}i$，求Z_1和Z_3对应的复数．

【解答】 设 Z_1，Z_3 对应的复数分别为 z_1，z_3，依题意得

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})]$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i,$$

$$z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i,$$

745．证明当 $n\in N$ 时，方程$(z+1)^{2n}+(z-1)^{2n}=0$ 只有纯虚数根．

【证明】 显然 $z=1$ 不是原方程的根．

$\therefore$ 原方程可化为$(\frac{z+1}{z-1})^{2n}=-1$．

两边取模$|(\frac{z+1}{z-1})^{2n}|=|\frac{z+1}{z-1}|^{2n}=1$．

$\therefore|\frac{z+1}{z-1}|=1$，即$|z+1|=|z-1|$． (*)

设 $z=a+bi(a，b\in R)$代入(*)式易求得 $a=0$．

若 $b=0$，则 $z=0$ 明显不是原方程的根．

$\therefore b\neq 0$．故原方程只有纯虚数根．

746．求同时满足下列两个条件的所有复数z：(1)$z+\frac{10}{z}$是实数，且$1<z+\frac{10}{z}\leq 10$；(2)z的实部和虚部都是整数．

【解答】 依命题 1，

$\because z+\frac{10}{z}\in\mathbf{R}$.

$\therefore (z+\frac{10}{z})-(\overline{z+\frac{10}{z}})=0$

$\Rightarrow (z-\bar{z})+10(\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}})=0$

$\Rightarrow (z-\bar{z})(1-\frac{10}{z\bar{z}})=0$,

$\therefore z=\bar{z}$或$z\cdot\bar{z}=|z|^2=10$.

(1)当$z=\bar{z}$时，$z\in\mathbf{R}$，由$1<z+\frac{10}{z}\leq 6$知$z>0$，此时$z+\frac{10}{z}\geq 2\sqrt{10}>6$，故不等式$1<z+\frac{10}{z}\leq 6$无解.

(2)当$|z|^2=10$时，设$z=x+iy$，且x、y都是整数，那么只可能有$R(z)=x=\pm1$或±3，$I(z)=y=\pm3$或±1．但$R(z)=x<0$是不可能的！因若不然，由条件$1<z+\frac{10}{z}\leq 6$同乘以$z\cdot\bar{z}=|z|^2>0$，得

$|z|^2<(z+\frac{10}{z})\cdot z\cdot\bar{z}\leq 6|z|^2$ (*)

$\because (z+\frac{10}{z})\cdot z\cdot\bar{z}=z\cdot|z|^2+10\bar{z}$

当$x<0$时是一个负实数，

$\therefore$(*)式不可能成立，故只可能有$x>0$.

据上述分析可知，同时适合题设条件的复数有四个，$z_{1,2}=1\pm3i$，$z_{3,4}=3\pm1$.

747．设i为虚数单位，复数z和w满足$zw+2iz-2iw+1=0$，且$|z|=\sqrt{3}$.

求证：$|w-4i|$的值是一个常数，并求出这个常数.

【精析】 欲证$|w-4i|$为定值，即证w的对应点W的轨迹是以(0，4)为圆心的圆.

【证明】 由条件得$z(w+2i)=2iw-1$.

两边取模得$|z||w+2i|=|2i(w+\frac{1}{2}i)|$

即$3|w+2i|^2=4|w+\frac{1}{2}i|^2$，

$\therefore 3(w+2i)(\overline{w+2i})=4(w+\frac{1}{2}i)(\overline{w+\frac{1}{2}i})$

整理得

$(w-4i)(\bar{w}+4i)=27$，

两边取模得$|w-4i|^2=27$

即$|w-4i|=3\sqrt{3}$，命题获证.

748．已知$z\in C$，C为复数集合，且$|z|=1$，解方程$z^5+z=1$.

【解答】　原方程可化为 $z^5=1-z$．

两边取模 $|z^5|=|1-z|$ 即 $|z|^5=|z-1|$，

把已知 $|z|=1$ 代入得 $|z-1|=1$．

由此可知复数 z 表示的点是圆 $|z|=1$ 和圆 $|z-1|=1$ 的交点，易求 $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

经检验，z_1，z_2 都是原方程的解．

749．设复数 $z=3+3\sqrt{3}i+t$，$t\in C$，又 $\frac{t+3}{t-3}$ 是纯虚数，试求复数 z 对应的点 M 的轨迹．

【解答】　$\because \frac{t+3}{t-3}$ 纯虚数，依命题2知 $\frac{t+3}{t-3}+\frac{\bar{t}+3}{\bar{t}-3}=0$

$\Rightarrow \frac{(t+3)(\bar{t}-3)(\bar{t}+3)(t-3)}{(t-3)(\bar{t}-3)}=0$，

$\Rightarrow \frac{2(t\cdot\bar{t}-9)}{(t-3)(\bar{t}-3)}=0$，

$\therefore |t|=3$ 且 $t\neq\pm3$．

由 $z=3+3\sqrt{3}i+t$ 有

$t=z-(3+3\sqrt{3}i)$，

$\therefore |z-(3+3\sqrt{3}i)|=|t|=3$，

且 $t=z-(3+3\sqrt{3}i)\neq\pm3$，

$\therefore z\neq6+3\sqrt{3}i$ 或 $z\neq3\sqrt{3}i$．

故复数 z 对应的点 M 的轨迹是复平面上以 $P(3+3\sqrt{3}i)$ 为中心，$r=3$ 为半径的圆，但要去掉两点：

$M_1(6+3\sqrt{3}i)$ 及 $M_2(3\sqrt{3}i)$．

750．已知复数 z_1、z_2 都不为零，且 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，试判断：(1) $\frac{z_1}{z_2}$ 是一个什么类型的复数？证明你的结论；(2) $(\frac{z_1}{z_2})^n (n\in N)$ 是一个什么类型的复数？证明你的结论．

【解答】　(1) $\because z_1\cdot z_2\neq0$，

且 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，

$\therefore |z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2$，

即 $(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$\Rightarrow z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=0\Rightarrow \frac{z_1}{z_2}+\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=0$，

依命题2知 $\frac{z_1}{z_2}$ 是纯虚数．

(2)设$\frac{z_1}{z_2}=mi(m\in\mathbf{R}$且$m\neq 0)$，很显然，当$n=4k$或$4k-2(k\in\mathbf{N})$时，$(\frac{z_1}{z_2})^n\in\mathbf{R}$；当$n=4k-1(k\in\mathbf{N})$或$4k+1(k=0，1，2，\cdots\cdots)$时，$(\frac{z_1}{z_2})^n$是一个纯虚数．

751．已知复数$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$，$w=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，复数$\overline{zw}$，$z^2w^3$在复平面上所对应的点分别为P，Q．

求证：△OPQ为等腰直角三角形(其中O为原点)

【证明】 ∵$z^3=(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^3=-i$，

$w^4=(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)^4=-1$，

又$|z|=|w|=1$，

$\therefore \frac{z^2w^3}{\overline{zw}}=\frac{z^2w^3}{\overline{zw}}\cdot\frac{zw}{zw}=\frac{z^3w^4}{|z|^2|w|^2}=i$，

两边取模得$|z^2w^3|=|\overline{zw}|$．

由此得OP⊥OQ，|OP|＝|OQ|，故△OPQ为等腰直角三角形．

752．已知$z\in\mathbf{C}$，解方程$z\bar{z}-3i\bar{z}=1+3i$．

【解答】 原方程化为$-3i\bar{z}=1-|z|^2+3i$两边取模得

$|z|^4-11|z|^2+10=0$，

$\therefore |z|^2=1$，$|z|^2=10$，

代入方程得$z_1=-1$，$z_2=-1+3i$，

经检验知它们是原方程的解．

753．计算下列各题．

(1)$(1+i)^{20}-(1-i)^{20}+i^{863}+\frac{-2+i}{1+2i}$

(2)$1+2i+3i^2+\cdots+(4n+1)i^{4n}(n\in\mathbf{N})$

【解答】 (1)原式$=[(1+i)^2]^{10}-[(1-i)^2]^{10}+i^{4\times 215+3}+\frac{i(1+2i)}{1+2i}$

$=(2i)^{10}-(-2i)^{10}+i^3+i=0$

(2)设$S=1+2i+3i^2+\cdots+(4n+1)i^{4n}$

则$iS=i+2i^2+\cdots+4ni^{4n}+(4n+1)i^{4n+1}$

两式相减有：$(1-i)S=1+i+i^2+\cdots+i^{4n}-(4n+1)i^{4n+1}=1-(4n+1)i$

$\therefore S=\frac{1-(4n+1)i}{1-i}=2n+1-2ni$

754．证明：对于任意实数t，复数$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}i$的模r适合$r\leq\sqrt[4]{2}$．

【证明】 ∵$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}i$，

两边取模得$|z|=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}$，

$\therefore |z|^2=|\cos t|+|\sin t|\le 2\sqrt{\frac{|\cos t|^2+|\sin t|^2}{2}}=\sqrt{2}$.

$\therefore |z|\le\sqrt[4]{2}$，即$r\le\sqrt[4]{2}$

755．设 x_1，x_2 是关于 x 的方程 $x^2-2kx+4k-3=0$ 的两个复数根($k\in R$)，记：

$f(k)=|x_1|+|x_2|$，求 f(k)的表达式．

【精析】　实系数一元二次方程的复根问题，宜分类讨论，即按Δ≥0 及Δ<0 讨论．

(1)当 x_1，$x_2\in R$，这时$\Delta=(k-1)(k-3)\ge 0$，即 $k\le 1$ 或 $k\ge 3$，为求 f(k)的表达式，要去掉$|x_1|+|x_2|$的绝对值符号，又必须再分类，注意到 $x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=4k-3$，因而分如下两种情形：

①$\frac{3}{4}\le k\le 1$或$k\ge 3$，此时$x_1>0$，$x_2\ge 2\Rightarrow f(k)=|x_1|+|x_2|=x_1+x_2=$ 2k；

②$k<\frac{3}{4}$，此时$x_1x_2<0\Rightarrow f(k)=|x_1|+|x_2|=|x_1-x_2|=$

$\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{k^2-4k+3}$.

(2)x_1、x_2 是虚数，这时$\Delta=(k-1)(k-3)<0$，即 $1<k<3$，实际上 x_1 与 x_2 是互为共轭虚数．

$f(k)=|x_1|+|x_2|=2|x_1|=2\sqrt{|x_1|^2}$

$=2\sqrt{x\cdot\overline{x}_1}=2\sqrt{x_1\cdot x_2}=2\sqrt{4k-3}$.

综上所述，有

$$f(k)=\begin{cases}2k, & (\frac{3}{4}\le k\le 1\text{或}k\ge 3)\\ 2\sqrt{k-4k+3}, & (k<\frac{3}{4})\\ 2\sqrt{4k-3}, & (1<k<3)\end{cases}$$

756．设z为虚数，$w=z+\frac{1}{z}$是实数，且$-1<w<2$.

(1)求|z|的值及 z 的实部的取值范围；

(2)设$u=\frac{1-z}{1+z}$，求证：u为纯虚数；

(3)求 $w-u^2$ 的最小值．

【解答】　把$w=z+\frac{1}{z}$看作z的方程，

去分母得 $z^2-wz+1=0$

解得$z=\frac{w}{2}\pm\frac{\sqrt{4-w^2}}{2}i$．

(1)$|z|=\sqrt{(\frac{w}{2})^2+(\pm\frac{\sqrt{4-w^2}}{2})^2}=1$．

$\because -1<w<2$，$\therefore -\frac{1}{2}<\frac{w}{2}<1$，

即z的实部的取值范围为$(-\frac{1}{2}，1)$．

(2)由$u=\frac{1-z}{1+z}$得$z=\frac{1-u}{1+u}$，得

$w=\frac{1-u}{1+u}+\frac{1+u}{1-u}$，解得$u^2=\frac{w-2}{w+2}\in\mathbf{R}$，故u是实数或纯虚数．

若u是实数，则由$z=\frac{1-u}{1+u}$知z是实数，与已知z是虚数矛盾，因此，u为纯虚数．

(2)$w-u^2=w-\frac{w-2}{w+2}$

$=(w+2)+\frac{4}{w+2}-3$

$\because -1<w<2$，$\therefore 1<w+2<4$．

因此，$w-u^2\geq 2\sqrt{(w+2)\cdot\frac{4}{w+2}}-3=1$，当且仅当$w=0$时取等号．因此$w-u^2$的最小值是1．

757．设复数z_1、z_2、z_3分别对应于复平面上的点A、B、C，O为坐标原点，若$|z_1|=2$，$z_2^2=z_1z_3$，$\frac{z_2}{z_1}=\sqrt{3}+i$，求四边形OABC的面积．

【精析】 由复数的模与辐角主值的几何意义知：$|OA|=|z_1|$，$|OB|=|z_2|$，$|OC|=|z_3|$，$\angle AOB=\arg\frac{z_2}{z_1}$，$\angle BOC=\arg\frac{z_3}{z_2}$，因此只须求出$|z_1|$、$|z_2|$、$|z_3|$、$\arg\frac{z_2}{z_1}$、$\arg\frac{z_3}{z_2}$即可．

【解答】 $\because \frac{z_2}{z_1}=\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$，

$\therefore \arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{\pi}{6}$，$|\frac{z_2}{z_1}|=2$， ①

$\because z_2^2=z_1z_3$ $\therefore \frac{z_2}{z_1}=\frac{z_3}{z_2}$

$\therefore \arg\frac{z_3}{z_2}=\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{\pi}{6}$

又$\because z_2^2=z_1z_3$，

$\therefore |z_2|^2=|z_1||z_3|=2|z_3|$， ②

∵$|z_1|=2$∴由①②得：$|z_2|=4$，$|z_3|=8$，

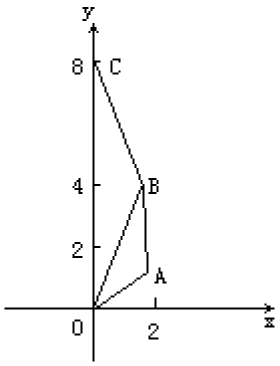


图112

如图 112，$S_{四边形OABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}$

$=\frac{1}{2}|z_1|\cdot|z_2|\sin\angle AOB+\frac{1}{2}|z_2|\cdot|z_3|\sin\angle BOC$

$=\frac{1}{2}\times2\times4\sin\frac{\pi}{6}\times4\times8\sin\frac{\pi}{6}=10$．

758．已知 z_1、$z_2\in C$，$|z_1-8i|=2$，$|z_2|=4$，$U=z_1-z_2$，求复数 U 在复平面内对应的图形．

【解答】 ∵$|z_2|-|z_1-8i|\le|(z_1-8i)-z_2|\le|z_2|+|z_1-8i|$，

且$|z_1-8i|=2$，$|z_2|=4$，

∴$4-2\le|z_1-z_2-8i|\le4+2$．

即 $2\le|U-8i|\le6$．

由此可知：复数 U 在复平面内的图形是一个以(0，8)为圆心，小半径为$\sqrt{2}$、大半径为$\sqrt{6}$的圆环．

759．设复数$z=\frac{(1-i)^3(a+4i)^2}{\sqrt{2}(a-12i)^2}$，其中$a>0$，又$|z|=\frac{2}{3}$，

(1)试求 a 的值；(2)试求复数 z 的辐角主值．

【精析】 要解此题，必须先求出复数 z 的模的表达式，再根据已知条件得出关于 a 的方程，从而得解．

【解答】 (1)由题意知$|z|=\frac{(\sqrt{1^2+(-1)^2})^3(\sqrt{a^2+4^2})^2}{\sqrt{2}(\sqrt{a^2+(-12)^2})^2}=\frac{2}{3}$．

即$\frac{2\sqrt{2}(a^2+16)}{\sqrt{2}(a^2+144)}=\frac{2}{3}$，

解之得$a=\pm4\sqrt{3}$(由于$a>0$，所以舍去负的)，故$a=4\sqrt{3}$．

(2)∵$z=\frac{(1-i)^3(4\sqrt{3}+4i)^2}{\sqrt{2}(4\sqrt{3}-12i)^2}$

$$=\frac{-32(1+\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}{16\sqrt{2}(\sqrt{3}-3\mathrm{i})^2}$$

$$=-\sqrt{2}(1+\mathrm{i})(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-3\mathrm{i}})^2$$

$$=-\sqrt{2}(1+\mathrm{i})[\frac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(\sqrt{3}+3\mathrm{i})}{(\sqrt{3}-3\mathrm{i})(\sqrt{3}+3\mathrm{i})}]^2$$

$$=-\sqrt{2}(1+\mathrm{i})(\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i})^2=\frac{\sqrt{2}}{3}(1+\mathrm{i})$$

$\therefore \arg z=\frac{\pi}{4}$.

760．已知集合$M=\{z|z\bar{z}+3\mathrm{i}\bar{z}-3\mathrm{i}z+5，z\in\mathbf{C}\}$

与集合$P=\{u|u=2\mathrm{i}z，z\in M\}$，

(1)求集合P在复平面内所表示的曲线；

(2)若$z_1\in M$，$z_2\in P$，求$|z_1-z_2|$的最小值．

【解答】 (1)设$z=m+n\mathrm{i}(m，n\in R)$，

则$(m+n\mathrm{i})(m-n\mathrm{i})+3\mathrm{i}(m-n\mathrm{i})-3\mathrm{i}(m+n\mathrm{i})+5=0$，

即$m^2+n^2+6n+5=0$，

亦即$m^2+(n+3)^2=4$ ①

又设$U=x+y\mathrm{i}(x，y\in R)$，

则$x+y\mathrm{i}=2\mathrm{i}(m+n\mathrm{i})$．

由复数相等得$\begin{cases}x=-2n\\y=2m\end{cases}$即$\begin{cases}m=\frac{y}{2}\\n=-\frac{x}{2}\end{cases}$

代入①得$(x-6)^2+y^2=16$．

由此可知集合P在复平面内表示一个半径为4的圆．

(2)如图113：由①可知集合M也是一个圆，而Z_1是半径为2的圆O_1上的动点，Z_2是半径为4的圆O_2上的动点，由图可知$|z_1-z_2|_{min}=|O_1O_2|-(2+4)=3\sqrt{5}$．

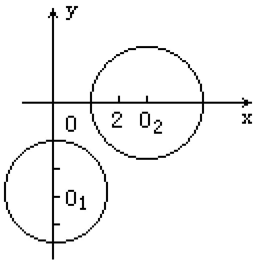


图113

761．设$z_1=1-\mathrm{i}$，$|z_2|=2$，且$\arg z_2\in[\frac{\pi}{12}，\frac{\pi}{2}]$，求$|z_1^2+z_2^2|$的最大值和最小值．

【精析】 涉及模与辐角主值问题，它们都有几何意义，可用数形结合求解．

【解答】 ∵$z_1=1-i$，∴$z_1^2=-2i$，

又∵$|z_2|=2$，

∴可设$z_2=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\theta\in[\frac{\pi}{12}，\frac{\pi}{2}]$，

∴$z_2^2=4(\cos2\theta+i\sin2\theta)$ $2\theta\in[\frac{\pi}{6}，\pi]$，

∴$\arg z_2^2\in[\frac{\pi}{6}，\pi]$，$|z_2^2|=4$．

如图114，由上式可知点Z_2^2是在以O(0，0)为圆心，4为半径的图劣弧$\overset{\frown}{CD}$上的动点，而$|z_2^2+z_1^2|=|z_2^2-zi|$，即是动点Z_2^2到定点A(0，2)的距离．当点Z_2^2处于点B(0，4)时，$|z_2^2+z_1^2|_{min}=|AB|=2$；当点$Z_2^2$处于点C(－4，0)时，$|z_2^2+z_1^2|_{max}=|AC|=2\sqrt{5}$．

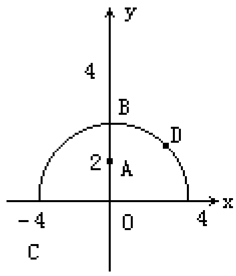


图114

762．关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的两虚根在复平面内分别对应点A，B，O是原点．若△AOB是正三角形且边长为$\sqrt{2}$，求实数p，q之值．

【解答】 ∵$x^2+px+q=0$ 是实系数方程，

∴它的两个根 x_A，x_B 互为共轭复数．

∵它们在复平面上的对应点 A，B 关于实轴对称(如图 115，图 116)．

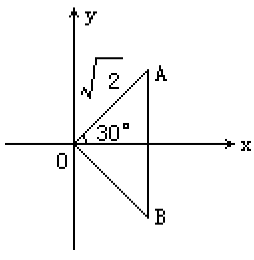


图115

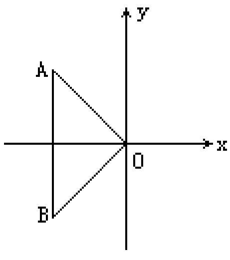


图116

在图115中，$x_A=\sqrt{2}(\cos30°+i\sin30°)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$，

$x_B=\sqrt{2}(\cos30°-i\sin30°)=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$．

∴$p=-(x_A+x_B)=-\sqrt{6}$，$q=x_Ax_B=2$．

同理由图116，可求得$p=\sqrt{6}$，$q=2$．

∴$q=2$，$p=\pm\sqrt{6}$．

763．设 z 为非零复数，求证：$|z-1|\le||z|-1|+|z||\arg z|$，并

说明等号何时成立．

【精析】　这是证明不等式的问题，肯定要用到复数不等式，需要重点思考的是 argz，要想使证明中出现 argz，必须设出 z 的三角形式、z 的辐角主值．

【证明】　设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r>0$，$\theta=\arg z$ 则

$|z-1|=|r\cos\theta+i\sin\theta-1|=|r-1+r(\cos\theta+i\sin\theta-1)|$

$\le|r-1|+r|\cos\theta+i\sin\theta-1|=|r-1|+r\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}$

$=|r-1|+r\sqrt{2(1-\cos\theta)}=|r-1|+2r|\sin\frac{\theta}{2}|$

$\le|r-1|+2r|\frac{\theta}{2}|=|r-1|+r|\theta|$

$=||z|-1|+|z||\arg z|$．

当且仅当$|\sin\frac{\theta}{2}|=|\frac{\theta}{2}|$且$|r-1+r(\cos\theta+i\sin\theta-1)|=|r-1|+r|\cos\theta+i\sin\theta-1|$时等号成立，故 $\theta=0$ 时等号成立．

所以等号成立的条件是 $z=r\in R^+$．

764．复平面上点 A、B 对应的复数分别为 $z_1=2$，$z_2=-3$，点 P 对应的复数为z，$\frac{z-z_1}{z-z_2}$的辐角主值为φ，当P在以原点为圆心，1为半径的半圆周(不包括两个端点)上运动时，求φ的最小值．

【解答】　设 $z=x+yi(x、y\in R)$，由题意知：$x^2+y^2=1$ 且 $y>0$，$-1<x<1$

$$\therefore \frac{z-z_1}{z-z_2}=\frac{(x-2)+yi}{(x+3)+yi}=\frac{[(x-2)+yi][(x+3)-yi]}{(x+3)^2+y^2}=\frac{(x-5)+5yi}{(x+3)^2+y^2}$$

又$\because -1<x<1$，$\therefore -6<x-5<-4$，$y>0$，$\therefore\varphi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$且$\tan\varphi=\frac{5y}{x-5}$

由$x^2+y^2=1$且$y>0$有$y=\sqrt{1-x^2}$，$\therefore\tan\varphi=\frac{5\sqrt{1-x^2}}{x-5}(-1<x<1)$

设 $5-x=t$，则 $4<t<6$，$x=5-t$

$$\therefore\tan\varphi\frac{5\sqrt{1-(5-t)^2}}{-t}=-5\sqrt{-\frac{24}{t^2}+\frac{10}{t}-1}$$

$$=-5\sqrt{-24(\frac{1}{t}-\frac{5}{24})^2+\frac{1}{24}}(4<t<6)$$

$\therefore$当$t=\frac{24}{5}$即$x=\frac{1}{5}$时，$\tan\varphi$取得最小值$-\frac{5\sqrt{6}}{12}$

又∵当$x\in(-1,1)$时，$\varphi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\tan\varphi$在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上是增函数

∴使$\tan\varphi$取得最小值的x值也使φ取得最小值，

故φ的最小值为$\pi-\arctan\frac{5\sqrt{6}}{12}$

此时由$x=\frac{1}{5}$，有$y=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，∴$Z=\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}i$

即当P运动到点$(\frac{1}{5},\frac{2\sqrt{6}}{5})$的位置时，$\varphi$取最小值$\pi-\arctan\frac{5\sqrt{6}}{12}$

765．已知复数x，y，z满足关系式：$z=\frac{x-y}{1-\bar{x}y}$，且$|y|=1$，求证：$|z|=1$．

【证明】 $|y|=1\Rightarrow y\bar{y}=1$

$$|z|=\frac{x-y}{1-\bar{x}y}=\frac{|x-y|}{|y\bar{y}-\bar{x}y|}\frac{|x-y|}{|y||\bar{y}-\bar{x}|}$$

$$=\frac{|x-y|}{|\overline{x-y}|}=\frac{|x-y|}{|x-y|}=1.$$

766．复数z满足$\arg(z+3)=\frac{3\pi}{4}$，求$|z+6|+|z-3i|$的最小值．

【精析】 由条件知$z+3$的辐角主值为$\frac{3\pi}{4}$，此时可考虑复数z的代数形式，也可考虑三角形式，还可联系几何意义．明显能看出，结论有十分鲜明的几何意义，待求式可视为复平面上点Z到两点A(－6，0)和B(0，3)的距离之和．如图117，易见当A，Z，B三点共线时，$|z+6|+|z-3i|$取值最小．l'表示满足$\arg(z')=\frac{3\pi}{4}$的点的直线，l为满足$\arg(z+3)=\frac{3\pi}{4}$的直线．由直线l与线段AB相交，及A，B两点之间的距离为$3\sqrt{5}$，可求得最小值为$3\sqrt{5}$．

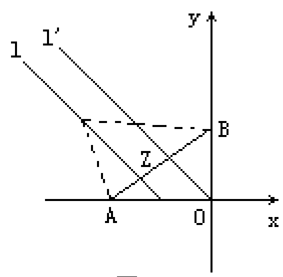


图117

767．设复数z_1和z_2满足关系式$z_1\bar{z}_2+\bar{A}z_1+\bar{A}z_2=0$，其中A为不等于0的复数，求证：$|z_1+A||z_2+A|=|A|^2$．

【证明】 由题设得$(z_1+A)(\bar{z}_2+\bar{A})=A\bar{A}$，两边取模得

$|z_1+A||\overline{z_2}+\bar{A}|=|A|^2$

又$|\bar{z}_2+\bar{A}|=|z_2+\bar{A}|=|z_2+A|$，

$\therefore |z_1+A||z_2+A|=|A|^2$.

768．解方程 $x^2-(2+2i)x+3+6i=0$．$(x\in C)$

【解一】 令 $x=\alpha+\beta i(\alpha，\beta\in R)$，

代入，$(\alpha+\beta i)^2-(2+2i)(\alpha+\beta i)+3+6i=0$，

$\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2-(2\alpha+2\beta i+2\alpha i-2\beta)+3+6i=0$，

即$(\alpha^2-\beta^2-2\alpha+2\beta+3)+(2\alpha\beta-2\beta-2\alpha+6)i=0$，

所以$\alpha^2-\beta^2-2\alpha+2\beta+3=0$， ①

$2\alpha\beta-2\beta-2\alpha+6=0$． ②

由②得$\beta=\dfrac{\alpha-3}{\alpha-1}$． ③

③代入①$\alpha^2-\left(\dfrac{\alpha-3}{\alpha-1}\right)^2-2\alpha+2\left(\dfrac{\alpha-3}{\alpha-1}\right)+3=0$．

再化简，$\alpha^4-4\alpha^3+9\alpha^2-10\alpha=0$，

即$\alpha(\alpha^3-4\alpha^2+9\alpha-10)=0$，亦即$\alpha_1=0$．

$\alpha^3-4\alpha^2+9\alpha-10=0$，即$\alpha^3-8-4\alpha^2+8\alpha+\alpha-2=0$，

$(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)-4\alpha(\alpha-2)+(\alpha-2)=0$，

$(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4-4\alpha+1)=0$，亦即$\alpha_2=2$．

$\alpha^2-2\alpha+5=0$，$\Delta=4-4\times1\times5<0$，无实数解(舍)．

$\alpha_1=0$ 代入②，得$\beta_1=3$，$\alpha_2=2$ 代入②得$\beta_2=-1$，所以所求方程之二根为 $x_1=3i$，$x_2=2-i$．

【解二】 前边的解同解一，两个复数若相等，其实部与实部相等，虚部与虚部相等．则

$\alpha^2-\beta^2-2\alpha+2\beta+3=0$， ①

$2\alpha\beta-2\beta-2\alpha+6=0$． ②

由①得：

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-2(\alpha-\beta)+3=0$， ③

由③得：

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2)=-3$． ④

由④可知，由于 3 为质数，所以 3 只能分解为 1×3，依等式条件，必有

$\begin{cases}\alpha-\beta=-1,\\ \alpha+\beta-2=3.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha-\beta=1,\\ \alpha+\beta-2=-3.\end{cases}$

或$\begin{cases}\alpha-\beta=3,\\ \alpha+\beta-2=-1.\end{cases}$ 或$\begin{cases}\alpha-\beta=-3,\\ \alpha+\beta-2=1.\end{cases}$

解之，$\begin{cases}\alpha=2,\\ \beta=3\end{cases}$ 或$\begin{cases}\alpha=0,\\ \beta=-1.\end{cases}$ 或$\begin{cases}\alpha=2,\\ \beta=-1\end{cases}$ 或$\begin{cases}\alpha=0,\\ \beta=3.\end{cases}$ ⑤

由②可知，$\alpha\beta-\beta-\alpha+3=0$，

即$\beta=\dfrac{\alpha-3}{\alpha-1}$，由⑤可知，若$\alpha=0$，代入$\beta=\dfrac{0-3}{0-1}=3$，若$\alpha=2$，代入，$\beta=\dfrac{2-3}{2-1}=-1$，所以所求之二根为

$x_1=3i$，$x_2=2-i$.

注意：有的学生审题马虎，视而不见($x\in C$)，而按$x\in R$去解方程，完全错了．也有的学生，知道令$x=\alpha+\beta i$，代入方程之后，因为恒等变形能力过差而失败，还有的学生不利用两个复数相等其虚、实部两两分别相等的充要条件，而把方程解的一塌糊涂．

其错误根本原因是解复数方程有不少学生对其概念不清楚，或者知道的甚为肤浅，因为在实数域解方程时，不存在两种考虑．在初中学习时恒等变形、因式分解等基础知识没有学好．

教师应该对复数与方程各种理论问题加以总结和系统整理，开专题讲座，在解复数方程时，一定强调两个复数相等其虚、实部分别相等的充要条件

第九章　排列组合、二项式定理

一、选择题

769．同室四人每人各写一张贺卡，先集中起来，然后每人从中取一张别人送的贺卡，则四种贺卡不同的取法有

[　　]

A．6 种　　　　B．9 种

C．11 种　　　　D．23 种

【精析】　设四人为甲、乙、丙、丁，他们各自写的四个卡分别为①、②、③、④．因为四人中任何一个人取自己以外的三张有且只有三类取法，对于其中每一类，例如当甲取②时，另外三人取贺卡时只有三种取法满足要求：即乙→③，丙→④，丁→①或乙→④，丙→①，丁→③，或乙→①，丙→④，丁→③；其余两类也各有 3 种取法，据加法原理共有 3＋3＋3＝9 种．选 B．

770．$1+\frac{20\times19}{1\times2}+\frac{20\times19\times18\times17}{1\times2\times3\times4}+\cdots+\frac{20\times19\times18\times\cdots\times2\times1}{1\times2\times3\times\cdots\times19\times20}$等于

[　　]

A．2^{17}　　　　B．2^{18}

C．2^{19}　　　　D．2^{20}

【精析】　每一个解题者决不会分项求值，且会意识到必定有较简捷的方法有待于我们去探索，注意到每一项的特征和组合数的展开式相一致，反向应用组合数公式可得

$C_{20}^{0}+C_{20}^{2}+C_{20}^{4}+\cdots+C_{20}^{20}$

上述表达式恰好是$(1+x)^{20}$展开式中奇数项的二项式系数和

∴原式为$\frac{2^{20}}{2}=2^{19}$，选C．

771．甲、乙、丙、丁、戊 5 人并排站成一排，如果乙必须站在甲的右边(甲、乙可以不相邻)，那么不同的排法共有________种．

[　　]

A．24　　　　B．60

C．90　　　　D．120

【精析】　若对乙站在甲的右边的情形进行分类讨论很繁杂，故用补集法，先求全集，甲、乙、丙、丁、戊5人的全排列数为$P_5^5=120$种，而乙必须站在甲的右边的反面是乙必须不站在甲的右边，也即是乙必须站在甲的左边，它们的排法种数恰对等，故所求为 120 种÷2＝60 种，选 B．

772．在$(x^2+3x+2)^5$的展开式中 x 的系数为

[　　]

A．160　　　　B．240

C．360　　　　D．800

【精析】　条件告诉我们，把(x^2+3x+2)自乘五次，合并便可找出 x 的系数(典型的“小题大做”)，结论告诉我们，把 x^2，x^3，…，x^{10} 的系数全都求出来是多余的，分析这些多余项产生的原因是已知式 x^2+3x

+2 中的"x^2"参加了运算，事实上，x^2 乘任何项都不会产生一次项 x，故只须考虑$(3x+2)^5$展开式中的x项：$C_5^4(3x)2^4=240x$，选B．

773．$(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$的展开式中，x^4的系数为

[　　]

A．－40　　　　B．10

C．40　　　　D．45

【解答】　x^4 的系数分别来自两个二项式的展开式中两项乘积的系数，有关项及其系数见下表：

$(\sqrt{x}+1)^4$	$(x-1)^5$
常数项：C_4^4 x的系数：C_4^2 x^2的系数：C_4^0	x^4的系数：$-C_5^1$ x^3的系数：C_5^2 x^2的系数：$-C_5^3$

因此，x^4的系数为：$C_4^4(-C_5^1)+C_4^2C_5^2-C_4^0C_5^3=45$，应选D．

774．在$(1-x^3)(1+x)^{10}$的展开式中，x^5的系数是

[　　]

A．－297　　　　B．－252

C．297　　　　D．207

【解答】　x^5 的系数分别来自两个二项式展开式中两项乘积的系数，有关项及其系数见下表：

$1-x^3$	$(1+x)^{10}$
常数项：1 x^3 的系数：－1	x^5的系数：C_{10}^5 x^2的系数：C_{10}^2

因此，x^5的系数为：$C_{10}^5-C_{10}^2=207$，选D．

775．在$(x^2+3x+2)^5$的展开式中，x 的系数是(注意和 772 的解法比较)

[　　]

A．160　　　　B．240

C．360　　　　D．820

【精析】　∵$(x^2+3x+2)=(x+1)(x+2)$，所以原式可化为两个二项式的乘积．

【解答】　$(x^2+3x+2)^5=(x^2+3x+2)(x^2+3x+2)(x^2+3x+2)(x^2+3x+2)(x^2+3x+2)$．x 项可看成是从上面五个括号中任取一个括号中的 3x，从余下的四个括号中取 2，相乘而得，于是 x 的系数是：

$C_5^1\cdot 3C_4^4\cdot 2^4=240$

二、填空题

776．(1)(2x－1)5 展开式中各项系数的绝对值的和为________．

【解答】　令 x=－1，并对原式取绝对值得

$|2\times(-1)-1|^5=(2+1)^5=3^5=243$．

故展开式中各项系数的绝对值的和为 243．

(2)$(3x^2+\frac{4}{x}-8)^4$展开式里各项系数的和为__________．

【解答】　令 $x=1$，得各项系数和为：

$(3+4-8)^4=(-1)^4=1$.

(3)求 $(x_1+1)(x_2+1)^2(x_3+1)^3\cdots(x_n+1)^n$ 的展开式的所有项的系数之和.

【解答】　令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$，得展开式所有项的系数和为

$2\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^n=2^{1+2+3+\cdots+n}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

777．$(1+x+x^2)^4$ 展开式各项系数平方和为________.

【解答】　由上述公式得所求的系数平方和为 $\sum_{r=0}^{4}\frac{(2\times4)!}{(4-r)!(4-r)!(2r)!}$

$=\frac{8!}{4!4!}+\frac{8!}{3!3!2!}+\frac{8!}{2!2!4!}+\frac{8!}{6!}+\frac{8!}{8!}=70+560+420+56+1=1107$.

778．$C_{21+n}^{3n}+C_{3n}^{38-n}$ 的值等于___________.

【精析】　因本题中 n 没有明显给出，似乎缺少条件，故一时感到难以下手，考虑到题目中两个组合数都有意义时必须 $21+n\geq3n$，且 $3n\geq38-n$，由此得 $n=10$，所以 $C_{21+n}^{3n}+C_{3n}^{38-n}=C_{31}^{30}+C_{30}^{28}=466$.

779．在 $(ax+1)^7$ 的展开式中，x^3 的系数是 x^2 的系数与 x^4 的系数的等差中项，若实数 $a>1$，那么 $a=$________.

【解答】　展开式中 x^2，x^3，x^4 的系数分别为：$C_7^5a^2$，$C_7^4a^3$，$C_7^3a^4$，根据题意，得 $2C_7^4a^3=C_7^5a^2+C_7^3a^4$，

化简得　$5a^2-10a+3=0$，

$\because a>1$，$\therefore a=1+\frac{\sqrt{10}}{5}$.

780．已知 $(\frac{a}{x}-\sqrt{\frac{x}{2}})^9$ 的展开式中，x^3 的系数为 $\frac{9}{4}$，常数 a 的值为________.

【解答】　展开式中的通项为

$C_9^r(\frac{a}{x})^{9-r}(-1)^r(\frac{x}{2})^{\frac{r}{2}}=C_9^ra^{9-r}(-1)^r2^{-\frac{r}{2}}x^{r-9+\frac{r}{2}}$

令 $r-9+\frac{r}{2}=3$，得 $r=8$，

于是 x^3 的系数为 $C_9^82^{-4}a$.

依题意，得 $C_9^82^{-4}a=\frac{9}{4}$，$a=4$

781．已知 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6+a_7x^7$，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$________.

【解答】　令 $x=1$ 得，$a_1+a_2+\cdots+a_7=(-1)^7-a_0$，又，令 $x=0$，得 $a_0=1$.

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-2$

782．$(x+2)^{10}(x^2-1)$ 的展开式中，x^{10} 的系数为________.

【解答】　x^{10}的系数分别来自两个二项式的展开式中两项乘积的系数，有关项及其系数见下表：

x^2-1	$(x+2)^{10}$
常数项：-1 x^2的系数：1	x^{10}的系数：C_{10}^{2} x^8的系数：$C_{10}^{2}2^2$

因此，x^{10}的系数为：$4C_{10}^{2}-C_{10}^{0}=179$．

783．在$(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5$的展开式中，$x^2$的系数为________．

【解答】　由等比数列的求和公式，得

原式$\frac{(x-1)+(x-1)^6}{x}$，所以，展开式中x^2的系数是$(x-1)^6$的展开式中x^3的系数：$(-1)^3C_6^3=-20$．

784．在$(3-x)^7$的展开式中，x^5的系数是________．

【解答】　设展开式中的第 r+1 项为x^5项，则

$T_{r+1}=C_7^r3^{7-r}(-1)^rx^r$，$r=5$，

因此，展开式中x^5的系数为$-C_7^5 3^2=-189$

785．把 11 个人分成两组，每组至少 1 人，有________种不同的分组方法．

【解答】　只需考查一个组的人数为 1 人，2 人，3 人，4 人，5 人即可，故共有$C_{11}^1+C_{11}^2+C_{11}^3+C_{11}^4+C_{11}^5$种不同的分组法，而

$$C_{11}^1+C_{11}^2+C_{11}^3+C_{11}^4+C_{11}^5$$
$$=\frac{(C_{11}^1+C_{11}^2+\cdots+C_{11}^5)+(C_{11}^7+C_{11}^8+\cdots+C_{11}^{10})}{2}$$
$$=\frac{C_{11}^0+C_{11}^1+C_{11}^2+\cdots+C_{11}^{11}}{2}-1$$
$$=\frac{1}{2}\times 2^{11}-1=2^{10}-1=1023.$$

∴共有 1023 种分组法．

786．设 A={1，2，3，…，8}，则 A 的所有子集个数为________．

【解答】　A 的子集是由 A 的部分元素组成的集合，故共有子集个数是

$C_8^0+C_8^1+C_8^2+\cdots+C_8^8=2^8=256$

787．$(\sqrt{x}+\frac{2}{x})^n$展开式的第三项是常数项，那么展开式中共有多少有理项？________．

【解答】　$T_3=C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}(\frac{2}{x})^2=4C_n^2x^{\frac{n-6}{2}}$是常数项，则$\frac{n-6}{2}=0$，得 n=6．

又设$(\sqrt{x}+\frac{2}{x})^6$展开式中的有理项是

$T_{r+1}＝C_6^r(\sqrt{x})^{6-r}(\frac{2}{x})^r=C_6^r x^{3-\frac{5r}{2}}$，

则$3-\frac{5r}{2}$为整数，又由$0≤r≤6$，可知r取的值为0，2，4，6．

∴共有 4 项是有理项．

788．在$(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^8$的展开式中含xy项的系数为________．

【精析】　利用组合求解，对 xy 的产生过程分四类：

(1)一个x，三个$\frac{1}{y}$，四个y乘积的结果；

(2)二个x，一个$\frac{1}{x}$，二个$\frac{1}{y}$，三个y乘积的结果；

(3)三个x，二个$\frac{1}{x}$，一个$\frac{1}{y}$，两个y乘积的结果；

(4)四个x，三个$\frac{1}{x}$，一个y乘积的结果．

【解答】　第一类有$C_8^1C_7^3$，第二类有$C_8^2C_6^1C_5^2$，第三类有$C_8^3C_5^2C_3^1$，第四类有$C_8^4C_4^3$．

由加法原理知：含 xy 项的系数为

$C_8^1C_7^3+C_8^2C_6^1C_5^2+C_8^3C_5^2C_3^1+C_8^4C_4^3=3920$．

789．马路上有编号为 1，2，3，…，10 的 10 盏路灯，为节约用电，又不影响照明，可以把其中的 3 盏灯关掉，但不能同时关掉相邻的两盏或三盏路灯，也不能关掉两端的路灯，则满足条件的关灯方法数为________．

【解答】　依照题意，关掉 3 盏路灯后还有 7 盏路灯照明，可先将 7 盏灯排好，它们之间有 6 个空，关掉的 3 盏灯为可视为在 6 个空中挑 3 个空，所以共有关灯方法：$C_6^3＝20$种．

790．有人民币 5 分的 2 张，1 角的 3 张，5 角的 9 张，可组成________种不同的币值．

【解答】　可先将所有币值加起来，共有 4 元 9 角，以 5 分为一格，可数出 98 种币值，其中不能组成 4 角 5 分，9 角 5 分，1 元 4 角 5 分，1 元 9 角 5 分，……，4 元 4 角 5 分，计 9 种，所以这些币值可组成：98－9=89 种不同币值．

791．对某种产品的 6 件不同正品和 4 件不同次品，一一进行测试，直至抽出所有次品为止，若所有次品恰好在第 5 次测试时被全部发现，则这样的测试方法有多少种可能？________

【解答】　用占位置的方法：第一步，先将第 5 个位置放一个次品，有P_5^1种；第二步，将剩下的3件次品在前4个位置选3个位置排好，有P_4^3种；第三步，在前5个位置中剩下的一个位置选一件正品放上，有P_6^1种，所以共有$P_4^1P_4^3P_6^1＝576$种测试方法．

792．从 1，2，3，…，100 这 100 个数字中取出两个不同的数字相乘，其中

(1)积能被 5 整除的有多少个？________

(2)积能被 5 整除但不能被 5^n($n\geq 2$，$n\in N$)整除的数有多少个？________

【解答】 (1)100 个数中，能被 5 整除的数共有 20 个，不能被 5 整除的数共有 80 个，两个乘数中只要有一个能被 5 整除，积就能被 5 整除，所以其积能被5整除的数共有$C_{80}^1C_{20}^1+C_{20}^2=1790$个．

(2)100 个数里面，能被 5^n($n\geq 2$，$n\in N$)整除的数有 25，50，75，100，共 4 个，故能被 5 整除，不能被 5^n($n\geq 2$，$n\in N$)整除的数有 16 个，所以，此题答案为$C_{16}^1C_{80}^1=1280$个．

793．某同学从 6 门课中选学 2 门，其中有两门课上课时间有冲突，另外有两门课不允许同时选学，则可选学的方法总数有________．

【解答】 依题意，若除掉这特殊的 4 门课，剩下 2 门课没说法的，可分三类：第一类，从没说法的 2 门课中选 2 门课程，有 1 种；第二类，从有说法的 2 组课程中选一组，再选 1 门课，然后再从没说法的 2 门课中选1门课，共有$C_2^1C_2^1C_2^1=8$种；第三类，从有说法的2组课程中选2门课程，有$C_2^1C_2^1=4$种，所以共有$1+8+4=13$种不同的选法．

794．一个圆周上有 n 个点($n\geq 4$)，它们的所有连线中，在圆内共有几个交点？________．

【解答】 逆向思维，从结论去考虑，圆内每一个交点对应两条连线，在圆上涉及4个点，所以共有C_n^4个交点．

795．$(5x-3y)^{10}$展开式中各项的系数和等于________．

【解答】 $(5x-3y)^{10}=C_{10}^0(5x)^{10}+C_{10}^1(5x)^9(-3y)+\cdots+C_{10}^{10}(-3y)^{10}$．

若求各项的系数和，则与 x，y 无关，故可令 x=1，y=1，展开式就转化为各项的系数和了，此时左端=$(5-3)^{10}=1024$．

三、解答题

796．圆内接 n 边形($n\geq 4$)的对角线在圆内最多可以有多少个不同的交点？

【解答】 当任意三条对角线都不在圆内交于同一点时，交点个数最多，每一个交点对应于交于此点的两条对角线，因而也对应于确定这两条对角线的 4 个顶点，易知圆内接 n 边形的任意 4 个顶点所画的对角线中在圆内有且只有 1 个交点，故最多可有的交点数就是从 n 个顶点中任取4个顶点的组合数，即最多有C_n^4个不同的交点．

797．如图 118，从一个 3×4 方格中的一个顶点 A 到对角顶点 B 的最短的路线有几条？

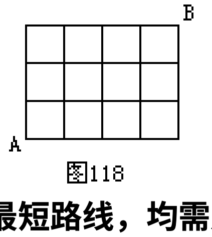


图118

【解答】 从 A 到 B 的最短路线，均需走 7 步：包括横向的 4 步和纵向的 3 步，于是我们只要确定第 1，2，3，…，7 步是横向走还是纵向

走就可以了，实际只要确定哪几步是横向走，所以每一条从 A 到 B 的最短路线对应着从第 1，2，3，…，7 步中取出 4 步(横向走)的一个组合，因此从A到B的最短路线共有：$C_7^4=C_7^3$＝35条．

798．楼梯一共有 10 级，上楼可以一步上一级，也可以一步上二级，若要求 8 步走完这楼梯，则不同的走法共有几种？

【解答】 由题中要求可知，8 步中有 2 步要各上二级楼梯，其余 6 步各上一级，因此确定了第 1，2，3，…，7，8 步中的哪 2 步上二级就确定了一种走法，所以不同的走法等于从 8 步中选出 2 步(各上二级)的组合数，即C_8^2＝28种．

799．(1)12 个相同的小球放入 4 个编号为 1，2，3，4 的盒子中，问每个盒子中至少有一个小球的不同放法有几种？

(2)12 个相同的小球放入 4 个编号为 1，2，3，4 的盒子中，要求每个盒子中的小球数不小于其编号数，问不同放法有几种？

【解答】 (1)将 12 个小球排成一排，中间有 11 个间隔，在这 11 个间隔中选出 3 个，放上挡板，则将 12 个小球分成了 4 组，第 1，2，3，4 组的小球分别放入编号分别为 1，2，3，4 的盒子中，就确定了一种放法，即每一种从 11 个间隔中选出 3 个间隔的组合对应于一种放法，

所以不同的放法有$C_{11}^3=\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$种．

(2)先将 1 个，2 个，3 个小球分别放在编号为 2，3，4 的盒子中，将余下的 6 个小球分别放入四个盒子中(每个盒子至少有一个小球)，就确定了一种放法，所以不同放法总数等于将余下的 6 个小球分别放入四个

盒子中的不同放法总数，而这与(1)小题类似，有$C_5^3=10$种．

800．求和：

(1)$1+7C_n^1+7^2C_n^2+\cdots+7^nC_n^n$；

(2)$C_{20}^0-C_{20}^2+C_{20}^4-\cdots-C_{20}^{18}+C_{20}^{20}$

【解答】 在$C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^nb^n=(a+b)^n$中，

(1)令 a＝1，b＝7，有

$C_n^0+C_n^17+C_n^27^2+\cdots+C_n^n7^n=(1+7)^n$，

$\therefore 1+7C_n^1+7^2C_n^2+\cdots+7^nC_n^n=8^n$

(2)令 n＝20，a＝1，b＝i 有

$C_{20}^0+C_{20}^1i+C_{20}^2i^2+\cdots+C_{20}^{19}i^{19}+C_{20}^{20}i^{20}=(1+i)^{20}$

又$(1+i)^{20}=[(1+i)^2]^{10}=(2i)^{10}=-1024$，

$\therefore(C_{20}^0-C_{20}^2+\cdots-C_{20}^{18}+C_{20}^{20})+(C_{20}^1-C_{20}^3+\cdots+C_{20}^{17}-C_{20}^{19})i=-1024$

$\therefore C_{20}^0-C_{20}^2+C_{20}^4-\cdots-C_{20}^{18}+C_{20}^{20}=-1024$

801．求证$C_n^0+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$

【证明】 由$2^{n-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1}$有

右边$=n[1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\times 1}{(n-1)!}]$

$=n+2\times\frac{n(n-1)}{2!}+3\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots+n\times\frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\times 1}{n!}$

$=C_n^0+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n$

=左边.

802．求$(a-b)^{11}$展开式中

(1)二项式系数最大项的系数；

(2)系数最大的项；

(3)系数最小的项.

【解答】 (1)由展开式中间项的二项式系数最大，可知第6项和第7项的二项式系数最大，第6项的系数是$-C_{11}^5=-462$，第7项的系数是$C_{11}^6=462$.

(2)系数最大的项是

$T_7=C_{11}^6a^5(-b)^6=462a^5b^6$

(3)系数最小的项是

$T_6=C_{11}^5a^6(-b)^5=-462a^6b^5$

803．求$(a+2)^{10}$展开式中系数最大的项.

【解答】 设系数最大的项是第$r+1$项，则有，

$$\begin{cases}C_{10}^r2^r\ge C_{10}^{r-1}2^{r-1}\\C_{10}^r2^r\ge C_{10}^{r+1}2^{r+1}\end{cases}$$

即$\begin{cases}2(11-r)\ge r\\r+1\ge 2(10-r)\end{cases}$

解得$\frac{19}{3}\le r\le\frac{22}{3}$，但r是非负整数，故取$r=7$，最大项是

$T_8=C_{10}^7a^32^7=15360a^3$

804．$n\in N$，$n>1$，

求证：$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n>n\times 2^{\frac{n-1}{2}}$.

【精析】 初步审视似乎难以下手，能否逆用公式对$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$变型，解题的“好念头”由此产生.

$\because C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n(1+1)^n=2^n$，

$\therefore C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1$.

因此只需证明$2n-1>n\times 2^{\frac{n-1}{2}}$

再一次反应用公式

$2^n-1=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$，

就能证明

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}>n\times 2^{\frac{n-1}{2}}$

805．求$(x+3y-z)^8$展开式中$x^2y^3z^3$项的系数.

【精析】 三项式应当化归为我们所熟悉的二项式，然后用二项式的知识进行解题．

$(x+3y-z)^8=[(x+3y)-z)]^8=C_8^0(x+3y)^8-C_8^1(x+3y)^7z-C_8^2(x+3y)^6z^2-C_8^3(x+3y)^5z^3+\cdots$

含z^3的仅有$-C_8^3(x+3y)^5z^3$一项，再寻求$(x+3y)^5$展开式中含x^2y^3的系数，易得$C_5^3 3^3$．

∴含$x^2y^2z^3$项的系数为$-C_8^3C_5^3 3^3=-15120$．

806．试求$(1+x+x^2)^n$展开式中各项系数的平方和．

【解答】 设$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_rx^r+\cdots+a_{2n}x^{2n}$ ①

∵$a_0=a_{2n}$，$a_1=a_{2n-1}$，$a_2=a_{2n-2}$，…，$a_r=a_{2n-r}$，

∴$(1+x+x^2)^n=a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n}$ ②

①×②得等号右边x^{2n}的系数为：

$a_0^2+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2n}^2$，而等号左边为：

$(1+x+x^2)^{2n}=[1+(x+x^2)]^{2n}=[1+x(1+x)]^{2n}$

$=C_{2n}^0+C_{2n}^1x(1+x)+\cdots+C_{2n}^nx^n(1+x)^n+\cdots+C_{2n}^{n+r}\times x^{n+r}(1+x)^{n+r}+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n}(1+x)^{2n}$

$=1+2nx(1+x)+\cdots+\dfrac{(2n)!}{n!n!}x^n(1+x)^n+\cdots+\dfrac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!}x^{n+r}(1+x)^{n+r}+\cdots+x^{2n}(1+x)^{2n}$

在$x^{n+r}(1+x)^{n+r}$的展开式中含有x^{2n}的项为$C_{n+r}^{n-r}\times x^{n+r}\times x^{n-r}=C_{n+r}^{n-r}\times x^{2n}$，

其系数为：$C_{n+r}^{n-r}=\dfrac{(n+r)!}{(n-r)!(2r)!}$，这里$r=0$，1，…，n．

$$\therefore a_0^2+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2n}^2=\sum_{r=0}^{n}\frac{(2n)!}{(n-r)!(n-r)!(2r)!}.$$

807．试求多项式$(x^2+1998x+1998)^{1999}+(x^2-1999x-1999)^{1999}$的展开式里x奇数次项系数的和．

【解答】 设$f(x)=(x^2+1998x+1998)^{1999}+(x^2-1999x-1999)^{1999}$，

则$f(1)=(3997)^{1999}+(-3997)^{1999}=0$

$f(-1)=1+1=2$．

令展开式奇数项系数和为M，偶次项系数和为N，则

$$\begin{cases}M+N=f(1)=0\\N-M=f(-1)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M=-1\\N=1\end{cases}$$

∴展开式的奇次项系数和为－1．

808．求$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$的展开式中，x的整数次幂的各项系数和．

【解答】 ∵$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}-(\sqrt{x}-2)^{2n+1}$

$=2[C_{2n+1}^1(\sqrt{x})^{2n}\times 2+C_{2n+1}^3(\sqrt{x})^{2n-2}\times 2^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}\times 2^{2n+1}]$

∴$(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$的展开式中x的整数次幂各项系数之和为$\frac{1}{2}[(\sqrt{x}+2)^{2n+1}-(\sqrt{x}-2)^{2n+1}]$的各项系数和．

令 x＝1，得所求各项系数和为：

$\frac{1}{2}[(1+2)^{2n+1}-(1-2)^{2n+1}]=\frac{1}{2}(3^{2n+1}+1)$．

809．某产品有 4 只次品和 6 只正品，每只产品均可区别，今每次取出一只产品测试，直到 4 只次品全部测出为止，则最后一只次品恰好在第五次测试时被发展的不同情形有多少种？

【解答】　因每只产品可以区别，故该题应是排列问题，在 10 只产品中取5只投入五个盒子中，第五号盒子必须投次品，则有C_4^1种方法；剩下四个盒子须投入全部3个次品，则有P_4^3种方法；最后一个盒子投入一个正品有P_6^1种方法；由乘法原理：所求不同情形有$C_4^1\times P_4^3\times P_6^1=576$种．

810．在一张节目表中原有 6 个节目，如果保持这些节目的相对顺序不变，再添加进去三个节目，求共有多少种安排方法．

【精析】　“投球入盒”模式即一个球只能投入一个盒子，一个盒子只能容纳一个球，特殊情况下，一个盒子也可能容纳多个球，一般排列问题可构造“投球入盒”模式．

【解答】　由题意，相当于将 9 个不同节目投入 9 个不同盒子中，先投入3个有顺序变化的节目有P_9^3种方法，剩下6个盒子中投入原顺序的节目只有一种方法，由乘原理，共有P_9^3种安排方法．

811．某班有 48 名学生，其中有一名正班长，两名副班长，现在要选 5 名学生参加一项活动，其中正、副班长都必须在内有多少种选法．

【解答】　由题意，相当于 48 件“产品”中有三件“次品”，选 5 件“产品”时，三件“次品”都选入的方法有$C_{45}^2=990$种，于是满足题意的选法有 990 种．

812．在 1，2，3，…，100 中，每次取不等的两数相乘，使它们的积是 7 的倍数，这样的取法有多少种．

【精析】　做组合题，一般情况下，元素需分类选取时可建立“选取次品”模式．

【解答】　将 1，2，3，…，100 当成 100 件产品，被 7 整除的数当成次品，原题相当于在 100 件产品中取 2 件，至少有一件是次品的取法，于是得$C_{100}^2-C_{86}^2$＝1295种取法．

813．一条铁路原有 n 个车站，为适应客运需要，新增加了 m 个车站(m＞1)客运车票增加了 62 种，问原有多少个车站？现有多少个车站？

【解答】　∵原有n个车站，∴原有车票p_n^2种，

又∵现有n＋m个车站，∴现有车票p_{n+m}^2种．

依题意可知$p_{n+m}^2-p_n^2=62$，∴$(n+m)(n+m-1)-n(n-1)=62$

$\therefore 2mn+m^2-m=62$，$\therefore n=\frac{31}{m}-\frac{1}{2}(m-1)$ 又∵n∈N

$\therefore \frac{31}{m}>\frac{1}{2}(m-1)$ 即 $m^2-m-62<0$ 且 $m>1$，$\therefore 1<m<\frac{1+\sqrt{249}}{2}$ 且 M∈N

∴m＝2，3，4，5，6，7，8

当 m=2 时，n=15；当 m=3，4，5，6，7，8 时，n 都不是自然数，

∴n＝15，m＝2

故原有车站 15 个，现有车站 17 个．

814．三名男歌唱家和两名女歌唱家联合举办一场音乐会，演出的出场排序要求两名女歌唱家之间恰有一名男歌唱家，共有多少出场方案．

【精析】 一般情况下，要考虑一些元素的不相邻的排列或组合时，可建立“留空插空”模式．

【解答】 将三名男歌唱家当作三个不同的“○”，二名女歌唱家看作两个不同的“●”，原题可转化为：先排三个不同的“○”，有 P_3^3 种排法，在每个“○”两旁留的空位中插入“●”有 C_1^3 种可能，每插到一个“○”两旁时，两“●”交换位置有 P_2^2 种方法，由乘法原理有 $P_3^3C_3^1P_2^2$ =36 种出场顺序．

815．n 本不同的书，全部分给 n－1 个人，每人至少一本，共有多少种不同分法．

【解答】 先取两本书为一组，其余每本书为一组(平均分组问题)，将 $n-1$ 份书分给 $n-1$ 个人，有 $C_n^2P_{n-1}^{n-1}$ 种方法．

816．空间有 8 个点，其中任何三点不共线，任何四点不共面，经过每两点的所有直线中，有多少对异面直线．

【解答】 每四点组成一个四面体，每一个四面体恰有三对异面直线，故共有 $3C_8^4=210$ 对异面直线．

817．直线 *l* 与圆相离，*l* 上有 8 个点，圆周上有 4 个点，通过任意两点连直线，最多可以连出多少条不同的直线？最少可以连出多少条直线？

【解答】 当除了直线 *l* 上的 8 个点共线外再无任何三点共线时，可以连出最多的直线，共有 $C_8^1C_4^1+C_4^2+1=39$ 条

当圆上 4 点中任何两点都与直线 *l* 上的 8 点中某一点共线时(如图 119)

可以连出最少的直线，共有 $39-2C_4^2=27$ 条．

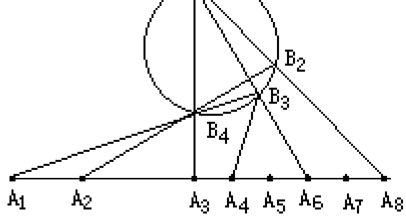


图119

818．从高二(1)班第一组 8 个男生，6 个女生中选 7 人参加学校义务

劳动，要求选入的男生女生均至少有 2 人，有多少种选法？

【解答】 先选2名女生有C_6^2种方法，再选2名男生有C_8^2种方法，最后从剩下的12人中不管男生女生再选3人有$C_1^3 2$种方法，所以，一共有$C_6^2C_8^2C_{12}^3$＝92400种选法．

819．有 11 个工人，其中 5 个工人只会当钳工，4 个工人只会当车工，还有 2 个工人既会当钳工也会当车工，现在要从这 11 个人里选出 4 人当车工，4 人当钳工，一共有多少种选法？

【解答】 符合条件的选法有如下几种情况：

(1)5个只会钳工的有4个在内的选法有$C_5^4C_6^4=75$种

(2)5个只会钳工的有3个在内的选法有$C_5^3C_6^5=60$种

(3)5个只会钳工的有2个在内的选法有$C_5^2C_6^6=10$种

所以，一共有 75＋60＋10＝145 种．

820．求$(1+x)^6(1-x)^5$展开式含 x^3 项的系数．

【精析】 如果按照本来的形式$(1+x)^6(1-x)^5$求解，对两个二项式展开式中的 x 的指数进行搭配，可得：

$C_6^0C_5^3(-1)^3C_6^1C_5^2(-1)^2+C_6^2C_5^1(-1)^1+C_6^3C_5^0=-5$．

对原来的形式进行变型：

$(1+x)^6(1-x)^5=(1-x^2)^5(1+x)$

只需在$(1-x^2)^5$的展开式中求 x^2 的系数，

只需在$(|x|+\frac{1}{|x|})$的偶次方项中寻找常数项．

即$C_3^1(-2)C_2^1+C_3^3(-2)^3$＝－20．

这种变型方法不是最巧妙的，可进行如下变型：

$(|x|+\frac{1}{|x|}-2)^3=[(\sqrt{|x|}+\frac{1}{\sqrt{|x|}})^2]3$

$=(\sqrt{|x|}+\frac{1}{\sqrt{|x|}})^6$

∴展开式中的常数项为$-C_6^3=-20$．

821．今天是星期一，问 10^{90} 天后是星期几？

【精析】 靠单纯的计算无益于问题的解决，应想法化归我们所熟悉的问题，此问题不正是 10^{90} 除以 7 求余数问题吗？很自然地过渡到二项式定理．

$10^{90}=100^{45}=(98+2)^{45}=C_{45}^0 98^{45}+C_{45}^1 98^{44}\times 2+\cdots+C_{45}^{44}98\times 2^{44}+C_{45}^{44}2^{45}$

∵98 是 7 的倍数，我们再处理 2^{45} 除以 7 所得的余数

$2^{45}=8^{15}=(7+1)^{15}$

$=C_{15}^0 7^{15}+C_{15}^1 7^{14}+\cdots+C_{15}^{14}\times 7+1$

很明显余数是 1．

∴10^{90} 天后是星期二．

822．某地现有耕地 10000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%，如果每年人口增长率为 1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷(精确到 1 公顷)．

【解答】　设耕地平均每年至多减少 x 公顷，又设该地区现有人口为 p 人，粮食单产为 m 吨／公顷，

依题意，得

$$\frac{m(1+22\%)(10^4-10x)}{p(1+1\%)^{10}} \geq \frac{m \times 10^4(1+10\%)}{p}$$

化简，得

$$x \leq 10^3[1-\frac{1.1 \times (1+0.01\%)^{10}}{1.22}]$$

$$=10^3[1-\frac{1.1}{1.22}(1+C_{10}^1 \times 0.01+\cdots)]$$

$$\approx 10^3[1-\frac{1.1}{1.22} \times 1.1046]$$

$$\approx 4$$

答：耕地平均每年至多只能减少 4 公顷．

823．4 男 4 女排成一排，任意两名女子不相邻且任意两名男子也不相邻，问一共有多少种排法？

【精析与解答】　4 男 4 女，人数相等，4 男分开有 5 个空位，由于任何两名女子不相邻且任何两名男子也不相邻，四名女子插入的四个空位必须相邻，因此完成这个排列分三个步骤：

第一步：将 4 名男子一字排开，有 5 个空位，选四个相邻的空位，共有 2 种选法；

第二步：将4名女子放入选出的四个相邻空位进行排列，共有P_4^4种排法；

第三步：将4名男子进行换位，共有P_4^4种排法．

由乘法原理得不同排法的种数共有：

$N=2P_4^4P_4^4=1152$(种)．

注意：本题容易错解为(1) $N=P_4^4P_4^4=576$(种)；(2)$N=P_5^4P_4^4=2880$(种)；(3)$N=P_5^4P_4^4=5760$(种)．错解(1)是由于考虑不同，以偏代全，遗漏了另一种情况而产生的．错解(2)、(3)产生的原因是忽视了任何两名女子不相邻且任何两名男子也不相邻这个条件．对五个空位选四个进行排列，而实际上这四个空位必须相邻．错解(3)在这一错误的基础上把已含的男女对调情况，又重计入一遍．

要使学生明确解间隔排列问题，要首先对于元素进行两大类分类，将一类元素排好，另一类元素分别插入它们的中间及两头，如何插还要看其它附加条件，这一思路主要是从排列、组合的形成过程来考虑的．

824．设$(a+6)^{20}$的展开项中的第 4r 项的系数与第 r＋2 项的系数相等，求 r 的值，

【精析与解答】　设$(a+b)^{20}$的展开式的通项是

$$T_{k+1}=C_{20}^k a^{20-k} b^k.$$

则第4r项的系数为C_{20}^{4r-1}，第r＋2项的系数为C_{20}^{r+1}，由题设条件知：$C_{20}^{4r-1}=C_{20}^{r+1}$．

所以 4r－1＝r＋1 或 21－4r=r＋1，由 4r－1＝r＋1，解得

$r=\frac{2}{3}$，不合题意舍去；

由 21－4r=r＋1，解得 r=4．

注意：本题易错解为：由$C_{20}^{4r-1}=C_{20}^{r+1}$得$4r-1=r+1$，即$r=\frac{2}{3}$，因为项数$r+2$必为整数，而$r+2=\frac{8}{3}$是分数，所以原题无解．这个解答错误的原因在于由$C_n^{ml}=C_n^{m2}$，推出$m_1=m_2$，实际上由$m_1=m_2$，可以推出$C_n^{ml}=m_n^{m2}$，但其逆命题不成立，即$C_n^{ml}=C_n^{m2}$是$m_1=m_2$的必要条件，但不是充分条件．错解用必要条件当作充要条件依据解题，因此得出错误的结论．

在教学中应指出组合数方程解的过程要注意条件的使用，不要误把必要条件当作充要条件使用．解的过程中需要对所推出的结果进行分类讨论，得出正确的结果．

第十章　直线与平面

一、选择题

825．用一个平面去切正四面体，使它成为形状大小都相同的两个几何体，这样的平面个数为

[　　]

A．3　　B．6

C．10　　D．无数

【精析】　如图120，取AB、CD中点分别为E、F，在AD上任取一点G，若G为A点或D点，则显然正四面体被分成两个相同的三棱锥，若G为AD中点，则过E，F，G的截面为正方形，易知分成的两个几何体形状相同．

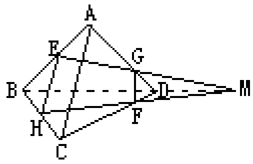


图 120

当G为异于上述情况的点，不妨设AG＞GD，连结EG交BD的延长线于M，连MF交BC于H，则四边形EHFG为过E，F，G的截面．

在平面ABD中，由梅涅劳斯定理$\frac{BE}{EA}\times\frac{AG}{GD}\times\frac{DM}{MB}=1$

又E为AB中点，则$\frac{AB}{GD}=\frac{MB}{DM}$

同理，在平面BCD中$\frac{BH}{HC}\times\frac{CF}{FD}\times\frac{DM}{MB}=1$

由$CF=FD$，得$\frac{BH}{HC}=\frac{MB}{DM}$，

$\therefore\frac{AG}{GD}=\frac{BH}{HC}$，即$\frac{AD-GD}{GD}=\frac{BC-HC}{HC}$又AD＝BC，

∴GD=HC，得AG＝BH．

因此对于多面体ACHEGF与BDGEHF，对应边及角都相等，

∴两个几何体形状相同，即存在无数个平面满足题意．

826．直线AB与直二面角α－l－β的两个面分别交于A，B两点，且A，B都不在棱l上，设直线AB与α，β所成的角分别为θ和φ，则θ＋φ的取值范围是

[　　]

A．$0°<\theta+\varphi<90°$　　B．$0°<\theta+\varphi\le 90°$

C．$90°<\theta+\varphi<180°$　　D．$\theta+\varphi=90°$

【解答】　如图121，分别过点A，B向平面β，α作垂线，垂足为A_1，B_1，连结BA_1，AB_1．

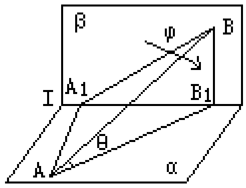


图 121

由已知，$A_1 \in l$，$B_1 \in l$，故$\angle BAB_1 = \theta$，$\angle ABA_1 = \varphi$，由最小角得$\angle BAA_1 \geq \theta$，而$\angle BAA_1 + \varphi = 90°$，故$\theta + \varphi \leq 90°$，应选B．当$AB \perp l$时，$\theta + \varphi = 90°$．

827．已知空间四边形ABCD中，AB⊥BC，AB⊥CD，AB=BC，则异面直线AC与BD所成角α的取值范围是

[　　]

A．0°＜α≤45°　　B．0°＜α≤90°

C．α＞45°　　D．45°＜α≤90°

【解答】　如图122，过C，D分别作BD，BC的平行线，设交点为E．连结AE，则∠ACE就是异面直线AC与BD所成的角α．因AB⊥BC，AB⊥CD，所以AB⊥平面BCD，∠ACB是AC与平面BCD所成的角．由最小角得α＞∠ACB又在Rt△ABC中，AB=BC，故∠ACB=45°，45°＜α＜90°．当AC⊥BD时，α=90°．故选D．

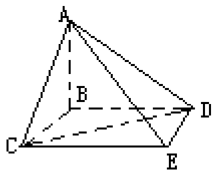


图122

828．在四面体ABCD中，∠ABD=90°，AB＜BD．设AD与平面BCD所成的角为α，则α满足

[　　]

A．45°＜α＜90°

B．45°≤α＜90°

C．0°＜α＜45°

D．0°＜α≤45°

【解答】　如图123，过点A作平面BCD的垂线，垂足为O，连结OD，则∠ADO为斜线AD与平面BCD所成的角．由最小角得∠ADO

$\leq \angle ADB$，所以$\tan\angle ADO \leq \tan\angle ADB = \dfrac{AB}{BD} < 1$，$\angle ADO < 45°$，

0°＜α＜45°．故选C．

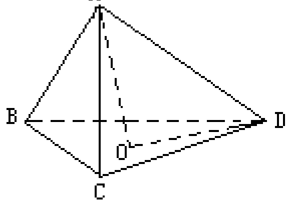


图123

二、填空题

829．直角三角形ABC，两直角边AC=2，BC=3．点P为斜边上的动点，今沿CP将△ABC折成直二面角．当A、B′两点的距离等于$\sqrt{7}$时，二面角$B'-AC-B=$___________．

【解答】 如图124，在△ABC中，BC=3，AC=2，将BCP折起，使平面ACP与平面B′CP成直二面角，$AB'=\sqrt{7}$．

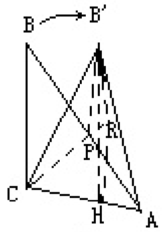


图124

$$\therefore \cos\angle ACB'=\frac{3^2+2^2-7}{2\times3\times2}=\frac{1}{2}.$$

因0°＜∠ACB′＜90°，故∠ACB′=60°．

因∠ACP＋∠PCB=90°，又A－CP－B′为直二面角，而cos∠ACP×cos∠B′CP=cos∠ACB′，∠B′CP=∠BCP，故cos∠ACPcos(90°－∠ACP)=cos60°，即$\cos\angle ACP\sin\angle ACP=\frac{1}{2}$，sin2∠ACP=1．

又0°＜∠ACP＜90°，故∠ACP=∠B′CP=45°．

作B′R⊥平面ABC，垂足为R，因A－CP－B′是直二面角，故R在平面ACP与平面B′CP的交线CP的延长线上．

自R作RH⊥AC，交AC于H，连结B′H，由三垂线定理可知B′H⊥AC，故∠B′HR为二面角B′－AC－B的平面角．

因∠HCB′=60°，CB′=CB=3，故$CH=\frac{3}{2}$．

因∠RCH=45°，故CH=HR，$B'H=B'C\sin60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

$\cos\angle B'HR=\frac{HR}{B'H}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle B'HR=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴二面角B′－AC－B大小为$\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$．

830．矩形ABCD中，AB=4，$AD=\sqrt{3}$．AB的中点M，∠AMN=60°，其边MN交CD于N，以MN为棱将矩形折起成120°的二面角A－MN－C，则折起后AC的长等于________．

【解答】如图125，矩形ABCD中，过C引MN的平行线交AB的延长线于E．作AG⊥MN，并延长交EC的延长线于F．由平面几何知识，MG=BE=1，CE=2，$AG=\sqrt{3}$．由$\frac{EF}{MG}=\frac{AE}{AM}=\frac{5}{2}$，得$EF=\frac{5}{2}$，$AF=\frac{5}{2}\sqrt{3}$，故$CF=\frac{1}{2}$，$GF=\frac{3}{2}\sqrt{3}$．折起后的立体图形126中，AF被折成

两段 AG 和 GF，它们的长度不变，与 MN 垂直的性质不变，故∠AGF=120°．

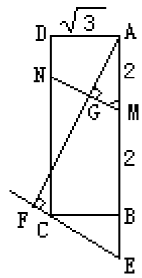


图125

因 MN⊥平面 AFG，EF∥MN，故 EF⊥平面 AFG，EF⊥AF．Rt△ACF 中，$AC^2=AF^2+FC^2=AG^2+FG^2-2AG\times FG\cos 120°+FC^2=$

$\frac{29}{2}$，故$AC=\frac{\sqrt{58}}{2}$．

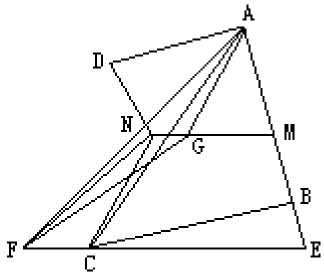


图126

831．边长为 4 的菱形 ABCD 中，M 为 AB 的中点，DM=3．以 DM 为棱将菱形折起成 60°的二面角 A－MD－C,则折起后 AC 的长等于________.(图127)

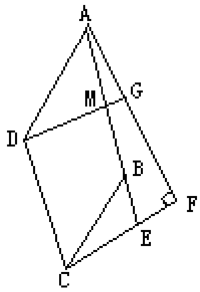


图127

【解答】菱形 ABCD 中，过 C 引 DM 的平行线，交 AB 的延长线于 E，作AG⊥DM(棱)并延长交CE于F．由$\cos A=\frac{AD^2+AM^2-DM^2}{2AD\times AM}=\frac{16+4-9}{2\times 4\times 2}$

$=\frac{11}{16}$，利用△ADM面积，$DM\times AG=AD\times AM\sin A$，得

$$AG=\frac{AD\times AM\sin A}{DM}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$GF=AG\times\frac{ME}{AM}=\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{4}{2}=\sqrt{15}\qquad MG=\sqrt{AM^2-AG^2}=\frac{1}{2}.$$

$$EF=MG\times\frac{AE}{AM}=\frac{3}{2},\ CF=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}.$$

折起时，AF 被折成两段 AG 与 GF，它们的长度不变，与 DM 垂直的性质不变．∠AGF 即为二面角 A－MD－C 的平面角(60°)．(图 128)

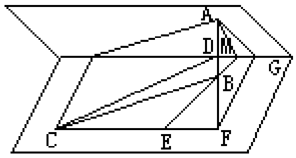


图 128

因 CE∥DM，DM⊥平面 AFG，故 CE⊥平面 AFG，CE⊥AF．Rt△ACF 中，$AC^2=CF^2+AF^2=CF^2+AG^2+GF^2-2AG\times GF\cos 60°$

$=\frac{63}{2}$. $AC=\frac{3\sqrt{14}}{2}$.

832．平面α∥平面β，AB 和 CD 是夹在平面α，β之间的两条线段．AB⊥CD，AB=3，直线 AB 与平面α成 30°角，则线段 CD 长的最小值为________．

【解答】如图 129，过点 B 作平面α的垂线，垂足为 O，连结 AO，则∠BAO=30°．过点 B 作 BE∥CD 交平面α于 E，则 BE=CD，连结 AE，因 AB⊥CD，故 AB⊥BE，所以 BE=ABtan∠BAE．由最小角得 $BE=AB\tan\angle BAE\geq AB\tan\angle BAO=3\tan 30°=\sqrt{3}$．故 $CD\geq\sqrt{3}$．当 CD 位于平面 AOB 中时，$CD=\sqrt{3}$．

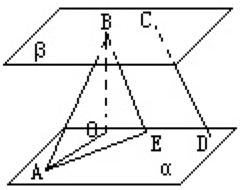


图 129

833．如图 130，△ABC 中，∠C=90°，∠B=30°，AC=2，M 是 AB 的中点．将△ACM 沿 CM 折起，使 A、B 两点间的距离为 $2\sqrt{2}$，此时三棱锥 A－BCM 的体积为________．

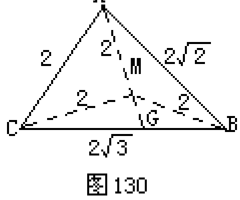


图 130

【解答】 三棱锥的 6 条棱都已知，从而 6 个侧面积均可求出，关键是从哪一点引高线计算起来比较方便．经观察，以 M 为顶点较好(从 A、B、C 引高均可)．

原直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半，有 MA=MB=MC=2，从而，点 M 在面 ABC 上的射影 G 必为△ABC 的外心．但 $AC^2+AB^2=4+8=12=BC^2$，故△ABC 为直角三角形，其外心是斜边 BC 上的中点，则 MC 是等腰△MBC 的中线(也是高与角平分线)有

$$MG = CM \times \sin\angle MCG = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

得$V_{A-BCM} = V_{M-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \times MG = \frac{2\sqrt{2}}{3}$．

834．如图 131，平面α⊥平面β，α∩β=l，A∈α，B∈β，则直线 AB 与这两个平面所成角之和的最大值为________．

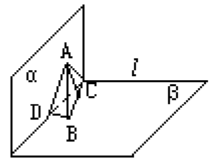


图 131

【解答】 过 A、B 作垂直于交线 l 的线段，垂足分别为 C、D，连接 BC、AD．

∵α⊥β，∴AC⊥β，∠ABC 是 AB 与β所成的角．

同理，∠BAD 是 AB 与α所成的角．根据最小角定理，有∠BAD≤∠BAC，

∴∠BAD＋∠ABC≤∠BAC＋∠ABC=90°．

仅当 AB⊥β时，(AB 与β所成的角是 90°，AB 与α所成的角是 0°)达到最大值 90°．

835．如图 132，AB，CD 为异面线段，M，N 分别为 AD，BC 的中点，$AB=8$，$CD=6$，$MN=\sqrt{13}$．则AB，CD所成的角为________．

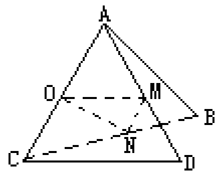


图 132

【解答】 取 AC 中点 O，连 OM，ON，则 ON∥AB，OM∥CD，∠MON 即为所求．

显然$OM=3$，$ON=4$，$MN=\sqrt{13}$．

由余弦定理得$\cos\angle MON = \frac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM \times ON} = \frac{3^2+4^2-13}{2\times3\times4} = \frac{1}{2}$，

∴∠MON=60°，即 AB 与 CD 成 60°角．

836．在矩形 ABCD 中，AB=3，BC=4．沿对角线 BD 把 ABD 折起，使点 A 在平面 BCD 上的射影落在 BC 上，二面角 A－BD－C=________．

【精析】 关键之一——作出平面角；之二——利用面积射影关系 $S'=S\times\cos\alpha$；之三——应用异面直线上两点间的距离公式 $EF^2=d^2+m^2+n^2-2mn\cos\theta$．

【解答】 如图 133，在矩形 ABCD 中作 AE⊥BD，垂足为 E，交 BC

于 F．沿 BD 折起后∠AEF 便是二面角 A－BD－C 的平面角．再

注意到AF恰为面BCD之垂线，$\Rightarrow \angle AFE = 90°$，易知$\cos\angle AEF = \dfrac{9}{16}$，下略

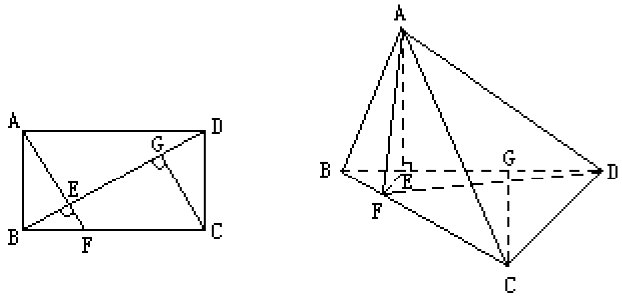


图133

三、解答题

837．求证：两条异面直线被三个平行平面所截得的线段对应成比例．(图 134)

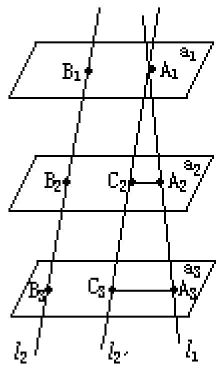


图134

【证明】　已知：平面α_1∥α_2∥α_3，l_1与l_2是异面直线，l_1与平面α_1、α_2、α_3分别交于A_1、A_2、A_3，l_2与α_1、α_2、α_3

分别交于B_1、B_2、B_3．求证：$\dfrac{A_1A_2}{A_2A_3} = \dfrac{B_1B_2}{B_2B_3}$过$A_1$点作直线$l'_2$∥$l_2$，设$l'_2$与平面$\alpha_2$、$\alpha_3$分别交于$C_2$、$C_3$，容易推得$A_1C_2=B_1B_2$，

$C_2C_3 = B_2B_3$．于是问题便转化为求证$\dfrac{A_1A_2}{A_2A_3} = \dfrac{A_1C_2}{C_2C_3}$了．

由于A_2C_2、A_3C_3是由两相交直线l_1、l'_2所确定的平面与两个平行平面α_2、α_3的交线，所以A_2C_2∥A_3C_3．根据平几中的有关知识，

易证得$\dfrac{A_1A_2}{A_2A_3} = \dfrac{A_1C_2}{C_2C_3}$．

838．已知 ABCD 是边长为 4 的正方形，E、F 分别是 AB、AD 的中点，GC 垂直于 ABCD 所在平面，且 GC=2，求点 B 到平面 EFG 的距离．

【解答】　以正方形 ABCD 为底面，GC 为棱，补作长方体 ABCD—A′B′G′D′，如图 135．因为 BD∥面 EFG，所以 B 到面 EFG 的距离等于直线 BD 到面 EFG 的距离，即点 O 到面 EFG 的距离．过 O 作 OK⊥GH，则 OK

⊥面 EFG，线段 OK 是点 O 到面 EFG 的距离．由题设得

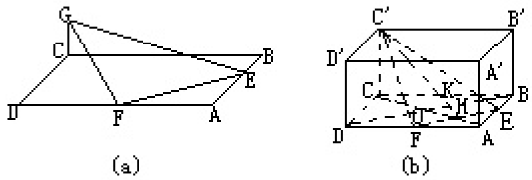


图135

$GC=2$，$CH=3\sqrt{2}$，$OH=\sqrt{2}$，$\therefore GH=\sqrt{GC^2+CH^2}=\sqrt{22}$．

又 $\frac{OK}{GC}=\frac{OH}{GH}$，$\therefore OK=\frac{OH\times GC}{GH}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$．

839．如图 136，空间四边形 ABCD 外切于一球，其切点为 E，FG，H，求证：E，F，G，H 在同一平面内．

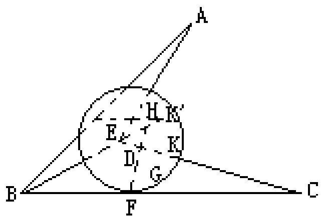


图136

【证明】　易知四个顶点到相邻两切点的距离相等，设 AE=AH=a，BE=BF=b，CF=CG=c，DG=DH=d，BD=e．

当 b=d 时，EH∥BD．同理 FG∥BD，所以 EH∥FG，

∴E，F，G，H 共面．

当 b≠d 时，不妨设 b＞d，则 EH，BD 在同一平面内且不平行，设交于 K，同理设 FG，BD 交于 K′．在平面 ABD 中，由梅涅劳斯定理，得

$\frac{AE}{EB}\times\frac{BK}{KD}\times\frac{DH}{HA}=1$，

即 $\frac{a}{b}\times\frac{BK}{KD}\times\frac{d}{a}=1$．

同理 $\frac{c}{b}\times\frac{BK'}{K'D}\times\frac{d}{c}=1$．

$\therefore\frac{BK}{KD}=\frac{BK'}{K'D}$，即 $\frac{DK+e}{DK}=\frac{DK'+e}{DK'}$

∴DK=DK′，即 K 与 K′的重合，

∴E，F，G，H 共面．

840．如图 137，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为上底面内一点，试求过 P 在上底面内引一直线，使它和对角线 A_1C 所成的角最小．

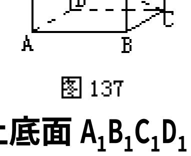


图137

【解答】　A_1C 与它在上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的射影 A_1C_1 所成的角最小，

从而可在上底面内过 P 点引直线 EF∥A_1C_1，则 EF 即为所求的直线．设 EF 和 A_1C 所成的最小角为α，

则$\tan\alpha=\frac{C_1C}{A_1C_1}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\alpha=\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$．

841．如图 138，二面角α－l－β的平面角是锐角，A∈α，B 是 l 上动点，问 B 在什么位置时，AB 与平面β所成的角最大？

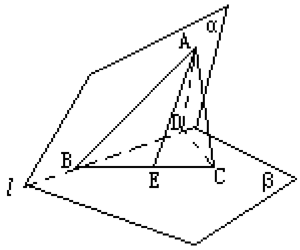


图138

【解答】 过 A 作 AC⊥β于 C，在平面 x 内作 AD⊥l 于 D，连接 CD、CB，则∠ADC 是α与β所成的二面角的平面角．∠ABC 是 AB 与平面β所成的角．

在 BC 上截取 CE=CD，则△ACD≌△ACE．

∴∠ADC=∠AEC．

据三角形外角定理，有∠AEC＞∠ABC，从而∠ADC＞∠ABC．

故当 AB⊥l 时，与β所成的角为最大，恰好等于平面α与平面β二面角的平面角．

842．如图 139，有平面α和β，它们所成角为θ(0＜θ＜90°)，在α上有坐标系 x0y，其中 y 轴垂直二面角的棱 l，已知 x0y 坐标系在平面β上的射影为 x′0′y′，坐标系，若α上任意点 P(x，y)在平面 x′0′y′上的射影为 P′(x′，y′)，试求 x，y 与 x′，y′的变换关系．

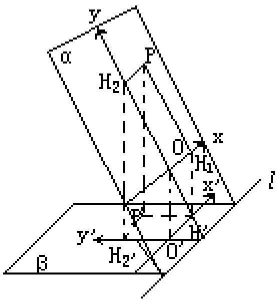


图139

【解答】 过 P 引 x 轴垂线，垂足为 H_1，过 P 引 y 轴垂线，垂足为 H_2，令 H_1、H_2 在β上的射影为 H'_1 和 H'_2，而原点 0 在β上的射影为 0′，P 在β上的射影为 P′．依三垂线定理知，$P'H'_1\perp l$，$H'_2O'\perp l$，再依空间三线平行公理知，OH_1 $\underline{\underline{//}}$ $O'H'_1$．由此知 x′=x，y′=ycosθ．这就是所求的变换关系．

843．如图 140，在直三棱柱 ABC－$A_1B_1C_1$ 中，∠ACB=90°，

$\angle BAC=30°$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{6}$，M是CC_1的中点，求证：$AB_1\perp A_1M$.

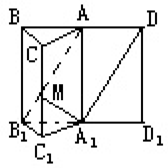


图140

【精析与解答】　延展平面 BB_1A_1A，使矩形 BB_1A_1A 与矩形 AA_1D_1D 全等，连 A_1D，则 $AB_1∥DA_1$，这样问题就转化为证$\angle DA_1M$是直角的平面问题.

由$A_1M^2=A_1C_1^2+C_1M^2=\dfrac{9}{2}$，

$A_1D^2=A_1D_1^2+D_1D^2=10$，

$DM^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos\angle DAC+CM^2=\dfrac{29}{2}$，

得 $DM^2=A_1M^2+A_1D^2$，即 $A_1D\perp A_1M$.

又 $AB_1∥DA_1$，$\therefore AB_1\perp A_1M$.

844．正方体 AC_1 中，F，E 分别为 AB，B_1C_1 的中点 K，H 分别在DC，BC上，且$DK=\dfrac{1}{4}DC$，$BH=\dfrac{1}{4}BC$，求证：$EF\perp KH$.

【精析与解答】　如图 141，作 $EG\perp BC$ 于 G，则 $EG\perp$ 平面 AC，且 G 为 BC 的中点，连 FG.

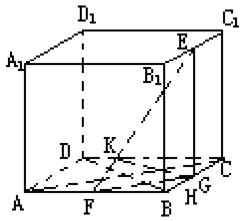


图141

欲证 $EF\perp KH$，只需证 $FG\perp KH$，这样问题就转化为同一平面内的线线垂直问题，连AC，BD因$DK=\dfrac{1}{4}DC$，$BH=\dfrac{1}{4}BC$，故$KH∥DB$.

同理可证 $FG∥AC$. $\because AC\perp BD$，$\therefore KH\perp FG$，从而 $EF\perp KH$.

845．求证：一个平面上任一直线和它在另一平面内的射影所成的锐角中，以分别在两个平面内且与这两个平面的交线垂直的两条直线所成的角最大(即指二面角的平面角).

【精析与解答】　如图 142，AC 为平面α内的一直线，C 为平面α，β的交线 l 上一点，过 A 作 $AO\perp\beta$ 于 O，过 O 作 $OB\perp l$ 于 B，连 AB，则由三垂线定理可知$\angle ABO$为二面角$\alpha-l-\beta$的平面角.

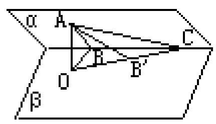


图142

欲证结论，只需证$\angle ABO\geq\angle ACO$即可.

因 OB⊥BC，故 OC＞OB，在 OC 上取点 B′使 OB′=OB，将△ABO 绕 AO 旋转到平面 AOC 中，则 B 与 B′重合，故∠ABO=∠AB′O．

显然∠AB′O≥∠ACO，故∠ABO≥∠ACO．

846．如图 143，A、B、C、D 为空间四点，且 AB⊥CD，AC⊥BD，求证 BC⊥AD．

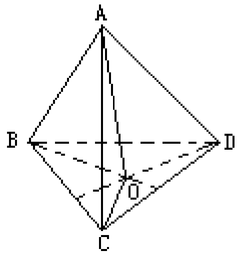


图 143

【精析与解答】　由已知 AB⊥CD，AC⊥BD 可以看出面 ABC 内两条直线分别垂直，又 AB 与 AC 均为面 BCD 的斜线，因此考虑过 A 作面 BCD 的垂线 AO．

【证明】过 A 作 AO⊥面 BCD，连 OB、OC 及 OD，则 OB、OC、OD 分别为 AB、AC、AD 在面 BCD 内的射影，由 AB⊥CD 及三垂线定理逆定理知 OB⊥CD，同理 OC⊥BD，因此 O 为△BCD 的垂心，可知 OD⊥BC，再根据三垂线定理知 AD⊥BC．

847．已知平面 M 与 N 相交于直线 a，直线 b 在 M 上且与直线 a 相交于 A 点，直线 c 在 N 上且与直线 a 平行．

求证：直线 b 与 c 是异面直线．

【证法一】　(如图 144 反证法)假设直线 b 与 c 不是异面直线，在同一个平面 a 上．则直线 b 与 c 或者平行或者相交．

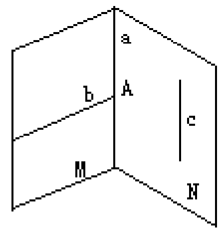


图144

若 b∥c，由已知 a∥c，则 a∥b．

这与已知 b 和 a 相交于 A 点矛盾．可知 b 与 c 不能平行．

若 b 与 c 相交于一点 B，由已知 b 与 a 相交于 A 点，可知 A、B 两点均在直线 b 上，又 A 点在直线 a 上，B 点在直线 c 上，直线 a、c 均在平面 N 上．可知由 A、B 两点确定的直线 b 也在平面 N 上．这与已知直线 b 只与平面 N 相交于 A 点矛盾．即 b 与 c 不能相交．直线 b 与 c 即不能相交也不能平行，因此假设不能成立．所以直线 b 与 c 是异面直线．

【证法二】(直线应用判定定理)

直线 b 上除点 A 外，另外任取一点 B．

因为 A 点在平面 N 上，

所以 B 点不在平面 N 上(否则与 b 和 N 交于一点 A 矛盾)．

可知直线 b 是平面 N 上一点 A 与平面 N 外一点 B 的连线．

又由 a∥c，c 在平面 N 上.

所以 A 点不在直线 c 上.

即知直线 c 是在平面 N 上但不过 A 点的直线.

因此，直线 b 与 c 是异面直线(平面上一点与平面外一点的连线和平面上不经过该点的直线是异面直线).

注意：在证明两条直线是异面时，易犯的错误是证明不严谨或逻辑不清，例如证法一，在反证法中只排除两条直线不可能相交而忽略还应排除两条直线平行的可能；在证法二中忽略了强调点 B 在直线 b 上但不在平面 N 上，而点 A 在平面 N 上却不在直线 c 上．也就是说忽略了两条异面直线判定定理最关键的部分．在证明这个题时，还易犯的错误是，只证明两条直线 b 与 c 不在一个平面内，便得出 b 与 c 是异面直线的结论．正确的应该是证明 b 与 c 不同在任何一个平面内.

纠正错误的办法是深刻理解异面直线的定义和其判定定理．尤其是其中关键的逻辑关系．证明两条直线是异面直线一般采用“反证法”或直接应用判定定理．无论使用什么方法证明，都应紧紧依据已知条件和几何图形.

判断两条直线是否为异面直线，是立体几何中重要内容，一定要熟练掌握.

848．在三棱锥 V－ABC 中，侧面 VAB 垂直于底面 ABC，且侧面 VAB 与底面 ABC 是两个全等的正三角形．D、E 分别是 BC、AC 的中点．求侧棱 VC 和截面 VDE 所成的角.

【精析与解答】　如图 145 所示

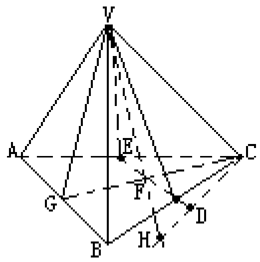


图145

由于△VAB 与△ABC 均为正三角形．作 AB 中点 G，所以 VG⊥AB，CG⊥AB.

因为平面 VAB⊥平面 ABC，所以 VG⊥平面 ABC.

由 D、E 分别为 BC、AC 中点，

所以 DE∥AB.

由 CG⊥AB，有 CG⊥DE．设其垂足为 F.

连结 VF，

由三垂线定理，有 VF⊥DE．即 DE⊥平面 VCG.

又 DE 在平面 VDE 上，

所以平面 VDE⊥平面 VCG，其交线为 VF．在平面 VCG 上，作 CH⊥VF，设垂足为 H.

所以 CH⊥平面 VDE.

于是，∠CVH 为侧棱 VC 和截面 VDE 所成的角.

设$AB=a$，则$VG=CG=\frac{\sqrt{3}}{2}a$。

在Rt△VGC中，$VC^2=VG^2+CG^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2$。

在△ABC中，$DE=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$。

$CF=GF=\frac{\sqrt{3}}{4}a$。

在Rt△VGF中，$VF^2=VG^2+GF^2=\frac{15}{16}a^2$。

由 Rt△VFG∽Rt△CFH，

所以$\frac{CH}{VG}=\frac{CF}{VF}$，

所以$CH=\frac{VG\times CF}{VF}=\frac{\sqrt{15}}{10}a$。

Rt△CVH中，

$\sin\angle CVH=\frac{CH}{VC}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以$\angle CVH=\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$。

即侧棱VC和截面VDE所成的角为$\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$。

注意：平面的一条斜线与这个平面的夹角，是指这条斜线与其在这个平面上的射影之间的夹角．在本题中，由于几何图形较复杂，学生做题的困难在于找不到直线 VC 在平面 VDE 上的射影，因此找不到斜线 VC 与平面 VDE 的夹角．

事实上，求斜线与平面的夹角，关键是抓住斜足和垂足，就是说关键是准确地找出斜线在平面上的射影．这其中，找垂足是个难点．一般说来，找垂足有以下几种方法．

(1)从斜线上一个特殊点到已知平面的垂线，直接找出垂足的位置．

(2)若斜线与两个垂直平面相交，则从不是斜足的交点作交线的垂线，垂足与斜足连接即得所求的角．

(3)把斜线平移到特殊位置，使垂足易于找到．

(4)若几何图形上不易找到垂足和斜足，则可以过斜线作一个平面垂直于已知平面，这两个垂直平面的交线自然就是射影，则其与斜线所成的角即为所求的线面夹角．用这个办法虽不需找出垂足，但一定要通过延长或平移找出斜足．

当然，在具体几何问题中，应结合几何条件和几何图形，具体分析解决问题的办法，显然，准确看出射影的位置，是解决问题的关键．

849．如图 146，AB 是⊙O 的直径，C 是圆周上一点，PA⊥面 ABC，$\angle BAC=\alpha$，二面角 A－PB－C 的大小为β，PB 与平面 ABC 所成角为γ，AE⊥PB，AF⊥PC，E、F 为垂足，那么 $\cot\alpha\cot\beta$ 与 $\sin\gamma$ 关系何在？

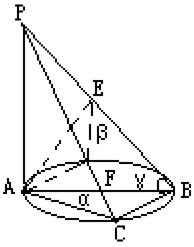


图146

【精析】 抓住关联α、β、γ的几个直角三角形是解决本题的关键．

【解答】 PA⊥面ABC，BC⊥AC⇒面PAC，面PBC⊥面PAC，又AF⊥PC，AE⊥PB，连EF，AF⊥面PBC，

∴AF⊥PB，即PB⊥面AEF⇒EF⊥PB，∠AEF=β

结合Rt△PEF∽Rt△PCB，Rt△PFA∽Rt△PAC，有$\frac{EF}{BC}=\frac{PF}{PB}$，$\frac{AC}{AF}=\frac{PA}{PF}$．

∴$\text{ctan}\,\alpha\times\text{ctan}\,\beta=\frac{AC}{BC}\times\frac{EF}{AF}=\frac{EF}{BC}\times\frac{AC}{AF}=\frac{PF}{PB}\times\frac{PA}{PF}=\frac{PA}{PB}=\sin\gamma$．

即$\cos\alpha\cot\beta\sin\gamma=c^2$

850．证明：正四面体内一点到各面距离之和为定值．

【精析】 考虑退策，与之相应的平面问题是：正三角形内一点到各边距离之和为定值．

如图147(1)：$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APB}+S_{BPC}+S_{CPA}$，所以容易得到PG＋PE＋PF=AD．以此为基础进到三维空间，如图147(2)，把正四面体内一点P与其各顶点连结起来，可得到以各面为底的四个小棱锥，所以$V_{ABCD}=V_{P\text{-}ABC}+V_{P\text{-}ACD}+V_{P\text{-}ABD}+V_{P\text{-}BCD}$．容易得到：

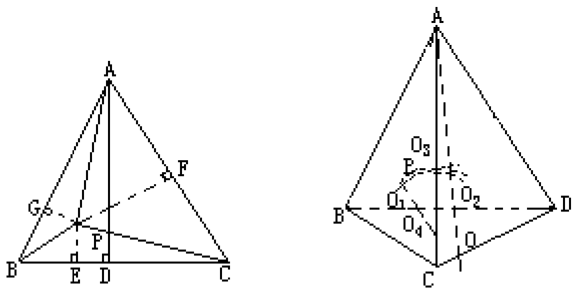


图147

$PO_1+PO_2+PO_3+PO_4=AO$(正面体的高)，显然这是一个定值，所以命题获证．

851．如图148，顶点A_4处的三个角均为直角，A_1所对的三角形的面积为$S_i(i=1,2,3,4)$求$S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$．

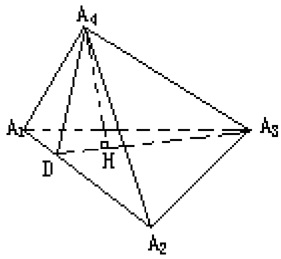


图 148

【精析】 考虑退策，与之相应的平面问题是：直角三角形的一条直角边的平方等于其在斜边上的射影与斜边的乘积，如图 149，即 $A_4D^2=DH\times DA_3$(射影定理)在此基础上，进到空间中去，其主要工作就是如何将 $A_4D^2=DH\times DA_3$ 转化为含有面积的等式，所以只需将上式两边同乘以 $(\frac{1}{2}A_1A_2)^2$，即可，

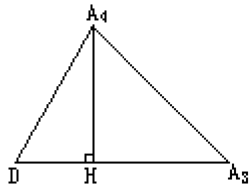


图 149

$$\left.\begin{array}{l}\text{则有：}S_3^2=S_{\triangle A_1HA_4}\times S_4\\ \text{同理：}S_2^2=S_{\triangle A_1HA_3}\times S_4\\ S_1^2=S_{\triangle A_2HA_3}\times S_4\end{array}\right\}\Rightarrow S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$$

852．如图 150，一个平面经过四面体 ABCD 的顶点 A 和截面 EFG 的中线 GH，其中 EF 是△ABC 平行 AB 的中位线，平面 EFG∥平面 ABD，问这个平面分这个四面体成两部分的体积比是多少？

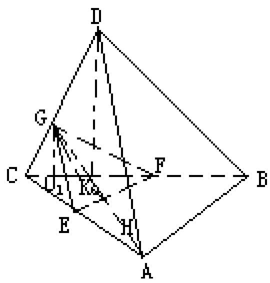


图 150

【精析】 考虑退策，与之相应的平面问题是：一条直线经过△ABC 的顶点 A 和平行于底边 AB 的中位线 EF 的中点 H,问这条直线分这个三角形成两部分的面积之比是多少？(图 151)

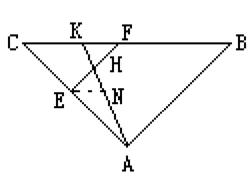


图 151

易知：$\dfrac{KF}{CK}=\dfrac{EN}{CK}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{CK}{CF}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{CK}{AB}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \dfrac{S_{\triangle AKC}}{S_{\triangle AKB}}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{GO_1}{DO}=\dfrac{1}{2}$，

在此基础上进到空间中去，

$$\frac{V_{G-CEF}}{V_{A-BDGK}}=\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle CEF}\times h_1}{\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times h}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$\therefore \dfrac{V_{G-CEF}}{V_{A-BDGK}}=\dfrac{1}{5}$．

853．(1)如图 152，已知两个边长为 a 的正方形 ABCD 和 ABEF 所在平面互相垂直，求异面直线 AC 和 BF 所成角的大小．

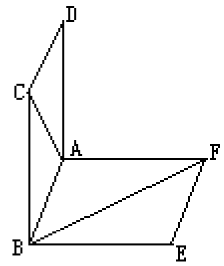


图 152

(2)如图 153,已知有公共底边的正△ABC 与正△BCD 所在平面互相垂直，求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小．

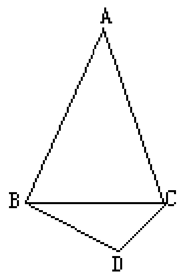


图 153

【精析】　(1)什么样的几何体相邻的两个面均为正方形且互相垂直？将图形嵌入正方体 AE′中(图 154)，连 CF′，则 CF′∥BF，∠F′CA 为所求，易得∠F′CA=60°．

(2)显然不能嵌入正方体，考察到正三角形也是轴对称图形且所在平面互相

垂直，可将图形嵌入长方体 BE′中(图 155)，使正△ABC 与正△BCD 的公共边 BC 为长方体的一条棱，顶点 A、D 分别为与 BC 平行的棱 B′C′、FE 的中点，连 DE′，则 DE′∥BA，故∠E′DC，为所求．

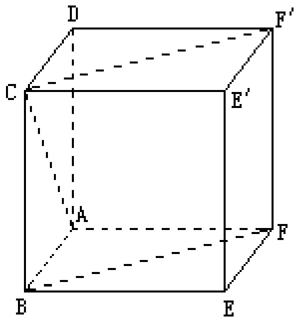


图 154

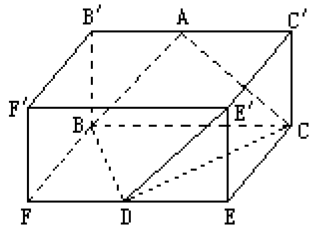


图 155

854．如图 156，∠PAB=∠PAC=∠BAC＝60°，PA=10，求点 P 到平面 ABC 的距离．

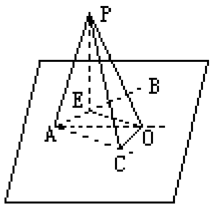


图 156

【解答】　作 PO⊥面 ABC，PE⊥AB，PF⊥AC，O、E、F 分别为垂足，连 OE、OF、OA，则 PO 的长为点 P 到平面 ABC 的距离，易知 Rt△PAE≌Rt△PAF．

∴AF＝AE＝5，OE＝OF，

由三垂线定理的逆定理知 OF⊥AC，OE⊥AB，∠OAC＝∠OAB＝30°．

$\therefore \mathrm{OA}=\dfrac{\mathrm{AF}}{\cos 30^{\circ}}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ 由勾股定理知

$\mathrm{PO}=\sqrt{100-\dfrac{300}{9}}=\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$．

855．有一方木料如图 157，上底面上有一点 E，要经过点 E 在上底面上画一条直线和 CE 连线垂直，应该怎样画？

【解答】　连结 C′E，过点 E 在面 A′C′内画 C′E 的垂线 a，由三垂线定理知 a⊥CE，a 即为所求直线．

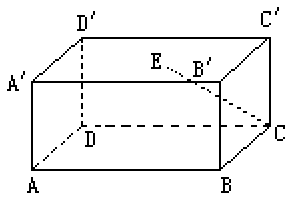


图 157

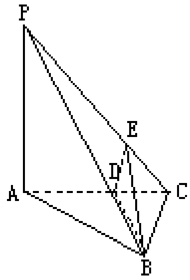


图 158

856．如图 158，已知正三角形 ABC，PA⊥面 ABC，且 PA=AB＝a，求二面角 A－PC－B 的一个三角函数值．

【精析】 由于二面角的棱 PC 在面 PAC 及 PBC 内，故要寻找这两个角中的一个面的一条垂线，由 PA⊥面 ABC 知面 PAC⊥面 ABC．

【解答】 过 B 作 BD⊥AC 交 AC 于 D，则由面 PAC⊥面 ABC 知，BD⊥面 PAC．过 D 作 DE⊥PC 交 PC 于 E 连 BE，根据三垂线定理知 BE⊥PC．

∴∠DEB是二面角A－PC－B的平面角，易知$BD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$DC=\frac{1}{2}a$，

$DE=CD\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，因此$\tan\angle DEB=\frac{\sqrt{3}}{2}a\Big/\frac{\sqrt{2}}{4}a=\sqrt{6}$．

857．如图 159，在△ABC 中，∠B=90°，SA⊥面 ABC，点 A 在 SB 和 BC 上的射影分别是 N 和 M，求证：MN⊥SC．

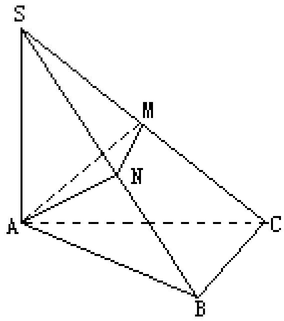


图 159

【证明】 ∵SA⊥平面 ABC，N∈SB，BC⊥AB，

由三垂线定理知 BC⊥AN．

由 AN⊥BC 及 AN⊥SB 知 AN⊥SBC 又 SC⊥AM，

根据三垂线定理的逆定理知 MN⊥SC．

858．如图 160，已知四面体 A－BCD，AO_1⊥面 BCD，且 O_1 为△BCD 的垂心，BO_2⊥面 ACD，

求证：O_2 为△ACD 的垂心．

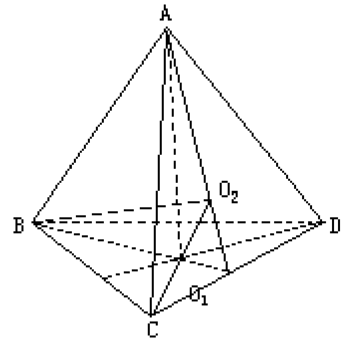


图 160

【证明】 连结 BO_1、AO_2.

∵AO_1⊥平面 BCD，O_1为△ACD 的垂心.

∴BO_1⊥CD，由三垂线定理得 AB⊥CD，又 BO_2⊥平面 ACD，由三垂线定理的逆定理得 AO_2⊥CD，同理可得连结 DO_1，CO_2可知 BC⊥AD，从而 CO_2⊥AD，

∴O_2是△ACD 的垂心.

859．已知三个平面两两相交，求证：三条交线交于一点或互相平行.

【精析】 由题设α∩β=a，β∩γ=b 知直线 a、b 同在β内，在同一个平面内的直线有且仅有两种位置关系：①平行、②相交，由此展开分类讨论.

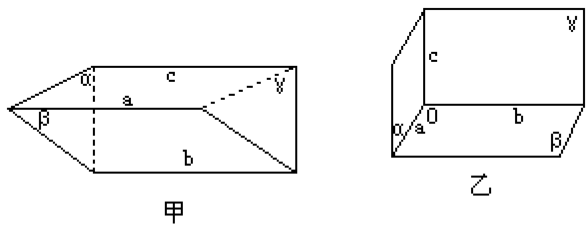


图 161

【证明】 设α∩β=a，β∩γ=b，α∩γ＝c.

(1) 当a∥b时(如图161甲)．于是，b⊂γ，a⊄γ，知a∥γ．又因为a∩γ = c，a⊂α，所以a∥c．因此有a∥b∥c.

(2) 当a∩b = O时(如图161乙)．由O∈a⊂α，知O∈α．又因为O∈b⊂γ，所以O∈γ．从而有O∈α∩γ = c，即c过a与b的的交点 O，由此可知，当 a 与 b 相交时，a、b、c 三线共点.

由(1)、(2)即知题目所述命题得证.

860．如图 162，已知斜三棱柱 ABC－$A_1B_1C_1$的侧面 A_1ACC_1与底面ABC垂直，∠ABC＝90°，BC = 2，AC＝$2\sqrt{3}$，且AA_1⊥A_1C，AA_1＝A_1C.

(1)求侧棱 A_1A 与底面 ABC 所成角的大小；

(2)求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小；

(3)求顶点 C 到侧面 A_1ABB_1 的距离．

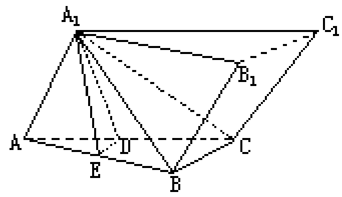


图 162

【精析】 (1)(3)略

(2)因为平面 A_1ACC_1 与所求二面角的面 ABC 垂直,所以可利用三垂线定理作所求二面角的平面角．

在平面 A_1ACC_1 内，过点 A_1 作 $A_1D\perp AC$，垂足为 D，

$\because$ 平面 $A_1ACC_1\perp$ 面 ABC，

$\therefore A_1D\perp$ 面 ABC，

在面 ABC 内，过点 D 作 $DE\perp AB$，垂足为 E，连结 A_1E 则 $A_1E\perp AB$，

$\therefore \angle A_1ED$ 为二面角 A_1-AB-C 的平面角．

另外，若连结 A_1B，可证 $A_1B=A_1A$，

因此，二面角 A_1-AB-C 的面 A_1AB 和面 ABC 分别是等腰三角形和直角三角形，所以还可用根据定义作二面角的平面角，请同学们自己完成．

861．如图 163，已知 $A_1B_1C_1-ABC$ 是正三棱柱，D 是 AC 之中点．

(1)证明：$AB_1\parallel$ 平面 DBC_1；

(2)假设 $AB_1\perp BC_1$，求以 BC_1 为棱，DBC_1 与 CBC_1 为面的二面角 α 的度数．

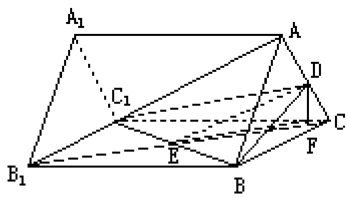


图 163

【精析】 (1)略

(2)因为平面 ABC 垂直于二面角的面 CBC_1，因此，可用三垂线定理作二面角的平面角．在平面 ABC 内，过点 D 作 $DF\perp BC$，垂足为 F，$\because$ 平面 $ABC\perp$ 平面 CBC_1，$\therefore DF\perp$ 面 CBC_1，设 BC_1 交 B_1C 于 E，连结 DE、EF，$\because$ D、E 分别是 AC、B_1C 的中点，$\therefore DE\parallel AB_1$，$\because AB_1\perp BC_1$，$\therefore DE\perp BC_1$，$EF\perp BC_1$，因此，$\angle DEF$ 是二面角 $D-BC_1-C$ 的平面角．

862．如图 164，正方形 ABCD 的边长为 a，以对角线 BD 为折痕折成直二面角 $A-BD-C$，连结 AC．求：

(1)二面角 $B-AC-D$ 的大小；

(2)二面角 $A-BC-D$ 的大小；

(3)二面角 $B-AD-C$ 的大小．

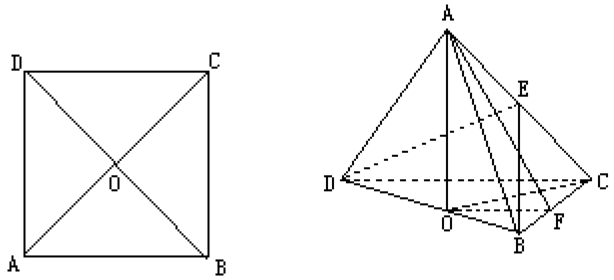


图 164

【精析】 (1)易证 AC＝AB,所以△ABC 和△ADC 都是正三角形.因此，可根据定义作二面角 B－AC－D 的平面角：取 AC 的中点 E，连结 BE，DE，则有 BE⊥AC，DE⊥AC，所以∠BED 为二面角 B－AC－D 的平面角.

(2)△ABC 为正三角形，△BCD 为直角三角形，∠BCD 为直角．因此，可根据定义作二面角 A－BC－D 的平面角：分别取 BC、BD 的中点 F、O，连结 AF、OF，∵AB=AC，OB＝OC，

∴AF⊥BC，OF⊥BC，∴∠AFO 为二面角 A－BC－D 的平面角．

(3)仿照(2)可运用定义作出二面角 B－AD－C 的平面角,请读者自己完成.

863．正方形 ABCD 的边 AB，CD 上各有一点 M，N(如图 165)，满足 AM＝2MB=2，CN＝2ND．以 MN 为棱将正方形折起成二面角 A_1－MN－C(如图 166)，问二面角的平面角为多大时，A_1 在原平面 ABCD 上的射影恰在 BC 边上？

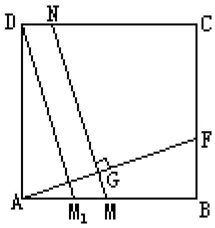


图 165

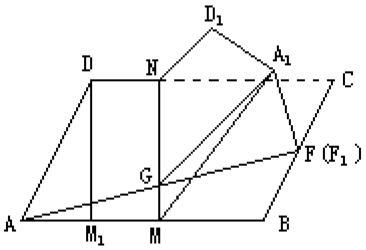


图 166

【解答】 如图 166，在待折起的 ABCD 上引 AG⊥MN，并延长 AG 交 BC 于 F．过 D 引 MN 的平行线 DM_1，交 AB 于 M_1．由△ADM_1

11．椭圆：$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，在准线$x=-\frac{a^2}{c}=-4$ ∴抛物线$P=4$方程为$(y-m)^2=2\times 4(x+2)=8x+16$，将椭圆右焦点(1，0)代入得$m=\pm 2\sqrt{6}$

以 MN 为棱折起时，AF 被折为 AG 与 GF 两段，它们的长度不变，与 MN 垂直的性质也不变．$\angle A_1GF$ 即二面角 A_1-MN-C 的平面角(设为θ)．

作 $A_1F_1\perp AF$(垂足是 F_1)，由 $MN\perp A_1G$，$MN\perp GF$，故 MN⊥平面 A_1GF ⊥，故 $MN\perp A_1F_1$．所以 $A_1F_1\perp$平面 BCNM，F_1 为 A_1 在原平面 ABCD 上的射影．据题设 F_1 须在 BC 上，所以 F_1 与 F 重合，

即$GF_1=GF=\frac{2}{5}\sqrt{10}$，$\cos\theta=\frac{GF_1}{A_1G}=\frac{GF}{AG}=\frac{2}{3}$．

∴当二面角A_1-MN-C的平面角为$\arccos\frac{2}{3}$时，A_1在原平面ABCD上的射影恰在 BC 上．

864．正四棱锥 S—ABCD 的底面边长为 2a，高为 a，求异面直线 AB 与 SC 间的距离．

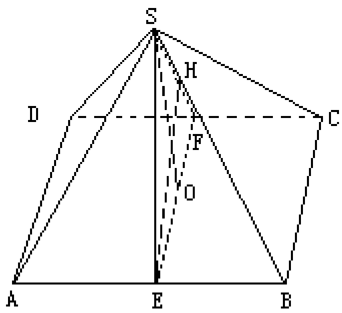


图 167

【精析】　如图 167，由 AB∥DC，得∠SCD 为 AB 与 SC 所成的角，又由△SCD 为等腰三角形知∠SCD≠90°，所以 AB 与 SC 不垂直．

【解答】　过 S 作底面的高 SO．其中 O 为顶点 S 在底面 ABCD 上的射影．

∵AB∥DC，

∴平面 DCS 为过 SC 且与 AB 平行的平面．

设 E，F 分别为 AB，DC 的中点，则 E，O，F 三点共线．

连结 SE，SF，则 SE⊥AB，SF⊥DC，

∴CD⊥平面 SEF，平面 SDC⊥平面 SEF，

过 E 点作 EH⊥SF，垂足为 H．则 EH⊥平面 SDC，EH 的长度为 AB 与平面 SCD 间的距离，

即 EH 的长度为 AB 与 SC 间的距离．

由三角形面积$S=\frac{1}{2}SF\times EH=\frac{1}{2}EF\times SO$，得$EH=\frac{EF\times SO}{SF}=$

$\frac{2a\times a}{\sqrt{SO^2+OF^2}}=\frac{2a^2}{\sqrt{a^2+a^2}}=\sqrt{2}a$。

所以异面直线AB和SC间的距离是$\sqrt{2}a$。

865．正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，求异面直线 DB_1 与 AC 间的距离．

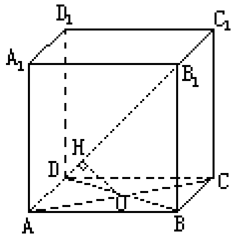


图 168

【解答】　如图 168，由三垂线定理可知 $AC\perp DB_1$．连结 DB，则平面 DBB_1 为过 DB_1 且与 AC 垂直的平面，交点为 O，过 O 作 OH⊥DB1，垂足为 H，于是线段 OH 为 AC 与 DB_1 的公垂线段．

由$Rt\triangle DBB_1\backsim Rt\triangle DHO$，得$\frac{OH}{B_1B}=\frac{DO}{DB_1}$，

$\therefore OH=\frac{DO\times B_1B}{DB_1}=\frac{\sqrt{6}}{6}$．

因此，异面直线DB_1与AC间的距离为$\frac{\sqrt{6}}{6}$．

866．▱ABCD中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}$，$\angle ABD=45°$．以BD为棱将 ABCD 折起成 45°的二面角．(1)求折起后 AC 的长；(2)求折起后点 C 至平面 ABD 的距离 d．

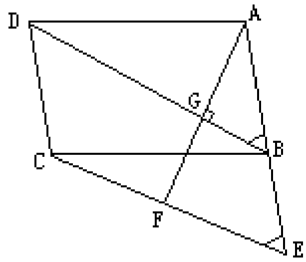


图 169

【解答】　(1)如图 169，在待折起的▱ABCD 上，过点 C 作棱 BD 的平行线，交 AB 的延长线于 E．作 AG⊥BD 并延长 AG 交 CE 于 F．由平面几何知识，BE＝BD 并延长 AG 交 CE 于 F．由平面几何

知识，$BE=CD=\sqrt{2}$，$AF=EF=2$，$AG=BG=GF=1$，故$DG=\sqrt{2}$，

$DB=\sqrt{2}+1$，$CF=CE-EF=\sqrt{2}-1$．

如图 170，当平面图形 ABCD 以 BD 为棱折起时，AF 被折成 AG，GF

两段，仍有 AG⊥BD，GF⊥BD，故∠AGF 为折起所成二面角的平面角(＝45°)．△AGF 中，

$AF^2=AG^2+FG^2-2AG\times FG\cos 45°=2-\sqrt{2}$．

因 BD⊥平面 AFG，CE∥BD，故 CE⊥平面 AFG，CE⊥AF．

Rt△ACF中，$AC^2=AF^2+CF^2=2-\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)^2=5-3\sqrt{2}$．

$\therefore AC=\sqrt{5-3\sqrt{2}}$

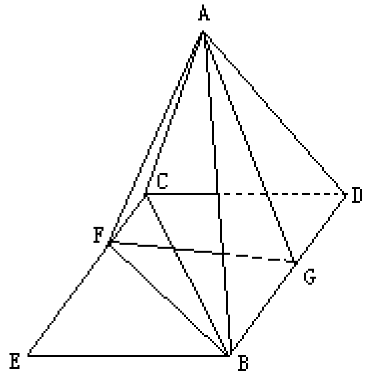


图 170

(2)因 CE∥BD，故 CE∥平面 ABD，CE 上的点 F 到平面 ABD 的距离等于点 C 到平面 ABD 的距离(d)．

$x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{3+4k^2}$，$x_1\times x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

$$d=\frac{BG\times\frac{1}{2}\times AG\times GF\times\sin 45°}{\frac{1}{2}\times AG\times BG}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

867．如图 171，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$E\in BB_1$，截面 A_1EC⊥侧面 AC_1．

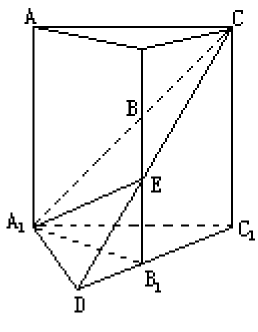


图 171

(1)求证：$BE=EB_1$；

(2)若 $AA_1=A_1B_1$,求平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角(锐角)的度数．

【精析】　(2)为了作所求二面角的平面角，应先寻找二面角的棱．分别延长和 CE、C_1B_1 交于点 D，连结 A_1D，则 A_1D 为所求二面角的棱，因为平面 BC_1 垂直于二面角的面 A_1C_1D，所以可利用三垂线定理作

其平面角．因为 CC_1⊥面 A_1C_1D，故只须在平面 A_1C_1D 内过点 C_1 作 A_1D 的垂线即可，由(1)知，$BE=EB_1$，∴$B_1D＝BC＝B_1C_1＝A_1B_1$，∴ C_1A_1⊥A_1D，连结 A_1C，则 A_1C⊥A_1D，

∴∠CA_1C_1就是二面角 $C－A_1D－C_1$ 的平面角．

第十一章　多面体　旋转体

一、选择题

868．如图 172，三棱锥的三条侧棱两两垂直，三条侧棱长分别为 2、2、3，则其顶点到底面的距离为

[　　]

A．$\frac{7}{3}$　　B．$\sqrt{17}$

C．$\frac{3}{11}\sqrt{22}$　　D．$\frac{\sqrt{17}}{3}$

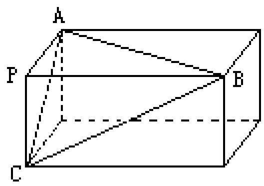


图 172

【精析】　三棱锥的两两垂直的三条侧棱可看作长方体中共顶点的三条棱 PA、PB、PC，如图 11，即求顶点 P 到平面 ABC 的距离．利用 $V_{C-PAB}=V_{P-ABC}$ 即可求得，选(C)．

869．当圆锥轴截面的顶角是(　　)时，圆锥的轴截面不是过圆锥顶点的截面中面积最大的截面．

[　　]

A．(0°，90°)　　B．(0°，90°)

C．(90°，180°)　　D．(0°，180°)

【精析】　本题采用寻找充分条件的新颖结构考查学生思维能力，作答时，应从选项的提示性出发，分类考查(A)、(B)、(C)三种情形，或构作特例．例如轴截面顶角为 120°的圆锥，若母线长为 l，

则 $S_{轴截面}=\frac{1}{2}\times l^2\times 0\sin 120°$ 不是最大截面，选C．

870．长方体的一个顶点上三条棱长分别是 3、4、5，且它的八个顶点都在同一个球面上，这个球的表面积是

[　　]

A．$20\sqrt{2}\pi$　　B．$25\sqrt{2}\pi$

C．50π　　D．200π

【精析】　显然，球的直径 d 即长方体的体对角线，∴$d^2=3^2+4^2+5^2<3\times5^2=75$，且 d 为有理数，又∵$S_球=4\pi R^2=\pi\times d^2$，由选项易知 d^2 分别为 $20\sqrt{2}$，$25\sqrt{2}$，50，200．故可排除(A)、(B)、(D)．选(C)．

871．已知过球面上 A、B、C 三点的截面和球心距离等于球半径的一半，且 AB=BC＝CA＝2，则球面面积是

[　　]

A．$\frac{16}{9}\pi$　　B．$\frac{8}{3}\pi$　　C．4π　　D．$\frac{64}{9}\pi$

【解答】　设球心为 O，则 OA＝OB＝OC＝R，从而有

2R＝OA＋OB＞AB＝2

∴R＞1，∴$S_{球}=4\pi R^2>4\pi$，选(D)．

872．圆柱的轴截面的周长 l 为定值，那么圆柱体积的最大值是

[　　]

A．$(\frac{l}{6})^3\pi$　　B．$\frac{1}{9}(\frac{l}{2})^3\pi$

C．$(\frac{l}{4})^3\pi$　　D．$2(\frac{l}{4})^3\pi$

【解答】　设圆柱底面半径为R，高为h，则有$4R+2h=l$，即$2R+h=\frac{l}{2}$，而$V=\pi R^2h=\pi R\times h\leq\pi\times(\frac{R+R+h}{3})^3=\pi\times(\frac{2R+h}{3})^3=(\frac{1}{6})^3\pi$，当且仅当$R=h=\frac{l}{6}$时取等号．因此当高为$\frac{l}{6}$时，圆柱的体积最大值为$(\frac{l}{6})^3\pi$．故选(A)．

873．如图 173，$A_1B_1C_1$－ABC 是直三棱柱，∠BCA=90°，点 D_1，F_1 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点．若 BC＝CA＝CC_1，则 BD_1 与 AF_1 所成角的余弦值是

[　　]

A．$\frac{\sqrt{30}}{10}$　　B．$\frac{1}{2}$

C．$\frac{\sqrt{30}}{15}$　　D．$\frac{\sqrt{15}}{10}$

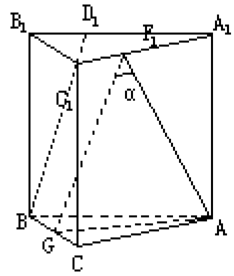


图 173

【精析】　取 BC 中点 G，易知所求角即为∠AF_1G 设为α．在$\triangle AF_1G$中，使用余弦定理可求出$\cos\alpha=\frac{\sqrt{30}}{10}$．

【解答】　A

874．已知过球面，A，B，C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半，且 AB=BC＝CA＝2，则球面积是

[　　]

A．$\frac{16\pi}{9}$　　　　B．$\frac{8\pi}{3}$

C．4π　　　　D．$\frac{64}{9}\pi$

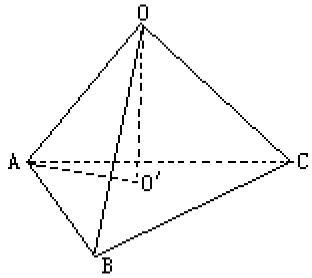


图 174

【精析】　设球心为 O，依题意三棱锥 O－ABC 是正三棱锥(如图174)球半径$R=OA=OB=OC$，锥高$OO'=\frac{R}{2}$，由已知根据正三棱锥的有关性质可计算出$R^2=\frac{16}{9}$．因而球面积$S=\frac{64}{9}\pi$．答案为(D)．此法思维自然合理，但有一定计算量，作为选择题，本题侧重于空间想象能力的考查，事实上，不必作细算，由图 174 进行估算便可获得 OA＞

$O'A>\frac{1}{2}AB=1$，从而知$S_{球}>4\pi$．

排除(A)、(B)、(C)得(D)．

875．三棱柱 ABC－$A_1B_1C_1$的体积为 V，P 为侧棱 BB_1 上的任意一点，四棱锥 P－ACC_1A_1的体积为 V_1，则 V∶V_1＝

[　　]

4．$\frac{1}{\sin 50°}+\sqrt{3}\cos 50°$ 的值为

【解答】　由本题答案的明确性，BB_1 上任意一点是成立的，对其中的特殊点 B 或 B_1 也成立，不妨取 P 点与 B 或 B_1 重合，易得选项(C)．

876．已知 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$是平行六面体，E、F、G 分别是 AB、BC、BB_1 的中点.那么平面 EFG 把这个平行六面体分割成两部分的体积比是

[　　]

A．48∶1　B．47∶1　C．24∶1　D．23∶1

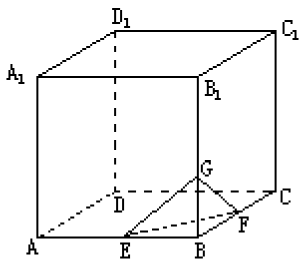


图 175

【精析】　本题研究任意的平行六面体按题设分得的两部分体积

的比．选项告诉我们，这个比是一个定值．既然这样，我们猜想以一个特殊的平行六面体来计算这个定值．而特殊的平行六面体中，又以棱长为 1 的正方体为最简单．

如图 175，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 l 的正方体，故

$$V_{三棱锥G-EFB}=\frac{1}{3}S_{\triangle EFB}\times BG$$
$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}=\frac{1}{48}，$$

由 $V_{正方体ABCD-A_1B_1C_1D_1}=1$．

即得所求比为 $(1-\frac{1}{48})：\frac{1}{48}=47：1$，选(B)．

877．设 E、F、G 分别是正四面体 ABCD 的棱 AB、BC、CD 的中点，则二面角 C－FG－E 的大小是

[　　]

A．$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B．$\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．$\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{2}$　　　　D．$\pi-\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{2}$

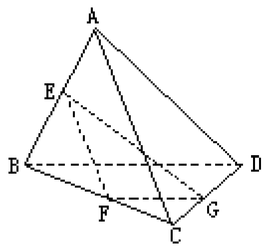


图 176

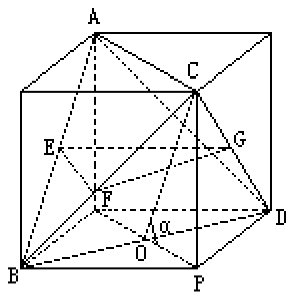


图 177

【精析】　可取BD的中点O，则 $\alpha=\operatorname{arccot}\frac{OP}{CP}=\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{2}$．

【解答】　作四面体(图 176)的外接正方体(图 177)，则 E、F、G 均为所在侧面正方形的中心．有 EG∥BP，FG∥BD，故得面 EFG∥面 BPD.记面 CBD 与面 PBD 的夹角为α，则所求二面角的大小为π－α．由

$$\alpha=\arccos\frac{S_{\triangle PBD}}{S_{\triangle CBD}}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

得$\pi-\alpha=\pi-\text{arccot}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，选(D)．

878．如图 178，正三棱锥 S－ABC 的相邻二侧面所成的二面角为α，则α的取值范围为

[　　]

A．$(0,\pi)$　　　B．$(\dfrac{\pi}{6},\pi)$

C．$(\dfrac{\pi}{3},\pi)$　　　D．$(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2})$

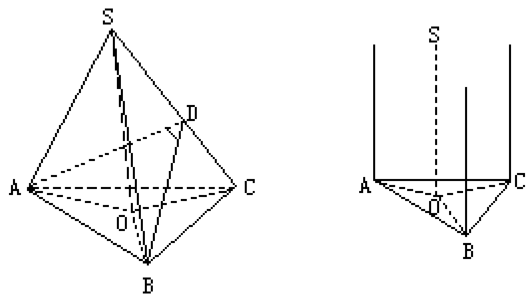


图 178

【精析】　此题用直接计算法太繁．若从图形入手，想象棱锥顶点 S 沿 OS 运动，当 S 逐渐接近 O 时，两侧面△SBC 与△ASC 逐渐向底面的△BOC 与△AOC 靠近，它们所成的二面角趋近于底面．而当 S 沿 OS 向无限远运动时，SA、SB、SC 趋于平行且垂直于底面．则三棱锥趋向正三棱柱,则其相邻二侧面所成角α可无限趋近于 SC 为棱的正三棱柱

相邻两侧面(侧面SBC与侧面SAC)所成的二面角(其值为$\dfrac{\pi}{3}$)．由此可知

$\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\pi$，选(C)．

879．如图 179(a)，$A_1B_1C_1$－ABC 是直棱柱，∠BCA＝90°，点 D_1、F_1 分别是 A_1B_1、A_1C_1 的中点，若 BC＝CA=CC_1，则 BD_1 与 AF_1 所成的角的余弦值是

[　　]

A．$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{30}}{15}$　　D．$\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

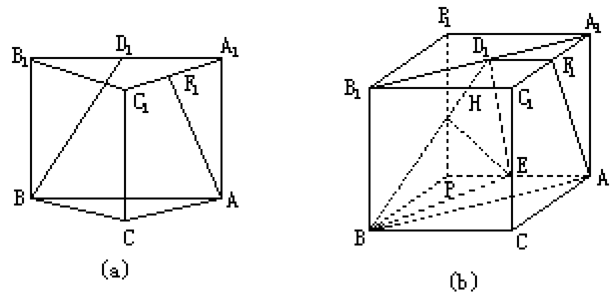


图 179

【精析】 如图 179(b)，将直三棱柱补成一个正方体 $A_1C_1B_1P_1-ACBP$，分别取 AP、BD_1 的中点为 E、H，连 D_1E、BE、EH．则 $AF_1 \underline{\underline{/\!/}} ED_1$，故 $\cos\angle ED_1H$ 即为所求．

设正方体的棱长为2，则$D_1E=\sqrt{5}$，$D_1H=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，且$EH\perp D_1B$，

故$\cos\angle ED_1H=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$．选(A)．

880．母线长为 1 的圆锥体积最大时，其侧面展开图圆心角ψ等于

[ ]

A．$\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\pi$　　B．$\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\pi$

C．$\sqrt{2}\pi$　　D．$\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\pi$

【解答】 设此圆锥的高为 h，底面圆半径为 r，
则 $r^2=1-h^2$，所以

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{\pi}{3}(1-h^2)h$，

$V^2=\dfrac{\pi^2}{9}(1-h^2)^2\times h^2=\dfrac{\pi^2}{18}(1-h^2)\times(1-h^2)\times(2h^2)$

$\leq\dfrac{\pi^2}{18}[\dfrac{(1-h^2)+(1-h^2)+2h^2}{3}]^3=\dfrac{\pi^2}{18}(\dfrac{2}{3})^3$，当且仅当$1-h^2=2h^2$即

$h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时取等号，易知选(D)．

881．如图 180(1)，正三棱锥 S－ABC 的侧棱与底面边长相等，如果 E、F 分别为 SC、AB 的中点，那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于

[ ]

A．90°　　B．60°

C．45°　　D．30°

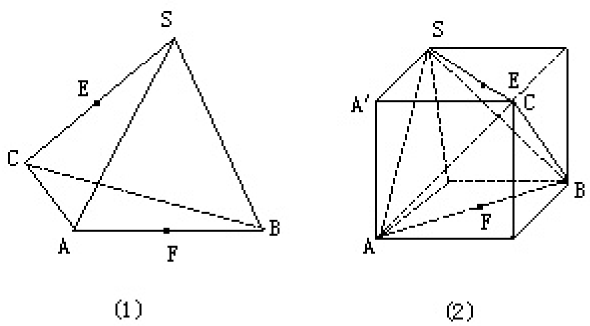


图 180

【精析】　我们熟知正四面体可由正方体分割得到，反之，正四面体可经补形得到正方体．如图 180(2)，使问题转化到熟悉的正方体中解决．因为 EF 恰是正方体两对面的中心连线，所以 EF∥棱 AA′，故异面直线 EF 与 SA 所成角即是 AA′与 SA 所成角，为 45°．选(C)．

882．圆台上、下底面圆的半径分别为 r 和 R，作平行于圆台底面的截面，将圆台分成体积相等的两部分，则截面圆的半径为

[　　]

A．$\dfrac{r+R}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt[3]{r^3+R^3}}{2}$

C．$\sqrt[3]{\dfrac{r^3+R^3}{2}}$　　D．$\sqrt[3]{\dfrac{r^2R+rR^2}{2}}$

【精析】　此题直接求解较复杂，用类似于立体几何课本 118 页第 10 题的解法(体积比等于相似比的立方)能稍简单些，如若用特殊性联想，则为举手之劳．联想特殊情况，当圆台变为圆锥时，即当 r=0 时，易知此时的选项变为：

$(A)\dfrac{R}{2}$，$(B)\dfrac{R}{2}$，$(C)\sqrt[3]{\dfrac{R^3}{2}}$，$(D)0$，从而否定(A)，(B)，(D)，选(C)．

883．圆台的侧面积是一个圆锥侧面积的 k 倍，圆台上、下底面半径为 r、R，圆锥底面积半径为 r，它们的母线长均为 l，且 R＞r，则 R 是 r 的

[　　]

A．2k 倍　　B．(k＋1)倍

C．k 倍　　D．(k－1)倍

【解答】　$\because \dfrac{S_{圆台}}{S_{圆锥}}=\dfrac{\pi(r+R)l}{\pi rl}=k$，即$\dfrac{r+R}{r}=\dfrac{k}{1}$，

∴由分比定理，有$\dfrac{r+R-r}{r}=\dfrac{k-1}{1}$，

即$\dfrac{R}{r}=k-1$，选(D)．

二、填空题

884．如图 181，将两个直角边长分别为 5 和 12 的直角三角板的一条直角边对接，构成三棱锥 A－BCD，且 AC 与 BD 成 60°角，则体积

V_{A-BCD}为________．

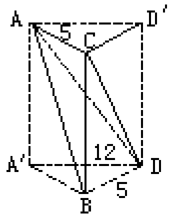


图 181

【解答】　作 DD′$\underline{\mathbin{/\!/}}$BC，连结 AD′、CD′，则△ACD′是正△，BC⊥面 ACD′．

由 $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle D'CD}$，得

$V_{A-BCD}=V_{A-D'CD}$

$=V_{D-ACD'}$

$=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ACD'}\times DD'=25\sqrt{3}$．

885．如图 182，圆锥底面半径为 r，高为 h，则它内切球半径为________．

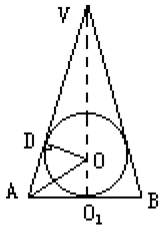


图 182

【解答】　作圆锥的轴截面如图 182，设内切球半径为 R，过球心 O 作 OD⊥VA，则

$\triangle VOD\backsim\triangle VAO_1$，$\dfrac{VO}{VA}=\dfrac{OD}{AO_1}$

即 $\dfrac{h-R}{\sqrt{r^2+h^2}}=\dfrac{R}{r}$

解得 $R=\dfrac{r}{h}(\sqrt{r^2+h^2}-r)$．

886．已知面积为 $32cm^2$ 的平面凸四边形中一组对边与其中一条对角线之长的和为 16cm．试问：这样的四边形可存在？若存在，则另一条对角线的长度为________．

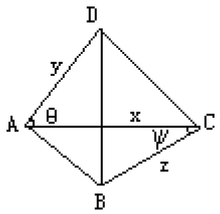


图 183

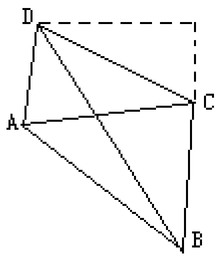


图 184

【解答】 如图 183，设该四边形存在．设 AD＝y，AC＝x，BC＝z，则有 x＋y＋z=16．

又设$\angle BCA=\psi$，$\angle DAC=\theta$，

$\because S_{ABCD}=32$，

$\therefore 32=\frac{1}{2}xy\sin\theta+\frac{1}{2}xz\sin\psi$，

$\because |\sin\theta|\le 1$，$|\sin\psi|\le 1$，

$\therefore 32\le\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xz=\frac{1}{2}x(y+z)$

$=\frac{1}{2}x(16-x)=\frac{1}{2}[64-(x-8)^2]\le 32$

$\therefore$当$\sin\theta=1$，$\sin\psi=1$，且$x-8=0$，从而知$\theta=\psi=\frac{\pi}{2}$，且$x=8$，$y+z=8$，如图184所示，易知另一条对线长为$\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$cm．

887．正四棱锥的底面边长为 a，侧棱与底面所成的角为α，一个正方体内接于此棱锥，它的四个顶点在棱锥的底面上，另外四个顶点在这棱锥的斜高上．则正方体的体积为________．

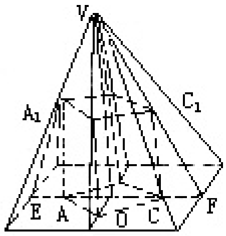


图 185

【解答】 画出通过“接点”及正四棱椎高的截面，即通过内接正方体的对角面的棱锥的截面，如图 185 所示，VE=VF 是斜高．由已知侧

棱与底面所成角为α，可求得棱锥高为$\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\alpha$，设正方体棱长为x(图) 186，

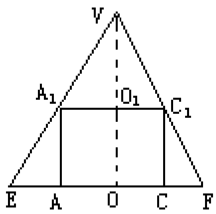


图 186

则 $\frac{\sqrt{2}x}{a}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\alpha-x}{\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\alpha}$

解得 $x=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$，

故正方体的体积为 $\frac{\sqrt{2}\alpha^3\tan^3\alpha}{4(1+\tan\alpha)^3}$

888．已知四棱锥P－ABCD的底面是面积为$2\sqrt{3}$的菱形，侧面PAD是是等边三角形且与底面垂直，E 为侧棱 PC 的中点(如图 187)，则三棱锥 C－ADE 的体积 V_{C-ADE} 为________.

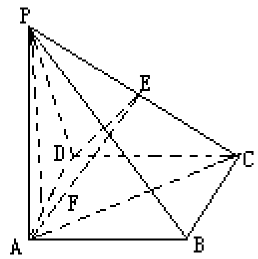


图187

【解答】 过 P 作 PF⊥AD 于 F，则 PF⊥底面 Ac，由题意可求得：$PF=\sqrt{3}$

$\therefore V_{C-ADE}=V_{E-ACD}$

$=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ACD}\times\frac{1}{2}PF$

$=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}$.

889．如图 188，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，E、F 为 CD、A_1B_1 的中点，则四棱锥 $B-AEC_1F$ 的体积为________.

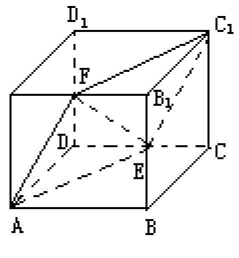


图188

【解答】 连结 EF，

$\because S_{\triangle AEF}=S_{\triangle C_1EF}$

$\therefore V_{B-AEC_1F}=2V_{B-AEF}$

$=2V_{E-ABF}$

$=2\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABF}\times a=\frac{a^3}{3}$.

890．如图 189，正方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V，P、Q、R 分别是 $A_1D_1CC_1$、BC 的中点，则四面体 A－PQR 的体积为________.

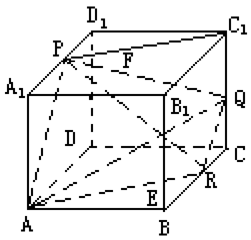


图189

【解答】 连结 PC_1，

$\because PC_1 \parallel AR$，

$\therefore PC_1 \parallel$ 平面 AQR，

$\therefore V_{A-PQR}=V_{P-AQR}$

$=V_{C_1-AQR}=V_{A-C_1QR}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1QR}\times AB=\frac{1}{24}V$.

891．一个球的内接圆锥的最大体积与这个球的体积之比为________.

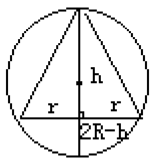


图190

【精析】 拆积凑和，作圆锥的轴截面得图 190：

$\because r^2=h(2R-h)$，

$\therefore V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h)$

$=\frac{1}{3}\pi\times\frac{1}{2}[h\times h\times(4R-2h)]$

$\leq\frac{1}{3}\pi\times\frac{1}{2}(\frac{h+h+4R-2h}{3})^3=\frac{32}{81}\pi R^3$，

等号成立于$h=\frac{4}{3}R$时，又$V_{球}=\frac{4\pi}{3}R^3$，

$\therefore(V_{圆锥})_{max}:V_{球}=\frac{32}{81}:\frac{4}{3}=8:27$.

892．在球面上有四个点 P，A，B，C，如果 PA，PB，PC，两两互相垂直，且 PA=PB=PC=a．那么这个球面的面积是________.

【解答】 就是求棱长为 a 的正方体外接球的面积，由外接球的

直

径等于正方体的对角线长$2R=\sqrt{3}a$，得$S=4\pi R^2=3\pi a^2$．

893．已知四棱台 ABCD－A′B′C′D′中，$V_{A'-ABCD}=8$，$V_{A-A'B'C'D'}=2$．则该四棱台的体积为________．

【解答】 设四棱台两底面积和高分别为 S、S′、h，则由题意得

$$V_{A'-ABCD}=\frac{1}{3}Sh=8,$$

$$V_{A-A'B'C'D'}=\frac{1}{3}S'h=2,$$

$$V_{ABCD-A'B'C'D'}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')$$

$$=\frac{1}{3}S'h+\sqrt{\frac{1}{3}Sh\times\frac{1}{3}S'h}+\frac{1}{3}S'h$$

$$=8+\sqrt{8\times2}+2=14.$$

894．正三棱锥 S－ABC 的侧棱与底面边长相等，如果 E、F 分别为 SC、AB 的中点，那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于________．

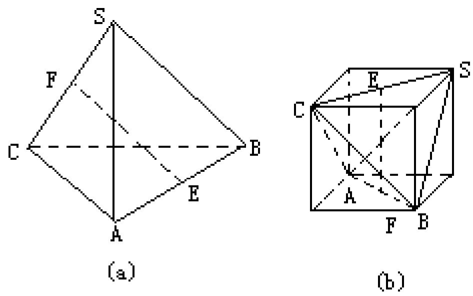


图191

【精析】 因为三棱锥所有棱都相等，可将三棱锥嵌入正方体中，使三棱锥的各条棱为正方体各个面上的对角线，如图 191，显然 EF 与 SA 所成角等于 45°．

三、解答题

895.如图 192,一个正方体的顶点都在球面上,它的棱长是 4cm.求这个球的体积.

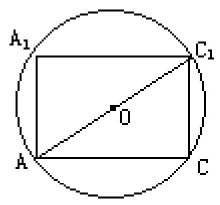


图 192

【解答】 过“接点”作球的轴截面，即通过正方体的对角面的截

面ACC_1A_1，设球半径为R于是 $2R=4\sqrt{3}$，

解得 $R=2\sqrt{3}$，

∴ 球的体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

$=\frac{4}{3}\pi\times(2\sqrt{3})^3$

$=32\sqrt{3}\pi cm^3$．

896．如图 193，各棱长为 a 的正四棱锥，求它的外接球半径．

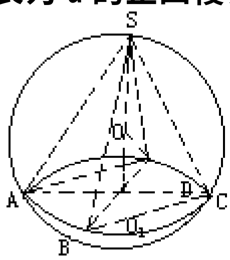


图 193

【解答】 设正四棱锥 S－ABCD 外接球为 O，外接球半径为 R，过底面对角线 AC 及 S 作截面 SAC．由已知，

$O_1C=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

棱锥高 $SO_1=\sqrt{a^2-\frac{1}{2}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

在$\triangle O_1OC$中，$R^2=O_1C^2+OO_1^2$，即

$R^2=\frac{1}{2}a^2+[(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-R^2]$，解得$R=\frac{\sqrt{2}}{2}a$．

897．如图 194，正四面体内切球半径为 r，求正四面体体积．

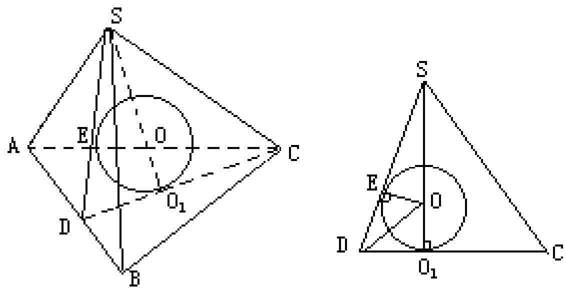


图 194

【解答】 设正四面体 S－ABC 的内切球 O，过 SC 和 AB 中点 D 作截面SDC，E、O_1为“切”点．设正四面体棱长为a，于是$SD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

$DE=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，高$SO_1=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，连OE．

∵$\triangle SOE\backsim\triangle SDO_1$，∴$\frac{OE}{DO_1}=\frac{SO}{SD}$，

即 $\dfrac{r}{\dfrac{\sqrt{3}}{6}a}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{3}a-r}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-a}$，解得$a=2\sqrt{6}r$，

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{6}r)^2$$

$$(\frac{\sqrt{6}}{3}\times2\sqrt{6}r)=8\sqrt{3}r^3.$$

898．如图 195，正三棱锥 P－ABC 的棱长均为 1，K 为 PA 的中点，L、M 分别在 AB、BC 上，且 AL：LB＝2：1，BM：MC＝3：1，过 K、L、M 三点的平面交 PC 于 N 点．求截面 KLMN 下方的几何体的体积 V．

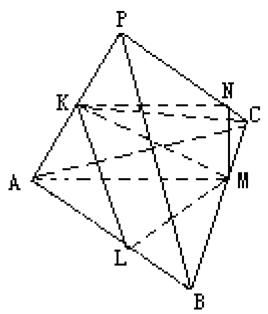


图195

【精析与解答】　整个正三棱锥 P－ABC 的体积 $V_{P\text{-}ABC}$ 好求，截面下方的几何体却是不规则的，怎样求体积呢？用分割法打开思路，连 AM、MK、KC，把它分割成三个三棱锥，则 $V=V_{K\text{-}ALM}+V_{K\text{-}AMC}+V_{K\text{-}MNC}$．

K 到面 ABC 的距离是 P 到面 ABC 的距离的一半，高好求．底面积可向正三角形面积转化．

$$S_{\triangle ALM}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle AMC}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore V_{K-ALM}=\frac{1}{4}V_{P-ABC},\ V_{K-AMC}=\frac{1}{8}V_{P-ABC}.$$

对于三棱锥 K－MNC，K 到面 PBC 的距离是 A 到面 PBC 的距离的一半，高好求．为求底面积，需先确定 N 点的位置．设 d_P、d_A、d_B、d_C 分别表示 P、A、B、C 到截面的距离，则 $d_P=d_A=2d_B$，$d_B=3d_C$．故 $d_P=6d_C$，PN：NC＝6：1．这样，N 点的位置确定了，底面积就可以向正三角形的面积转化．

$$S_{\triangle MNC}=\frac{1}{28}S_{\triangle PBC},\ \therefore V_{K-MNC}=\frac{1}{56}V_{P-ABC},$$

所以 $V=(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56})V_{P-ABC}$

$$=\frac{11}{28}\times\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{11}{336}\sqrt{2}.$$

899．已知正三棱锥 V－ABC 的底面边长为 a，侧棱与底面所成的

角为α，过底面一边作这个棱锥的截面．试问当截面与底面所成的二面角为何值时，截面面积最小？并求最小值．

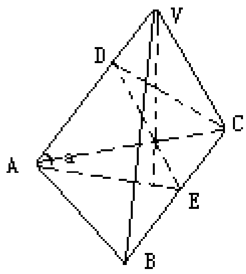


图196

【解答】 设截面 DBC 与底面成角为β时截面积最小(如图 196)．

作 VO⊥底面 ABC 于 O，则 O 为正△ABC 的中心．连结并延长 AO 交 BC 于 E，则 AE⊥BC 于 E，E 为 BC 的中点，∠VAO 为侧棱 VA 与底面所成的角．∴∠VAO＝α．连结 DE，∵DB＝DC，

∴DE⊥BC．

在△AED 中，由正弦定理得：

$$DE=\frac{AE\times\sin\alpha}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}$$

$$S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}DE\times a$$

$$=\frac{1}{2}a\times\frac{AE\times\sin\alpha}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}=\frac{\sqrt{3}a^2\sin\alpha}{4\sin(\alpha+\beta)}$$

要使 $S_{\triangle DBC}$ 最小，只须 sin(α＋β)最大，此时，应有 sin(α＋β)=1，

从而$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$．

故当$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$时，$(S_{\triangle DBC})_{min}=\frac{\sqrt{3}}{4}a2\sin\alpha$．

答：截面与底面成$\frac{\pi}{2}$－α角时，截面积最小，最小值为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\sin\alpha$．

900．已知倒圆锥形容器轴截面是一个等边三角形，在此容器内注入水，并放入半径为 r 的一个球，此时水面恰好与球相切，求取出球后水面高．

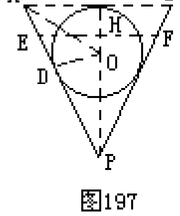


图197

【解答】 如图 197，为圆锥轴截面 ABP，球心 O，PC 为圆锥高，取出球后水面为 EF，其高 PH，连 AO，则

$OC = r$，$AO = 2r$，$AB = 2\sqrt{3}r$，

$PC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3}r = 3r$，

$V_{ABP} = \frac{1}{3}\pi BC^2 \times PC = 3\pi r^3$

$V_{球} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V_{PEF} = V_{ABP} - V_{球} = 3\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{5}{3}\pi r^3$.

又 $\frac{V_{PEF}}{V_{ABP}} = (\frac{PH}{PC})^3 = \frac{\frac{5}{3}\pi r^3}{3\pi r^3} = \frac{5}{9}$，

得 $(PH)^3 = 27r^3 \times \frac{5}{9} = 15r^3$，

$\therefore PH = \sqrt[3]{15}r$

即取出球后水面高度为$\sqrt[3]{15}r$.

901．如图 198，已知圆台有一面积为 144π㎝² 的内切球，如果圆台的下底面与上底面半径差 5㎝，求圆台的全面积．

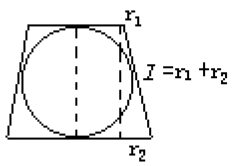


图198

【解答】 设圆台上下底面半径分别为 r_1、r_2，母线为 l，球半径为 R，由题意 $4\pi R^2=144\pi$ 得 $R=6$，而

$R^2 = r_1 r_2$，

$l = r_1 + r_2$，$r_2 - r_1 = 5$，

$\therefore (r_1 + r_2)^2 = (2R)^2 + (r_2 - r_1)^2 = 12^2 + 5^2$，

$\therefore r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1 r_2 = 97$

$\therefore S_{圆台全} = \pi(r_1 + r_2)l + (r_1^2 + r_2^2)$

$= \pi(r_1 + r_2)^2 + (r_1^2 + r_2^2)$

$= 2\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$= 2\pi(97 + 36) = 266\pi$ ㎝².

902．如图 199，在一个圆锥内作一个内接等边圆柱，再以等边圆柱上底面为底面的圆锥内作一个内接等边圆柱，这样无限地作下去.已知

这些等边圆柱的体积之和是原来锥体体积的$\frac{3}{7}$．求证：最大的等边圆柱的

体积是圆锥体积的$\frac{3}{8}$．

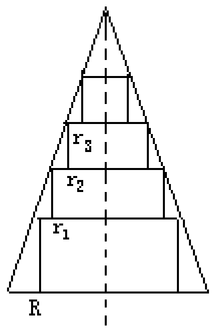


图 199

【解答】　作圆锥的轴截面，设圆锥的底面半径为 R，高为 h，内接等边圆柱的底面半径分别为 r_1、r_2、…、r_n、…

则 $\frac{r_1}{R}=\frac{h-2r_1}{h}$，$r_1=\frac{Rh}{h+2R}$，

$\frac{r^2}{R}=\frac{h-2r_1-2r_2}{h}$，$r_2=R(\frac{h}{h+2R})^2$，…，

$r_n=R(\frac{h}{h+2R})^n$，$q=\frac{h}{h+2R}<1$

可见这些等边圆柱体积组成了以$2\pi r_1^3$为首项，$q=(\frac{h}{h+2R})^3$为公比的无穷等比数列，其体积和为

$$V=\frac{\pi R^2h^3}{4R^2+6Rh+3h^2}$$

由已知 $V=\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}\pi R^2h$

即 $\frac{\pi R^2h^3}{4R^2+6Rh+3h^2}=\frac{1}{7}\pi R^2h$

化简 $2h^2-3Rh-2R^2=0$，解得$h=2R$

于是 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi R^2\times 2R=\frac{2}{3}\pi R^3$，

$V_{第一个圆锥}=\pi r_1^2\times 2r_1=2\pi r_1^3$

$=2\pi(\frac{Rh}{h+2R})^3=\frac{1}{4}\pi R^3$，

$\therefore V_{第一个圆柱}=\frac{3}{8}V_{圆锥}$．

903．四面体 ABCD 中，AB=AC=CD=DB=3，BC=AD=2，棱 AB，AC，CD，DB 的中点分别为 K，L，M，N，求四棱锥 A－KLMN 的体积．

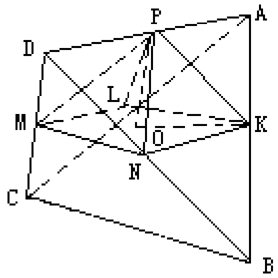


图200

【精析】　如图 200，易证 KLMN 是正方形，底面积好求，关键在于求高．由于 AD∥平面 KLMN，直线 AD 上各点到平面 KLMN 的距离相等．取 AD 的中点 P，则 P 在底面上的射影 O 是正方形 KLMN 的中心，高就转化在易求的位置 PO 上．

在 Rt△POK 中，

$$PO = \sqrt{PK^2 - OK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{7},$$

$$\therefore\ V_{\text{斜棱锥}A-KLMN} = V_{\text{正棱锥}P-KLMN}$$

$$= \frac{1}{3}PO \times S_{KLMN} = \frac{1}{6}\sqrt{7}.$$

904．已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体．E、F 分别是棱 AA_1、CC_1 的中点．求四棱锥 A_1-EBFD_1 的体积．

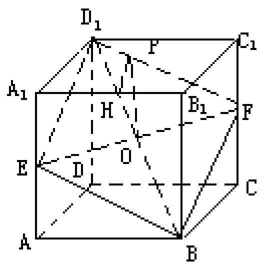


图201

【精析】　如图 201，易证底面 $EBFD_1$ 是菱形，底面积好求，关键在于求高．由于 A_1C_1∥底面 $EBFD_1$，顶点可由 A_1 移到正方体上底面的中心 P．设 $EF \cap BD_1 = O$，则点 P 在底面上的射影 H 在 D_1O 上，棱锥的高 PH 是 Rt△D_1PO 斜边上的高．

$$PH = \frac{OP \times D_1P}{OD_1} = \frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

$$S_{EBFD_1} = \frac{1}{3}EF \times BD_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}a^2.$$

$$\therefore\ V_{A_1-EBFD_1} = V_{P-EBFD_1} = \frac{1}{3}PH \times S_{EBFD_1}$$

$$= \frac{1}{6}a^3.$$

905．如图 202，三棱锥 S－ABC 的三条侧棱均与底面成 75°角，△ABC 是顶角 A＝150°的等腰三角形,过 A 和三棱锥的高 SO 的截面△SAD 的面积为 $72cm^2$．求这个三棱锥的体积．

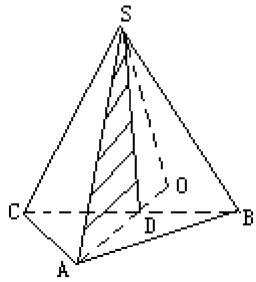


图202

【精析】　底面积和高都要经过比较繁难的计算，可考虑换底面．截面△SAD 的面积为已知，选它为底面是最妙不过的了．由于棱锥的侧棱与底面所成的角均相等，因此顶点 S 在底面上的射影 O 是△ABC 的外心，AO 是线段 BC 的垂直平分线，BC⊥截面 SAD．故可选择截面 SAD 为底面，它把三棱锥 S－ABC 分成以它为公共底面的两个三棱锥，这时 BD、DC 是这两个棱锥的高．

在底面△ABC 中，设外接圆半径为 R，

则　$R=\dfrac{BC}{2\sin 150°}=BC$．

而　$SO=R\times\tan 75°$，$AD=BD\times\cot 75°=\dfrac{R}{2}\cot 75°$，

$\therefore\ S_{截面\triangle SAD}=\dfrac{1}{2}SO\times AD=\dfrac{R^2}{4}=72$．

由此得　$R=12\sqrt{2}=BC$，

$\therefore\ V_{S-ABC}=\dfrac{1}{3}(BD+DC)\times S_{\triangle SAD}$

$=288\sqrt{2}cm^3$．

906．已知正六棱锥底面边心距为 $2cm$，侧棱长为 $\dfrac{5}{3}\sqrt{3}cm$，

(1)求底面边长，锥高，斜高．

(2)求侧棱和底面所成的角，两个相邻侧面所成的角，两个相对侧面所成的角．

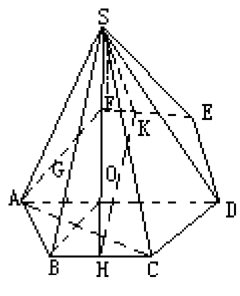


图 203

【精析与解答】　如图 203

设 O 为正六棱锥 S－ABCDEF 的底面的中心，由已知，其侧棱长 $SB=\frac{3}{5}\sqrt{3}cm$。

作 OH⊥BC 于 H 点，OH 即为边心距，OH＝2cm

(1)在 Rt△OHB 中，

∠BOH=30°，OH=2cm，

所以 $BH=OH\times\tan30°=\frac{2\sqrt{3}}{3}cm$，

即边长$BC=2BH=\frac{4\sqrt{3}}{3}cm$。

在 Rt△SHB 中，

$SH^2=SB^2-BH^2=7$，

所以 斜高$SH=\sqrt{7}cm$。

在Rt△SOB中，$OB=BC=\frac{4\sqrt{3}}{3}cm$，

$SO^2=SB^2-OB^2=3$，

所以 锥高$SO=\sqrt{3}cm$。

(2)因为　SO⊥底面 ABCDEF，

所以　AO 为侧棱 SA 在底面的射影.

∠SAO 为侧棱与底面的夹角.

在 Rt△SOA 中，

$\cos\angle SAO=\frac{OA}{SA}=\frac{4}{5}$.

所以 $\angle SAO=\arccos\frac{4}{5}$.

即侧棱与底面的夹角为$\arccos\frac{4}{5}$.

由　SH⊥BC，OH⊥BC，

有　∠SHO 为侧面与底面的夹角.

在 Rt△SOH 中，

$\sin\angle SHO=\frac{SO}{SH}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

所以 $\angle SHO=\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$

即侧面与底面所成的角为$\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

过 AC 作平面垂直于 SB，交 SB 于 G 点.

于是，AG⊥SB，CG⊥SB，

则　∠AGC 为两个相邻侧面的二面角的平面角，即∠AGC=A－SB－C.

因为　Rt△SBH∽Rt△BGC，

所以 $CG=\dfrac{CB\times SH}{SB}=\dfrac{4}{5}\sqrt{7}$

在△ACG中，

$\cos\angle AGC=\dfrac{AG^2+CG^2-AC^2}{2AG\times CG}=-\dfrac{11}{14}$．

所以 两个相邻侧面所成的角为$\pi-\arccos\dfrac{11}{14}$．

侧面 BSC 与侧面 EFS 为两个相对侧面．它们的交线必平行于 BC、EF，因此，它们的二面角的平面角即为两个斜高 SH、SK 所成的角，也就是∠HSK．

在 Rt△HSO 中，

$\tan\angle HSO=\dfrac{OH}{OS}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，

所以 $\angle HSO=\arctan\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

故两个相对侧面所成的角为$2\arctan\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

注意：从本例题中可以看出：正六棱锥中的主要线段(底面边长，边心距，锥高，斜高，侧棱)都包含在四个直角三角形中，抓住这四个直角三角形：Rt△SOB、Rt△SHB、Rt△SOH、Rt△OHB 是解决棱锥中有关元素数量关系的关键．

在棱柱、棱锥、棱台等多面体中，棱锥是学习的重点，其中又以三棱锥为核心．在解决多面体的有关计算中，要抓住含 30°角的直角三角形和正三角形中的各种边、角关系．例如在直角三角形中若有一个角是

30°，那么其三条边的比是$1:2:\sqrt{3}$；正三角形中，若边长为a，则其高为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，边心距是$\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$，重心到边的距离与到顶点的距离的比为$1:2$等，对棱锥以下几个特殊性质，也应该牢记：

侧棱相等或侧棱与底面成等角，则顶点在底面的射影是底面多边形外接圆圆心；

斜高相等或侧面与底面成等角，则顶点在底面的射影是底面多边形内切圆的圆心．

三棱锥中若三条侧棱两两垂直，则顶点在底面的射影是底面三角形的垂心．

907．正三棱柱的棱长为 a，底面边长也为 a，过下底一条边和上、下两底面的中心连线的中点作一个截面，求这个截面的面积．

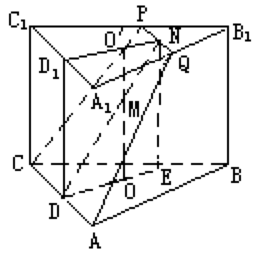


图 204

【精析与解答】　如图 204，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，O、O′分别为两个底面的中心，M 为 OO′的中点．

过 AC 和 M 点作正三棱柱的截面，首先来判断这个截面是什么形状．

设 AC、A_1C_1 的中点分别为 D、D_1，

在 Rt△MOD 中，

$$\tan\angle MDO=\frac{OM}{OD}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}=\sqrt{3}.$$

在 $Rt\triangle B_1DB$ 中，

$$\tan\angle B_1DB=\frac{B_1B}{BD}=\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

由∠MDO、$\angle B_1DB$ 均为锐角，又

$\tan\angle MDO>\tan\angle B_1DB$，

所以　$\angle MDO>\angle B_1DB$

由已知 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱，即 O、O_1 分别在△ABC、$\triangle A_1B_1C_1$ 的边 AC、A_1C_1 的中线上，即 O 在 AC 的中线 DB 上．

所以　$\angle MDO>\angle B_1DB=\angle B_1DO$．

于是可知过 AC 和 OO_1 中点 M 的截面必与平面 $A_1B_1C_1$ 相交，设交线为 PQ．

∵AC∥平面 $A_1B_1C_1$，AC∥A_1C_1，

∴PQ∥A_1C_1．

∴截面为 ACPQ 是一个等腰梯形，其面积为

$S=\frac{1}{2}(PQ+AC)DN$，其中N为PQ的中点，D为AC中点，DN为梯形 ACPQ 的高线．

作 NE⊥平面 ABC 于 E，E 为垂足且 E 在 BD 上．

在 Rt△NED 中，

DN=EN×csc∠NDE．

而 $EN=OO_1=a$，$\csc\angle NDE=\frac{2}{\sqrt{3}}$，

∴ $DN=\frac{2}{\sqrt{3}}a$，

又由于$\triangle B_1PQ \backsim \triangle BCA$，

$$\therefore PQ=\frac{AC\times B_1N}{BD}.$$

$$B_1N=O_1B_1-O_1N=\frac{2}{3}BD-\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}BD=\frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

$$\therefore PQ=\frac{a\times\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{a}{3}.$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}(PQ+AC)\times DN=\frac{1}{2}(\frac{a}{3}+a)\frac{2}{\sqrt{3}}a=\frac{4\sqrt{3}}{9}a^2.$$

注意：在凡是涉及到多面体中有关截面面积问题时，首先一定要根据已知条件，准确判断截面的形状．在本题中，极易犯的错误便是不能准确推断截面一定是梯形，而往往会认为截面必定与棱 BB_1 相交，于是认定截面是三角形，从而导致出现严重错误，或者对截面是梯形还是三角形，进行讨论，当然也是多余的．

根据题目给出的条件，应用确定平面的公理三，准确判断或讨论截面的位置、形状，是解决这类习题的关键．

在解决有关截面问题时，还会常常用到平面几何中多边形全等、相似等重要概念．

908．欲建一个容积为定值 V 的无盖圆柱水池．(1)水池尺寸如何选取才能使所用的材料最少？(2)若池底材料成本 30 元／米^2，池壁材料成本 20 元／米^2，问怎样的尺寸可使水池造价最低？

【解答】 (1)设池底半径为 r 米，高为 h 米，则 $V=\pi r^2h$，即 $r^2h=\frac{V}{\pi}$．又$S_{全面积}=\pi r^2+2\pi rh=\pi(r^2+2rh)=\pi(r^2+rh+rh)$

$$\geq 3\pi\sqrt[3]{r^2\times rh\times rh}=3\pi\sqrt[3]{(r^2h)^2}=3\sqrt[3]{\pi r^2}.$$

当且仅当$r^2=rh$，即$r=h$时，$S_{最小}=3\sqrt[3]{\pi r^2}$．

故当池底半径与池高相等时、即$r=h=\frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\pi^2 r}$时，用料最省．

(2)设水池造价为 y 元，则

$$\begin{aligned}y&=30\pi r^2+40\pi rh\\&=10\pi(3r^2+2rh+2rh)\\&\geq 30\pi\sqrt[3]{3r^2\times 2rh\times 2rh}=30\sqrt[3]{12\pi r^2}.\end{aligned}$$

当且仅当$3r^2=2rh$，即$r=\frac{2}{3}h$时，$y_{最小}=30\sqrt[3]{12\pi r^2}$．即池底半径$r=\frac{1}{3\pi}\sqrt[3]{18\pi^2 r}$，池高$h=\frac{1}{2\pi}\sqrt[3]{18\pi^2 r}$时，水池造价最低．

909．用一块长为 a，宽为 b(a＞b)的矩形木板，在二面角为α的墙角处围出一个直三棱柱的储物仓(使木板垂直于地面的两边与墙面贴紧，另一边与地面贴紧)．试问应怎样围才能使储物仓的容积最大？

并求出这个最大值．

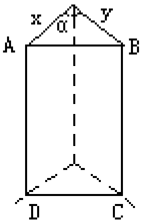


图205

【解答】 如图205，分两种情况讨论：

(1)若使长边贴紧地面，

则 AB=CD=a，AD=BC=b，

$\therefore a^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha\geq 2xy-2xy\cos\alpha=2xy(1-\cos\alpha)$．

$\because 0<\alpha<\pi$，$\therefore 1-\cos\alpha>0$，

$\therefore xy\leq\dfrac{a^2}{2(1-\cos\alpha)}$(当且仅当$x=y$时取等号．)

此时储物仓的容积

$$V_1=(\frac{1}{2}xy\sin\alpha)b\leq\frac{a^2b\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}=\frac{1}{4}a^2b\cot\frac{\alpha}{2}.$$

(2)若使短边贴紧地面，

则$xy\leq\dfrac{b^2}{2(1-\cos\alpha)}$(当且仅当$x=y$时取等号．)

$\therefore V_2=(\dfrac{1}{2}xy\sin\alpha)a\leq\dfrac{1}{4}b^2a\cot\dfrac{\alpha}{2}$．

$\because a>b>0$，$\cot\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\therefore V_1>V_2$．

当长边贴紧地面即仓的底面，是以 a 为底边的等腰三角形时，容积

最大，这个最大容积为$\dfrac{1}{4}a^2b\cot\dfrac{\alpha}{2}$．

910．在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，A_1 所对的$\triangle A_2A_3A_4$ 的面积为 S_1，以A_1A_2为棱的二面角大小为α_{12}，余类推，则有$\Sigma\cos^2\alpha_{ij}\geq\dfrac{3}{2}$$(1\leq i\leq j\leq 4$，$i\neq j$．

【证明】 由四面体中的面积射影定理，有

$S_1=S_2\times\cos\alpha_{34}+S_3\times\cos\alpha_{24}+S_4\times\cos\alpha_{23}$

据 Cauchy 不等式有

$$S_1^2=(S_2\cos\alpha_{34}+S_3\cos\alpha_{24}+S_4\cos\alpha_{23})^2$$
$$\leq(S_2^2+S_3^2+S_4^2)(\cos^2\alpha_{34}+\cos^2\alpha_{24}+\cos^2\alpha_{23}),$$

同理还有其它几个式子．这四式相加，得

$$2\Sigma\cos^2\alpha_{ij} \ge \Sigma\frac{S_i^2}{S^2-S_i^2}(S^2=\sum_{i=1}^{4}S_i^2) \qquad ①$$

现记 $x_i=S_i^2$ (i = 1，2，3，4，)不妨设$x_1+x_2+x_3+x_4=1$．则①式右端

$$=\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i}{1-x_i}=-4+\sum_{i=1}^{4}(\frac{x_i}{1-x_i}+1)=-4+(x_1+x_2+x_3+x_4)\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i}{1-x_i}$$

$$=-4+\frac{1}{3}[\sum_{i=1}^{4}(1-x_i)][\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i}{1-x_i}]\ge -4+\frac{16}{3}=\frac{4}{3}.$$

整理便得欲证不等式．

911．如图 206，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证

$$\frac{\pi}{2}<\angle A_1BD_1+\angle DBD_1+\angle C_1BD_1<\frac{3}{4}\pi.$$

【精析】 可令$\angle A_1BD_1=\alpha$，$\angle DBD_1=\beta$，$\angle C_1BD_1=\gamma$．

观察图形有 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$．于是问题就转化为“已知三

锐角α、β、γ满足$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$，求证$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{4}\pi$”这样一个三角不等式问题．

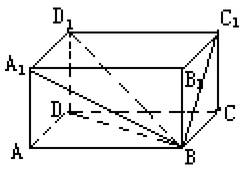


图 206

【证明】 由$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1\Rightarrow\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1-\sin^2\gamma<1\Rightarrow\frac{1-\cos2\alpha}{2}+\frac{1-\cos2\beta}{2}<1\Rightarrow\cos2\alpha+\cos2\beta>0\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)>0$．∵$\cos(\alpha-\beta)>0$，∴$\cos(\alpha+\beta)>0$，∴$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$．

同理$\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$，$\alpha+\gamma<\frac{\pi}{2}$，从而$\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{4}\pi$．

又$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1-\sin^2\gamma=\cos^2\gamma\Rightarrow\cos2\alpha+\cos2\beta=2\sin^2\gamma\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin^2\gamma\Rightarrow\cos^2(\alpha+\beta)<\sin^2\gamma\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)<\sin\gamma\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)<\cos(\frac{\pi}{2}-\gamma)\Rightarrow\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}-\gamma\Rightarrow$ ∴$\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$．综上知结论得证．

912．如图 207，正三棱锥 P－ABC 的外接球半径、内接球半径 R 和 r 满足 R≥3r，试证之．

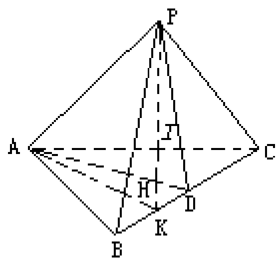


图 207

【证明】　设 I 是正三棱锥 P－ABC 的内心，连接 PI 并延长交△ABC 于 H，交棱锥的外接球面于 K，则 H 是△ABC 之中心，PK 是外接球直径．

延长 AH 交 BC 于 D，则 D 为 BC 之中点，而 I 在侧面 PBC 上的投影 E∈PD．

∵AH=2HD，记∠APK=α，∠KPD=θ，

∴$\tan\alpha=2\tan\theta$．　①

又，$PH=PA\times\cos\alpha=2R\cos\alpha\cos\alpha=2R\cos^2\alpha$，　②

而 $PH=r(1+\dfrac{1}{\sin\theta})$，　③

由②、③知 $2R\cos^2\alpha=r(1+\dfrac{1}{\sin\theta})$．

①代入上式，有

$\dfrac{1+\sin\theta}{\sin\theta}r=2R\cos^2\alpha=\dfrac{2R}{\sec^2\alpha}=\dfrac{2R}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{R}{1+4\tan^2\theta}$，

整理成关于 $\sin\theta$ 的一元二次方程，得

$(2R+3r)\sin^2\theta-2R\sin\theta+r=0$．

∵$\sin\theta$ 为实数，那么

$0\le 4R^2-4r(2R+3r)=4(R-3r)(R+r)$，

∴$R\ge 3r$．

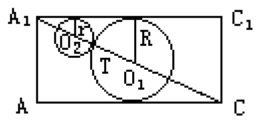


图208

913．如图 208，在棱长为 2R 的正方体容器内装满水，先把半径为 R 的球放入水中，然后再放入一个球，使它淹没在水中，要使溢出水量最大．问这个球的半径应多大？投入这两个球而溢出来的水量约占正方体体积的百分之几？

【解答】过正方体对角面作轴截面，则

$AC=2\sqrt{2}R$，$AC_1=2\sqrt{3}R$，

$AO_1=\sqrt{3}R$，$AT=\sqrt{3}R-R$．

设小球半径为 r，则

$$\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{3}R-R-r}{\sqrt{3}R},$$

$r=(2-\sqrt{3})R$，$V_{大球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，

$V_{小球}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(2-\sqrt{3})^3R^3$.

$V_{正方体}=(2R)^3=8R^3$，

故 $\frac{V_{大球}+V_{小球}}{V_{正方体}}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3[1+(2-\sqrt{3})^3]}{8R^3}=\frac{\pi}{2}(9-5\sqrt{3})\approx 0.55$.

即投入小球半径为$(2-\sqrt{3})R$，溢出水量约占正方体体积的55%.

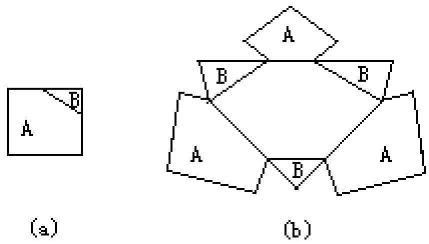


图209

914．三个 12×12 的正方形都被连接两条邻边的中点的直线分成 A、B 两片．如图 209，把这六片粘在一个正六边形的外面，然后折成多面体．求这个多面体的体积．

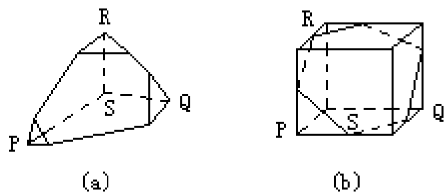


图210

【精析】折叠后的多面体，如图 210，易见顶点 P、Q、R、S 处的三个面都是 90°，故可将多面体补成一个边长为 12 的正方体，所求多面体的体积为$V=\frac{V_{正}}{2}=864$.

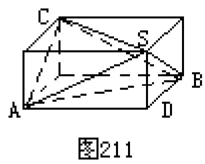


图211

915．四面体$S-ABC$中三组对棱分别相等，且依次为$2\sqrt{5}$，$\sqrt{13}$，5，求此四面体的体积．

【精析】由于对棱相等，可考虑把四面体嵌入长方体中，使四面体对棱分别为长方体相对面的对角线，如图 211．将四面体的体积问题转化为求相应长方体体积问题．设长方体的长、宽、高分别为 x、y、z，则

$$\begin{cases}x^2+y^2=(2\sqrt{5})^2\\ y^2+z^2=(\sqrt{13})^2\\ z^2+x^2=5^2\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=2\\ y=4\\ z=3\end{cases}$$

故四面体的体积

$V=V_{长}-4V_{D\text{-}SAB}$

$=V_{长}-4\times\frac{1}{6}V_{长}=\frac{1}{3}V_{长}=8$.

916．四棱锥 M－ABCD 的底面是边长为 a 的正方形，MA 垂直底面且长为 a．

(1)求异面直线 AC 和 MB 所成的角及距离；

(2)求经过 AC 且平行于 MB 的截面面积．

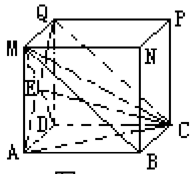


图212

【解答】将四棱锥补成正方体 MNPO－ABCD，如图 212

∵AC 和 MB 所成的角等于∠ACQ，

∴AC 和 MB 所成的角等于 60°．

∵AC 和 MB 的距离等于平面 ACQ 和平面 MBP 的距离，

∴AC和MB的距离等于$\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

∵经过 AC 且平行于 MB 的截面是△ACQ 的一半，即△ACE，

∴截面面积是

$\frac{1}{2}S_{\triangle ACQ}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

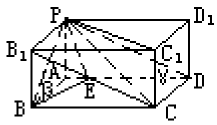


图213

917．如图 213，四棱锥 P－ABCD 中，PA⊥矩形 ABCD，二面角 B－PC－D、P－BC－D、P－CD－B 的大小分别为α、β、γ．求证 cosα＋cosβcosγ＝0．

【证明】利用面积射影定理，S′＝Scosθ．

将原图形补成以 PA 为高，AB、AD 分别为长和宽的长方体 PC，连 B_1C，作 BE⊥面 PCD 交 B_1C 于 E．显然，∠PBA＝β，∠PDA＝γ，二面角 E－PC－B＝π－α．

由面积射影定理，有(PA＝a，AB＝b，AD＝c)

$$\cos\beta\cos\gamma=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PBC}}\times\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle PCD}}=\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+c^2}}$$

由平面几何知识，可知$S_{\triangle PEC}=\dfrac{bc^2}{2\sqrt{a^2+c^2}}$

$$\therefore\cos(\pi-\alpha)=\frac{S_{\triangle PEC}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{bc^2}{\sqrt{a^2+c^2}\times\sqrt{a^2+b^2}\times c}$$

$$=\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+c^2}},$$

从而 $\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma$．

918．在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是边长为 2a 的菱形，$\angle BAD=60°$，侧棱$PA\perp$平面ABCD，且$PA=\sqrt{3}a$，求面PBD与底面ABCD 所成二面角的大小．

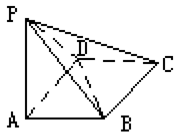


图214

【解答】如图 214，连 PC、PD、BD，得三棱锥 P－ABD，依题意知$BD=2a$，$S_{\triangle ABD}=\sqrt{3}a^2$，$V_{P-ABD}=\dfrac{1}{3}PA\times S_{\triangle ABD}=a^3$，由射影面积公式知：

$$S_{\triangle PBD}=\frac{S_{\triangle ABD}}{\cos\alpha},$$

得 $a^3=\dfrac{2}{3\times 2a}(\sqrt{3}a^2)^2\tan\alpha$，

$\therefore\tan\alpha=1$，故 $\alpha=45°$，

$\therefore$面 PBD 与底面 ABCD 所成二面角为 45°．

919．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 $AA_1=4cm$，它的底面$\triangle ABC$中有 $AC=BC=2cm$，$\angle C=90°$，求截面 ACB_1 与侧面 ABB_1A_1 所成二面角的大小．(只求其中的锐角，可用反三角函数表示)

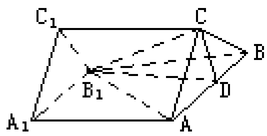


图215

【解答】如图 215，过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，连 B_1D，依题意知 $CD\perp$面 A_1ABB_1，且 D 为 AB 中点，

$\therefore AB_1 = 2\sqrt{6}\text{cm}$，

$$V_{B_1-ADC} = \frac{1}{6}V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{4}{3}\text{cm}^3，$$

$$S_{\triangle B_1AD} = \frac{1}{4}S_{\text{正方形}A_1ABB_1} = 2\sqrt{2}\text{cm}^2.$$

由射影面积公式知$S_{\triangle B_1AC} = \dfrac{S_{\triangle B_1AD}}{\cos\alpha}$，

得　$V_{B_1-ADC} = \dfrac{2}{3AB_1}(S_{\triangle B_1AD})^2\tan\alpha$，

即　$\dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3\times 2\sqrt{6}}(2\sqrt{2})^2\tan\alpha$，

$\therefore \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\alpha = \arctan\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

故截面ACB_1与侧面ABB_1A_1所成的二面角为$\arctan\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

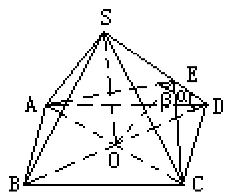


图216

920．如图 216，设正四棱锥的侧棱与底面所成角为α，相邻两侧面所成角为β，求证$\cos\beta = \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - 2}$.

【证明】设正四棱锥底面边长为 a，作 CE⊥SD，垂足 E，连 AE，则有 AE⊥SD，∠AEC＝β．在 Rt△EOC 与 Rt△OED 中，

$$\cot\frac{\beta}{2} = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{OD} = \sin\alpha.$$

$$\therefore \cos\beta = \frac{1-\tan^2\dfrac{\beta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{1-\dfrac{1}{\sin^2\alpha}}{1+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}} = \frac{\sin^2\alpha - 1}{\sin^2 + 1} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - 2}.$$

921．在三面角 O－ABC 中，设 OA、OB、OC 为棱的二面角大小分别为 $\hat{OA}$、$\hat{OB}$、$\hat{OC}$，∠BOC、∠COA、∠AOB 分别为α、β、γ，则

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\hat{OA}} = \frac{\sin\beta}{\sin\hat{OB}} = \frac{\gamma}{\sin\hat{OC}}.$$

【精析】回忆平面三角中正弦定理的一种证明是有益的．

【证明】易知四面体 O－ABC 的体积

$$V=\frac{1}{6}OA\times OB\times OC\times\sin\alpha\times\sin\beta\times\sin\hat{OC}$$

$$=\frac{1}{6}OA\times OB\times OC\times\sin\beta\times\sin\gamma\times\sin\hat{OA}$$

$$=\frac{1}{6}OA\times OB\times OC\times\sin\gamma\times\sin\alpha\times\sin\hat{OB}.$$

这三式两两作商便得欲证结论．

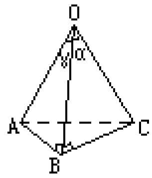


图217

922．如图 217，在四面体 O－ABC 中，有

$$\cos\hat{OB}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

【证明】在 OB 上找 B，过 B 分别在面 OAB、面 OBC 内作 AB⊥OB，BC⊥OB，交 OA、OC 于 A、C，

$\therefore\angle ABC=\hat{OB}$．并设 $OB=1$，则$OA=\sec\gamma$，$OC=\sec\alpha$．

于是，在△OAC 中运用余弦定理，有

$AC^2=OA^2+OC^2-2\times OA\times OC\times\cos\beta$

$=\sec^2\gamma+\sec^2\alpha-2\times\sec\alpha\times\sec\gamma\times\cos\beta$．

在△ABC 中运用余弦定理，有

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos\hat{OB}$$

$$=\csc^2\gamma+\csc^2\alpha-2\times\csc\gamma\times\csc\alpha\times\cos\hat{OB}.$$

$\therefore\sec^2\gamma+\sec^2\alpha-2\times\sec\alpha\times\sec\gamma\times\cos\beta=\csc^2\gamma+\csc^2\alpha-2\times\csc\gamma\times\csc\alpha\times\cos\hat{OB}$，化简即得欲证结论．

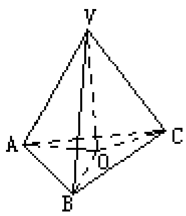


图218

923．如图 218，在四面体中，若过一个顶点的三个面两两互相垂直(称为直角四面体)，则这三个面的面积平方和等于第四面的面积的平方．

【证明】设四面体 V－ABC 中，面 VAB、面 VBC、面 VCA 两两互相垂直，则要证

$S_V^2=S_A^2+S_B^2+S_C^2$(S_x 表示 x 所对面面积)．

如图 218，记二面角 V－BC－A＝α，V－AC－B＝β，V－AB－C＝γ，并作 VO⊥面 ABC，垂足为 O，则由题设知 VC⊥面 VAB 等，从而

$S_C = S_V \times \cos\gamma$，$S_B = S_V \times \cos\beta$，$S_A = S_V \times \cos\alpha$．

①

再将三棱锥 V－ABC 的各侧面向底面 ABC 投影，则有

$S_{\triangle OAB} = S_C \times \cos\gamma$，$S_{\triangle AOC} = S_B \times \cos\beta$，$S_{\triangle BOC} = S_A \times \cos\alpha$．

②

联合①与②，得

$S_C^2 = S_V \times S_{\triangle AOB}$，$S_B^2 = S_V \times S_{\triangle AOC}$，$S_A^2 = S_V \times S_{\triangle BOC}$．

这三式相加便得

$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_V(S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}) = S_V^2$．

③

924．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，棱长为 a，E、F 分别为正方形 ABB_1A_1、BCC_1B_1 的中心，连结 A_1F，D_1E，EF，D_1F，A_1E．

(1)求异面直线 D_1E，A_1F 的所成角．

(2)求三棱锥 A_1-D_1EF 的体积．

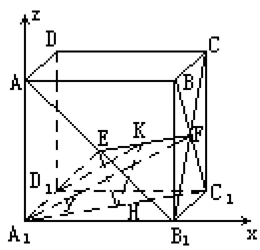


图219

【解答】如图 219，(1)建立直角坐标系 A_1B_1，A_1D_1，A_1A 分别为 x，y，z 轴．

$A_1(0, 0, 0)$、$F(a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$、$D_1(0, a, 0)$、$E(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2})$．

$\overrightarrow{A_1F} = \{a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\}$、$\overrightarrow{D_1E} = \{\frac{a}{2}, -a, \frac{a}{2}\}$．

设异面直线 D_1E，AF 所成角为 θ．

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{A_1F}\times\overrightarrow{D_1E}}{|\overrightarrow{A_1F}|\times|\overrightarrow{D_1E}|}$$

$$=\frac{\frac{a}{2}\times a-a\times\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2+\frac{a^2}{4}}}=\frac{1}{6}.$$

$\therefore\theta=\arccos\frac{1}{6}$.

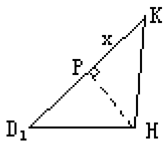


图220

(2)如图 220，连 A_1C_1 取中点 H，EF∥A_1C_1，取 EF 中点 K，

$\therefore V_{A_1-D_1EF}=V_{H-D_1EF}$.

不难求得$HK=\frac{\sqrt{6}}{4}a$，$D_1K=\frac{\sqrt{22}}{4}a$，$D_1H=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

作$PH\perp D_1K$，PH**为**H**到平面**EFD_1**的距离，设**$PK=x$，$(\frac{\sqrt{6}}{4}a)^2-x^2$

$=(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{22}}{4}a-x)^2$.

$\therefore x=\frac{5\sqrt{22}}{44}a$.

$$\begin{cases}4(2+\Delta_x)^2+16(1+\Delta_y)^2=64, & ①\\ 4(2-\Delta_x)^2+16(1-\Delta_y)^2=64, & ②\\ \frac{\Delta_y}{\Delta_x}=k & ③\end{cases}$$

$S_{\triangle D_1EF}=V_{H-D_1EF}$

$=\frac{1}{3}PH\times S_{\triangle D_1EF}$

$=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{11}}{11}a\times\frac{\sqrt{11}}{8}a^2=\frac{1}{24}a^3$.

第十二章　直线

一、选择题

925．已知线段$|P_1P_2|=1$，点P在线段P_1P_2的延长线上，且$|P_2P|=2$，则点P分P_1P_2所成的比是

[　　]

A．$-\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{3}{2}$

C．-2　　D．-3

【解答】∵点P在线段P_1P_2的延长线上

∴$|P_1P|=|P_1P_2|+|P_2P|=1+2=3$，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\left|\frac{P_1P}{PP_2}\right|=-\frac{3}{2}$，选B．

926．直线$Ax+By+c=0(A^2+B^2\neq0)$关于直线$x+y=0$对称的直线方程是

[　　]

A．$Bx+Ay+c=0$　　B．$Bx+Ay-c=0$

C．$Ax-By+c=0$　　D．$Ax-By-c=0$

【精析】由$x+y=0$得$x=-y$，$y=-x$分别代入直线$Ax+By+c=0$得$-Ay-Bx+c=0$

∴$Bx+Ay-c=0$，故选B．

927．椭圆$2x^2+3y^2=1$关于直线$x+y-1=0$对称的方程是

[　　]

【解答】由$x+y-1=0$得

$x=-y+1$，$y=-x+1$

分别代入$2x^2+3y^2=1$得

$2(-y+1)^2+3(x-1)^2=1$，

∴所求的方程为$3(x-1)^2+2(y-1)^2=1$．

928．圆$x^2+2x+y^2+4y-3=0$上到直线$x+y+1=0$的距离等于$\sqrt{2}$的点共有

[　　]

A．1个　　B．2个

C．3个　　D．4个

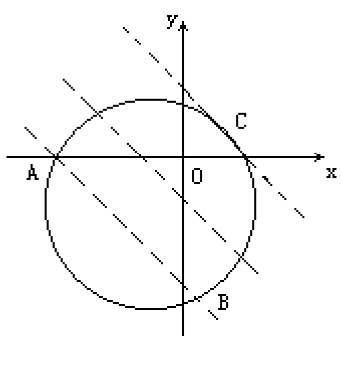


图221

【精析与解答】已知圆方程可化为：$(x+1)^2+(y+2)^2=8$，这是一个以$(-1，-2)$为圆心，以$2\sqrt{2}$为半径的圆．此圆的圆心到直线$x+y+1=0$的距离为：$d=\frac{|-1-2+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$．这样，只要画出$(x+1)^2+(y+2)^2=8$和直线$x+y+1=0$以及和$x+y+1=0$的距离为$\sqrt{2}$的平行直线，如图221，图中的三个点A、B、C即为所求．故选C．

929．如果实数x、y满足$(x-2)^2+y^2=3$，那么$\frac{y}{x}$的最大值是

[　　]

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\sqrt{3}$

【解答】∵圆的最高点$A(2，\sqrt{3})$，故$\frac{y}{x}>k_{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，选D．

930．点$M(x_0，y_0)$是圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$内不过圆心的一点，则直线$x_0x+y_0y=r^2$与该圆的位置关系是

[　　]

A．相切　　B．相交

C．相离　　D．相切或相交

【解答】事实上，点$M(x_0，y_0)$不在直线$x_0x+y_0y=r^2$上，否则

17．原方程同解于$\begin{cases} x>0， & ① \\ x-a>0， & ② \\ x^2-2(a+1)x+a^2=0． & ③ \end{cases}$

由③知$\Delta=4(2a+1)$，由已知可得$\Delta\geq 0$，

∴③的两解为$x_1=a+1+\sqrt{2a+1}$，$x_2=a+1-\sqrt{2a+1}$，

【解答】　∵A到渐近线的距离$d=\frac{|4-1|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}>1$，

故直线与圆相离，应选C．

931．已知平行四边形的三个顶点是A(4，2)，B(5，7)，C(－3，4)，则第四个顶点D不可能是

[　　]

A．(12，5)　　B．(－2，9)，

C．(－4，－1)　　D．(3，7)

【精析】∵平行四边形对角线互相平分

∴DA、BC中点相同或DB、AC中点相同或DC、AB中点相同．

①DA、BC中点相同时，$\frac{x+4}{2}=\frac{5-3}{2}$，$\frac{y+2}{2}=\frac{7+4}{2}$

∴x＝－2，y＝9，即D点坐标为D(－2，9)

②DB、AC中点相同时，$\frac{x+5}{2}=\frac{4-3}{2}$，$\frac{y+7}{2}=\frac{2+4}{2}$．

∴$x=-4$，$y=-1$ 即 D 点坐标为$(-4，-1)$.

③DC、AB中点相同时，$\frac{x-3}{2}=\frac{4+5}{2}$，$\frac{y+4}{2}=\frac{2+7}{2}$

∴$x=12$，$y=5$，即 D 点坐标为 D(12，5)

∴平行四边形第四个顶点 D 不可能是(3，7).

二、填空题

932.在两条平行直线 $x-2y-2=0$ 和 $x-2y-6=0$ 之间作一条直线，使它与这两条平行直线的距离的比为 1∶3，则这条直线的方程为________.

【解答】设所求直线方程为 $x-2y+c=0$，则由题设得

$$d_1=\frac{|c+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|c+2|}{\sqrt{5}},$$

$$d_2=\frac{|c+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|c+6|}{\sqrt{5}}$$

∵$d_1:d_2=1:3$

∴$3|c+2|=|c+6|$，$c+6=\pm3(c+2)$，

∴$c_1=0$，$c_2=-3$，

∴$x-2y=0$ 或 $x-2y-3=0$.

由于 $x-2y=0$ 在已知两平行直线之外，舍去，所求直线为 $x-2y-3=0$.

933．一条直线经过点(2，3)，且被两条平行直线 $4x+3y+1=0$ 和$4x+3y+6=0$截得的线段长为$\sqrt{2}$，则这直线的方程为__________.

【精析】∵$d=\frac{|1-6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$，

∴设所求直线与直线 $4x+3y+1=0$ 的夹角为 α，

∵$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$\tan\alpha=\pm1$.

用 k 表示所求直线的斜率，则 $y-3=k(x-2)$，则

$$\tan\alpha=\frac{k-(-\frac{4}{3})}{1+k(-\frac{4}{3})}=\pm1,$$

解得　$k_1=7$，$k_2=-\frac{1}{7}$，

∴过点(2，3)的直线方程为 $7x-y-11=0$ 和 $x+7y-5=0$.

934．若实数 x、y 满足 $x^2+y^2-2x+4y=0$，则 $x-2y$ 的最大值为________.

【精析】∵$x^2+y^2-2x+4y=0$，即是$(x-1)^2+(y+2)^2=5$，

∴(x，y)即是此圆上一点，设 $x-2y=b$，则 $x-2y$ 的最值即是直线 $x-2y-b=0$ 在 x 轴截距的最值，故可以利用直线截距求解.

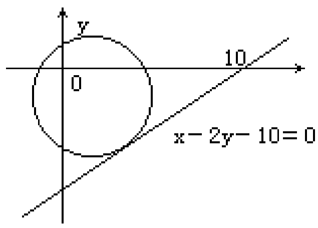


图222

【解答】如图 222，∵x，y 满足 $x^2+y^2-2x+4y=0$，

∴(x，y)即是圆$(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 上的点，设 $x-2y=b$，则 $x-2y$ 即是直线 $x-2y-b=0$ 在 x 轴上截距，当 $x-2y-b=0$ 和圆相切时有：

$$\frac{|1-2(-2)-b|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5},$$

∴$(5-b)^2=25$，∴b＝0 或 b＝10，

∴x－2y 的最大值为 10．

935．已知三角形一个顶点 A(4，－1)和它的两条分角线方程 x－y－1＝0 和 x－1＝0，则边 BC 所在直线的方程为________．

【精析】因为 A(4，－1)不在已给的两条分角线上，故两分角线分别是 B，C 的分角线．考虑到分角线的特点，可以发现：点 A 关于这两条分角线的对称点应落在直线 BC 上，从而可先补求出这两个对称点，再写出 BC 的方程．

易知：A(4，－1)关于两直线 x－y－1＝0，x－1＝0 的对称点分别为：

M(0，3)，N(－2，－1)，而 M，N 均在直线 BC 上，故边 BC 所在直线方程为：$\frac{y-3}{-1-3}=\frac{x-0}{-2-0}$，即：2x－y＋3＝0．

936．直线 y＝kx 交曲线 $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 于 P、Q 两点，O 是坐标原点，P 在 O、Q 之间，若|OP|＝2|PQ|，那么 k＝________．

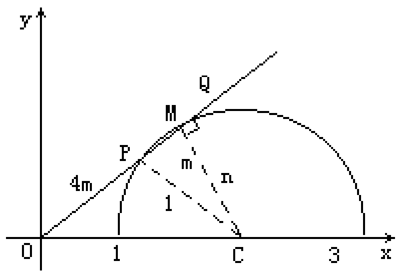


图223

【精析】由 $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 得 $(x-2)^2+y^2=1\quad(y\geq 0)$，

从而，其轨迹为以 C(2，0)为圆心，1 为半径的上半圆，如图 223，取 PQ 的中点为 M，连 CM、CP，则 CM⊥OQ．

设|CM|＝n，|PM|＝m，则|OP|＝4m，于是在 Rt△CMP 与 Rt△OMC 中，分别利用勾股定理得

$$\begin{cases} m^2+n^2=1^2 & ① \\ (5m)^2+n^2=2^2 & ② \end{cases}$$

4×①－②得　$n^2=7m^2$，

∴　$n=\sqrt{7}m$，

∴　$k=\tan\angle MOC=\dfrac{|MC|}{|OM|}=\dfrac{n}{5m}=\dfrac{\sqrt{7}}{5}$．

三、解答题

937．已知圆$(x-3)^2+(y-3)^2=1$，求$|2x+y-1|$的最大、最小值．

【精析】∵P(x，y)到直线$2x+y-1=0$距离为$\dfrac{|2x+y-1|}{\sqrt{5}}$，

∴$|2x+y-1|$即是圆$(x-3)^2+(y-3)^2=1$上点P(x，y)到直线$2x+y-1$距离的$\sqrt{5}$倍．

所以考虑利用点到直线的距离公式求解．

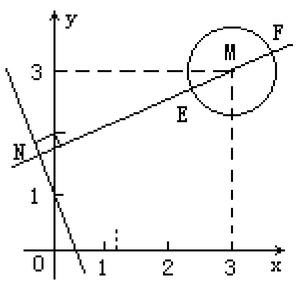


图224

【解答】如图224，作直线$2x+y-1=0$，过圆心M(3，3)作直线$2x+y-1=0$的垂线MN交圆$(x-3)^2+(y-3)^2=1$两点E、F，则E到直线$2x+y-1=0$的距离最小，F到直线$2x+y-1=0$的距离最大，

又∵　圆心M到$2x+y-1=0$的距离为：

$|MN|=\dfrac{|2\times 3+3-1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

∴$|2x+y-1|$的最大值为$\sqrt{5}(8/\sqrt{5}+1)=8+\sqrt{5}$

∴$|2x+y-1|$的最小值为$\sqrt{5}(8/\sqrt{5}-1)=8-\sqrt{5}$

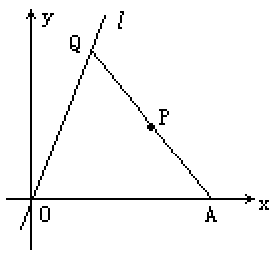


图225

938．如图225，已知直线l：$y=4x$和点P(6，4)，在直线l上求一点Q，使过P、Q的直线与直线l及x轴在第一象限内围成的三角形面积最小．

【精析】设直线 l 上的点 Q 的坐标为$(x_0，4x_0)(x_0>1)$，直线 PQ 交 x 轴于点 A，则可知ΔOQA 的高为 $4x_0$，底边 OA 长就是点 A 的横坐标，其面积表达式 $f(x_0)$为参数 x_0 的函数.

直线PQ的方程为$y-4=\frac{4x_0-4}{x_0-6}(x-6)$.

令$y=0$得$x=\frac{5x_0}{x_0-1}$为点A的横坐标.

$\therefore S_\Delta=\frac{1}{2}\times\frac{5x_0}{x_0-1}\times4x_0=\frac{10x_0^2}{x_0-1}$

令 $x_0-1=t>0$，则 $x_0=t+1$，从而有

$S_\Delta=10\times\frac{(t+1)^2}{t}=10(t+\frac{1}{t})+20$

$\geq10\times2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}+20=40$

当且仅当 $t=1$，即 $x_0=2$，$y_0=8$ 时取等号.

∴ 所求点 Q 的坐标为(2，8)

939．求与直线 $7x+24y-5=0$ 平行，并且距离等于 3 的直线.

【精析】因为两条直线平行，故它们的斜率相等，纵截距不等，因此可设所求的直线为 $7x+24y+C=0$

$\therefore d=\frac{|c-(-5)|}{\sqrt{7^2+24^2}}=3$，

$\therefore |c+5|=75$，

$\therefore c_1=70$，$c_2=-80$.

故所求的直线是

$7x+24y-80=0$ 和 $7x+24y+70=0$.

940．已知直线 $3x-y+4=0$ 和 $6x-2y-1=0$ 是圆的两条平行切线，求该圆的面积.

【精析】$\because 6x-2y-1=0$，

$\therefore 3x-y-\frac{1}{2}=0$，

$\therefore d=\frac{\left|4+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{10}}{20}$，

从而得$M(-m，-3m)$，于是l_{AB}：$y=-\frac{1}{4}x-\frac{13}{4}m$.

941．已知实数 x，y 满足方程 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$，求 $\frac{y}{x}$的最值.

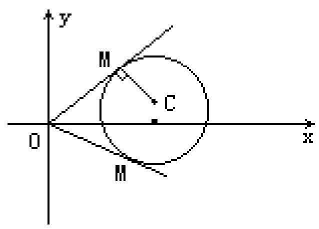


图226

【精析】已知方程可化为$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$．这是一个圆的方程(如图226)，其圆心为$C(3,1)$，半径为2．而$\frac{y}{x}$表示圆C上的点M(x，y)与原点O的连线OM的斜率．分析图象可知：当M为切点时，其斜率k取得最值．

不难求得$k=\frac{3\pm2\sqrt{6}}{5}$．从而可知，$\frac{y}{x}$的最大值是$\frac{3+2\sqrt{6}}{5}$，最小值是$\frac{3-2\sqrt{6}}{5}$．

942．已知两条直线l_1：$2x-3y+2=0$，l_2：$3x-2y+3=0$，有一动圆(圆心和半径都在变动)与l_1、l_2都相交，并且l_1、l_2被截在圆内的两条线段的长度分别是定值26、24，求圆心M的轨迹方程．

【精析】设动圆圆心M的坐标为(x，y)，半径为r，点M到l_1、l_2的距离分别为d_1、d_2，则有：

$d_1^2+(\frac{26}{2})^2=r^2$，$d_2^2+(\frac{24}{2})^2=r^2$，

由上面两式消去r^2得：$d_2^2-d_1^2=25$．

又$d_1=\frac{|2x-3y+2|}{\sqrt{13}}$，$d_2=\frac{|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}$，代入上式整理，

得$\frac{(x+1)^2}{65}-\frac{y^2}{65}=1$，此即为所求的轨迹方程．

943．某市现有自市中心O通往正西和东北方向的两条主要公路，为了解决该市交通拥挤问题，市政府决定修建一条环城公路．分别在通往正西和东北方向的公路上选取A、B两点，使环城公路在A、B间为直线段，要求AB环城路段与市中心O的距离为10km，且使A、B间的距离|AB|最小.请你确定A、B两点的最佳位置(不要求作近似计算)．

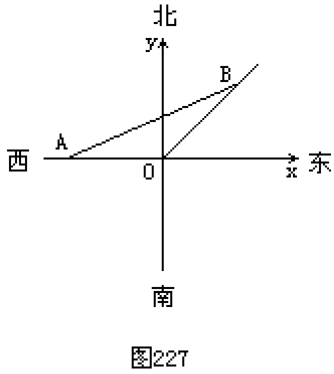


图227

【解答】以O为原点，正东方向为x轴的正半轴，正北方向为y轴的正半轴，建立如图227所示的直角坐标系．

设A(－a，0)，B(b，b)(其中a＞0，b＞0)，则直线AB的方程为$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x+a}{b+a}$，即$bx-(a+b)y+ab=0$．

$\therefore 10=\frac{|ab|}{\sqrt{b^2+(a+b)^2}}$，

$\therefore a^2b^2=100[a^2+2b^2+2ab]$

$\geq 100[2\sqrt{a^2\times 2b^2}+2ab]$

$=200(1+\sqrt{2})ab$．

$\because ab>0$，$\therefore ab\geq 200(\sqrt{2}+1)$．当且仅当$a^2=2b^2$时等号成立．

而$|AB|=\sqrt{(b+a)^2+b^2}=\frac{ab}{10}$

$\therefore |AB|\geq 20(\sqrt{2}+1)$．

当$\begin{cases} a^2=2b^2, \\ ab=10\sqrt{2b^2+a^2+2ab} \end{cases}$，

即$\begin{cases} a=10\sqrt{2(2+\sqrt{2})}, \\ b=10\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{cases}$时，$|AB|$取得最小值．

此时，$|OA|=a=10\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$，$|OB|=10\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$．

$\therefore$ A、B两点的最佳位置是距离市中心O均为$10\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$km．

$\frac{4}{1+\lambda}=(\frac{4\lambda}{1+\lambda})^2-m\times\frac{4\lambda}{1+\lambda}+m+1$，即

若此变换把直线y＝kx上的点变为本身，把y＝mx上的点变为关于原点对称的点，试解答：

(1)求a、b、k、m；

(2)这个变换把直线y＝2x－1变为什么图形？

【精析与解答】由已知可得：

若P为(1，k)，则M为(1，k)；若P为(1，m)，则M为(－1，－m)

于是可得：

$$\begin{cases} 1=a-k \\ k=3+bk \\ -1=a-m \\ -m=3+bm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-4 \\ k=-1 \\ m=1 \end{cases}$$

变换关系是：

$$\begin{cases} x=-y_1 \\ y=3x_1-4y_1 \end{cases}$$

在直线y＝2x－1上任取一点$P(x_1，y_1)$，则

$$\begin{cases} x=-y_1=-(2x_1-1)=1-2x_1 \\ y=3x_1-4y_1=3x_1-4(2x_1-1)=-5x_1+4 \end{cases}$$

消去 x_1 得：

$5x-2y+3=0$

这就是所求变换结果．

945．当 $2x+3y-7=0(-1\le x\le 2)$ 时，求 $4x-5y$ 的最值．

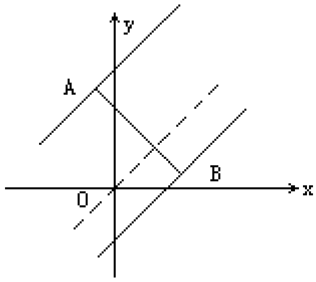


图228

【解答】 令 $4x-5y=t$，则 $y=\frac{4}{5}x-\frac{t}{5}$，这是斜率 $k=\frac{4}{5}$ 的平行直线系，纵截距为 $-\frac{t}{5}$(如图228)．当它分别过线段 $2x+3y-7=0(-1\le x\le 2)$ 左端点 A(－1，3)，右端点 B(2，1)时，得

$$(-\frac{t}{5})_{max}=3-\frac{4}{5}\times(-1)=\frac{19}{5}.$$

$$(-\frac{t}{5})_{min}=1-\frac{4}{5}\times 2=-\frac{3}{5}.$$

$\therefore (4x-5y)_{min}=-19$．$(4x-5y)_{max}=3$．

946．平面内有两点 A(－1，0)，B(1，0)，P 为圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上一点，求 $|PA|^2+|PB|^2$ 的最小值、最大值．

【精析】设 P(x，y)，则 P 为圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上一点．

$\because |PA|^2+|PB|^2$

$=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2$

$=2x^2+2y^2+2$

$=2(x^2+y^2)+2$

而 x^2+y^2 是圆上点到坐标原点距离的平方，从而将求 $|PA|^2+|PB|^2$ 的最值转化为求圆上点到坐标原点的距离的最值，使问题明朗化．

【解答】$\because$ P 在圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上，设 P(x，y)，则

$|PA|^2+|PB|^2$

$=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2$

$=2(x^2+y^2)+2$

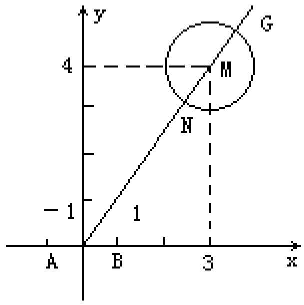


图229

如图 229，过圆心 M(3，4)和 O(0，0)作直线 OM 交圆 M 于 N、G 两点，圆 M 上点 N 即是到坐标原点距离最小的点，G 即是到坐标原点距离最大的点．

而$|OM|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$，

∴|ON|＝5－2＝3，

|OG|＝5＋2＝7，

∴$|PA|^2+|PB|^2$的最小值为 $2\times3^2+2=20$，$|PA|^2+|PB|^2$的最大值为 $2\times7^2+2=100$．

947．有点 A(a，0)和直线 l：x＋y＝1，在 l 上取一点 P，连 AP 并在 AP 内或延长线上取一点 M，使|AP|×|AM|=m(m 为正常数)，求点 M 的轨迹方程．

【精析与解答】 设 P 为$(x_1，y_1)$，M 为(x，y)，依题意得：

$$\sqrt{(x_1-a)^2+y_1^2}\times\sqrt{(x-a)^2+y^2}=m \qquad ①$$

$$\frac{y_1}{y}=\frac{x_1-a}{x-a}=\lambda(\text{正参数}) \qquad ②$$

由①、②得 $\lambda=\dfrac{m}{(x-a)^2+y^2}$．

$\therefore x_1=\dfrac{m(x-a)}{(x-a)^2+y^2}+a$，$y_1=\dfrac{my}{(x-a)^2+y^2}$．

因 $P(x_1；y_1)$在 l 上，故有：

$$\frac{m(x-a)}{(x-a)^2+y^2}+a+\frac{my}{(x-a)^2+y^2}=1．$$

$\Rightarrow m(x+y-a)=(1-a)[(x-a)^2+y^2]$

这就是所求轨迹方程，其图形是圆或直线．

948．已知点 M(2，－3)在直线 l_1上，点 N(－1，1)在直线 l_2上，且 $l_1 /\!/ l_2$，l_1与 l_2之间的距离为 3，求 l_1与 l_2的方程．

【精析与解答】 当 l_1，l_2的斜率不存在时，此时，l_1与 l_2的方程分别为 x＝2，x＝－1，它们之间的距离为|2－(－1)|＝3．

当 l_1，l_2的斜率存在时，设直线 l_1的方程为 y＋3＝k(x－2)，即 kx－y－2k－3＝0，则点 N 到直线 l_1的距离就是 l_1与 l_2之间的距离，即

$\frac{|-k-1-2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|3k+4|}{\sqrt{k^2+1}}=3$.

解得$k=-\frac{7}{24}$，此时l_1与l_2的方程分别为$7x+24y+58=0$，$7x+24y-17=0$.

所以，l_1，l_2的方程分别为 $x=2$ 与 $x=-1$，或 $7x+24y+58=0$ 与 $7x+24y-17=0$.

949．求过点 P(0，1)的直线方程，该直线被两相交直线 l_1：$x-3y+10=0$，l_2：$2x+y-8=0$ 所截得的线段 AB 平分于点 P.

【精析】　因为 P(0，1)为 AB 中点，所以可设 A，B 的坐标分别为(Δx，$1+\Delta y$)，($-\Delta x$，$1-\Delta y$)，AB 所在直线斜率为 k，则

$$\begin{cases}\Delta x-3(1+\Delta y)+10=0 & (1)\\ 2(-\Delta x)+(1-\Delta y)-8=0 & (2)\\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=k & (3)\end{cases}$$

解得$k=-\frac{1}{4}$．故所求直线方程为$y-1=-\frac{1}{4}x$，即$x+4y-4=0$.

950．如图 230，已知点 A(3，3)和点 B(－1，5)，直线 $y=ax+1$ 与线段 AB 有公共点，求实数 a 的取值范围.

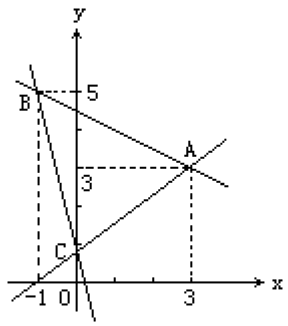


图230

【精析与解答】　因为直线 $y=ax+1$ 过定点 C(0，1)，点 A，B 的坐标分别为 A(3，3)、B(－1，5)，所以　直线 AC 和直线 BC 的斜率分别为：

$k_{AC}=\frac{1-3}{0-3}=\frac{2}{3}$，

$k_{BC}=\frac{1-5}{0-(-1)}=-4$.

当直线由CA位置绕点C与y轴接近时，a的值由$\frac{2}{3}\to+\infty$；而当直线由 CB 位置绕 C 点接近 y 轴时，a 的值由$-4\to-\infty$．所以α的取值范围为$(-\infty,-4)\cup(\frac{2}{3},+\infty)$.

注意：错解为：同上解出$k_{AC}=\frac{2}{3}$，$k_{BC}=-4$，由于直线$y=ax+1$

与线段 AB 有公共点，所以 直线由 CB 位置绕 C 点至 CA 位置时有－4 $\le a\le \frac{2}{3}$．

错解原因之一是对直线的斜率的概念不明确，没有考虑当直线倾斜角为 90 ° 时，直线斜率不存在的情况，画出图后觉得直线绕 C 点从 CB 转到 CA 位置，则其斜率也就在直线 CB 与直线 CA 的斜率之间了．错解原因之二是对正切函数的增

减性不清楚，不知正切函数在第二象限是增函数，当直线倾角 α 的值在第二象限减小时(直线由 CB 位置绕 C 点接近 y 轴时，直线的倾斜角逐渐减小)，其正切函数值亦随之减小，当然此时直线的斜率也逐渐减少，所以在直线倾斜角为钝角时，其斜率 a 应小于或等于－4，而不是－4≤a＜0.

解决这类问题的办法之一是一定要弄清直线斜率的定义是倾斜角不是 90 ° 的直线，它的倾斜角的正切叫做这条直线的斜率．直线的斜率用 k 表示，倾斜角用 α 表示，则有 k=tanα(其中 α ≠90 °)．理解直线的斜率的概念必须把握两点：①倾斜角是 90 ° 的直线没有斜率；②倾斜角不是 90 ° 的直线都有斜率，并且是确定的．这样在考虑与直线斜率有关问题时就会注意将斜率不存在即直线与 x 轴垂直时的情况单独抽出来考虑，避免错误．解决这类问题另一重要办法是用数形结合思想来考虑问题．如本题结合题意画出草图后就可以知道此题求 α 的范围实质上就是求直线 y＝ax＋1 绕点 C(0，1)与线段 AB 有公共点的斜率 a 的范围，这样由图易观察出 y 轴(倾斜角为 90 °)是符合过 C 点且与线段 AB 有公共点的直线,因此在考虑问题时必须分两部分来考虑问题，即分直线由 CA→y 轴和由 CB→y 轴两种情况考虑问题．在此基础上再结合正切函数的增减性解决问题就一定会得出正确的结论．

951．若直线l_1：$x+y\sqrt{1-\cos\alpha}+b=0$与$l_2$：$x\sin\alpha+y\sqrt{1+\cos\alpha}-a=0$垂直，求角 α 的取值范围．

【精析与解答】 因为直线 l_1 与 l_2 垂直，所以由两直线垂直的充要条件得：

$$1\times\sin\alpha+\sqrt{1-\cos\alpha}\times\sqrt{1+\cos\alpha}=0,$$

即 $\sin\alpha+|\sin\alpha|=0$，

所以 $\sin\alpha\le 0$．

所以 $2k\pi+\pi\le\alpha\le 2k\pi+2\pi$，$(k\in Z)$．

又因为 l_2方程为$x\sin\alpha+y\sqrt{1+\cos\alpha}-a=0$．

当 $\alpha=2k\pi+\pi$ 时 l_2 方程的 x、y 的系数均为 0，应舍去．

所以 角 α 的取值范围是$(2k\pi+\pi，2k\pi+2\pi]$．

注意：解为：由l_1的方程得l_1的斜率为$k_1=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$，由$l_2$的方程得$l_2$的斜率为$k_2=-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos\alpha}}$．

因为 $l_1\perp l_2$，所以 $k_1\times k_2=-1$，

所以$(-\frac{1}{\sqrt{1-\cos\alpha}})\times(-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos\alpha}})=-1$，

即$\frac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}=-1$，

所以 α 的取值范围是$(2k\pi+\pi，2k\pi+2\pi)$，

造成错误的原因是考虑问题不全面，误认为两直线垂直的充要条件只是 $k_1\times k_2=-1$．因此只用此条件解本题，忽视了特殊情况下两直线中的一直线斜率为 0，另一直线斜率不存在时两直线也垂直的情况，因此造成 α 的取值区间缺少半开半闭区间的右端点的错解．

解决这类问题方法是要注意思维的全面性，要深刻理解两直线垂直的充要条件是：在两直线斜率都存在的情况下为 $k_1\times k_2=1$．在一般情况若两直线方程为 $A_1x+B_1y+C_1=0$(A_1、B_1 不全为 0)、$A_2x+B_2y+C_2=0$(A_2、B_2 不全为 0)，则两直线垂直的充要条件应从 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 去考虑．这里既包括了两直线斜率存在两直线垂直的情况，又包括了一直线斜率不存在，如直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$，其中 $B_1=0$ 和另一直线斜率为 0，如直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$，其中 $A_2=0$ 的两直线垂直的情况，在不能判定两直线斜率是否都一定存在的条件下，用一般情况下的条件去考虑垂直的问题，则不会丢解．

第十三章　圆锥曲线

一、选择题

952．如果直线$y=kx-1$和椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a}=1$仅有一个交点，则$k$和 a 的取值范围分别是

[　　]

A．$(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2})$和$(0，1]$　　　B．$(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2})$和$(0，1)$

C．$[-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}]$和$[0，1]$　　　D．$[-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}]$和$(0，1)$

【精析】　此题一般是将问题转化为直线方程与椭圆方程组成的方程组有唯一解，消去 y 后得关于 x 的二次方程，根据△＝0 寻找 a 与 k 的关系，然后确定 k 和 a 的范围的．

这里，根据椭圆方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a}=1$可设：

$x=2\cos\theta$，$y=\sqrt{a}\sin\theta\ (\theta\in[0，2\pi)$

代入直线方程 y=kx－1 中并整理得

$\sqrt{a}\sin\theta-2k\cos\theta=-1$

由题意，此方程应有唯一解，从而有

$\sqrt{(\sqrt{a})^2+(-2k)^2}=1$，即$a=1-4k^2$

因$a>0$，则有$1-4k^2>0$，故$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

由 $4k^2=1-a\geq 0$，可知 $0<a\leq 1$，故应选(A)．

953．以椭圆$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$的右焦点为圆心，且与双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的渐近线相切的圆的方程为

[　　]

A．$x^2+y^2-10x+9=0$
B．$x^2+y^2-10x-9=0$
C．$x^2+y^2+10x-9=0$
D．$x^2+y^2+10x+9=0$

【解答】　可求圆心为(5，0)，排除 C、D，又因圆与双曲线的渐近线相切，故与 y 轴相离，令 x=0 知 A 中 y 无解，故选(A)．

954．已知抛物线 $y^2=-2p(x+2)(p>0)$，其准线为 y 轴，以抛物线焦点为圆心，且与 y 轴相切的圆的方程是

[　　]

A．$(x+2)^2+y^2=4$
B．$(x+4)^2+y^2=4$
C．$(x+4)^2+y^2=16$
D．$(x-4)^2+y^2=16$

【解答】　作图分析可知，圆过点(0，0)，且圆心必在(－2，0)

左方，故选(C).

955．如果 A(t，-4)在曲线 $x^2-4x-2y-5=0$ 上，则 t 为

[　　]

A．2 或 4　　B．1

C．1 或 3　　D．4

【解答】　(C)

956．与两坐标轴距离相等的点的轨迹方程是

[　　]

A．$y=|x|$　　B．$y=x$

C．$y=-x$　　D．$x^2-y^2=0$

【解答】　(D)

957．“$a=1$”是直线$(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$ 和$(5a-2)x+(a+4)y-7=0$ 互相垂直

[　　]

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不必要也不充分

【解答】　(A)

958．曲线 $x^2+4y^2=1$ 与曲线 $2x^2-y^2=2$ 的公共点个数为

[　　]

A．0　　B．1　　C．2　　D．4

【解答】　C

959．如果实数 x、y 满足 $x^2+y^2-2x+4y=0$，则 $x-2y$ 的最大值是

[　　]

A．$\sqrt{5}$　　B．10

C．9　　D．$5+2\sqrt{5}$

【解答】　设 $x-2y=t$，且点(x，y)∈⊙C，由图 231

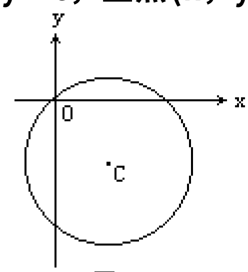


图231

易知：当直线 $x-2y-t=0$ 与圆 C：$(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 相切时，t 取最大值和最小值.

又因为直线与圆相切时，应有圆心 C(1，-2)到直线 $x-2y-t=0$的距离等于圆的半径，从而有 $\frac{|1+4-t|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，

∴t=0 或 t=10，故选(B)

960．设圆 C：$x^2+y^2+2ax+2y+(a-1)^2=0$，若 $0<a<1$，则原点

[　　]

A．在圆外　　　　　B．在圆内

C．在圆上　　　　　D．不能确定(与 a 值有关)

【解答】　∵$D^2+E^2-4F=8a>0$

又∵$f(0,0)=(a-1)^2>0$

∴原点在圆外，选(A)

961．如果 A 点坐标为(1，1)，F_1是椭圆 $5x^2+9y^2=45$ 的左焦点，点 P 是该椭圆上的动点，则$|PA|+|PF_1|$的最小值是

[　　]

A．$9-\sqrt{2}$　　　B．$6-\sqrt{2}$

C．$3+\sqrt{3}$　　　D．$6+\sqrt{2}$

【解答】　如图 232，设 $f(x,y)=5x^2+9y^2-45$．由 $f(1,1)<0$ 可知，点 A(1，1)在椭圆内部，设右焦点为 $F_2(2,0)$，连 PF_2，则$|PA|+|PF_1|=|PA|+2a-|PF_2|=2a-(|PF_2|-|PA|)$

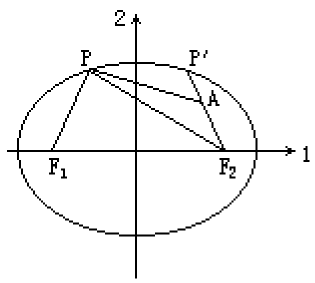


图232

∵$|PF_2|-|PA|\le|AF_2|$，当 A、P、F_2共线时取“=”号，此时$|PA|+|PF_1|$取最小值为$2a-|AF_2|=6-\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}=6-\sqrt{2}$，选(B)

962．若点 A 的坐标为(3，2)，F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，点 P 在该抛物线上移动，为使$|PA|+|PF|$取最小值，点 P 的坐标应为

[　　]

A．(0，0)　　　B．(1，1)

C．(2，2)　　　D．$(\frac{1}{2},1)$

【解答】　设 $f(x,y)=y^2-2x$，

∵$f(3,2)=2^2-2\times3<0$

∴点 A 在抛物线内部．如图 233，根据抛物线的定义，$|PF|$等于点 P 到准线的距离$|PE|$．

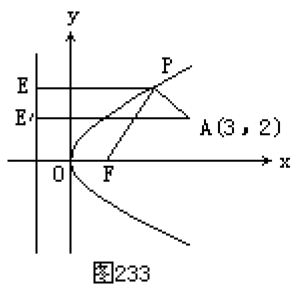


图233

由图易知，为使$|PA|+|PF|=|PA|+|PE|$最小，A、P、E 应同在垂直于准线 l 的直线上，此时 P 点的纵坐标应为 2，故(C)

963．在平面直角坐标系中，若方程 $m(x^2+y^2+2y+1)=(x-2y+3)^2$ 表示的曲线是椭圆，则 m 的取值范围为

[　　]

A．(0，1)　　B．(1，+∞)

C．(0，5)　　D．(5，+∞)

【解答】 由已知得 $\dfrac{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}{\left|\dfrac{x-2y+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\right|}=\sqrt{\dfrac{5}{m}}$，这说明点(x，y)到定直线 $x-2y+3=0$ 的距离之比为常数 $\sqrt{\dfrac{5}{m}}$，由椭圆的第二定义知 $\sqrt{\dfrac{5}{m}}<1$，解得 $m>5$，故选答案(D)．

964．设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，点P在双曲线上且满足 $\angle F_1PF_2=90°$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是

[　　]

A．1　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

【精析】 在 $Rt\triangle F_1PF_2$ 中，$S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\times|PF_2|$ 应考虑双曲线的定义．

【解答】 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{5}$，

在 $Rt\triangle F_1PF_2$ 中，$|PF_1|^2+|PF_2|^2=20$

根据双曲线的定义：$||PF_1|-|PF_2||=4$ 两边平方：

$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\times|PF_2|=16$

$\therefore 2|PF_1|\times|PF_2|=4$，

$|PF_1|\times|PF_2|=2$，

$\therefore S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}\times|PF_1|\times|PF_2|=1$

答案选(A)．

965．过抛物线焦点 F 的直线与抛物线相交于 A、B 两点，若 A、B 在抛物线准线上的射影分别为 A_1，B_1，则 $\angle A_1FB_1$ 等于

[　　]

A．45°　　B．60°

C．90°　　D．120°

【精析】 根据统一定义知，$|AA_1|=|AF|$，$|BB_1|=|BF|$，故由图 234 易得 $\angle A_1FB_1=90°$．

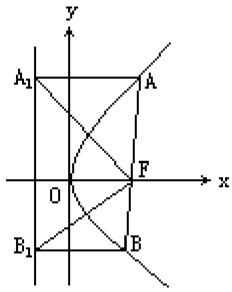


图234

966．设F_1和F_2为双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的两个焦点，点P在双曲线上，$\angle F_1PF_2=90°$，则$\triangle F_1PF_2$的面积是

[　　]

A．1　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

【精析】　由$\triangle F_1PF_2$的两边PF_1和PF_2是双曲线的两条焦半径，联想到双曲线的定义$|m-n|=2a$(其中$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$)；由于$\triangle F_1PF_2$是直角三角形，并且问题与其三边有关，联想到勾股定理$m^2+n^2=(2c)^2$；

由于目标是求$S=\frac{1}{2}m\times n$，联想到把$|m-n|=2a$平方可出现mn，再利用$m^2+n^2=(2c)^2$，即得$m\times n$之值，选(A)．

二、填空题

967．已知双曲线C以y轴为右准线，实轴长为4，右顶点在抛物线$y^2=x-1$上运动，双曲线C的离心率e的最小值等于________．

【精析】　由于$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{2}$，故只需求C的范围即可，设双曲线的中心为O′(x，y)，因为双曲线以y轴为右准线，所以$0-x=\frac{a^2}{c}=\frac{4}{c}$，即$c=-\frac{4}{x}$．若能求出x的范围，问题即可迎刃而解，于是，探求双曲线的中心O′的轨迹，便成了解决问题的突破口．

【解答】　设双曲线的中心O′(x，y)，右顶点为$(x_0，y_0)$，

∵右顶点在抛物线$y^2=x-1$上变动，

∴　$y_0^2=x_0-1$，(1)

由$\begin{cases}x_0-x=2\\y_0=y,\end{cases}$　得$\begin{cases}x_0=x+2\\y_0=y,\end{cases}$

代入(1)得$y^2=x+1$，又双曲线的中心在y轴的左侧，应有$x<0$，∴双曲线的中心O′的轨迹是抛物线$y^2=x+1$满足$-1\le x<0$的一段弧．(如图235所示)

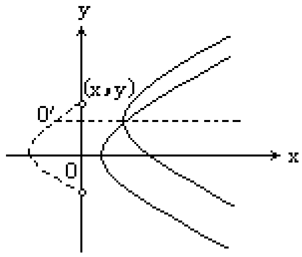


图235

令双曲线的半实轴、半虚轴、半焦距的长分别为 a，b，c，则其离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{2}$

∵x＝0 为双曲线的右准线，

$\therefore 0-x=\frac{a^2}{c}=\frac{4}{c}$，则$c=-\frac{4}{x}(-1\leq x<0)$，从而$e=-\frac{2}{x}(-1\leq x<0)$

∴e≥2，即离心率 e 的最小值为 2．

968．如图 236，抛物线 $y^2=2px(p>0)$上任一点 Q 到顶点 O 的距离与到焦点 F 的距离之比是 k，k 的取值范围是________．

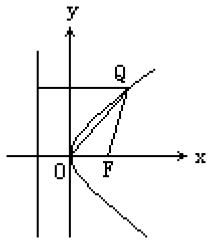


图236

【解答】　设 Q(x，y)，由抛物线定义

$|QF|=x+\frac{p}{2}$，又$|OQ|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+\frac{p}{2}}=k$，

即 $\sqrt{x^2+y^2}=k(x+\frac{p}{2})$，

平方整理得

$$(k^2-1)x^2+(k^2-2)px+\frac{k^2p^2}{4}=0 \qquad (1)$$

由$\Delta=(k^2-2)^2p^2-(k^2-1)k^2p^2\geq 0$求得$k^2\leq\frac{4}{3}$，依题意$k\geq 0$，并注意到$k=1$时Q也存在(Δ不存在)，故所求k满足$0\leq k\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

注意：题设中 Q 在抛物线 $y^2=2px$ 上，所以 Q 点横坐标 x≥0，从而对方程(1)不能只考虑Δ≥0，还应考虑 $x_1+x_2>0$(无负根)，求得$-\sqrt{2}<k<-1$或$1<k<\sqrt{2}$，从而本题结果应为$1<k\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

969．已知抛物线 $y=x^2+(m-1)x+4-m$ 与 x 轴的两个交点的横坐

标都大于 2，m 的取值范围是________.

【解答】 设抛物线与 x 轴的交点横坐标分别为 x_1、x_2，问题实际上是 m 为何值时方程 $x^2+(m-1)x+4-m=0$ 的两根均大于 2，

即 $\begin{cases} x_1>2 \\ x_2>2 \\ \Delta\geq 0 \end{cases}$ ①

亦即 $\begin{cases} x_1+x_2>4 \\ x_1\times x_2>4 \\ \Delta\geq 0 \end{cases}$ ②

由韦达定理有 $\begin{cases} -(m-1)>4 \\ 4-m>4 \\ (m-)^2-4(4-m)\geq 0 \end{cases}$

解得 $m\leq -5$.

注意：不等式组①和②不同解，应设 $f(x)=x^2+(m-1)x+4-m$，

由 $\begin{cases} f(2)>0 \\ \Delta\geq 0 \\ -\dfrac{m-1}{2}>2 \end{cases}$ 求得 $m\in(-6,-5]$.

970. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线 l 和抛物线相交于两点 A、B，若△OAB 的面积为 4，l 的倾斜角等于________.

【解答】 如图 237，易知焦点 F 的坐标是(1，0)，故设直线 l 的方程为 $x=my+1$，代入抛物线方程并化简得 $y^2-4my-4=0$ (*)

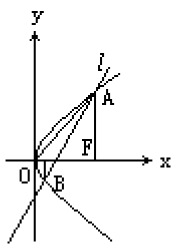


图 237

设 A、B 两点的坐标分别为(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则 y_1、y_2 是(*)的两根，从而有 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$

$\because S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAF}+S_{\triangle OBF}=\dfrac{1}{2}(|y_1|+|y_2|)$，且 y_1、y_2 异号，

$\because S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|y_1-y_2|$

$\therefore 16=\dfrac{1}{4}(y_1-y_2)^2=\dfrac{1}{4}[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]=4m^2+4$，

解得 $m=\pm\sqrt{3}$．

设l的倾斜角为α，则$\cot\alpha=\pm\sqrt{3}$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5}{6}\pi$

971．设 $p\neq 0$，实系数一元二次方程 $z^2-2pz+q=0$ 有两个虚根 z_1，z_2，再设 z_1，z_2 在复平面内的对应点是 Z_1，Z_2，则以 Z_1，Z_2 为焦点且经过原点的椭圆的长轴长等于________．

【解答】 ∵$z^2-2pz+q=0$，

$\therefore z_1=p+\sqrt{q-p^2}i$，$z_2=p-\sqrt{q-p^2}i$，$(q-p^2>0)$

∴点 Z_1，Z_2 关于实轴对称，且椭圆的短轴在实轴上，由椭圆过原点知短轴长$=2b=|z_1+z_2|=2|p|$

焦距$=2c=|z_1-z_2|=2\sqrt{q-p^2}$

长轴长$=2a=2\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{q}$．

972．已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$，且$F_1$，$F_2$为其左、右焦点，过$F_1$作直线交双曲线于 A、B 两点，若$|AB|=5$，$\triangle F_2AB$ 的周长等于________．

【精析】 过 F_1 作 x 轴的垂线交双曲线于 P、Q 两点，易知通径$|PQ|=9$，双曲线实轴长$|A_1A_2|=4$．∵$|AB|=5$，因此，过 F_1 的直线不可能与双曲线左支交于两点，只能交两支于 A、B．

如图 238 所示，令$|AF_2|=r_1$，$|BF_2|=r_2$，$\angle F_2F_1B=\theta$，$|AB|=m$．由双曲线定义知$|AF_1|=r_1-2a$，$|BF_1|=r_2+2a$

在$\triangle F_2F_1A$ 及$\triangle F_2F_1B$ 中分别运用余弦定理得

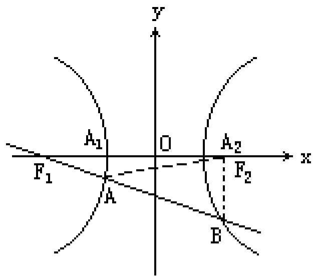


图238

$r_1^2=(r_1-2a)^2+4c^2-4c(r_1-2a)\cos\theta$ ①

$r_2^2=(r_2+2a)^2+4c^2-4c(r_2+2a)\cos\theta$ ②

$(r_2+2a)-(r_1-2a)=m$ ③

①−③，得 $a(r_2+r_1)-c[(r_2-r_1)+4a]\cos\theta=0$

①＋②，得 $a(r_2-r_1)-c(r_2+r_1)\cos\theta=-2(a^2+c^2)$

由③得 $r_2-r_1=m-4a$．

由以上三式，得$r_1+r_2=\sqrt{m(m+\frac{2b^2}{a})}$

将$a=2$，$b=3$，$m=5$代入得

$|AF_2|+|BF_2|=r_1+r_2=\sqrt{70}$

∴$\triangle F_2AB$的周长为$5+\sqrt{70}$.

973．已知椭圆的中心是原点，其中一个焦点在直线 l：$y-x+2=0$上移动，焦距长与短轴长均为$2\sqrt{2}$，求椭圆方程_________.

【解答】 由题意知：$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$，

∴$a=2$，设在直线 l 上的焦点为 $F_1(x_1,\ x_1-2)$，则

$\sqrt{x_1^2+(x_1-2)^2}=c=\sqrt{2}$

解得：$x_1=1$，则 $F_1(1,\ -1)$

∵中心是原点，

∴另一焦点为 $F_2(-1,\ 1)$

设 $M(x,\ y)$为椭圆上任一点，则由椭圆定义：$|MF_1|+|MF_2|=2a$

得$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=4$

为所求的椭圆方程.

974．已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的右焦点为F，且有定点A(1，1)，又P为椭圆上任一点，|PF|＋|PA|的最大值等于________.

【解答】 设椭圆左焦点为 F′，易知 F′的坐标为(－4，0)由定义及题设可知|PF|＋|PF′|=10

∴|PF|＋|PA|=10－|PF′|＋|PA|

要使|PF|＋|PA|最大，即要使|PA|－|PF′|最大，连 AF′，延长交椭圆于点 P_0(如图 239)

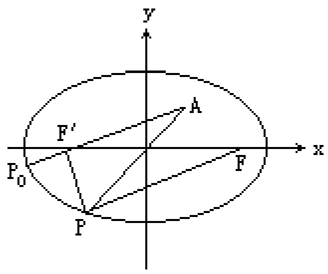


图239

若点 P 与点 P_0不同，则在△PF′A 中，有

||PA|－|PF′||＜|AF′|

∴|PA|－|PF′|最大值为|AF′|

∵$|AF'|=\sqrt{[1-(-4)]^2+1}=\sqrt{26}$

∴$|PF|+|PA|$最大值为：$10+|AF'|=10+\sqrt{26}$

975．如图 240，已知圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=10$ 内一点 P(2，0)，过 P 的最短弦的弦长等于________.

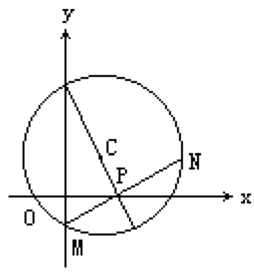


图240

【解答】　连 P、C 得过点 P 的直径，再过点 P 作该直线的垂线，交圆 C 于点 M 和点 N，则 MN 为过点 P 的最短弦．

∵$|PC|=\sqrt{(2-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

∴$|MN|=2\sqrt{10-5}=2\sqrt{5}$

从而得知，过点P的最短弦长等于$2\sqrt{5}$．

976．如图 241，已知双曲线的两条渐近线互相垂直，它的两个焦点的坐标分别是(4，－4)与(－2，2)该双曲线的方程是________．

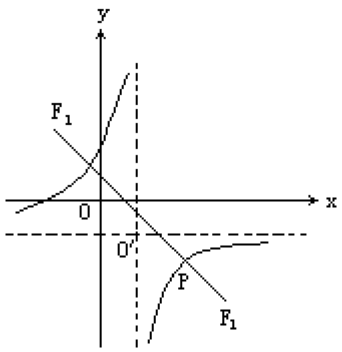


图241

【解答】　设 F_1、F_2 的中心为 O′，有 O′(1，－1)

∵两条渐近线互相垂直，

∴两条渐近线分别为 x=1 和 y=－1，

由此可设双曲线方程为：(x－1)(y＋1)=k　(1)，

又设 P(a，－a)(a＞0)为双曲线一顶点，

∴$|O'P|=\frac{F_1F_2}{2\sqrt{2}}=3$

(利用等轴双曲线的性质)

∴$\sqrt{(a-1)^2+(a-1)^2}=3$，

即 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}+1$

则 $P(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1，-\frac{3\sqrt{2}}{2}-1)$

即$x-1=(m-l)d$，$x=\frac{x}{1}=q^{m-l}$；$y-1=(n-l)d$，$y=\frac{y}{1}=q^{n-l}$．

977．如图242，已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的焦点为$F_1$、$F_2$，在直线 l：x＋y－6=0 上找一点 M，以 F_1、F_2 为焦点、通过 M 且长轴最短的椭

圆方程是________．

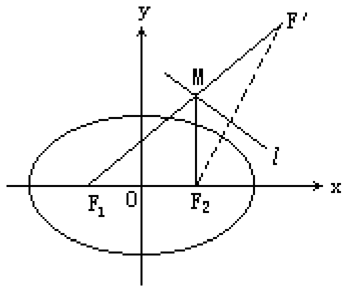


图242

【解答】 由$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，可知其左焦点为$F_1(-2,0)$，右焦点为$F_2(2,0)$所求椭圆的长轴为：

$2a=|MF_1|+|MF_2|$

F_1、F_2在直线 l 的同一侧，易求得 F_2 关于直线 l 的对称点为 $F'(6,4)$，连 F_1F' 与直线 l 相交于 M，据平面几何知识可知这时 2a 为最小，即

$2a=|MF_1|+|MF_2|=|MF_1|+|MF'|=|F_1F'|$

$\because|F_1F'|=\sqrt{(6+2)^2+4^2}=4\sqrt{5}$

$\therefore a=2\sqrt{5}$，$a^2=20$

又$\because c=2$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=16$

故所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$．

978．如图 243，已知点 A(－1，1)、B(1，0)，且点 P 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上任一点，$|PA|+2|PB|$的最小值等于________．

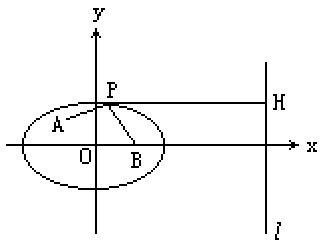


图243

【解答】 易知A在椭圆内，又$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的焦点为$(\pm1,0)$

∴B 为椭圆右焦点，易见，椭圆右准线 l

的方程为$x=\frac{a^2}{c}=4$

过P作$PH\perp l$于H．

由定义知$\frac{|PB|}{|PH|}=e=\frac{1}{2}$，$\therefore 2|PB|=|PH|$

$\therefore |PA|+2|PB|=|PA|+|PH|$

当点 A、P、H 共线时|PA|＋|PH|取最小值．

故|PA|＋2|PB|的最小值等于 A 到 l 的距离．

易见，A 到 l 的距离等于 5，故|PA|＋2|PB|的最小值等于 5．

979．如图 244，直线 $l_1 \perp l_2$，垂足为 M，以 A，B 为端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到 l_1 上一点 N 的距离相等，若△AMN 为锐角三角形，$|AM|=\sqrt{17}$，$|AN|=3$且$|BN|=6$，建立适当的坐标系，求曲线段 C 的方程．

【解答】　由已知，C 为以 N 为焦点、l_2 为准线的抛物线的一部分，因此，以 MN 的中点 O 为原点、l_1 为 x 轴建立坐标系如图 244，设 N(a，0)(a＞0)，则 C 所在抛物线方程可设为 $y^2=4ax$．(这里以 N 点横坐标为待定的未知量是为了简化运算．)

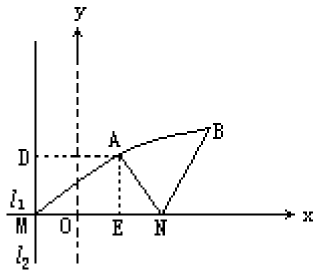


图244

作 $AD \perp l_2$ 于 D，$AE \perp l_1$ 于 E，由抛物线定义知|AD|＝|AN|＝3，可得$|OE|=3-a$，$|AE|=\sqrt{17-9}=2\sqrt{2}$，因此可以用待定未知量a表示A点坐标为$A(3-a，2\sqrt{2})$

∵A 在抛物线 $y^2=4ax$ 上

∴$(2\sqrt{2})^2=4a(3-a)$，解得$a=2$(另一解$a=1$因使△AMN为钝角三角形而舍去)．

∴$x_A=3-a=2$，③理 $x_B=6-a=4$

∴曲线段 C 的方程为

$y^2=8x(y>0，1\le x\le 4)$．

980．已知三条抛物线 $y=x^2+4ax-4a+3$，$y=x^2+(a-1)x+a^2$，$y=x^2+2ax-2a$ 中至少有一条与 x 轴有交点，实数 a 的取值范围是________．

【精析】　考虑其反面，三条抛物线都不与 x 轴相交，只要解不等式组：

$$\begin{cases}16a^2+4(4a-3)<0\\(a-1)^2-4a^2<0\\4a^2+8a<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3/2<a<1/2\\a>1/3\text{或}a<-1\\-2<a<0\end{cases}\Rightarrow -3/2<a<-1.$$

除去三条抛物线都不与 x 轴相交的情况，则原题成立，取其在 R 上的补集，可得原命题成立时实数 a 的范围是：$a\le -3/2$ 或 $a\ge -1$．

981．已知抛物线 $y^2=x$ 的一条弦 PQ 被直线 l：$y=k(x-1)+1$ 垂直平分，k 的范围________．

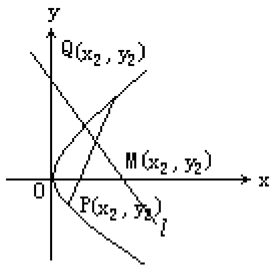


图245

【解答】 如图245，设P$(x_1，y_1)$，Q$(x_2，y_2)$，中点M$(x_0，y_0)$则$y_1^2=x_1$，$y_2^2=x_2$相减得

$y_1^2-y_2^2=x_1-x_2$，

则$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{y_1+y_2}$即

$k_{PQ}=\dfrac{1}{2y_0}\Rightarrow y_0=\dfrac{1}{2k_{PQ}}=-\dfrac{k}{2}$

(当k=0时，显然不合题意)

又出M在l上，可得$x_0=\dfrac{k-2}{2k}$

又点M应在抛物线内部，令$f(x，y)=y^2-x$，则有$f(x_0，y_0)<0$，即

$(-\dfrac{k}{2})^2-\dfrac{k-2}{2k}<0\Rightarrow\dfrac{k^3-2k+4}{4k}<0\Rightarrow k(k^3-2k+4)<0\Rightarrow k(k+2)$
$(k^2-2k+2)<0$

∵$k^2-2k+2>0$，∴$-2<k<0$

即k的取值范围是$(-2，0)$．

982．已知双曲线$x^2-y^2=1$上存在两个不同点A、B关于直线l：$y=\dfrac{1}{2}x+m$对称，实数m的取值范围_________．

【解答】 设点A$(x_1，y_1)$、B$(x_2，y_2)$，线段AB的中点为P$(x_0，y_0)$，则有$x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$ ①

由l的垂直平分线段AB可知

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-2$，$y_0=\dfrac{1}{2}x_0+m$

∵$|k_{弦AB}|=|-2|>k_{渐近线}=\sqrt{2}$，

∴点A、B在双曲线$x^2-y^2=1$的同支上，P点在双曲线内部．

∴ $x_0^2-y_0^2>1$ ②

而$x_1^2-y_1^2=1$，$x_2^2-y_2^2=1$，两式相减，并将①代入有$x_0=-2y_0$，

与$y_0=\dfrac{1}{2}x_0+m$联立解得$x_0=-m$，$y_0=\dfrac{m}{2}$，将此式代入②得

$\frac{3m^2}{4}>1$

$\therefore m>\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $m<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

983．如图 246，椭圆 C 的左焦点为 F(1，0)，左准线为 y 轴，过 F

倾角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线与椭圆C的交点之一为A，且以FA为直径的圆经过椭圆的中心 C．则椭圆的方程为________．

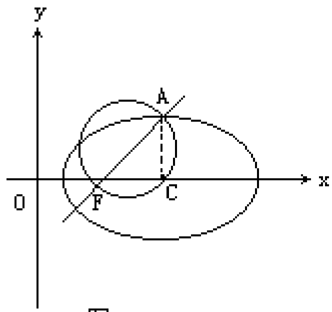


图246

【解答】 如图 246，由已知条件得 F 应在线段 OC 上，而不会有 C 在 OF 上，因此 A 点只能在第一象限内，由∠FC4=90°知 A 为短轴一端，设椭圆半长轴、半短轴、半焦距分别为 a、b、c，根据已知∠AFC＝30°，可知 $c=\sqrt{3}b$，$a=2b$，若设椭圆中心 $C(m，0)$，则可设

所求椭圆方程为 $\frac{(x-m)^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\because |FC|=c=m-1$．$|OC|=\frac{a^2}{c}=\frac{4b}{\sqrt{3}}$

∴可得方程组

$\begin{cases}\sqrt{3}b=m-1\\ \frac{4b}{\sqrt{3}}=m\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=4\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$

$\therefore a=2\sqrt{3}$．

∴所求椭圆方程为 $\frac{(x-4)^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$

984.已知直线 l：y－1＝a(x－2)与抛物线 C：y^2＝2x 有两个公共点，则 a 的取值范围为________．

【精析】 如图 247，直线 l 是过点(2，1)斜率为 a 的直线系，C 是顶点在原点，开口向右的抛物线，点(2，1)在其内部，从几何角度很容易猜想，当 l 旋转时，除了平行于 x 轴(即 y=1)外，都与 C 有两个公共点，因此 a 的取值范围是集合{a|a∈R 且 a≠0．}

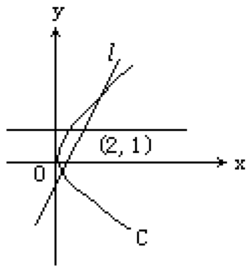


图247

从代数角度猜想，l 与 c 的方程联立消去 x 得到关于 y 的方程：$ay^2-2y-4a+2=0$　(*)

当 a=0 时，(*)是一次方程有一个解；

当 a≠0 时(*)是二次方程，且

$\Delta=16(a-\frac{1}{4})^2+3>0$

∴当 $a\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$时，直线 l 与抛物线 C 有两个公共点.

985．已知双曲线的两条渐近线方程分别为$y=\sqrt{3}x$和$y=-\sqrt{3}x$，焦点在x轴上，且在直线$y=x+1$上截得线段长为$3\sqrt{2}$，则此双曲线的方程为________.

【解答】　由已知渐近线方程知，所求双曲线方程形式为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

且$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，因此可以设所求方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$．由$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1\\ y=x+1\end{cases}$

得　$2x^2-2x-(3a^2+1)=0$

由已知得　$\sqrt{2}\times\sqrt{1^2+4\times\frac{3a^2+1}{2}}=3\sqrt{2}$

解得　$a^2=1$，可知 $b^2=3$.

所求双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

986．已知双曲线方程为$\frac{(x+3)^2}{12}-\frac{(y-3)^2}{4}=1$．半径为$2\sqrt{5}$，圆心在直线 $2x-y+9=0$ 上的圆 M 在此双曲线的一条准线上截得的线段长是在另一条准线上截得线段长的 2 倍，则圆 M 的方程为________.

【解答】　先求得已知双曲线的准线方程为 $x=0$ 和 $x=-6$，设圆心 M(m，n)，

由已知及圆半径、弦心距与半弦长的关系得：

$\begin{cases}\sqrt{20-m^2}=2\sqrt{20-(m+6)^2}\\ 2m-n+9=0,\end{cases}$

或$\begin{cases}2\sqrt{20-m^2}=\sqrt{20-(m+6)^2}\\ 2m-n+9=0\end{cases}$.

解得$\begin{cases}m=-2(\text{舍去}m=-14)\\ n=5,\end{cases}$

或$\begin{cases}m=-4(\text{舍去}m=8)\\ n=1\end{cases}$

∴所求圆方程为

$(x+2)^2+(y-5)^2=20$，或$(x+4)^2+(y-1)^2=20$.

987．在双曲线$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{13}=1$的一支上有不同三点$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, 6)$，$C(x_3, y_3)$，与焦点 $F(0, 5)$的距离成等差数列，若线段 AC 的垂直平分线交 y 轴于点 T，则点 T 的坐标为________.

【解答】 双曲线中$a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{13}$，$c=5$，上准线方程为$y=\frac{12}{5}$.

由题设知，点 A、B、C 均在双曲线的上支上，根据统一定义得：

$\frac{|AF|}{|y_1-\frac{12}{5}|}=e$，即$|AF|=e(y_1-\frac{12}{5})$.

同理$|BF|=e(6-\frac{12}{5})$，

$|CF|=e(y_3-\frac{12}{5})$.

∵|AF|，|BF|，|CF|成等差数列，

∴|AF|＋|CF|＝2|BF|，

∴$y_1+y_3=12$.

∵A、C 在双曲线上，

∴$13y_1^2-12x_1^2=13\times12$，$13y_3^2-12x_3^2=13\times12$，相减得$13(y_1+y_3)(y_1-y_3)=12(x_1+x_3)(x_1-x_3)$，

∴$\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{12}{13}\times\frac{x_1+x_3}{y_1+y_3}=\frac{x_1+x_3}{13}$

∴AC垂直平分线方程为$y-6=-\frac{13}{x_1+x_3}(x-\frac{x_1+x_3}{2})$，

即$y=-\frac{13}{x_1+x_3}x+\frac{25}{2}$，它与y轴的交点为$T(0,\frac{25}{2})$.

988．已知定点$M(-2, 2)$，动点P在椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$上，F为椭圆的右焦点，则|PM|＋2|PF|的最小值及相应的 P 点坐标为________.

【精析】 a＝4，c=$\sqrt{16-12}$=2，故椭圆的离心率为e=$\frac{1}{2}$，右准线为x=8，点M在椭圆内部，根据统一定义得$\frac{|PF|}{|PN|}=\frac{1}{2}$，从而2|PF|＝|PN|，即2|PF|等于点P到右准线l的距离，结合图248易知|PM|＋2|PF|的最小值为10，此时，相应的P点为($\frac{4\sqrt{6}}{2}$，2)．

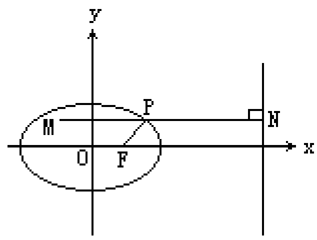


图248

989．如图 249，设直线 l：y＝1－x 与抛物线 L：$y^2=2x$ 相交于A、B两点，则直线OA、OB所成的角φ为__________．

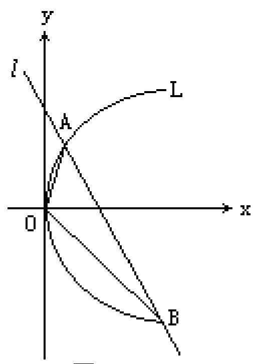


图249

【精析】 设点 A、B 的坐标分别为(x_1，y_1)、(x_2，y_2)，由夹角公式得$\tan\varphi=|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}|=|\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_1x_2+y_1y_2}|$

为了避开求点 A、B 的坐标，由夹角公式联想到若能直接构造出以k_1、k_2为根的二次方程 $ak^2+bk+c=0$

再利用韦达定理求出$|k_1-k_2|$及 k_1k_2 的值即可．

由于$k=\frac{y}{x}$

$\Leftrightarrow a(\frac{y}{x})^2+b(\frac{y}{x})+c=0$

$\Leftrightarrow cx^2+bxy+ay^2=0$．

而点(x，y)为直线 l 与曲线 L 的公共点．

所以 $\begin{cases} y^2=2x, \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow y^2=2x(x+y)\Rightarrow (\frac{y}{x})^2-2(\frac{y}{x})-2=0$.

由韦达定理 $\Rightarrow k_1+k_2=2$，$k_1k_2=-2$.

$\therefore \varphi=\arctan|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}|=\arctan 2\sqrt{3}$

990．设抛物线的顶点在原点 O，F ”为焦点，PQ 为过 F 的弦．已知|OF|＝a，|PQ| =b，则 $S_{\triangle POQ}$=________．

【解答】 **设**$\angle PFO=\alpha$，$|PF|\times|FQ|=\lambda$，$\because \frac{p}{2}=|OF|=a$，

$\therefore p=2a$，**则**$|PQ|=\frac{2\lambda}{p}=\frac{2\lambda}{2a}=b\therefore \lambda=ab$，**故**$\sin^2\alpha=\frac{4a^2}{ab}=\frac{4a}{b}$，

$\therefore \sin\alpha=2\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\therefore S_{\triangle POQ}=S_{\triangle POF}+S_{\triangle QOF}=\frac{1}{2}|OF|\times|PF|\sin\alpha+\frac{1}{2}|OF|\times|QF|\sin$

$(\pi-\alpha)=\frac{1}{2}|OF|\times|PQ|\sin\alpha=\frac{1}{2}ab\times 2\sqrt{\frac{a}{b}}=a\sqrt{ab}$

991．**过双曲线**$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$**的右焦点**F**的直线**$l$**被双曲线截得的弦长为虚轴长，则** l **的方程为________．**

【解答】 $\because|AB|=2b=6$，$a=4$，$b=3$，$ep=\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$，**依定理得**

$6=2\lambda\times\frac{4}{9}$，

$\therefore \lambda=\frac{27}{4}$，$\therefore \sin^2\alpha=\frac{\pm 81+\frac{27}{4}\times 9}{\frac{27}{4}\times 25}=\frac{21}{25}$(**负号舍去**)．

从而知$k_1=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$，

又$\because$**点**F**为**(5，0)，$\therefore l$**的方程为**$y=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}(x-5)$．

992．已知椭圆的一个焦点是 F(3，1)，相应于 F 的准线为 y 轴，l

是过F**且倾斜角为**60°**的直线，**l**被椭圆截得的弦**AB**的长是**$\frac{16}{5}$**，则椭圆方程为________．**

【解答】 由题设及定理得$\frac{16}{5}=\frac{2\lambda}{ep}\Rightarrow\lambda=\frac{8b^2}{5a}$，则

$\sin^2 60°=\dfrac{b^4-b^2\times\frac{8b^2}{5a}}{\frac{8b^2}{5a}(a^2-b^2)}$化简得

$5ab^2=6a^2+2b^2$，从而可得

$5ab^2=8a^2-2c^2$ ①

又由题设得$\frac{a^2}{c}-c=3$即$b^2=3c$ ②

①－②×5a，得 $8a^2-15ac-2c^2=0$，

从而可得 $a=2c$． ③

将②、③代入 $a^2=b^2+c^2$，得 $c=1$，∴$a=2$，$b^2=3$．

又∵F(3，1)是左焦点，y 轴为左准线，

∴椭圆中心 O′为(4，1)．

故所求椭圆的方程为$\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$．

993．过双曲线$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$的右焦点且斜率为$\sqrt{\frac{3}{5}}$的直线交双曲线于 P、Q 两点，若 OP⊥OQ，|PQ|＝4，则双曲线的方程为________．

【解答】 ∵$\tan^2\alpha=\frac{3}{5}$，∴$\sin^2\alpha=\frac{3}{8}$，又知$|PQ|=4$，由定理得$4=\frac{2\lambda}{ep}\Rightarrow\lambda=2ep=\frac{2b^2}{a}$，代入定理2的(3)，得$\frac{3}{8}=\dfrac{\pm b^4+\frac{2b^2}{a}\times b^2}{\frac{2b^2}{a}(a^2+b^2)}$，

化简得$\pm4ab^2=5b^2-3a^2$ ①

由题设可设PQ的方程为$y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$，代入双曲线方程，得

$(3a^2-5b^2)x-6a^2cx+(3a^2c^2+5a^2b^2)=0$ ②

∵OP⊥OQ，∴$y_Py_Q=-x_Px_Q$

∴$\frac{3}{5}(x_P-c)(x_Q-c)+x_Px_Q=0$，

即 $3c(x_P+x_Q)-8x_Px_Q-3c^2=0$ ③

将②的两根之和与积代入③，化简可得 $b^2=3a^2$，代入①，解得 $a=1$，从而 $b^2=3$．

故所求的双曲线的方程为 $3x^2-y^2=3$．

994．如图 250，定长为 3 的线段 AB 的两端点在抛物线 $y^2=x$ 上移动，其中点为 M，求点 M 到 y 轴的最短距离，则此时点 M 的坐标为________．

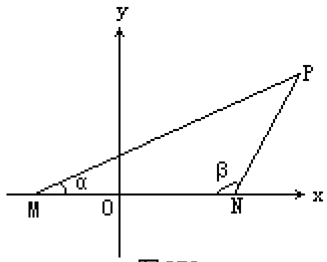


图250

【解答】 设 $M(x_0,y_0)$，$A(x_0+\Delta_x,y_0+\Delta_y)$，$B(x_0-\Delta_x,y_0-\Delta_y)$，则

$$\begin{cases}(y_0+\Delta_y)^2=x_0+\Delta_x, & ①\\(y_0-\Delta_y)^2=x_0-\Delta_x, & ②\\(\Delta_x)^2+(\Delta_y)^2=\dfrac{9}{4} & ③\end{cases}$$

由①、②、③消去Δ_x，Δ_y，得$4y_0^4-(4x_0-1)y_0^2-x_0+\dfrac{9}{4}=0$ ④

$\because y_0^2\in R$，$\therefore \Delta=(4x_0-1)^2-16(-x_0+\dfrac{9}{4})\geq 0$

解得$x_0\geq\dfrac{5}{4}$，$(x_0)_{最小}=\dfrac{5}{4}$，把$x_0=\dfrac{5}{4}$代入④，解得$y_0=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

∴点M的坐标为$(\dfrac{5}{4},\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

所以，点M到y轴的最短距离为$\dfrac{5}{4}$，此时$M(\dfrac{5}{4},\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

995．面积为1的△PMN中，$\tan\angle PMN=\dfrac{1}{2}$，$\tan\angle PNM=-2$，建立适当的坐标系，则以M,N为焦点，且过P点的椭圆方程为________.

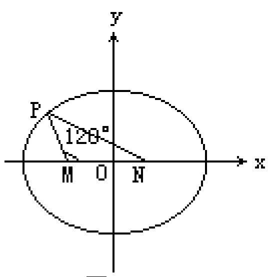


图251

【解答】 以MN中点为原点，MN所在直线为x轴，建立如图251所示的直角坐标系，设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$P(x_0,y_0)$，则$M(-c,0)$，$N(c,0)$．记$\angle PMN=\alpha$，$\angle PNM=\beta$，则有$\tan\alpha=\dfrac{y_0}{c+x_0}$，$\tan(\pi-\beta)=\dfrac{y_0}{x_0-c}$，即$\begin{cases}2y_0=x_0+c,\\y_0=2(x_0-c)\end{cases}$，解得$x_0=\dfrac{5}{3}c$，$y_0=\dfrac{4}{3}c$，

由$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\times 2c\times y_0=\frac{4}{3}c^2=1$，得$c^2=\frac{3}{4}$，又由焦半径公式得$|PM|=a+ex_0=\frac{3a^2+5c^2}{3a}$，而$|PM|\sin\alpha=y_0$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，于是有$12a^2-8\sqrt{15}a+15=0$．$a=\frac{\sqrt{15}}{2}$或$a=\frac{\sqrt{15}}{6}$(舍去)，所以$a=\frac{\sqrt{15}}{2}$，此时，$b^2=3$，故所求椭圆方程为$\frac{4x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$．

996．已知椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$F_1$、$F_2$是椭圆左、右焦点，P 是第二象限内椭圆上一点，且$\angle PF_1F_2=120°$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为________．

【解答】 由题设知$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，则$|F_1F_2|=2c=2$，在$\triangle PF_1F_2$中，由余弦定理：$|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1|\times|F_1F_2|\cos120°$，

即$|PF_2|^2=|PF_1|^2+4+2|PF_1|$ ①

又由椭圆定义，$|PF_1|+|PF_2|=4$，即$|PF_2|=4-|PF_1|$ ②

②代入①，解得$|PF_1|=\frac{6}{5}$则

$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||F_1F_2|\sin120°=\frac{3\sqrt{3}}{5}$．

997．双曲线方程为$16x^2-9y^2=144$，设F_1、F_2是双曲线左、右焦点,点 P 在双曲线上,且$|PF_1||PF_2|=32$,则$\angle F_1PF_2$的大小为________．

【解答】 由$6x^2-9y^2=144$，得$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，则$a=3$，$b=4$，$c=5$，设$\angle F_1PF_2=\theta$，在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理：

$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\theta$

$=|F_1F_2|^2=100$ ①

又由双曲线定义：$|PF_1|-|PF_2|=\pm6$，两边平方得

$|PF_1|^2-2|PF_1||PF_2|+|PF_2|^2=36$ ②

①－②，得 $2|PF_1||PF_2|(1-\cos\theta)=64$，将已知$|PF_1||PF_2|=32$代入，得$\cos\theta=0$，则$\theta=90°$，即$\angle F_1PF_2=90°$．

998．过点 M(2，1)作椭圆$4x^2+16y^2=64$的弦 AB，使点 M 平分 AB，则 AB 所在直线的方程为________．

【精析】 设$A(2+\Delta_x，1+\Delta_y)$，$B(2-\Delta_x，1-\Delta_y)$，AB 所在直线斜率为 k，则

$$\begin{cases}4(2+\Delta_x)^2+16(1+\Delta_y)^2=64, & ①\\ 4(2-\Delta_x)^2+16(1-\Delta_y)^2=64, & ②\\ \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}=k & ③\end{cases}$$

由①，②解得Δ_x，Δ_y，代入③可得 k，从而求得 AB 所在直线的方程.

999．给定双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$，则过点(2，1)的弦P_1P_2中点P的轨迹方程为________.

【解答】 设P_1P_2中点 P(x，y)，$P_1(x+\Delta_x，y+\Delta_y)$，$P_2(x-\Delta_x，y-\Delta_y)$，若$\Delta_x\neq 0$则

$$\begin{cases}2(x+\Delta_x)^2-(y+\Delta_y)^2=2, & ①\\ 2(x-\Delta_x)^2-(y-\Delta_y)^2=2, & ②\\ \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}=\dfrac{y-1}{x-2}, & ③\end{cases}$$

①－②，并化简，得$\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}=\dfrac{2x}{y}$，由③，得$\dfrac{y-1}{x-2}=\dfrac{2x}{y}$

整理，得所求轨迹方程为 $2x^2-y^2-4x+y=0$.

1000．求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中斜率为k的平行弦的中点轨迹方程________.

【解答】 设 AB 是斜率为 k(定值)的平行弦中的任一条，并设 AB 中点为$(x_0，y_0)$，$A(x_0+\Delta_x，y_0+\Delta_y)$，$B(x_0-\Delta_x，y_0-\Delta_y)$，则

$$\begin{cases}b^2(x_0+\Delta_x)^2+a^2(y_0+\Delta_y)^2=a^2b^2, & ①\\ b^2(x_0-\Delta_x)^2+a^2(y_0-\Delta_y)^2=a^2b^2, & ②\\ \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}=k & ③\end{cases}$$

①－②，代入③，得$k=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

把 x_0，y_0换成 x，y，即得斜率为 k 的平行弦中点轨迹的方程(直线)：$b^2x+a^2ky=0$(在椭圆内的部分).

1001．若一直线与抛物线 $x^2=a(y+1)(a>0)$交于 A，B 两点，O′为抛物线顶点，且 O′A⊥O′B，点 O′在直线 AB 上的射影为 D(－2，2)，则抛物线方程为________.

【解答】 ∵$x^2=a(y+1)$的通径长$2p=a$，$O'A\perp O'B$，∴AB 必过定点(0，a－1)(如图 252)，又 $O'D\perp AB$，∴$k_{O'D}\times k_{AB}=-1$，$-\frac{3}{2}\times\frac{a-3}{2}=-1$，得$a=\frac{13}{3}$，∴抛物线方程为$x^2=\frac{13}{3}(y+1)$.

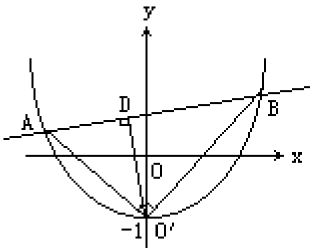


图252

1002．如图253，在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$内有一光线过左焦点$F_1$，并以 60°的倾斜角射到椭圆上的一点 P，由椭圆反射后恰好过右焦点 F_2，则反射线的直线方程为_________.

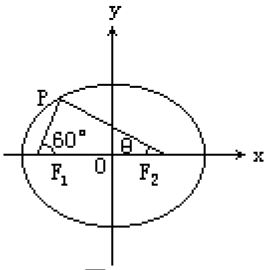


图253

【解答】 由题设知 a＝5，b=3，c＝4，设$\angle PF_2F_1=\theta$，易知 $0°<\theta<90°$，由椭圆定义得$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，在$\triangle PF_1F_2$中，由正弦定理：$\frac{|PF_1|}{\sin\theta}=\frac{|PF_2|}{\sin 60°}=\frac{|F_1F_2|}{\sin(60°+\theta)}$，得$\frac{2c}{\sin(60°+\theta)}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{\sin\theta+\sin 60°}$

$=\frac{2a}{\sin\theta+\sin 60°}$，即$\frac{c}{\cos(\frac{\theta}{2}+30°)}=\frac{a}{\cos(\frac{\theta}{2}-30°)}\times 5\cos(\frac{\theta}{2}+30°)=4\cos(\frac{\theta}{2}-30°)$，化简得$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$，则$\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{13}$，于是$k_{PF_2}=\tan(\pi-\theta)=-\frac{3\sqrt{3}}{13}$，又$F_2(4，0)$，则所求反射线的直线方程为$y=-\frac{3\sqrt{3}}{13}(x-4)$，即$9x+13\sqrt{3}y-36=0$.

1003．已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，过顶点的两弦 OA 和 OB 互相垂直，则以 OA，OB 为直径的两圆的另一交点 Q 的轨迹方程为________.

【精析】 ∵$\angle AQO=\angle BQO=90°$，∴三点 A，Q，B 共线，由于弦 AB 必过定点 M(2p，0)，∴Q 点的轨迹为以 OM 为直径的圆，方程为$(x-p)^2+y^2=p^2$，即 $x^2+y^2-2px=0$.

三、解答题

1004．如果双曲线 C 的两条渐近线方程为：x－2y－1＝0 与 x＋2y－1＝0，点 A(4，0)到双曲线 C 上动点 P 之距离的最小值为 1，求双曲线 C 的方程．

【解答】 ∵A到渐近线的距离 $d=\frac{|4-1|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}>1$，

∴C 的方程可设为

$(x-1)^2-4y^2=k^2$ ①

设P(x，y)，则 $|PA|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

将①代入并整理得

$|PA|=\sqrt{\frac{5}{4}(x-\frac{17}{5})^2+\frac{9}{5}-\frac{k^2}{4}}$，

∴ 当$x=\frac{17}{5}$时$|PA|$最小，

由$\sqrt{\frac{9}{5}-\frac{k^2}{4}}=1$求得$k^2=\frac{16}{5}$，

故所求C的方程为 $\frac{(x-1)^2}{\frac{16}{5}}-\frac{y^2}{\frac{4}{5}}=1$．

注意：分析图形 254，由于双曲线顶点位置不确定，当右顶点在 A 点右侧时(图中虚线)，上述结果显然不对(∵x≥4使$x=\frac{17}{5}$不成立)．不过此时 P 为右顶点时|PA|最小，从而 k=4．故本题应对双曲线右顶点和 A 点的位置讨论求解．所求方程为：

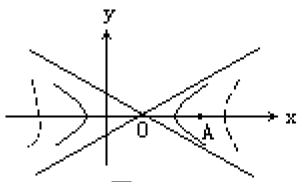


图254

$k<3$时为$\frac{(x-1)^2}{\frac{16}{5}}-\frac{y^2}{\frac{4}{5}}=1$；

$k\geq 3$时为$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$．

1005．如图255，已知椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过点P(－1，0)作直线 *l* 交椭圆于 A、B．问：使|AB|＝3 的直线 *l* 是否存在？若存在，求出方程；若不存在，说明理由．

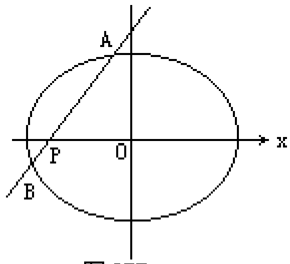


图255

【解答】　设 l 的方程为 $y=k(x+1)$，代入椭圆方程消去 y，整理得 $(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，其两根 x_1、x_2 即为 A、B 的横坐标，且

$x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{3+4k^2}$，$x_1\times x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

由弦长公式

$3=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1\times x_2]}$

即 $3=\sqrt{(1+k^2)[\dfrac{64k^4}{(3+4k^2)^2}-4\times\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}]}$，平方并整理得

$3+4k^2=4+4k^2$

从而 3=4，矛盾，

故使 |AB|=3 的直线 l 不存在．

注意：由于所设方程 $y=k(x+1)$ 不够一般，故应检验过 P 点斜率不

存在的直线是否满足题意．将 $x=-1$ 代入椭圆方程，求得 $A(-1,\dfrac{3}{2})$，$B(-1,-\dfrac{3}{2})$，正好有 $|AB|=3$，本题应回答 l 存在，方程为 $x=-1$．

1006．如图 256，求椭圆 $x^2+2y^2=2$ 中所在直线过定点 P(0，2) 的弦 AB 中点 M 的轨迹方程．

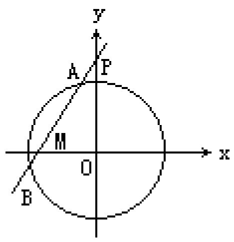


图256

【解答】　设直线 AB 的方程为 $y=kx+2$　①

$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

∵　A、B 在椭圆上，

∴ $x_1^2+2y_1^2=2$　　②

$x_2^2+2y_2^2=2$　　③

②－③并因式分解得

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+2(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，

设 $M(x,y)$，则上式可变为

$x+2ky=0$　　④

∵　点 M 在直线 AB 上.

∴　由④中求出 k 代入①中整理得 $x^2+2(y-1)^2=2$．当直线 AB 斜率不存在时，M 的坐标仍满足此方程，故所求方程为 $x^2+2(y-1)^2=2$．

注意 将(1)代入 $x^2+2y^2=2$ 中消去 y 可得 $(2k^2+1)x^2+8kx+6=0$，由 A、B 存在的充要条件是 $\Delta=(8k)^2-4\times6\times(2k^2+1)>0$

知 $k^2>\dfrac{3}{2}$

将④代入①得 M 的纵坐标 $y=\dfrac{2}{1+2k^2}$，从而 $0<y<\dfrac{1}{2}$．再由 $x^2=2-2(y-1)^2$ 得 $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．

故所求方程应为 $x^2+2(y-1)^2=2\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$．

也可写成 $x^2+2(y-1)^2=2\left(0<y<\dfrac{1}{2}\right)$．

1007．已知抛物线 $y^2=2px$ 及定点 $A(a,b)$、$B(-a,0)$ $(ab\neq0,b^2\neq2pa)$．M 是抛物线上的点，设直线 AM、BM 与抛物线的另一交点分别为 M_1、M_2．求证：当 M 点在抛物线上变动时(只要 M_1、M_2 存在且 $M_1\neq M_2$)，直线 M_1M_2 恒过一个定点，并求出这个定点的坐标．

【证明】　设 M、M_1、M_2 的坐标分别为 $\left(\dfrac{y_0^2}{2p},y_0\right)$、$\left(\dfrac{y_1^2}{2p},y_1\right)$、$\left(\dfrac{y_2^2}{2p},y_2\right)$，据此可写出 MM_1、MM_2、M_1M_2 的方程分别为

MM_1：$2px-(y_0+y_1)y+y_0y_1=0$，　　①

MM_2：$2px-(y_0+y_2)y+y_0y_2=0$，　　②

M_1M_2：$2px-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，　　③

把 $A(a,b)$ 代入①，把 $B(-a,0)$ 代入②，得

$2pa-by_1+(y_1-b)y_0=0$，　　④

$-2pa+y_0y_2=0$　　⑤

联立④、⑤消去 y_0，得

$2pay_2-by_1y_2+2pay_1-2pab=0$．

与③作对照，整理成相同的结构，有

$2pa-(y_1+y_2)\left(\dfrac{2pa}{b}\right)+y_1y_2=0$，　　⑥

这表明定点 $Q\left(a,\dfrac{2pa}{b}\right)$ 在直线③上，所以直线 M_1M_2 过定点 Q．

1008．从圆 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$ 外一点 $P(x_1,y_1)$ 向圆引切线，切点为 M，O 为坐标原点，且有 $|PM|=|PO|$，求 $|PM|$ 的最值及相应的点 P 的坐标．

【精析】　将方程配方得 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$，圆心为 $C(2,1)$，

半径为 r＝1(如图 257 所示)．

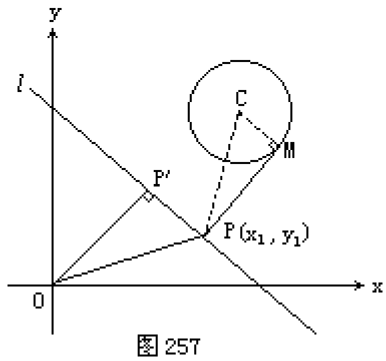


图 257

连 PC，CM，则 CM⊥PM，由|PO|＝|PM|得

$\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-3)^2-1}$，

化简得 $2x_1+3y_1-6=0$

∴　点 P 的轨迹是直线 $2x+3y-6=0$．

过 O 点作 OP′⊥l 于点 P′，则|OP′|即为所求之最小值．由点到直线的距离公式，得

$|OP'|=\frac{|2\times0+3\times0-6|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$．

此时，点P′的坐标满足$\begin{cases}2x+3y-6=0\\ \frac{y}{x}=\frac{3}{2}\end{cases}$

解得$x=\frac{12}{13}$，$y=\frac{18}{13}$．

∴ 当点P的坐标是$(\frac{12}{13}$，$\frac{18}{13})$时，$|PM|$取最小值$\frac{6\sqrt{13}}{13}$．

1009．求同时满足下列条件的抛物线方程：(1)准线是 y 轴；(2)顶点在 x 轴上；(3)点 A(3，0)到抛物线上动点 P 的距离最小值为 2．

【解答】　由题意，设抛物线方程为

$y^2=2p(x-\frac{p}{2})(p>0)$　　　①

设点P(x，y)为抛物线上的点，则有

$|PA|^2=(x-3)^2+y^2=(x-3)^2+2p(x-\frac{p}{2})$

$=x^2+(2p-6)x+9-p^2$．

注意到①中 $x\geq p/2$ 的限制，则有

(1)当$3-p\leq\frac{p}{2}$，即$p\geq2$时，

$|PA|^2_{min}=(\frac{p}{2})^2+(2p-6)\times\frac{p}{2}+9-p^2$

$=\frac{p^2}{4}-3p+9$.

令$\frac{p^2}{4}-3p+9=4$，得$p=2$或$p=10$.

(2)当$3-p>\frac{p}{2}$，即$p<2$时，

$|PA|^2_{min}=9-p^2-\frac{(2p-6)^2}{4}=-2p^2+6p$

令$-2p^2+6p=4$，得 p=1 或 p=2(舍).

综上知所求抛物线方程为

$y^2=20(x-5)$或$y^2=4(x-1)$或$y^2=2(x-\frac{1}{2})$.

1010．已知椭圆 C：$3x^2+4y^2=12$，试确定 m 的取值范围，使 C 上存在两个不同的点关于直线 l：$y=4x+m$ 对称．

【解答】　此题应先确定不同两点所在直线方程．设 $A(x_1，y_1)$、$B(x_2，y_2)$为椭圆上关于直线 l 对称的两点，则有

$$\begin{cases}3x_1^2+4y_1^2=12 ①\\3x_2^2+4y_2^2=12 ②\end{cases}$$

①－②得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}\times\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，从而有

$-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}\times\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，即$y_1+y_2=3(x_1+x_2)$　　　③

又线段AB的中点$M(\frac{x_1+x_2}{2}，\frac{y_1+y_2}{2})$就在直线$l$：$y=4x+m$上，

则$\frac{y_1+y_2}{2}=4\times\frac{x_1+x_2}{2}+m$，

即 $y_1+y_2=4(x_1+x_2)+2m$.　　　④

由③④得 $x_1+x_2=-2m$，$y_1+y_2=-6m$，

从而得$M(-m，-3m)$，于是l_{AB}：$y=-\frac{1}{4}x-\frac{13}{4}m$.

下面，一般是由 l_{AB} 的方程与椭圆方程联立消去一元，如 y，得关于 x 的一元二次方程，注意到 $x\in[-2，2]$，因而利用二次方程的两根均在$[-2，2]$上可得 m 的取值范围．这里，我们设出椭圆方程的参数形式：

$$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$$ （θ为参数，$\theta\in[0，2\pi)$），

把它代入$y=-\frac{x}{4}-\frac{13}{4}m$中，得

$2\cos\theta+4\sqrt{3}\sin\theta=-13m$

由题意，此方程应有两个解，从而有

$\sqrt{2^2+(4\sqrt{3})^2}>|-13m|$

故可得 $-\frac{2\sqrt{13}}{13}<m<\frac{2\sqrt{13}}{13}$

1011．以抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点和准线分别为椭圆的焦点与准线，求椭圆的短轴端点的轨迹．

【精析】　由于抛物线的焦点 F 可能是椭圆的左焦点，也可能是右焦点，因此应分类讨论．

【解答】　易知，抛物线的焦点为 F(0，0)，准线为 x=－4，设椭圆短轴端点为 P(x，y)(y≠0)．

(1)当F为椭圆的左焦点时(如图258一)，由椭圆第二定义有 $\frac{|PF|}{|PM|}=\frac{c}{a}$，即 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+4}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，化简得 $y^2=4x(y\neq 0)$　　　①

(2)当 F 为椭圆右焦点时(如图 258 二)，同样有

$\frac{|PF|}{|PM|}=\frac{c}{a}$，即 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+4}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

化简得 $(x+1)^2+\frac{y^2}{2}=1(y\neq 0)$　　　②

综上可知，椭圆短轴端点的轨迹为抛物线①或椭圆②(但 y≠0)．

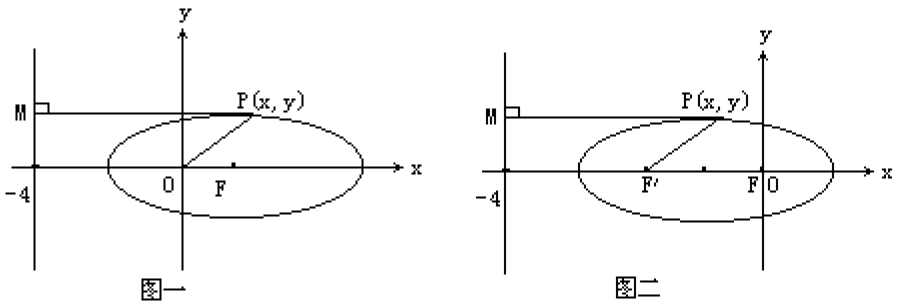


图 258

1012．AB 为抛物线 $y=x^2$ 上的动弦，且|AB|＝a(a≥1 为常数)，求弦 AB 的中点 M 离 x 轴最近的纵坐标．

【精析】　求M点离x轴最近时的纵坐标，即求 $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$ 的最小值，这里 y_A、y_B 同时满足① $y_A=x_A^2$，$y_B=x_B^2$；② $\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=a$．不难想象这样作的难度以及运算的复杂程度，为了避免这一点，我们采用从定义入手与结合平面几何知识的方法求解．

【解答】　如图，设 A、M、B 的纵坐标分别为 y_1、y_2、y_3，则

$|AF|=|AA'|=|y_1+\frac{1}{4}|$ $|BF|=|BB'|=|y_3+\frac{1}{4}|$

$\therefore$ $y_1=|AF|-\frac{1}{4}$，$y_3=|BF|-\frac{1}{4}$，

$y_2=\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|-\frac{1}{2})$

$\geq\frac{1}{2}(|AB|-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(2a-1)$.

等号在 AB 过焦点 F 时成立，即当定长为 a 的动弦 AB 通过焦点 F 时，M点与x轴有最的距离$y_2=\frac{1}{4}(2a-1)$.

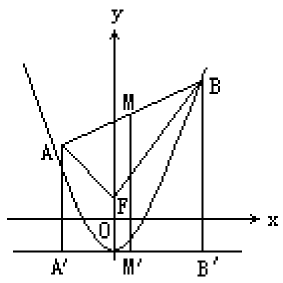


图259

1013．如图 260，直线 l_1 和 l_2 相交于点 M，$l_1\perp l_2$，点 N∈l_1，以 A、B 两端点的曲线段 C 上的任一点到 l_2 的距离与到点 N 的距离相等．若△AMN为锐角三角形，$|AM|=\sqrt{17}$，$|AN|=3$，且$|BN|=6$．建立适当的坐标系，求曲线段 C 的方程．

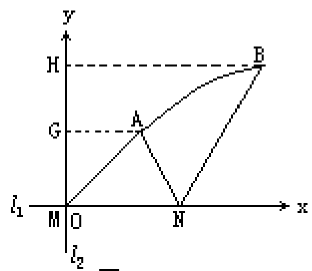


图260

【精析】　建立如图 260 直角坐标系．因 C 上任一点到点 N 的距离与到直线 l_2 的距离相等，故 C 是以点 N 为焦点，l_2 为准线的抛物线弧，设其方程为

$y_2=2p(x-\frac{p}{2})$．　①

问题的关键是确定点 A 的坐标，设其为$(x_1，y_1)$．

作 AG⊥Oy 于 G，由抛物线定义知

$x_1=|GA|=|AN|=3$

则 $y_1=|OG|=\sqrt{|AM|^2-|GA|^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{17})^2-3^2}=2\sqrt{2}$

代入①得$(2\sqrt{2})^2=2p(3-\frac{P}{2})$，解得$p=4$．

舍去$p=2$，否则，$|MN|=2$，由$3^2+2^2-(\sqrt{17})^2<0$知$\angle ANM$为钝角，与题设矛盾．

又$x_B=|HB|=|BN|=6$，$y_B=\sqrt{8(6-2)}=4\sqrt{2}$

∴ 曲线段C的方程为$y^2=8(x-2)(2\sqrt{2}\leq y\leq 4\sqrt{2})$

1014．已知椭圆的一个焦点是原点，另一个焦点在抛物线 $y^2=4x$ 上，此椭圆的长轴长为 6，且过 P(1，0)点，求该椭圆的方程．

【解答】 设在抛物线上的焦点为 $A(t^2, 2t)$，则由椭圆第一定义知：

$|PA|+|PO|=6$，即 $\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}+1=6$，

∴ t＝2 或 t＝－2，

则 A(4，4)或 A(4，－4)，

设 M(x，y)为椭圆上任一点，则由椭圆第一定义：

$\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+y^2}=6$

或 $\sqrt{(x-4)^2+(y+4)^2}+\sqrt{x^2+y^2}=6$

为所求的椭圆方程．

1015．已知双曲线过点 A(－2，4)与 B(4，4)，它的一个焦点是 F(1，0)，求它另一个焦点的轨迹．

【解答】 设另一焦点为 P(x，y)，由双曲线第一定义知：

$||AP|-|AF||=||BP|-|BF||$

∴ $|AP|-|AF|=|BP|-|BF|$ ①

或 $|AP|-|AF|=|BF|-|BP|$ ②

∴ $|BF|=|AF|=5$，

由①得：$|PA|=|PB|$

∴P 点轨迹为线段 AB 的垂直平分线 x=1(除去 F 点)，

由②得：

$|PA|+|PB|=|FA|+|FB|=10$

由椭圆第一定义知：P 点轨迹是以 A、B 为焦点、长轴长为 10 的椭圆，即

$$\frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y-4)^2}{4^2}=1(y\neq 0)$$

1016．判断下列方程表示何种曲线：

$(y-2x^2)^2-x^2+y^2-(3x^2-y^2-y)(x^2+y^2-y)=0$

【解答】 方程的左边等于

$(y-2x)^2-(x^2-y)^2-\frac{1}{4}[(4x^2-2y)^2-(2x^2-2y^2)^2]$

$=(y-2x^2)^2-(x^2-y^2)-(2x^2-y)^2+(x^2-y^2)^2$

$=(x^2-y^2)^2-(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2-1)(x+y)(x-y)$，

故 $(x^2-y^2-1)(x+y)(x-y)=0$

它表示等轴双曲线 $x^2-y^2=1$ 及其两条渐近线 $y=\pm x$．

1017．曲线 $x^2+4y^2-2kx-16y+21=0(k>0)$ 的两准线间距离为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$，中心为 O′，和准线平行的直线 l 交曲线于 A、B 两点．求△O′AB 面积的最大值，并求取到最大值时 l 的方程．

【解答】 将曲线方程配方得

$(x-k)^2+4(y-2)^2=k^2-5$

从而有$\dfrac{(x-k)^2}{k^2-5}+\dfrac{(y-2)^2}{\dfrac{k^2-5}{4}}=1$.

由两准线间距离为$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$得

$2\times\dfrac{k^2-5}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{k^2-5}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$,

由 $k>0$ 可得 $k=3$，故椭圆方程为

$(x-3)^2+4(y-2)^2=4$.

易见，其中心为点 $O'(3,2)$，且 $a=2$，左端点为$(1,2)$，右端点为$(5,2)$．设直线 l 的方程为 $x=m$．由直线 l 与椭圆有两个交点，可知 $1<m<5$.

由$\begin{cases}x=m\\ x^2+4y^2-6x-16y+21=0\end{cases}$

可得 $4y^2-16y+m^2-6m+21=0$，从而有

$y_1+y_2=4$，$y_1y_2=\dfrac{m^2-6m+21}{4}$

则有$|AB|=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{-m^2+6m-5}$,

$\therefore S_{\triangle O'AB}=\dfrac{1}{2}|AB|\times|m-3|$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-(m-3)^2}\times|m-3|$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{-[(m-3)^2-2]^2+4}$

易知，当$m=3\pm\sqrt{2}$时，得$S_{\triangle O'AB}$的最大值为1且$\triangle O'AB$面积最大时，l的方程为$x=3\pm\sqrt{2}$.

1018．等腰三角形的顶点是 $A(4,2)$，底边一个端点是 $B(3,5)$，求另一个端点 C 的轨迹方程，并说明它的轨迹是什么.

【精析与解答】　设另一端点 C 的坐标为(x,y).

依题意，得 $|AC|=|AB|$.

由两点间距离公式，得

$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=$

$\sqrt{(4-3)^2+(2-5)^2}$.

两边平方，得$(x-4)^2+(y-2)^2=(4-3)^2+(2-5)^2$.

整理，得$(x-4)^2+(y-2)^2=10$.

这是以点$A(4,2)$为圆心，以$\sqrt{10}$为半径的圆．如图261.

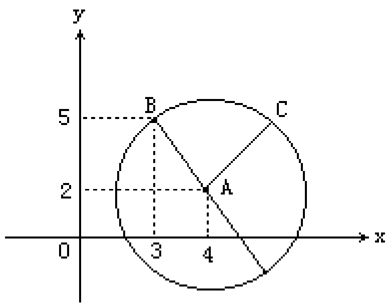


图 261

又因为 A、B、C 为三角形的三个顶点，

所以 A、B、C 三点不共线．

即点 B、C 不能重合且 B、C 不能为⊙A 的一直径的两端点．

因为点 B、C 不能重合．

所以 C 点的横坐标 $x\neq3$．

又因为 点 B、C 不能为一直径的两端点．

所以 $\frac{x+3}{2}\neq4$，点C的横坐标$x\neq5$．

故另一端点 C 的轨迹方程是$(x-4)^2+(y-2)^2=10(x\neq3,x\neq5)$，C的轨迹是以A(4，2)为圆心、以$\sqrt{10}$为半径的圆，但除去(3，5)和(5，－1)两点．

注意：本题错解为答案是 C 的轨迹方程是$(x-4)^2+(y-2)^2=10$，C的轨迹是以A(4，2)为圆心、以$\sqrt{10}$为半径的圆．

造成错误的原因是没有认真考虑题目要求的几何条件实际上有两个：①A、B、C 三点要组成三角形；②A、B、C 三点组成的三角形是等腰三角形．而在解题过程中只是根据条件②$|AC|=|AB|$将轨迹的条件转化为对应的含 x、y 的方程．因此所求出的方程保证满足条件②而无法保证满足条件①．解题后无认真检验，因此造成“解”的不严密．

解决问题的方法是要认真审题．在解与几何、三角等有关的轨迹问题时，一定要考虑到几何、三角中有关概念、公理、定理等条件的限制，提高综合解题的能力．这样在将题中主要条件转化为二元方程$f(x,y)=0$后，心中明确哪些附加条件未反映出来，这时对得出的方程按附加条件进行检验，就可以决定哪一部分应保留，哪一部分应删去，哪些条件还未反映出来应补上，保证所求的轨迹方程的完备性和纯粹性．在解这些与几何、三角等问题有关的轨迹问题时，一般应画草图帮助分析，这样运用“数形结合”的思想方法可帮助正确解题、避免错误．

1019．经过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点F(c，0)作椭圆任意切线的垂线，求证垂足 M 的轨迹是一个圆．

【证明】　设切点为 $P(x_1,y_1)$，

M 为(x，y)，那么切线方程为

$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$①

又FM的方程为$y=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-c)$，即

$b^2x_1y-a^2y_1x=-a^2y_1\sqrt{a^2-b^2}$ ②

①^2＋②^{2}得

$b^4x_1^2(x^2+y^2)+a^4y_1^2(x^2+y^2)=a^4[b^4+y_1^2(a^2-b^2)]$

$\Rightarrow(x^2+y^2)(b^4x_1^2+a^4y_1^2)=a^4(b^4+a^2y_1^2-b^2y_1^2)$ ③

但$b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$， ④

∴③式右边$=a^2b^2(b^2x_1^2+a^2y_1^2)+a^6y_1^2-a^4b^2y_1^2$

$=a^2(b^4x_1^2+a^4y_1^2)$

$\because b^4x_1^2+a^4y_1^2\neq 0$

∴③式化为 $x^2+y^2=a^2$(证毕)．

1020．如图 262，试证：自等轴双曲线上任意一点至两焦点的距离之积，等于该点至双曲线中心的距离的平方．

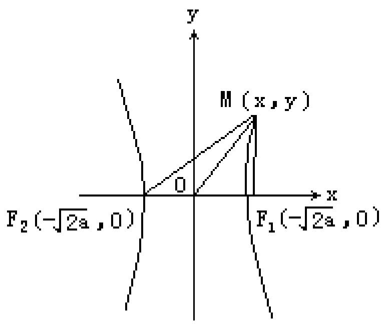


图 262

【证明】 设 M(x，y)是等轴双曲线上任意一点，由双曲线定义，有

$||MF_2|-|MF_1||=2a$ (*)

将(*)两边平方整理得

$|MF_2|\times|MF_1|=\frac{|MF_2|^2+|MR_1|^2-4a^2}{2}$

$=\frac{(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2-4a^2}{2}$

$=\frac{2x^2+2y^2+2c^2-4a^2}{2}$

$=x^2+y^2=|MO|^2\ (\because c^2=2a^2)$．

所以，原命题成立．

1021．在双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$上求一点，使该点与左焦点的距离等于它与右焦点的距离的二倍．

【解答】 设 M(x，y)为双曲线上所求点，依题意并由双曲线定义，有

$|MF_2|=2|MF_1|$ ①

$|MF_2|-|MF_1|=8$ ②

解得 $\begin{cases}|MF_1|=8\\|MF_2|=16\end{cases}$

由两点间距离公式，即

$$\begin{cases}\sqrt{(x-5)^2+y^2}=8 & ③\\ \sqrt{(x+5)^2+y^2}=16 & ④\end{cases}$$

④^2－③^{2}得 $20x=192$，$x=\dfrac{48}{5}$，

将$x=\dfrac{48}{5}$代入③，得$y=\pm\dfrac{3}{5}\sqrt{119}$．

1022．如图 263，一动点到定点 A(3，0)的距离和它到直线 l：x ＝12的距离的比为$\dfrac{1}{2}$，求动点的轨迹方程．

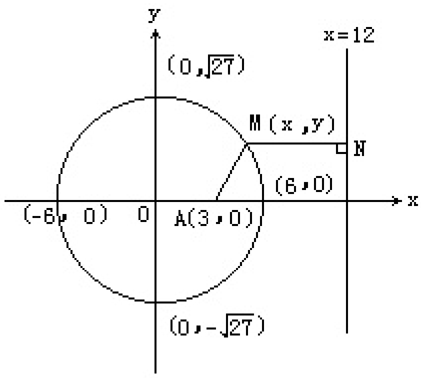


图 263

【解答】 因为动点到一定点 A(3，0)和一条直线 x=12 的距离之比等于常数$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}<1)$，由椭圆的第二定义知动点的轨迹为焦点在x轴上的一椭圆，A(3，0)为其一焦点，x＝12为其一准线，离心率$e=\dfrac{1}{e}$．

∵$c=3$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，

∴$a=6$，$b^2=a^2-c^2=6^2-3^2=27$．

故动点的轨迹为$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$．

1023．求抛物线 $y^2=4x$ 关于直线 $y=2x$ 的对称图形的方程．

【解答】 设抛物线上任意一点 $P(x_1,y_1)$关于 $y=2x$ 的对称点是 $M(x,y)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{y_1+y}{2}=2(\dfrac{x_1+x}{2})\\ \dfrac{y_1-y}{x_1-x}\times 2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-3x+4y}{5}\\ y_1=\dfrac{4x+3y}{5}\end{cases}$$

∴所求方程是$(\dfrac{4x+3y}{5})^2=\dfrac{4(-3x+4y)}{5}$

整理得 $16x^2+24xy+9y^2+60x-80y=0$

1024．求证曲线 f：$A(x+y-1)^2+B(x-y+3)^2+C(x+y-1)(x-y+3)=0$ 关于 $F(-1,2)$中心对称．

证明　设 $P(x_1,y_1)$是曲线 f 上的任意一点，P 关于 F 的对称点是 $M(x,y)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+x}{2}=-1\\ \dfrac{y_1+y}{2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x-2\\ y_1=-y+4\end{cases}$$

把 x_1，y_1代入曲线 f 的方程，得

$A(-x-y+1)^2+B(-x+y-3)^2+C(-x-y+1)(-x+y-3)=0$

$\Rightarrow A(x+y-1)^2+B(x-y+3)^2+C(x+y-1)(x-y+3)=0$

由此可知点 $M(x,y)$也在曲线 f 上，所以曲线 f 关于 $F(-1,2)$中心对称．

1025．在曲线 $y=x^2$ 上有任意一点 P，以 OP 为边作正方形 OPQR(如图 264)，分别求 Q、R 的轨迹方程．

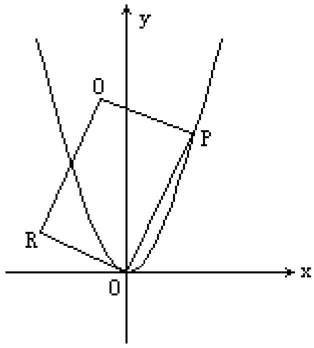


图 264

【解答】　设 Q 为(x,y)，R 为(x',y')，P 为(x_1,y_1)，得 $x+yi=(x_1+y_1i)(1+i)$

$=(x_1-y_1)+(x_1+y_1)i$　　①

$x'+y'i=(x_1+y_1i)i=-y_1+x_1i$②

由①得$\begin{cases}x_1=\dfrac{x+y}{2}\\ y_1=\dfrac{y-x}{2}\end{cases}$　　由②得$\begin{cases}x_1=y'\\ y_1=-x'\end{cases}$，

∴Q的轨迹方程是$\dfrac{y-x}{2}=(\dfrac{x+y}{2})^2$，即

$x^2+2xy+y^2+2x-2y=0$

R的轨迹方程是$-x'=(y')^2 \Rightarrow (y')^2=-x'$.

习惯上改为 $y^2=-x$.

1026．如图 265，以 y 轴为左准线的椭圆经过定点 P(1，2)，离心率为$\frac{1}{2}$，求椭圆左顶点A的轨迹方程.

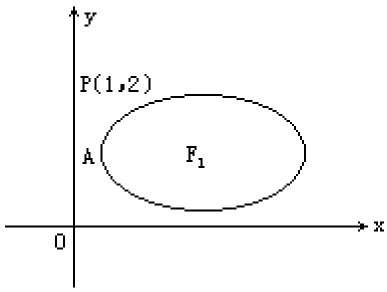


图 265

【解答】 设椭圆的左顶点 A 的坐标为(x，y)，因椭圆是以 y 轴为左准线，故椭圆的长轴在过点 A 且平行于 x 轴的直线上，可设椭圆的左焦点为 $F_1(x',y)$，则$|AF_1|=x'-x$，

由椭圆的第二定义可得$\frac{x'-x}{x}=\frac{1}{2}$，

$\therefore x'=\frac{3}{2}x$，$F_1(\frac{3}{2}x，y)$.

∵P(1，2)在椭圆上，由椭圆的第二定义得

$$\frac{\sqrt{(\frac{3}{2}x-1)^2+(y-2)^2}}{1}=\frac{1}{2}，$$

即 $9(x-\frac{2}{3})^2+4(y-2)^2=1$

为所求椭圆左顶点 A 的轨迹方程.

1027．如图266，已知点$A(-2，\sqrt{3})$，设F是椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$的右焦点，M 是椭圆上一动点，求$|AM|+2|MF|$的最小值，并求此时点 M 的坐标.

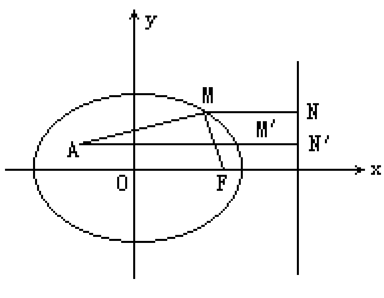


图 266

【解答】 ∵$a=4$，$b=2\sqrt{3}$，

∴$c=2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$．

设l是椭圆的右准线，则其方程为$x=8$，由$\frac{(-2)^2}{16}+(\frac{(\sqrt{3})^2}{12})=\frac{1}{2}<1$知点A在椭圆的内部，过M作MN⊥$l$交$l$于N，则由椭圆的第二定义有$\frac{|MF|}{|MN|}=e$，$|MF|=\frac{1}{2}|MN|$．故$|MA|+2|MF|=|MA|+|MN|$．由图知：当且仅当A，M，N三点共线时$|MA|+|MN|$最小，即$|MA|+2|MF|$最小，将$y=\sqrt{3}$代入椭圆方程得$x=\pm 2\sqrt{3}$，因M点在A右边，故$x>-2$，

∴$x=2\sqrt{3}$，

∴M点坐标为$(2\sqrt{3}，\sqrt{3})$时，$|MA|+2|MN|$最小，最小值为$|AN'|=10$．

1028．有一变换公式为：$x_1=\frac{x}{1+y}$，$y_1=\frac{2y}{1+y}$，圆$x^2+y^2-2my=0(m>0)$,经过这个变换后所得图形情况如何？试就 m 的变化加以讨论．

【解答】 在圆上取一点 $P(x_1，y_1)$，变换后的点为 $M(x，y)$．则得：

$$(\frac{x}{1+y})^2+(\frac{2y}{1+y})^2-2m(\frac{2y}{1+y})=0$$

$$\Rightarrow x^2+4y^2-4my(1+y)=0$$

$$\Rightarrow x^2+4(1-m)y^2-4my=0$$

当$0<m<1$时，所得图形是椭圆型曲线，特别在$m=\frac{3}{4}$时，变换后的图形仍然是圆．

当 $m=1$ 时，所得图形是抛物线 $x^2=4y$．

当 $m>1$ 时，所得图形是双曲线．

1029．一辆卡车高为 4 米，宽为 2 米，欲通过断面为抛物线型的隧道．已知隧道口宽恰好是隧道口高的 4 倍．若隧道口高为 a 米，求能使卡车通过的 a 的最小整数值．

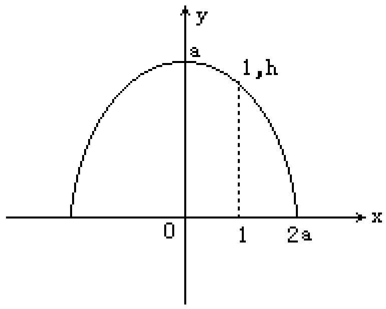


图 267

【解答】 如图 267，建立直角坐标系 x0y，设抛物线方程为 x^2

$=-2p(y-a)$．

∵点(2a，0)在抛物线上．

∴$4a^2=-2p(0-a)$，

∴$2p=4a$．

∴抛物线方程为 $x^2=-4a(y-a)$．

当$x=1$时，$1=-4a(h-a)\Rightarrow h=a-\dfrac{1}{4a}=\dfrac{4a^2-1}{4a}$．

欲使卡车通过隧道，必须$h>4$，即$\dfrac{4a^2-1}{4a}>4\Rightarrow 4a^2-16a-1>0$

$\Rightarrow h<\dfrac{4-\sqrt{17}}{2}$(舍)或$h>\dfrac{4+\sqrt{17}}{2}$，故h取5．

即欲使卡车通过的 a 的最小整数值是 5．

1030．如图 268，在直角坐标系内，已知矩形 OABC 的边长 OA＝a，OC＝b，点 D 在 AO 延长线上，使 DO＝a；设 M、N 分别是 OC、BC边上的动点，使$\dfrac{OM}{MC}=\dfrac{BN}{NC}\neq 0$．求直线DM与AN的交点P的轨迹方程，并画出轨迹的图形．

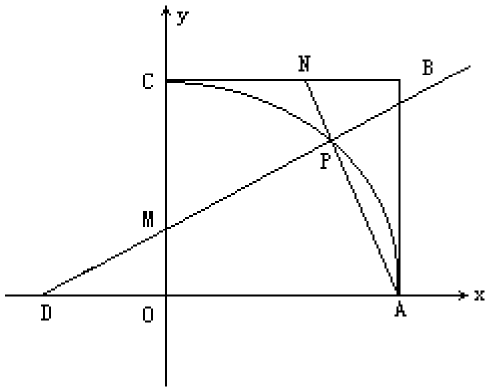


图 268

【解答】 设$\dfrac{OM}{MC}=\dfrac{BN}{NC}\neq 0$，则有

$OM=\dfrac{\lambda b}{1+\lambda}$，$CN=\dfrac{a}{1+\lambda}$

直线DM方程为$y=\dfrac{\lambda b}{a(1+\lambda)}(x+a)$ ①

直线AN方程为$y=-\dfrac{b(1+\lambda)}{\lambda a}(x-a)$ ②

设 P(x，y)，∵P 点在直线 DM 和 AN 上，

∴x，y 满足方程①、②，两式相乘消去λ得

$y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$，即$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(x>0，y>0)$

∵P点只能在矩形内，故轨迹是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在第一象限内的部分．

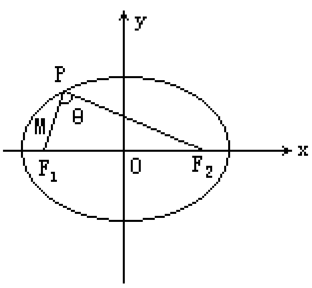


图 269

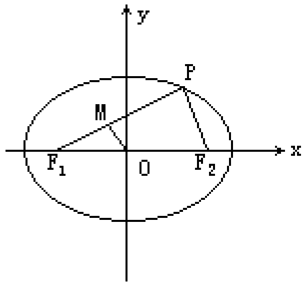


图 270

1031．**如图**269、270，**已知椭圆方程为**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$(a>b>0)$，**$F_1$、$F_2$为左、右两焦点，P为椭圆上一动点，试求$PF_1$中点M的轨迹方程．**

【解答】　连MO，知MO为△PF_1F_2的中位线，

$\therefore |F_1M|+|MO|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|)$，

又$|PF_1|+|PF_2|=2a$，

$\therefore |F_1M|+|MO|=\frac{1}{2}\times 2a=a$，

∴点M的轨迹是以F_1、O为焦点，长轴长为a的椭圆，

故方程是$\frac{(x+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{b}{2})^2}=1$．

1032．**椭圆**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$**的两个焦点为**$F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)(c>0)$，$P(x_0，y_0)$**是椭圆上任意一点．**

求证：$|PF_1|=ex_0+a$，$|PF_2|=-ex_0+a$．

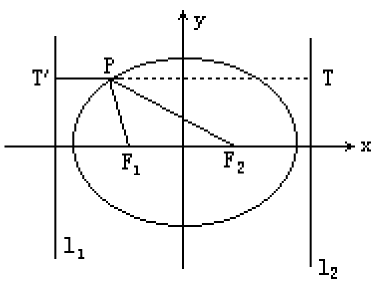


图 271

【证明】 设椭圆的左准线l_1：$x=-\frac{a^2}{c}$，右准线l_2：$x=\frac{a^2}{c}$，

则由图271知P到l_1的距离

$$|PT'|=x_0+\frac{a^2}{c}=x_0+\frac{a}{e},$$

P到l_2的距离 $|PT|=-x_0+\frac{a^2}{c}=-x_0+\frac{a}{e}$，

由椭圆的第二定义有$\frac{|PF_1|}{|PT'|}=e$，$\frac{|PF_2|}{|PT|}=e$

∴$|PF_1|=ex_0+a$，$|PF_2|=-ex_0+a$.

1033．设椭圆的中心为原点O，一个焦点为F(0，1)，长轴和短轴的长度之比为t.

(1)求椭圆的方程；

(2)设经过原点且斜率为t的直线与椭圆在y轴右边部分的交点为Q，

点P在该直线上，且$\frac{|OP|}{|OQ|}=t\sqrt{t^2-1}$，当t变化时，求点P的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形.

【解答】 (1)易得椭圆方程为$\frac{t^2-1}{t^2}y^2+(t^2-1)x^2=1$

(2)设Q(x_1，y_1)，P(x，y)，则由

$$\begin{cases}y=tx\\ \frac{t_2-1}{t^2}y^2+(t^2-1)x^2=1\end{cases}\quad 可得\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2(t^2-1)}}\\ y_1=\frac{t}{\sqrt{2(t^2-1)}}\end{cases}$$

$$\because \frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{|x|}{|x_1|}=t\sqrt{t^2-1}$$

$$\therefore\begin{cases}x=\frac{t}{\sqrt{2}}\\ y=tx=\frac{t^2}{\sqrt{2}}\end{cases}\quad 或\begin{cases}x=-\frac{t}{\sqrt{2}}\\ y=-\frac{t^2}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

而t＞1，因此点P的轨迹方程为

$x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y(x>\frac{\sqrt{2}}{2})$和$x^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}y(x<-\frac{\sqrt{2}}{2})$

点P的轨迹为抛物线$x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y$在直线$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$右侧的部分和抛物线$x^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}y$在直线$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$左侧的部分.

1034．如图272，设椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$上的点P到直线$l_1$：$2x-3y-12=0$的距离为d，试求d的最大、最小值．

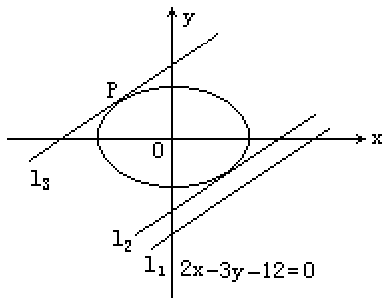


图 272

【解答】 ∵平行于 l_1 且和椭圆相切的直线到 l_1 的距离为最大或最小，且这切线的方程为

$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$

$=\frac{2}{3}x\pm\sqrt{9\times\frac{4}{9}+4}=\frac{2}{3}x\pm2\sqrt{2}$，

∴可设l_2：$2x-3y-6\sqrt{2}=0$

l_3：$2x-3y+6\sqrt{2}=0$，

∴$d_{max}=\frac{|6\sqrt{2}+12|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{6\sqrt{2}+12}{\sqrt{13}}$．

$d_{min}=\frac{|-6\sqrt{2}+12|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{12-6\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$．

1035．如图 273，已知点 P 在直线 x=2 上移动，直线 l 通过原点且与 OP 垂直，通过点 A(1，0)及点 P 的直线 m 和直线 l 交于点 Q，求 Q 点的轨迹方程，并指出该轨迹的名称和它的焦点坐标．

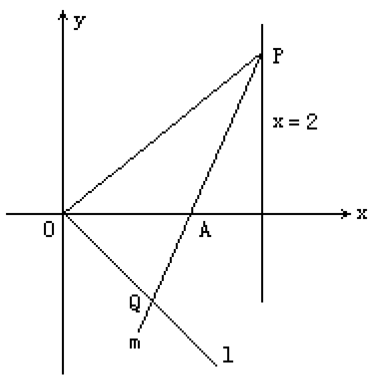


图 273

【精析】 设直线 OP 的斜率为 k，这样 OQ 与 PQ 的交点坐标只依赖于参数 k，故选取 k 为中间变量．

【解答】 设 OP 的斜率为 k，则 P(2，2k)，

∵$l\perp OP$

∴l的方程为 $x+ky=0$．①

又因为直线 m 过 A、P 两点，∴它的方程为 $y=2k(x-1)$ ②

由①②消去 k 得 Q 点的轨迹方程

$2x^2+y^2-2x=0(x\neq 1)$，即$4(x-\frac{1}{2})^2+2y^2=1(x\neq 1)$，

故所求轨迹是椭圆(且挖去一个点)．

∵$a^2=\frac{1}{2}$，$b^2=\frac{1}{4}$，

∴$c=\frac{1}{2}$

故所求的焦点坐标为$(\frac{1}{2}，\frac{1}{2})$和$(\frac{1}{2}，-\frac{1}{2})$

1036．已知直线 $y=x+m$ 和曲线 $x^2+2y^2+4y-1=0$ 交于 A、B 两点，P 是这条直线上的点，且$|PA|\times|PB|=2$，求：当 m 变化时，点 P 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形．

【解答】 设 $P(x，y)$、$A(x_1，y_1)$、$B(x_2，y_2)$，则

$y=x+m$，$y_1=x_1+m$，$y_2=x_2+m$

将 $y=x+m$ 代入方程 $x^2+2y^2+4y-1=0$ 得

$3x^2+4(m+1)x+2m^2+4m-1=0$①

∴$x_1+x_2=-\frac{4(m+1)}{3}$，$x_1x_2=\frac{2m^2+4m-1}{2}$ ②

而$|PA|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{2}|x-x_1|$，

$|PB|=\sqrt{2}|x-x_2|$，

∴$|PA|\times|PB|=2|x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2|=2$．

将②代入且由 $m=y-x$ 整理得

$\frac{x^2}{6}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$和$x^2+2(y+1)^2=0$．

而方程①当且仅当

$\Delta=[4(m+1)]^2-4\times3\times(2m^2+4m-1)>0$时有两相异实根，即

$\frac{-2-3\sqrt{2}}{2}<m<\frac{-2+3\sqrt{2}}{2}$时轨迹存在，因此，所求轨迹是椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$夹在两平行线$y=x+\frac{-2\pm3\sqrt{2}}{2}$之间的部分及点$(0，-1)$．

1037．设P是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的一点，$F_1$，$F_2$是椭圆的两个焦点，e是椭圆的离心率，记$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，求证：

$\tan\frac{\alpha}{2}\times\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1-e}{1+e}$

【证明】 根据椭圆的定义

$|PF_1|+|PF_2|=2a$

在△PF_1F_2中，由正弦定理得：

$$\frac{|PF_1|}{\sin\alpha}=\frac{|PF_2|}{\sin\beta}=\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore\frac{|PF_1+|PF_2|}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{2a}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{2a}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{2c}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

从而$e=\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$$\therefore\frac{1-e}{1+e}=\frac{1-\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}{1+\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=\frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(-\frac{\beta}{2})}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}\times\tan\frac{\beta}{2}$$

1038．**给定椭圆**C**：**$x^2+\frac{y^2}{9}=1$**，试问是否存在直线**l**，使**l**与椭圆交于不同的两点**M**、**N**，且线段**MN**恰被直线**$x=-\frac{1}{2}$**平分？若存在，求出** l **的倾斜角的取值范围；若不存在，说明理由．**

【精析与解答】 设 l **与 C 的两个交点 M、N 的坐标分别为** $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$**，则 MN 的中点 Q 为**

$$(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2})=(-\frac{1}{2},\ y_0)$$

又$k_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，$k_{OQ}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-2y_0$

∵M、N 在椭圆上，

$\therefore x_1^2+\frac{y_1^2}{9}=1$，$x_2^2+\frac{y_2^2}{9}=1$

两式相减得$x_1^2-x_2^2=-\frac{y_1^2-y_2^2}{9}$，从而$=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\times\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-9$，

$\therefore k_1(-2y_0)=-9$，$y_0=\frac{9}{2k_1}$

由此可知，MN的中点Q的坐标为$(-\frac{1}{2}，\frac{9}{2k_1})$，由点Q在椭圆

$x^2+\frac{y^2}{9}=1$内，可得

$(-\frac{1}{2})^2+(\frac{9}{3\times2k_1})^2<1\Rightarrow k_1<-\sqrt{3}$或$k_1>\sqrt{3}$

从而知，满足条件的直线*l*存在，且*l*倾斜角的取值范围是$(\frac{\pi}{3}，\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2}，\frac{2\pi}{3})$．

1039．在双曲线$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{13}=1$的一支上不同的三点$A(x_1，y_1)$、$B(\sqrt{26}，6)$、$C(x_3，y_3)$与焦点$F(0，5)$的距离成等差数列．

(1)求 y_1+y_3；

(2)证明线段 AC 的垂直平分线经过某一定点，并求该点的坐标．

【精析】 (1)由双曲线的焦半径公式及题设有

$2(ey_2-a)=(ey_1-a)+(ey_3-a)$，

从而得 $y_1+y_3=2y_2=12$．

(2)设AC中点为$M(\frac{x_1+x_3}{2}，\frac{y_1+y_3}{2})=(x_0，6)(x_0\neq0)$，设AC斜率为k，则

$k=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$，$k_{OM}=\frac{y_1+y_3}{x_1+x_3}=\frac{6}{x_0}$

又$\frac{y_1^2}{12}-\frac{x_1^2}{13}=1$，$\frac{y_3^2}{12}-\frac{x_3^2}{13}=1$，

两式相减得$\frac{y_1^2-y_3^2}{12}=\frac{x_1^2-x_3^2}{13}$，从而有$\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}\times\frac{y_1+y_3}{x_1+x_3}=\frac{12}{13}$

即$k\times\frac{6}{x_0}=\frac{12}{13}$．

$\therefore k=\frac{2x_0}{13}$，故AC的垂直平分线的方程为

$y-6=-\frac{13}{2x_0}(x-x_0)$，即$y=-\frac{13}{2x_0}x+\frac{15}{2}$，

易见它必过定点$(0，\frac{15}{2})$．

1040．设中心在原点，焦点在 x 轴上的椭圆交直线 l 于 A，B 两点，l分别交两坐标轴于C，D两点，已知椭圆的一条准线$x=2\sqrt{5}$与l夹角的正切为$\sqrt{2}$，且CD恰好把线段AB三等分，求此椭圆及直线l的方程．

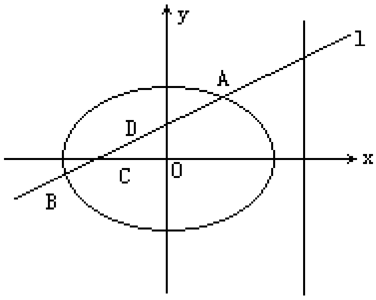


图 274

【解答】　如图 274，设 C(m，0)，D(0，n)，所求椭圆及直线 l 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$(a>b>0)$和 $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1(m\neq 0，n\neq 0)$．

∵C，D 是 AB 的三等分点，

∴B(2m，－n)，A(－m，2n)．

依题意得

$$\begin{cases}\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=2\sqrt{5}\\ |\frac{m}{n}|=\sqrt{2}\\ \frac{4m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1\\ \frac{m^2}{a^2}+\frac{4n^2}{b^2}=1\end{cases}$$

解得 $n^2=1$，$m^2=2$，$a^2=10$，$b^2=5$．

∴所求椭圆方程为$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$

当$n=1$时，$m=\pm\sqrt{2}$，当$n=-1$时，$m=\pm\sqrt{2}$，

∴所求直线的 l 方程为

$x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}=0$，$x+\sqrt{2}y-\sqrt{2}=0$，

$x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}=0$，$x-\sqrt{2}y-\sqrt{2}=0$．

1041．求以直线 x=－2 为准线，O(0，0)为相应焦点的椭圆短轴端点的轨迹方程．

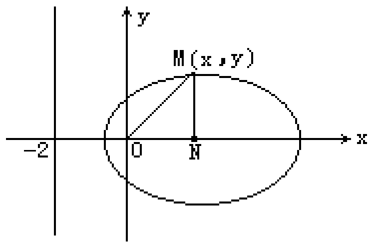


图 275

【解答】 如图 275，设 M(x，y)是椭圆短轴的端点，MN⊥Ox，则 N 是椭圆中心，连结 OM，则|OM|为椭圆长轴的长 a，$a^2=x^2+y^2$，根据统一定义得

$$\frac{a}{x+2}=e=\frac{|ON|}{|OM|}=\frac{x}{a},$$

∴$a^2=(x+2)x$，即 $x^2+y^2=x^2+2x$，

∴所求的轨迹方程为 $y^2=2x(x>0)$.

1042．在直角坐标系中，已知椭圆的一个焦点 F(3，0)，相应于 F 的准线是 y 轴，过点 F 倾角为 60°的直线交椭圆于 A，B 两点，且$|AB|=\frac{16}{5}$，求椭圆方程.

【解答】 设P(x，y)为椭圆上任一点，由统一定义有$\frac{|PF|}{x}=e$，即

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{|x|}=e,$$

∴$(1-e^2)x^2+y^2-6x+9=0$，

把直线AB的方程$y=\sqrt{3}(x-3)$代入上式消去y得

$(4-e^2)x^2-24x+36=0$

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，根据韦达定理得

$$x_1+x_2=\frac{24}{4-e^2}，x_1x_2=\frac{36}{4-e^2},$$

$$\therefore AB=\frac{16}{5}$$

$$\therefore\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{16}{5}$$

$$\therefore\sqrt{1+3}\times\sqrt{(\frac{24}{4-e^2})^2-4\times\frac{36}{4-e^2}}=\frac{16}{5}$$

解得$e^2=\frac{1}{4}$，故所求椭圆方程为

$3x^2+4y^2-24x+36=0$.

1043．过圆锥曲线 L：$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0(A+C\neq0)$上的一定点 M(a，b)引两条互相垂直的弦 MR、MQ，求证直线 RQ 恒过定点.

【证明】 经过平移变换 $x=x'+a$，$y=y'+b$，曲线 L 的方程变为$(Aa^2+Bab+Cb^2+Da+Eb+F=0)$：

$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2aA+bB+D)x'+(2bc+Ba+E)y'=0$．①

设直线RQ的方程为：$px'+qy'=1$②

由①、②构造齐次方程，得

$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(px'+qy')[(2aA+bB+D)\times x'+(2bc+aB+E)y']=0$．令$k=\frac{y}{x}\Rightarrow[C+(2bc+Ba+E)q]k^2+[p(2bc+aB+E)+q\times(2aA+bB+D)]k+A+p(2aA+bB+D)=0$．∵$MR\perp MQ$，∴$k_1k_2=-1\Rightarrow$

$$\frac{2Aa+Bb+D}{-(A+C)}p+\frac{Ba+2Cb+E}{-(A+C)}q=1.$$

∴直线$px'+qy'=1$恒过定点：

$$\left(\frac{2aA+bB+D}{-(A+C)},\ \frac{2bC+Ba+E}{-(A+C)}\right)$$

由移轴公式得直线RQ恒过定点：

$$\left(\frac{(C-A)a-Bb-D}{A+C},\ \frac{-Ba+(A-C)b-E}{A+C}\right)$$

1044．如图276，过抛物线L：$y^2=2x$的顶点O作两条互相垂直的弦OA、OB．

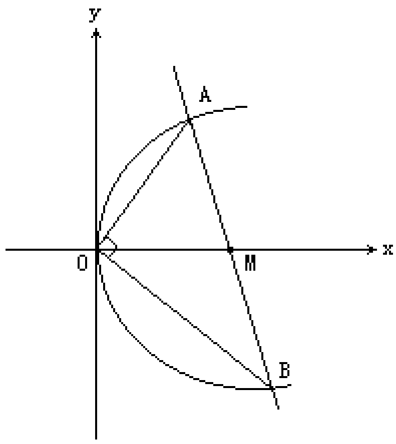


图276

(1)求证：直线AB过定点M(2，0)；

(2)求顶点O在线段AB上的射影点$H(x',y')$的轨迹方程；

(3)求AB中点$N(x_0,y_0)$的轨迹方程．

【解答】 (1)设直线AB的方程为$ax+by=1$．

则$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$满足齐次方程

$y^2=2x(ax+by)$，令$k=\frac{y}{x}\Rightarrow k^2-2bk-2a=0$．

由韦达定理及$OA\perp OB\Rightarrow a=\frac{1}{2}$．

∴AB方程为$\frac{1}{2}x+by=1$．

易得直线 AB 恒过定点 M(2，0)．

(2)依题意得点 H(x′，y′)满足：

$$\begin{cases} ax'+by'=1 \\ \dfrac{y'}{x'}-\dfrac{a}{b}=-1，(消去a，b)\Rightarrow \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

所求的轨迹方程为 $x'^2+y'^2-2x'=0(x'\neq 0)$．

(3)依题意$\begin{cases} y_1^2=2x_1 \\ y_2^2=2x_2 \\ \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{2}{y_1+y_2} \end{cases}\Rightarrow k_{AB}=\dfrac{1}{y_0}$，

所以点$N(x_0，y_0)$满足：

$$\begin{cases} ax_0+by_0=1 \\ -\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{y_0} \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

消去a，b，得所求的轨迹方程为$y_0^2=x_0-2$．

1045．过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$的焦点 F 作一直线 l，交椭圆于 M、N 两点，当 l 的斜率 k 为何值时，$|MN|=2b$．

【解答】 由题设定理得$2b=\dfrac{2\lambda}{ep}$，

$\therefore \lambda=epb=\dfrac{c}{a}\times\dfrac{b^2}{c}\times b=\dfrac{b^3}{a}$，则

$$\sin^2\alpha=\frac{b^4-\frac{b^3}{a}\times b^2}{\frac{b^3a^2}{a}}=\frac{b}{a+b}.$$

从而$\tan^2\alpha=\dfrac{b}{a}$，$\therefore k=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$为所求．

1046．由动点 $P(x_0，y_0)$引圆 $L：x^2+y^2=10$ 的两条切线 PA、PB．

(1)若 $k_{PA}+k_{PB}+k_{PA}k_{PB}+1=0$，求点 P 的轨迹方程；

(2)若点 $P(x_0，y_0)$在直线 $x+y=m$ 上，且 PA⊥PB，求 m 的取值范围．

【解答】 (1)设切线 $l：y-y_0=k(x-x_0)$，由 l 与 L 相切

$\Rightarrow (x_0^2-10)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-10=0$，由韦达定理 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} k_1+k_2=\dfrac{2x_0y_0}{x_0^2-10} \\ k_1k_2=\dfrac{y_0^2-10}{x_0^2-10} \end{cases} (x_0^2\neq 10)$$

由 $k_1k_2+k_1+k_2+1=0 \Rightarrow 2x_0y_0+y_0^2-10+x_0^2-10=0 \Rightarrow$

$(x_0+y_0)^2=20$．

故所求的方程为

$x+y=\pm 2\sqrt{5}(x\neq\pm\sqrt{10})$

(2)由 $y_0=m-x_0$ 及 $k_1k_2=-1 \Rightarrow$

$$\frac{(m-x_0)^2-10}{x_0^2-10}=-1(x_0\neq\pm\sqrt{10}) \Rightarrow$$

$2x_0^2-2mx_0+m^2-20=0$．①

$\Delta=4m^2-4\times 2(m^2-20)\geq 0 \Rightarrow |m|\leq 2\sqrt{10}$

当 $x_0=\pm\sqrt{10}$ 时，代入① $\Rightarrow m=0$ 或 $2\sqrt{10}$

当 m＝0 时，直线 x＋y＝0 上存在点 $P(x_0, y_0)$ 符合题意；

当 $m=2\sqrt{10}$ 时，直线 $x+y=2\sqrt{10}$ 与圆 $L: x^2+y^2=10$ 相切符合题意．

故所求 m 的取值范围为 $(-2\sqrt{10}, 2\sqrt{10})$．

1047．设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a, b>0)$ 的右焦点为 F，P 为双曲线上任意一点，曲线 C 为以线段 FP 为直径的动圆，问是否存在定圆与动圆 C 相切？

【精析与解答】　关键是能否找出这个定圆，因双曲线关于 x 轴对称，若满足条件的定圆存在，圆心应在 x 轴上，于是对点 P 取 2 个特殊点(－a，0)、(a，0)进行试探，发现这 2 个圆都与定圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切，由此假设满足题设条件的定圆存在，且为 $x^2+y^2=a^2$，现证明如下：

当点 P(x，y)在双曲线右支上时，据焦半径公式，得 $|FP|=ex-a$，设 F(c，0)，其中 $c^2=a^2+b^2$，动圆 C 的圆心 $C(\dfrac{x+c}{2}, \dfrac{y}{2})$，半径 $R=\dfrac{ex-a}{2}$，定圆圆心为 O(0，0)，半径 r＝a．

因为 $|OC|=\sqrt{(\dfrac{x+c}{2})^2+(\dfrac{y}{2})^2}=\dfrac{1}{2}$

$\sqrt{(1+b^2/a^2)x^2+2cx+a^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{e^2x^2+2aex+a^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(ex+a)^2}=\dfrac{ex+a}{2}=R+r$，

所以动圆 C 与定圆 $x^2+y^2=a^2$ 相外切，

同理可证当 P 在双曲线左支上时，动圆 C 与定圆 $x^2+y^2=a^2$ 内切．

故存在定圆 $x^2+y^2=a^2$ 与动圆 C 相切．

1048．设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a＞b＞0)$ 的两焦点为 F_1，F_2，求当离心率 e 在什么范围内时，椭圆上恒存在点 P，使得 $\angle F_1PF_2=120°$．

【解答】 由椭圆定义，得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，在△PF_1F_2 中，由余弦定理：$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos120°$，得 $|F_1F_2|^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-|PF_1||PF_2|$，即 $4a^2-4c^2=|PF_1||PF_2|\le(\frac{|PF_1+|PF_2|}{2})^2=a^2$，解得 $\frac{c}{a}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$，故当 $e\in[\frac{\sqrt{3}}{2}，1)$ 时满足题设要求．

1049．已知椭圆的焦点 $F_1(-1，0)$，$F_2(1，0)$，P 为椭圆上一点，$\angle F_2F_1P=120°$，且 $|F_1F_2|$ 是 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 的等差中项，求△PF_1F_2 的面积．

【解答】 设 P 点坐标 $(x_0，y_0)$，由焦半径公式和题意，得 $a+ex_0+a-ex_0=4$，$a=2$，由此得椭圆的离心率 $e=\frac{1}{2}$，在△PF_1F_2 中，由余弦定理得

$(a-ex_0)^2=(a+ex_0)^2+4-4(a+ex_0)\cos120°$，

$\therefore x_0=-\frac{8}{5}$，即 $|PF_1|=\frac{6}{5}$，$\therefore S_{\triangle}=\frac{3}{5}\sqrt{3}$．

1050．如图277，设椭圆 $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1$ 有公共的焦点 F_1，F_2，P 为其交点，求 $\angle F_1PF_2$．

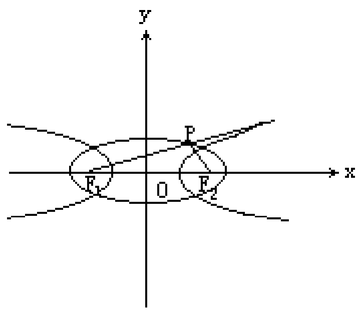


图 277

【解答】 设 P 点坐标为 $(x_0，y_0)$，椭圆与双曲线的离心率分别为 e_1，e_2，$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，

据焦半径公式得

$|PF_1|=r_1=a_1+e_1x_0$

$=a_2+e_2x_0$

$|PF_2|=r_2=a_1-e_1x_0$

$=e_2x_0-a_2$

消 x_0 得　$r_1=a_1+a_2$，$r_2=a_1-a_2$.

在△PF_1F_2 中，由余弦定理得

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{r_1^2+r_2^2-(2c)^2}{2r_1r_2}=\frac{b_1^2-b_2^2}{a_1^2-a_2^2}$$

$$\therefore\angle F_1PF_2=\arccos\frac{b_1^2-b_2^2}{a_1^2-a_2^2}$$

1051．已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

(1)求椭圆中斜率为 2 的平行弦中点的轨迹方程；

(2)过 A(2，1)引椭圆的割线，求截得的弦的中点的轨迹方程；

(3)求过点 $P(\frac{1}{2}，\frac{1}{2})$ 且被 P 平分的弦所在的直线方程.

【解答】　设弦的两端点分别为 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，MN 的中点为 $R(x，y)$，则 $\begin{cases}x_1^2+2y_1^2=2 & ①\\ x_2^2+2y_2^2=2 & ②\end{cases}$

②－①，并除以 (x_2-x_1)，得

$(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)\times\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0$，③

而 $x_1+x_2=2x$，$y_1+y_2=2y$

$\therefore x+2y\times\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0$，④

(1)将 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=2$ 代入④式，得所求轨迹方程为直线 $x+4y=0$ 在已知椭圆内的部分.

(2)将 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-1}{x-2}$ 代入④式，得所求轨迹方程为 $x^2+2y^2-2x-2y=0$ 在已知椭圆内的部分.

(3)将 $x_1+x_2=1$，$y_1+y_2=1$ 代入③，得

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}$，

故所求的直线方程为

$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})$，即 $2x+4y-3=0$.

1052．如图 278，已知 P 是双曲线右支上顶点外一点，F_1、F_2 分别是双曲线的左、右焦点，e 为离心率，$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，求证：

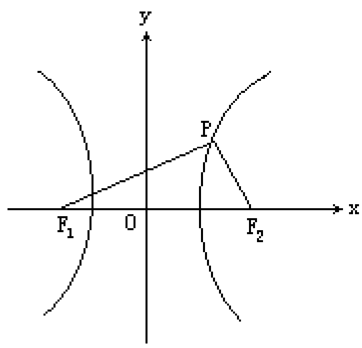


图 278

$\tan\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}=\frac{e-1}{e+1}$.

【证明】 P 点在双曲线右支上，则由双曲线定义得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$。在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由正弦定理：$\frac{|PF_1|}{\sin\beta}=\frac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\frac{|F_1F_2|}{\sin(\alpha+\beta)}$，

得 $\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{|PF_1|-|PF_2|}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{2a}{\sin\beta-\sin\alpha}$，

即 $\frac{c}{a}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}=e$，

由此得 $\frac{e-1}{e+1}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$

$=\tan\frac{\alpha}{2}\times\cot\frac{\beta}{2}$，故命题得证.

1053．已知 P 为椭圆 $x^2+2y^2=2$ 上的一点，A、B 为它的顶点，$AD\perp AB$，$BC\perp AB$，且 $AD=3\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{2}$，求 $\triangle PCD$ 的面积的最大值(如图 279).

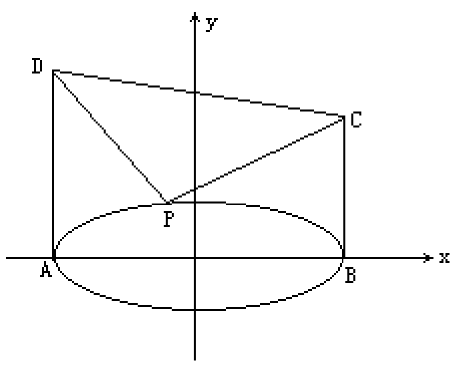


图 279

【解答】 由已知，可求得点C的坐标为$(\sqrt{2}，\sqrt{2})$，点D的坐标为$(-\sqrt{2}，3\sqrt{2})$．直线CD的方程为：

$$\frac{y-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}，$$

即$x+y-2\sqrt{2}=0$．

由两点间的距离公式得|CD|＝4．

设P的坐标是$(\sqrt{2}\cos\alpha，\sin\alpha)$，点P到CD的距离

$$d=\frac{|\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos(\alpha-\psi)}{\sqrt{2}}$$

所以，△PCD的面积$=\sqrt{2}[2\sqrt{2}-\sqrt{3}\cos(\alpha-\psi)$

$\leq 4+\sqrt{6}$

△PCD的面积的最大值$4+\sqrt{6}$

1054．已知椭圆方程为$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$，试确定m的值，使得椭圆上有两个不同的点关于直线$l$：$y=2x+m$对称．

【解答】 设椭圆上关于直线l对称的两点$A(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，$B(x_0-\Delta x，y_0-\Delta y)$，弦AB中点为$M(x_0，y_0)$，则

$$\begin{cases}4[(x_0+\Delta x)-1]^2+9[(y_0+\Delta y)-2]^2=36， & ①\\ 4[(x_0-\Delta x)-1]^2+9[(y_0-\Delta y)-2]^2=36， & ②\\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2}．(与l垂直) & ③\end{cases}$$

①－②，化简得$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4(x_0-1)}{9(y_0-2)}$ ④

比较③与④，得

$\frac{4(x_0-1)}{4(y_0-2)}=\frac{1}{2}$，$8x_0-9y_0+10=0$． ⑤

又$y_0=2x_0+m$，与⑤联立，解得M坐标$(1-\frac{9}{10}m，2-\frac{4}{5}m)$．

因点M在椭圆内部，故$4(-\frac{9}{10}m)^2+9(-\frac{4}{5}m)^2<36$，解得$-2<m<2$．

1055．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，A，B是椭圆上两点，线段AB的垂直平分线与x轴相交于点$P(x_0，0)$，证明：

$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$.

【精析】 设弦 AB 中点 M(m，n)(n≠0)AB 垂直平分线的斜率为 k，利用点 P 坐标写出垂直平分线方程，将 M 坐标代入之后，得到 x_0，m，n 的关系式，再根据“基本关系式”求出 k，即可得到 $x_0=f(m)$，而－a<m<a，即可获证．

【证明】 设 AB 中点 M(m，n)(n≠0)，A(m＋Δx，n＋Δy)，B(m－Δx，n－Δy)，AB 垂直平分线斜率为 k(若 AB 垂直平分线斜率不存在，则知 AB 平行于 x 轴，推知 $x_0=0$，结论显然正确)，则

$$\begin{cases} b^2(m+\Delta x)^2+a^2(n+\Delta y)^2=a^2b^2, & ① \\ b^2(m-\Delta x)^2+a^2(n-\Delta y)^2=a^2b^2, & ② \\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{k}, & ③ \end{cases}$$

①－②，代入③，得$k=\frac{a^2n}{b^2m}$．

由$P(x_0，0)$，得AB垂直平分线方程为$y=\frac{a^2n}{b^2m}(x-x_0)$，将点M坐标(m，n)代入上式，得$n=\frac{a^2n}{b^2m}(m-x_0)$，解得$x_0=\frac{a^2-b^2}{a}m$．

∵－a<m<a，∴$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$．

1056．求中心在原点，对称轴为坐标轴，且满足下列条件的椭圆方程．

(1)长轴长为 10，焦距为 6；

(2)离心率为$\frac{3}{5}$，椭圆过点P(5，4)．

【精析与解答】 (1)设椭圆标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$或$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$(a>b>0)．

由已知 2a=10，2c=6，

所以 a＝5，c＝3，

$b^2=a^2-c^2=16$．

所求方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$或$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$．

(2)设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$或$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$(a>b>0)．

(i)当方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$时，

由$e=\frac{c}{a}$，$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$，

得$\frac{9}{25}=1-\frac{b^2}{a^2}$，$\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$． ①

将方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$两边同乘以$b^2$，得$\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2$，将①代入此式得$\frac{16x^2}{25}+y^2=b^2$． ②

因为 椭圆过P(5，4)点，

所以 $b^2=\frac{16}{25}\times 5^2+4^2=32$．

将 b^2=32 代入①，得 a^2=50，

所以 所求方程为$\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$．

(ii)当方程为$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$时，

同(i)由$e=\frac{3}{5}$推出$\frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{25}$． ③

将方程$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$两边同乘以$b^2$，得$x^2+\frac{b^2}{a^2}y^2=b^2$，将③代入此式得$x^2+\frac{16}{25}y^2=b^2$．

因为 椭圆过P(5，4)点，

所以 $5^2+\frac{16}{25}\times 4^2=b^2$，$b^2=\frac{881}{25}$．

将$b^2=\frac{881}{25}$代入③，得$a^2=\frac{881}{16}$．

所以 所求方程为$\frac{x^2}{\frac{881}{25}}+\frac{y^2}{\frac{881}{16}}=1$．

综(i)、(ii)所求椭圆方程为$\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$或$\frac{x^2}{\frac{881}{25}}+\frac{y^2}{\frac{881}{16}}=1$．

注意：在本题的第(2)题中解为：同题解过程一样由已知条件求出方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中的$a^2=50$，$b^2=32$后，得出$\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$或$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{50}=1$为所求的方程．

产生错误的原因是思维缺乏缜密性，产生粗放性差错．认为两种形式的椭圆标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$和$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$中的a、b的值一样，故在由

第一种方程根据待定系数法求出 a、b 后，就直接代入第二种方程，造成误解．这是由于求易心理造成的思维粗疏、浮泛肤浅类的问题．

解决问题的办法是要认真解题，要培养一丝不苟的精神，做到言必有理，解必有据．在求椭圆标准方程时，如根据已知条件确定有焦点在 x 轴上和 y 轴上两种形式的方程后，两种方程中的 a、b 是否同由已知条件定，不能根据一种形式求出 a、b 后就误认为另一种形式的 a、b 也一定是此值，造成误解．一般情况下，如已知条件只牵扯到长度问题，两种形式的 a、b 一致，但如已知条件牵扯到位置问题，如本题的第(2)题涉及到椭圆过 P(5，4)点，则两种形式的 a、b 一般不同，应根据已知条件分两种情况分别求方程中的 a、b，注意到上述规律，就可以避免错解中的问题了．

第十四章　参数方程、极坐标

一、选择题

1057．椭圆$\begin{cases}x=3+3\cos\psi\\ y=-1+5\sin\psi\end{cases}$的两个焦点坐标是

[　　]

(A)(−3，5)，(−3、−3)　　(B)(3，3)，(3，−5)

(C)(1，1)，(−7，1)　　(D)(7，−1)，(−1，−1)

【精析】　本题可将椭圆参数方程化为普通方程，再计算焦点坐标，得答案 B，但此法计算量较大，且容易出错，若能根据椭圆参数方程进行分析、思考，可知椭圆的长轴在直线 $x=3$ 上，焦点也在此直线上，因此排除(A)，(C)，(D)，估算出答案(B)．

二、填空题

1058．过点 M(1，2)作双曲线 $4x^2-5y^2-16x-10y-31=0$ 的弦，则弦 AB 中点 P 的轨迹方程为________．

【解答】　设弦 AB 中点为 $P(x_0，y_0)$，AB 所在直线的参数方程为

$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ (t为参数，α为直线倾斜角)．代入双曲线方程，整理后得 t 的二次方程，其中一次项系数为$(8x_0-16)\cos\alpha-(10y_0+10)\sin\alpha$

因为 $P(x_0，y_0)$为 AB 中点，所以 $t_1+t_2=0$，即

$(8x_0-16)\cos\alpha-(10y_0+10)\sin\alpha=0$

于是有$\tan\alpha=\dfrac{4x_0-8}{5y_0+5}$

又因为点 M(1，2)在直线上，所以

$\tan\alpha=\dfrac{y_0-2}{x_0-1}$，$\dfrac{4x_0-8}{5y_0+5}=\dfrac{y_0-2}{x_0-1}$，

整理后，将 x_0，y_0 换成 x，y 即得所求轨迹方程为

$4x^2-5y^2-12x+5y+18=0$．

1059．已知$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，AB为通过左焦点$F_1$的弦，$F_2$为右焦点，则$|F_2A|\times|F_2B|$的最大值为________．

【解答】　由定义得$|F_2A|+|F_1A|=2a=4$，$|F_2B|+|F_1B|=4$，

$\therefore|F_2A|\times|F_2B|=(4-|F_1A|)(4-|F_1B|)$

$=16-4|AB|+|F_1A||F_1B|$．

又因为椭圆左焦点 $F_1(0，0)$，故令直线 AB 的参数方程为

$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t为参数，α为倾斜角)，代入椭圆方程得

$\dfrac{(t\cos\alpha-1)^2}{4}+\dfrac{(t\sin\alpha)^2}{3}=1$，

即$(3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha)t^2-6t\cos\alpha-9=0$

由韦达定理知$t_1+t_2=\dfrac{6\cos\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$，

$t_1t_2=\dfrac{9}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$，

$\therefore|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$

$=\dfrac{12}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$，

$\therefore|F_2A||F_2B|=16-4|t_1-t_2|+|t_1t_2|$

$=16-\dfrac{39}{3+\sin^2\alpha}$

当$\sin^2\alpha=1$时，得$|F_2A||F_2B|$最大值$\dfrac{25}{4}$.

1060．求椭圆$(x-1)^2+\dfrac{9y^2}{16}=1$的以$O(0，0)$为一端点的弦OP长的最大值________.

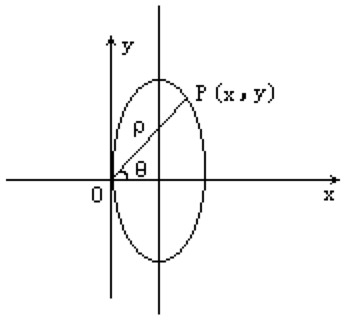


图 280

【解答】 以 0 为极点，0x 为极轴建立极坐标系(如图 280)，则$P(x，y)$满足$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ $(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2})$代入椭圆方程

整理得

$$\rho=\dfrac{32}{\dfrac{9}{\cos\theta}+7\cos\theta}$$

$$f(\theta)=\dfrac{9}{\cos\theta}+7\cos\theta=\sqrt{(\dfrac{9}{\cos\theta}-7\cos\theta)^2+252}$$

因$\dfrac{9}{\cos\theta}-7\cos\theta$恒为正，且是关于$t=\cos\theta$在区间$(0，1]$上的减函数，从而 $f(\theta)$是关于 $t=\cos\theta$ 在$(0，1]$上的减函数，故$\rho(\theta)$是关于 t 在$(0，1]$上增函数，故 $t=\cos\theta=1$，即$\theta=0$时$\rho(\theta)$取最大值$\rho(0)=$

$\dfrac{32}{9+7}=2$，这就是所求弦OP长的最大值.

1061．已知圆$x^2+y^2-kx-ky+\frac{k^2}{4}=0$与圆$x^2+y^2=1$相切，则k值为________．

【精析与解答】　此题通常是利用圆心距等于两圆半径之和或差的绝对值进行处理的，运算量较大．

现根据 $x^2+y^2=1$，令

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$（$\theta\in[0,2\pi)$），

代入$x^2+y^2-kx-ky+\frac{k^2}{4}=0$中并整理得

$k\sin\theta+k\cos\theta=1+\frac{k^2}{4}$，

因题设两圆相切，故此方程有唯一解，则

$\sqrt{k^2+k^2}=1+\frac{k^2}{4}$，即$\sqrt{2}|k|=1+\frac{k^2}{4}$，

解方程得$k=2\sqrt{2}\pm2$或$k=-2\sqrt{2}\pm2$．

1062．已知 A(0，4)，B(4，0)若抛物线 $y=x^2-mx+m+1$ 与线段 AB(不包括两端点)有两个不同交点，则 m 的取值范围为________．

【精析与解答】　设抛物线与线段 AB 的一个交点为 P，点 P 分有向线段$\overline{AB}$所成的比$\lambda>0$，由直线参数方程的分点式设P的坐标为

$\left(\frac{4\lambda}{1+\lambda},\ \frac{4}{1+\lambda}\right)$，代入$y=x^2-mx+m+1$得

$\frac{4}{1+\lambda}=\left(\frac{4\lambda}{1+\lambda}\right)^2-m\times\frac{4\lambda}{1+\lambda}+m+1$，即

$(3m-17)\lambda^2+2(m+1)\lambda-(m-3)=0$

由题设，此方程应有两个不等的正实根，其条件为

$$\begin{cases}4(m+1)^2+4(3m-17)(m-3)>0\\ -\dfrac{2(m+1)}{3m-17}>0\\ -\dfrac{m-3}{3m-17}>0\end{cases}$$

解得$3<m<\frac{17}{3}$

此即所求 m 的取值范围．

三、解答题

1063．已知直线l：$mx+ny=1$与椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于 P、Q 两点，求证 $a^2m^2+b^2n^2>1$．

【精析】　此题提供的解答中，分 n 是否为 0 两种情形讨论，再由 l 与 C 的方程组成的方程组消去一元后用$\Delta>0$来证的．

现令椭圆的参数方程为．

$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数，$\theta\in[0,2\pi)$），

代入直线 l 的方程 $mx+ny=1$ 得

$am\cos\theta + bn\sin\theta = 1$

由题意，上述方程应有两解，从而有$\sqrt{(am)^2+(bn)^2}>1$，即

$a^2m^2+b^2n^2>1$.

证明过程显得简捷明了.

1064．如图281，点P在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上移动，点Q在以点M(1，0)为圆心，以$\frac{4\sqrt{2}}{3}$为半径的圆上移动，当点P位于P′时，点Q位于Q′时，P、Q两点距离最近，记最近距离为d，求d及点P′、Q′的坐标.

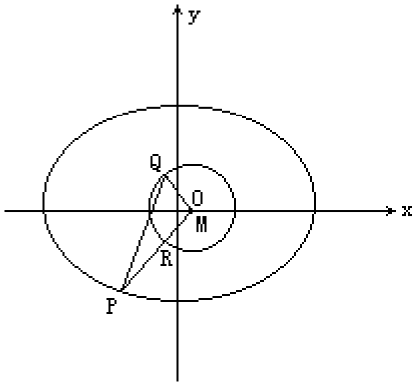


图 281

【精析】 设PM交⊙M于R，由|PQ|＋|QM|≥|PM|，|MQ|＝|MR|得|PQ|≥|PR|，即P，Q两点距离的最小值d，等于椭圆上的点P与定点 M 的距离的最小值与圆半径的差，因此问题的实质 是求|PM|的最小值，用椭圆的参数方程设点P的坐标，接下来的就是求三角函数的最值了，化生为熟，易于操作.

【解答】 设椭圆上点P的坐标为(5cosα，4sinα)，则

$$|PM|=\sqrt{(5\cos\alpha-1)^2+4\sin^2\alpha}$$

$$=\sqrt{9(\cos\alpha-\frac{5}{9})^2+\frac{128}{9}}$$

∴当$\cos\alpha=\frac{5}{9}$时，$|PM|_{min}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，

$d=\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$，

此时，$\sin\alpha=\pm\frac{2\sqrt{14}}{9}$，点Q′是P′M的中点，

∴ 点P′、Q′的坐标分别为

$(\frac{25}{9}，\frac{8\sqrt{14}}{9})$、$(\frac{17}{9}，\frac{4\sqrt{14}}{9})$；

或$(\frac{25}{9}，-\frac{8\sqrt{14}}{9})$、$(\frac{17}{9}，-\frac{4\sqrt{14}}{9})$．

1065．证明：经过圆内任意一定点任作一条弦，弦被这个定点分得的两条线段长的积为定值．

【证明】　设圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，圆内定点 $P_0(x_0，y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2<r^2$．设过P_0的弦AB所在的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$$ (t为参数，α为倾斜角)　　．

将它代入圆方程，整理得

$t^2+2(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha)t+x^2+y^2-r^2=0$．

设其二根为t_1，t_2，则$t_1t_2=x_0^2+y_0^2-r^2$，

故$|P_0A||P_0B|=|t_1t_2|=r^2-(x_0^2+y_0^2)$为定值．

1066．直线l与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$相切于M点且与两条渐近线分别交于A，B两点，求证：M平分线段AB．

【证明】　设切点M的坐标为$(x_0，y_0)$，l的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$$ (t为参数)

代入渐近线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，整理得

$(b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha)t^2+2(b^2x_0\cos\alpha-a^2y_0\sin\alpha)t+a^2x_0^2-b^2y_0^2=0$

由韦达定理得$t_1+t_2=\frac{2(b^2x_0\cos\alpha-a^2y_0\sin\alpha)}{a^2\sin^2\alpha-b^2\cos^2\alpha}$，

又因为切线l的方程是$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$，所以$l$的斜率

$k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$

但l的斜率$k=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，故有$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$

所以 $t_1+t_2=0$

由 t 的几何意义知：M 为 AB 中点，即切点 M 平分线段 AB．

1067．已知直线l过点M(1，5)，倾斜角为$\frac{\pi}{3}$．

(1)求直线l和直线：$x-y-2\sqrt{3}=0$的交点P到点M距离；

(2)求直线 l 和圆：$x^2+y^2=16$ 的两交点 A，B 间的距离．

【解答】　设直线的参数方程是

$$\begin{cases} x=1+t\cos\dfrac{\pi}{3} \\ y=5+t\sin\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t \\ y=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t为参数)　①

(1)将方程①式代入$x-y-2\sqrt{3}=0$解得

$t=-2(5+3\sqrt{3})$

所以交点P到点M的距离

$|PM|=|t|=2(5+3\sqrt{3})$

(2)将方程①式代入 $x^2+y^2=16$，整理得

$t^2+(1+5\sqrt{3})t+10=0$　　②

设②的两根为t_1，t_2，则

$t_1+t_2=-(1+5\sqrt{3})$，$t_1t_2=10$，

所以$|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$

$=\sqrt{36+10\sqrt{3}}$，

即两交点A，B间距离

$|AB|=\sqrt{36+10\sqrt{3}}$

1068．求曲线C_1：$\begin{cases} x=2-5\cos^2\theta, \\ y=-1+\sin^2\theta \end{cases}$ (θ为参数)与

C_2：$\begin{cases} x=4\cos\theta, \\ y=-3+4\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)的公共点的个数．

【精析与解答】　将曲线 C_1 的两方程变形为：

$\dfrac{x-2}{-5}=\cos^2\theta$，$y+1=\sin^2\theta$．

两式相加得 $\dfrac{x-2}{-5}+y+1=1$，即$x-5y-2=0$．

因为 $0\le\cos^2\theta\le1$，$0\le\sin^2\theta\le1$，

所以 $0\le\dfrac{x-2}{-5}\le1$，$0\le y+1\le1$，即 $x\in[-3,2]$，$y\in[-1,0]$．

所以　曲线 C_1是以 A(－3，－1)、B(2，0)为端点的线段 $x-5y-2=0(x\in[-3,2])$．(如图 282)．

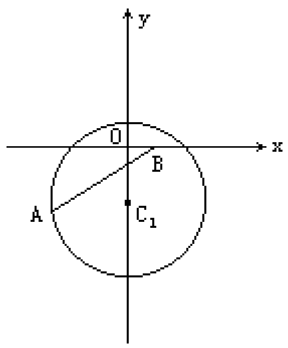


图 282

将曲线C_2的两方程变形为：$\frac{x}{4}=\cos\theta$，$\frac{y+3}{4}=\sin\theta$．

两式平方后相加，得$(\frac{x}{4})^2+(\frac{y+3}{4})^2=1$，

即 $x^2+(y+3)^2=16$．

所以　曲线 C_2 是以点 $C(0，-3)$为圆心、以 4 为半径的圆．

因为 $|AC|=\sqrt{13}<4$，

$|BC|=\sqrt{13}<4$，

即　A、B 两点均在圆内．

所以　曲线 C_1 与 C_2 无公共点．

注意：解为：将曲线 C_1 的方程化为普通方程为 $x-5y-2=0$，它表示一条直线．将曲线 C_2 的方程化为普通方程为 $x^2+(y+3)^2=16$，它表示圆心在 $C(0，-3)$，半径为 4 的圆．

由$\begin{cases}x-5y-2=0\\x^2+(y+3)^2=16\end{cases}$　①

消 x 得$(5y+2)^2+(y+3)^2=16$，

即 $26y^2+26y-3=0$，　②

因为　②的判别式$\Delta=26^2+4\times26\times3>0$，

所以　方程②有两个相异的实根，从而方程组①有两组不同的实数解，曲线 C_1 与 C_2 有两个公共点．

本解法错在将曲线 C_1 的参数方程化为普通方程时，没注意参数方程与所化成的普通方程中的变量 x、y 取值范围的一致性，也就是未注意到曲线的参数方程与所化成的普通方程的等价性，故出现误解．

避免误解的方法是要明确曲线参数方程的概念，理解一条曲线的参数方程与普通方程是同一曲线的两种不同形式的方程．它们应具有同一性．二者可以互化，但互化必须考虑方程的等价性，保证互化后曲线上的点既不增加也不减少．在将曲线的参数方程化为普通方程时主要任务是消参，消参中要注意变量的取值范围不应扩大和缩小．如此题注意到参数方程中有参数的正、余弦函数，因此由正、余弦函数的有界性决定了 x、y 的范围不是全体实数，而是某区间上的变量，这样就可以避免错解中将本应是线段的图形误认为是直线，并在此基础上导出曲线 C_1 与 C_2 错误的位置关系的误解了．

1069．设直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t \\ y = b + mt \end{cases} \quad (t\text{为参数}),$$

椭圆E的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + a\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ （θ为参数）．

问 a、b 应满足什么条件时，使得对任意 m 值来说，直线 L 与椭圆 E 总有公共点？

【精析与解答】　消去参数得直线 *l*：y=mx＋b，

椭圆E：$\dfrac{(x-1)^2}{a^2} + y^2 = 1$．

作出直线 L 与椭圆 E 的图象，m 是直线 L 的斜率，直线 L 为过定点(0，b)的直线束，由图 283 可知，直线 L 与椭圆 E 总有公共点的充要条件是椭圆与 y 轴有公共点且点(0，b)落在椭圆的内部或椭圆上．

椭圆与 y 轴有公共点，则|a|≥1；

点(0，b)在椭圆内部或椭圆上，则有

$$\frac{(0-1)^2}{a^2} + b^2 \leq 1,$$

即 $-\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \leq b \leq \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}$

∴直线 *l* 与椭圆 E 总有公共点的条件是

$$\begin{cases} |a| \geq 1, \\ -\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \leq b \leq \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{|a|} \end{cases}$$

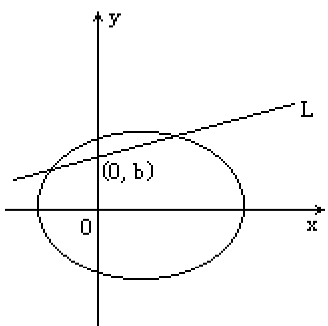


图 283

1070．如图 284，已知椭圆 C：

$\dfrac{x^2}{24} + \dfrac{y^2}{16} = 1$，直线L：$\dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{8} = 1$，P是*l*上一点，射线OP交椭圆于点R，又点 Q 在 OP 上且满足|OQ|×|OP|=|OR|²

当点 P 在 *l* 上移动时，求点 Q 的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线．

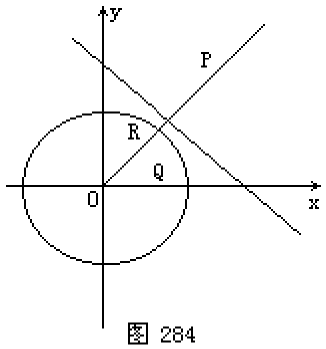


图 284

【精析】 由于动点 P 对定点 O 作平动和转动的复合运动，故选取 O 为极点．

【解答】 以 O 为极点，Ox 为极轴建立极坐标系，则椭圆 C 的极坐标方程为

$$\rho^2=\frac{48}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta}$$

直线 *l* 的极坐标方程为 $\rho=\frac{24}{2\cos\theta+3\sin\theta}$

设 Q(ρ，θ)、P(ρ₁，θ)、R(ρ₂，θ)则

$$\rho_1=\frac{24}{2\cos\theta+3\sin\theta}，\ \rho_2^2=\frac{48}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta}$$

∵ $|OP|\times|OQ|=|OR|^2$，∴ $\rho_1\rho=\rho_2^2$

$$\therefore\rho=\frac{4\cos\theta+6\sin\theta}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta}\ (\rho>0)$$

即为 Q 点的极坐标方程，化为直角坐标方程得：

$$\frac{2(x-1)^2}{5}+\frac{3(y-1)^2}{5}=1,\quad (x^2+y^2\neq 0).$$

故点 Q 的轨迹是除去原点的椭圆．

1071．如图 285，已知直线 *l* 过坐标原点，抛物线 C 的顶点在原点，焦点在 x 轴正半轴上，若点 A(－1，0)和点 B(0，8)关于 *l* 的对称点都在 C 上，求直线 *l* 和抛物线 C 的方程．

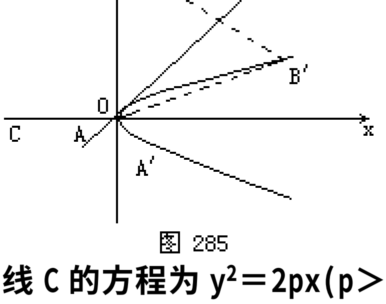


图 285

【精析】 设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$，直线 *l* 的方程为：$y=x\tan\alpha\,(0<\alpha<\pi/2)$．

设点 A、B 关于直线 *l* 的对称点分别为 A′、B′，则有

$\angle xOA'=\pi+2\alpha$

$\angle xOB'=2\alpha-\pi/2$

又 $|OA'|=|OA|=1$

$|OB'|=|OB|=8$

以原点 O(0，0)为极点，Ox 轴为极轴建立极坐标系，则抛物线 C 的方程为 $\rho\sin^2\theta=2p\cos\theta\ (p>0)$ 直线 l 的方程为：$\theta=\alpha$，点 A、B 的坐标分别是(1，π)、(8，π/2)，A、B 关于直线 l 的对称点 A′、B′的坐标分别是 $(1,\ \pi+2\alpha)$、$(8,\ 2\alpha-\frac{\pi}{2})$，

∵点 A′、B′都在抛物线 C 上．

$$\begin{cases}\therefore \sin^2(\pi+2\alpha)=2p\cos(\pi+2\alpha)\\ 8\sin^2(2\alpha-\frac{\pi}{2})=2p\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

从而有 $\begin{cases}\sin^2 2\alpha=-2p\cos 2\alpha & ①\\ 4\cos^2 2\alpha=p\sin 2\alpha & ②\end{cases}$

两式相除得 $\tan^3 2\alpha=-8$，从而有 $\tan 2\alpha=-2$

据 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$，可得

$$\tan^2\alpha-\tan\alpha-1=0\ (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

解之得 $\tan\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

①、②两式相乘，得 $-p^2=\sin 4\alpha$

$\because \sin 4\alpha=\frac{2\tan 2\alpha}{1+\tan^2 2\alpha}=\frac{-4}{1+4}=-\frac{4}{5}$

$\because\ p^2=\frac{4}{5}$，从而据 $p>0$ 得：$p=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

综合上述即得直线 l 与抛物线 C 的方程分别为：

$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$，$y^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}x$

1072．已知直线 $x-2y-m=0$ 与圆

$\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\alpha+3,\\ y=\sqrt{5}\sin\alpha+3\end{cases}$ (α 为参数)相交，求 m 的取值范围．

【解答】 由题设知圆心为(3，3)，半径为 $\sqrt{5}$，根据直线与圆关系的性质，得 $0\le\frac{|3-2\times3-m|}{\sqrt{1+(-2)^2}}<\sqrt{5}$

解得 $-8<m<2$．

1073．求直线 l：$\begin{cases}x=1-\frac{1}{5}t\\ y=1+\frac{2}{5}t\end{cases}$ (t 为参数)与圆 C：

$x^2+y^2=25$ 相交弦的中点坐标．

【解答】 将直线 l 参数方程标准化：

$$\begin{cases} x=1-\dfrac{\sqrt{5}}{5}m, \\ y=1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}m. \end{cases} \quad (m=\frac{t}{\sqrt{5}}) \quad ①$$

将①式代入圆方程整理得

$m^2+\frac{2\sqrt{5}}{5}m-23=0$.

所以 $m_1+m_2=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$m_1m_2=-23$，

而弦中点所对应参数为$\frac{1}{2}(m_1+m_2)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，故相交弦中点坐标为

$x=1-\frac{\sqrt{5}}{5}(-\frac{\sqrt{5}}{5})=\frac{6}{5}$，

$y=1+\frac{2\sqrt{5}}{5}(-\frac{\sqrt{5}}{5})=\frac{3}{5}$.

所以弦中点坐标为$(\frac{6}{5}，\frac{3}{5})$.

2002年高考数学模拟试题(一)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知：$A=\{y|y=x^2-2x+2\}$，$C=\{y|y=-x^2+2x+8\}$．则$A\cap B=$

[　　]

A．$\{y|1\le y\le 9\}$　　B．$\{y|y\le 9\}$

C．$\{y|y\ge 1\}$　　D．以上都不对

2．知$\alpha=\arg(2+i)$，$\beta=\arg(-3+i)$，则$\alpha-\beta$等于

[　　]

A．$\frac{5\pi}{4}$　　B．$\frac{3\pi}{4}$

C．$-\frac{\pi}{4}$　　D．$-\frac{3\pi}{4}$

3．如图1－1，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=2\sqrt{17}$，$BB_1=4\sqrt{2}$，E为B_1C_1的中点，则异面直线BE与A_1C所成角的余弦值为

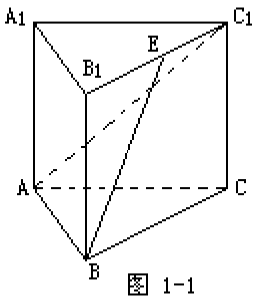


图 1-1

[　　]

A．$\frac{31}{70}$　　B．$\frac{1}{2}$

C．$\frac{3}{7}$　　D．$\frac{3}{14}$

4．下列各式中计算结果正确的有________个

[　　]

①$\sin^2 1°+\sin^2 2°+\cdots+\sin^2 88°+\sin^2 89°=1$；

②$\tan 1°\cdot\tan 2°\cdot\cdots\cdot\tan 88°\cdot\tan 89°=1$；

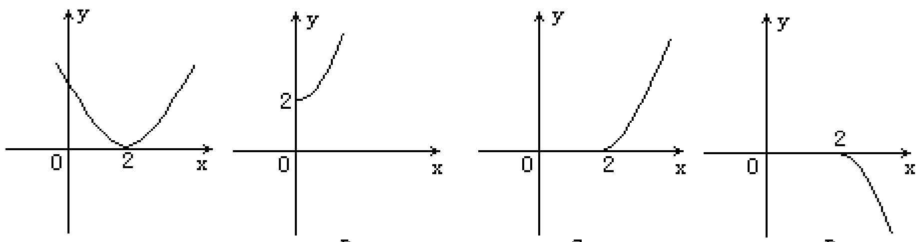
③$\lg\tan 1°\cdot\lg\tan 2°\cdot\cdots\cdot\lg\tan 88°\cdot\lg\tan 89°=1$．

A．0　　B．1

C．2　　D．3

5．函数$f(x)=\sqrt{x}+2(x\ge 0)$的反函数$f^{-1}(x)$的图象是

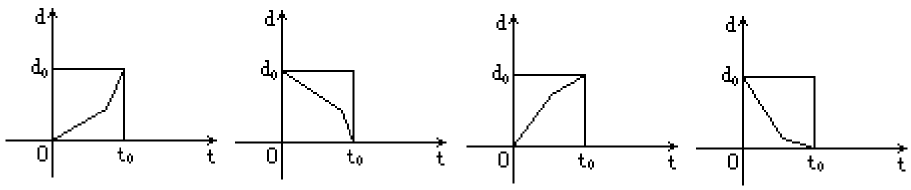
[　　]



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

6．某学生离家去学校，由于怕迟到，所以一开始就跑步，等跑累了再走余下的路程．在如图中，纵轴表示离学校的距离，横轴表示出发后的时间，则四个图形中较符合该学生走法的是

[　　]



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

7．设全集I＝R，集$A=\{x|\lg x<0\}$，$B=\{x|\frac{1}{x}\leq 1\}$，则列关系中正确的是

[　　]

A．$A\subset\overline{B}$　　　　B．$A\supset\overline{B}$

C．$A=\overline{B}$　　　　D．$\overline{A}\cup B=R$

8．设直线 a 在平面 M 内，则平面 M 平行于平面 N 是直线 a 平行于平面 N 的

[　　]

A．充分条件且非必要条件

B．必要条件且非充分条件

C．充要条件

D．既不是充分条件也不是必要条件

9．正五棱柱有 10 个顶点，在其中取 4 个不共面的点，则不同的取法共有

[　　]

A．170 种　　　　B．180 种

C．190 种　　　　D．200 种

10．一个球的外切圆锥的高是这个球的直径的 2 倍，那么圆锥的体积和球的体积之比等于

[　　]

A．2∶1　　　　B．3∶2

C．9∶8　　　　D．7∶5

11．定义离心率为黄金比$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的椭圆为“黄金椭圆”．设$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞b＞0)为“黄金椭圆”，F、A 分别是它的左焦点和右顶点，B 是它的短轴的一个端点，则∠ABF 为

[　　]

A．60°　　　　B．75°

C．90°　　　　D．120°

12．四面体 ABCD 被平行于棱 AC、CD 的平面 EFGH 所截(如图 1－2)，其中 AC=AD=BC＝BD，AB=2CD，则当四边形 EFGH 面积最大时，AH∶HC=

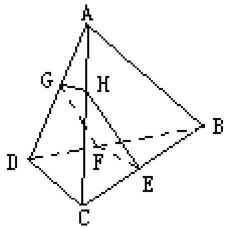


图1-2

[　　]

A．1∶1　　　　B．1∶2

C．2∶1　　　　D．1∶3

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上．

13．非零实数 x、y、z 成等差数列，x＋1、y、z 与 x、y、z＋2 均成等比数列，则 y 的值等于________．

14．若$(2x^3+3x-1)^n(n\in N)$的展开式中各项系数的和为 1024，则展开式中 x^2 的系数是________．

15．若 2A＋2B＋C=0，则直线 Ax＋By＋C＝0(A、B、C∈R)被抛物线 $y^2=2x$ 所截得的线段的中点 M 的轨迹方程是________．

16．欲在一条直路一侧每隔 5m 插一棵树苗，共有 20 棵树苗，树苗所插位置依次编号为 1，2，…，19，20 号．现由一汽车将 20 棵树苗放至第 n 号位置，然后由 1 人从第 n 号位置开始，完成插苗工作，每次只插 1 棵，插完后返回第 n 号取树苗，则汽车应将 20 棵树苗放在第________号位置，才使植树人所走路程最少，最少路程是________m．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(本小题满分 12 分)设 z_1，$z_2\in C$，且$|z_1|=3$，$|z_3|=5$，$|z_1-z_2|=7$，求$\dfrac{z_1}{z_2}$的值．

18．(本小题满分 12 分)如果三个正数 1，x，y 依次是一个等差数列的第 l,m,n 项，又依次是一个等比数列的第 l,m,n 项，求证 $y^{x-1}=x^{y-1}$．

19．(本小题满分 12 分)如图 1－3 在三棱锥 S—ABC 中，SA⊥面 ABC，SA=3a，AB=BC＝2a，∠ABC=120°．

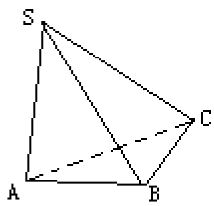


图 1-3

(1)求侧面 SBC 与底面 ABC 所成二面角的大小；

(2)求点 A 到面 SBC 的距离．

20．(本小题满分12分)已知$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})(a>1，x\geq 1)$．

(1)求 $f^{-1}(x)$，并指出它的定义域；

(2)若$f^{-1}(n)<\frac{1}{2}(2^n+2^{-n})$(其中$n\in N$)，求a的取值范围；

(3)设 $b_n=f^{-1}(n)$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，求证：当 a 在(2)的取值范围内时，对任意自然数n，都有$S_n<2^n-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$．

21．(本小题满分 12 分)某种汽车，购买时费用为 10 万元，每年应交保险费、养路费、油费合计 9000 元，汽车的维修费平均第一年为 2000 元，第二年为 4000 元，第三年为 6000 元，依等差数列递增，问这种汽车使用多少年报废合算(即使用多少年的平均费用最少)？

22．(本小题满分 14 分)已知 A 是双曲线$(1-m^2)x^2+m^2y^2=m^2(m>1)$的上支顶点，M 是上支双曲线与直线 $y=-x$ 的交点．一条以 A 为焦点、顶点 P 在 y 轴上且开口向下的抛物线经过 M 点，又直线 PM 的斜率k的取值范围是$\frac{1}{4}\leq k\leq\frac{1}{3}$，求实数m的取值范围．

[参考答案提示]

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	D	D	B	C	D	A	A	C	A	C	A

提示：

1．集合 A 和集合 B 分别是两个函数的值域，它们是数集．

在集合 A 中，$y=(x-1)^2+1\geq 1$，故有 $A=\{y|y\geq 1\}$．

在集合 B 中，$y=-(x-1)^2+9\leq 9$，故有 $B=\{y|y\leq 9\}$．

所以 $A\cap B=\{y|1\leq y\leq 9\}$．

2．考查辐角主值知识及三角公式的应用能力．

由$\alpha=\arg(2+i)$，得$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$；

由$\arg(-3+i)=\beta$，得知$\frac{3\pi}{4}<\beta<\pi$，$\tan\beta=-\frac{1}{3}$；

所以，$-\pi<\alpha-\beta<-\frac{\pi}{2}$，且$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$，

$\alpha-\beta=-\frac{3\pi}{4}$，故应选D．

对于辐角主值的范围和角的范围计算，学生常常忽视，应给予及时纠正．

3．延长B_1C_1到M，使$C_1M=\frac{1}{2}B_1C_1$，连结CM，则$\angle A_1CM$是异面直线BE与A_1C所成角．再通过解三角形求得异面直线BE与A_1C所成角的余弦值为$\frac{3}{14}$．因此选D．

4．

①由 $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ 及 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得：

原式$=(\sin^2 1°+\cos^2 1°)+(\sin^2 2°+\cos^2 2°)+\cdots+(\sin^2 44°+\cos^2 44°)+\sin^2 45°=44.5$，故①不正确；

②由 $\tan(90°-\alpha)=\cot\alpha$ 及 $\tan\alpha\cot\alpha=1$ 得：原式$=(\tan 1°\cot 1°)(\tan 2°\cot 2°)\cdots(\tan 44°\cot 44°)\tan 45°=1$，故②正确；

③由 $\tan 45°=1$ 知 $\lg\tan 45°=0$，即原式=0，故③不正确．所以选 B．

5．$f^{-1}(x)=(x-2)^2(x\geq 2)$，故选 C．

6．开始速率大，直线更陡；后来是走路，速率小，直线平缓，$t=0$ 时，离学校 d_0，故选 D．

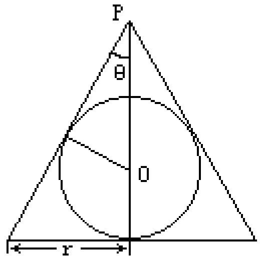
7．本题考查对数不等式，分式不等式解法，以及集合关系等有关知

识．集合$A=\{x|0<x<1\}$；$B=\{x|x<0$或$x\geq 1\}$，所以$\overline{B}=\{x|0\leq x<1\}$，因此$A\subset\overline{B}$，应选A．区间补集的端点取或不取，应细心把握．

8．若平面 M 平行于平面 N，则直线 a 平行于平面 N．若直线 a 平行于平面 N，平面 M 不一定平行于平面 N．所以平面 M 平行于平面 N 是直线 a 平行于平面 N 的充分条件且非必要条件．因此选 A．

9．$2C_5^1C_5^3+C_5^2C_5^2-C_5^2=190$，故选C．

10．设球的半径为 R，右图为轴切圆



第10题图

$h=4R\quad \sin\theta=\dfrac{R}{4R-R}=\dfrac{1}{3}$

$r=h\tan\theta=4R\times\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}R$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi(\sqrt{2}R)^2\times 4R}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{2}{1}$$

11．由条件$e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$可推出$|AB|^2+|BF|^2-|FA|^2=2(a^2-ac-c^2)=0$．创设一些相对新颖的情境，考查考生利用已有知识的创新能力，是未来高考的方向．

12．取 DC 的中点 P，连结 AP，BP

∵CD⊥AP，CD⊥BP

∴CD⊥面 ABP　CD⊥AB

令 AH：HC＝a，CD＝b，AB＝2b

$GH=EF=\dfrac{ab}{a+1}$

$GF=HE=\dfrac{1}{1+ap}\times 2b=\dfrac{2b}{1+a}$

$$S_{EFGH}=\frac{2ab^2}{(a+1)^2}=\frac{2b^2}{a+\frac{1}{a}+2}\le\frac{b^2}{2}$$

当 a=1 时取“=”，故选 A．

二、填空题

13．12　14．－90　15．$(y-1)^2=x-1$　16．10 或 11，1000m

提示：13．$\begin{cases}2y=x+z & ①\\ y^2=(x+1)z & ②\\ y^2=x(z+2) & ③\end{cases}$

②/③得　z＝2x

代入①得 $x=\dfrac{2}{3}y\quad z=\dfrac{4}{3}y$

代入②得　y=12

14．令 x＝1

$(2+3-1)^n=4^n=1024=4^5$

n=5

x^2的系数$C_5^2\times 3^2\times(-1)^3=-90$

15．设 M(x，y)

$$A\times \frac{y^2}{2}+By+C=0$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-\frac{\frac{B}{A}}{2}}{2}=-\frac{B}{A}$$

$$x=\frac{B^2-AC}{A^2}$$

$$(y-1)^2=(\frac{A+B}{A})^2=\frac{A^2+2AB+B^2}{A^2}\qquad C=-2A-2B$$

$$x-1=\frac{B^2-AC-A^2}{A^2}=\frac{B^2-A^2+2A^2+2AB}{A^2}=\frac{A^2+B^2+2AB}{A^2}$$

$$(y-1)^2=x-1$$

16．$S=\{[1+2+\cdots+(n-1)]+[1+2+\cdots+(20-n)]\}\times5\times2$

$$=[\frac{(n-1)n}{2}+\frac{(21-n)(20-n)}{2}]\times5\times2$$

$$=10(n^2-21n+210)$$

$$=10[(n-10.5)^2+210-10.5^2]$$

当 $n=10$ 或 11 时，S 最小为 1000m．

三、解答题

17．$z_1=3(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$z_2=5(\cos\beta+i\sin\beta)$，

则 $|z_1-z_2|^2=(3\cos\alpha-5\cos\beta)^2+(3\sin\alpha-5\sin\beta)^2=49$．化得：

$$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sin(\alpha-\beta)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3}{5}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]$$

$$=-\frac{3}{10}\pm\frac{3\sqrt{3}}{10}i.$$

18．不妨依题设先写出两个数列的第 l，m，n 项：

$a_1+(l-1)d=1=b_1q^{l-1}$

$a_1+(m-1)d=x=b_1q^{m-1}$

$a_1+(n-1)d=y=b_1q^{n-1}$(其中 $b_1\neq0$)

显然，上面三等式的左端是和的运算，作差可以消去 a_1；右端是积的运算，作商可以约去 b_1．

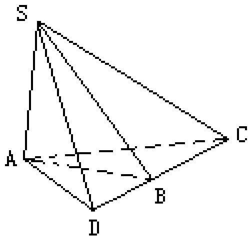
即 $x-1=(m-l)d$，$x=\frac{x}{1}=q^{m-l}$；$y-1=(n-l)d$，$y=\frac{y}{1}=q^{n-l}$．

从而 $y^{x-1}=(q^{n-l})^{(m-l)d}=q^{(n-l)(m-l)d}$；

$x^{y-1}=(q^{m-l})^{(n-l)d}=q^{(n-l)(m-l)d}$．

故 $y^{x-1}=x^{y-1}$．

19．(1)如图所示，从 A 作 AD⊥BC，交 CB 延长线于 D，连结 SD．



第19题图

由 SA⊥面 ABC，得 SD⊥BC.

故∠ADS 是侧面 SBC 与底面 ABC 所成二面角的平面角.

由∠ABC＝120°，知∠ABD=60°. 在 Rt△ADB 中，AD＝Absin 60° $=\sqrt{3}a$. 在Rt△SAD中，$\tan\angle ADS=\dfrac{SA}{AD}=\sqrt{3}$，得$\angle ADS=60°$.

故侧面 SBC 与底面 ABC 所成角为 60°.

(2)设 A 到面 SBC 的距离为 d，利用体积法有

$V_{S-ADC}=V_{A-SDC}$,

即$\dfrac{1}{3}SA(\dfrac{1}{2}CD\cdot AD)=\dfrac{1}{3}d(\dfrac{1}{2}CD\cdot SD)$.

而$SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=\sqrt{9a^2+3a^2}=2\sqrt{3}a$,

$\therefore d=\dfrac{SA\cdot AD}{SD}=\dfrac{3a\cdot\sqrt{3}a}{2\sqrt{3}a}=\dfrac{3}{2}a$.

故点A到面SBC的距离为$\dfrac{3}{2}a$.

20. (1)由$y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})(a>1,x\geq 1)$得$a^y=x+\sqrt{x^2-1}$,

$\therefore (a^y-x)^2=x^2-1$,

即$(a^y)^2-2xa^y+1=0$.

$\therefore x=\dfrac{1}{2}(a^y+a^{-y})$,

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$.

$\because x\geq 1$，$x+\sqrt{x^2-1}\geq 1$，$a>1$,

$\therefore f(x)$的值域为$[0,+\infty)$.

因此，$f^{-1}(x)$的定义域为$[0,+\infty)$.

(2)由$f^{-1}(n)<\dfrac{1}{2}(2^n+2^{-n})$，得

$\dfrac{1}{2}(a^n+a^{-n})<(2^n+2^{-n})$

$\because a^n>0$,

$\therefore a^{2n}-(2^n+2^{-n})a^n+1<0$,

即$(a^n-2^n)(a^n-2^{-n})<0$,

$\therefore 2^{-n}<a^n<2^n$.

又$\because a>1$,

$\therefore 1<a<2$.

(3)由(1)与(2)得

$b_n=f^{-1}(n)=\frac{1}{2}(a^n+a^{-n})$，

$\frac{1}{2}(a^n+a^{-n})<\frac{1}{2}(2^n+2^{-n})$．

$\therefore S_n=\frac{1}{2}(a+a^{-1})+\frac{1}{2}(a^2+a^{-2})+\cdots+\frac{1}{2}(a^n+a^{-n})$

$<\frac{1}{2}(2+2^{-1})+\frac{1}{2}(2^2+2^{-2})+\cdots+\frac{1}{2}(2^n+2^{-n})$

$=\frac{1}{2}(2+2^2+\cdots+2^n)+\frac{1}{2}(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n})$

$=2^n-1+\frac{2^{-1}(1-2^{-n})}{2(1-2^{-1})}$

$=2^n-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$

$=2^n-\frac{1}{2}(1+2^{-n})$．

$\because\frac{1}{2}(1+2^{-n})>\sqrt{1\cdot 2^{-n}}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$，$\therefore S_n<2^n-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$．

21．使用 n 年报废合算，则平均每年的费用为

$S_n=\frac{1}{n}[(0.2+0.4+\cdots+0.2n)+10+0.9n]$

$=\frac{n}{10}+\frac{10}{n}+1$

$\geq 2\sqrt{\frac{n}{10}\cdot\frac{10}{n}}+1$

=3．

当且仅当 $\frac{n}{10}=\frac{10}{n}$，即$n=10$时，上式取等号．

故使用 10 年报废合算．

22．双曲线为$-\frac{\frac{x^2}{m^2}}{m^2-1}+\frac{y^2}{1}=1(m>1)$，其上支顶点为$A(0,1)$．

由$\begin{cases}y=-x,\\(1-m^2)x^2+m^2y^2=m^2,\end{cases}$ 得

交点 M(－m，m)．

再设抛物线顶点为 P(0，t)(t＞1)，则抛物线方程为 $x^2=-4(t-1)(y-t)$，其准线为 y＝2t－1．

由定义，得$\sqrt{(-m-0)^2+(m-1)^2}=(2t-1)-m$，

又$k=\frac{t-m}{0+m}$，

于是便得$\begin{cases} m^2+(m-1)^2=(2t-1-m)^2 \\ \frac{1}{4}\le\frac{t-m}{m}\le\frac{1}{2} \end{cases}$

即$\begin{cases} 4t^2-4(m+1)t+4m-m^2=0 \\ \frac{5}{4}\le\frac{t}{m}\le\frac{4}{2} \end{cases}$.

注意到 t＞1，m＞1，故又化为

$\begin{cases} t=\frac{1}{2}(m+1+\sqrt{2m^2-2m+1}), \\ \frac{5}{4}m\le t\le\frac{4}{3}m. \end{cases}$

于是便得$\begin{cases} 5m\le 2(m+1+\sqrt{2m^2-2m+1}) \\ 8m\ge 3(m+1+\sqrt{2m^2-2m+1}) \end{cases}$，由此得$\frac{12}{7}\le m\le 4$.

2002年高考数学模拟试题(二)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设全集$I=R$，$A=\{x|f(x)<0\}$，$B=\{x|g(x)>0\}$，且$\varnothing\subset A\subset B\subset R$，则集合$M=\{x|f(x)\geq 0且g(x)\leq 0\}$等于

[ ]

A．$\overline{B}$　　B．$\overline{A}$

C．$\varnothing$　　D．$\overline{A}\cup\overline{B}$

2．下面命题：

①若实系数一元二次方程的两根是共轭复数，则该方程的判别式必小于零；

②若$\arg z=\theta$，则$\arg(z^2)=2\theta$；

③两个复数相等的充要条件是它们的幅角主值和模分别相等．

其中正确命题的个数是

[ ]

A．0　　B．1

C．2　　D．3

3．若直线l_1：$x-2y+1=0$；直线l_2：$y=x-2$，则直线l_1到l_2的角的正弦值为

[ ]

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{10}}{10}$

4．满足方程$\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{6}-x)$的x的最小正值是

[ ]

A．$\frac{\pi}{36}$　　B．$\frac{\pi}{12}$

C．$\frac{5}{36}\pi$　　D．$\frac{\pi}{4}$

5．已知幂函数$y=f(x)$的图象经过点$(2，\frac{1}{4})$，则该函数的图象

[ ]

A．关于原点对称　　B．关于x轴对称

C．关于y轴对称　　D．关于直线y=x对称

6．今天是星期日，再过3^{33}天是

[ ]

A．星期一　　B．星期二

C．星期五　　D．星期六

7．各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2\cdot a_4=3$，则$\log_{\frac{1}{3}}a_1+\log_{\frac{1}{3}}a_2+\log_{\frac{1}{3}}a_3+\log_{\frac{1}{3}}a_4+\log_{\frac{1}{3}}a_5$的值是

[　　]

A．5　　　　B．-5

C．$-\dfrac{5}{2}$　　　　D．以上都不对

8．m=3 是直线(2－m)x＋my＋3=0 和直线－x＋my＋5=0 互相平行的

[　　]

A．充分但不必要条件

B．必要但不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

9．在地球北纬 45°圈上有两座城市，其经度差为 90°，若地球半径为 R，那么这两座城市的距离为

[　　]

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi R$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi R$

C．$\dfrac{\pi}{3}R$　　　　D．R

10．已知直线 l：2x－y=0 和⊙O：$x^2+y^2=1$．若将⊙O 平移使与 l 相切，那么以下结论正确的是

[　　]

A．向左或向右平移$\sqrt{5}$个长度单位

B．向上或向下平移$\sqrt{5}$个长度单位

C．向左或向右平移$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$个长度单位

D．向上或向下平移$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$个长度单位

11．抛物线的焦点在y轴上，准线与椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左准线重合，并且经过椭圆的右焦点，那么它的对称轴方程是

[　　]

A．y＝24　　　　B．$y=\pm 2\sqrt{6}$

C．$y=2\sqrt{6}$　　　　D．$y=\pm 2\sqrt{2}$

12．如图 2－1 在四棱锥 P—ABCD 中，底面 ABCD 为矩形，PA⊥平面 ABCD，连结 AC、BD，在这个立体图形中，互相垂直的平面有

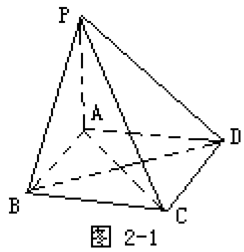


图 2-1

[　　]

A．4 组　　B．6 组

C．7 组　　D．8 组

二、填空题：本大题共 4 小题；每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上．

13．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_{n-1}^{n-1}-C_{n}^{n-1}}{2+4+\cdots+2n}=$ ________．

14．已知椭圆 $x^2+4y^2-2ax+a^2-4=0$ 的左顶点在直线 $x-y+4=0$ 上，则 a=________．

15．已知 $(1-2x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6$，则 $|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_6|$ 的值为________．

16．平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 V，则三棱锥 $A-BCA_1$ 的体积是________．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(本题满分12分)若 $a\geq -\dfrac{1}{2}$，试解关于x的方程 $1+\log_{2}x=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$．

18．(本题满分 12 分)在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1/3$，且前 n 项的算术平均值等于第 n 项的 2n－1 倍(n∈N)．

(1)试确定它的通项公式；

(2)求此数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

19．(本题满分 12 分)如图 2－2，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面积边长为2，侧棱长为 $\sqrt{6}$，D、E分别为 AA_1、B_1C_1 的中点．

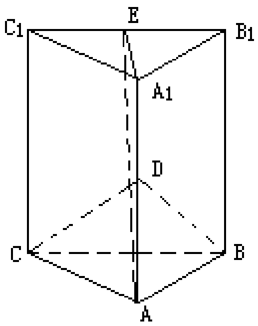


图 2-2

(1)求证：平面 AA_1E⊥平面 BCD；

(2)求直线 A_1B_1 与平面 BCD 所成的角．

20．(本题满分 12 分)已知△ABC 三个内角 A、B、C 满足 A＋C=2B．

设$x=\cos\frac{A-C}{2}$，$f(x)=\cos B\cdot(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C})$．

(1)试求函数 f(x)的解析表达式及定义域；

(2)在定义域内讨论这个函数的单调性，并加以证明；

(3)求这个函数的值域．

21．(本题满分 12 分)某人有人民币若干，若存入银行，年利率为 6%；若购某种股票，年分红利为 24%，每年储蓄的利息和买股票所分的红利都存入银行．

(1)问买股票多少年后所得红利才能和原来的投资款相等？

(2)要经过多少年后，买股票所得的红利与储蓄所拥有的人民币相等．(lg2＝0.3010，lg3=0.4771，lg1.06=0.0253)．

22．(本题满分14分)椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与双曲线$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$ (m＞0，n＞0)的一个交点为 A，它们有共同的焦点 F_1、F_2．

(1)求证△AF_1F_2的面积等于 nb；

(2)设点A在第一象限，△AF_1F_2的面积为1，且$\tan\angle AF_1F_2=\frac{1}{2}$，$\tan\angle AF_2F_1=-2$，求双曲线的方程．

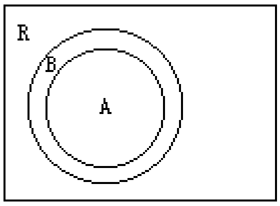
[参考答案提示]

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	D	B	C	D	C	A	C	B	B	B

提示：

1．如图所示，$M=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{B}$，所以答案为A



第1题图

2．①两相同的实根也算共轭复数，Δ=0②若θ＞π，不成立③显然不对 ∴①②③都不对，故选 A

3．$k_1=\frac{1}{2}$，$k_2=1$

$\therefore\tan\alpha=\frac{k_2-k_1}{1-k_1k_2}=\frac{1}{3}$

$\therefore\sec^2\alpha=1+(\frac{1}{3})^2=\frac{10}{9}$，$\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$，$\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

4．用代入法．或$\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\sin[(x-\frac{\pi}{6})+(x+\frac{5}{12}\pi)]=$
$\sin(x-\frac{\pi}{6})\cdot\cos(x+\frac{5}{12}\pi)+\cos(x-\frac{\pi}{6})\cdot\sin(x+\frac{5}{12}\pi)$，则$x=\frac{\pi}{12}$时，原式$=\cos(x-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{6}-x)$

5．由$y=x^{\alpha}$过$(2,\ \frac{1}{4})$可知$\alpha=-2$，即$y=x^{-2}$，所以y为偶函数．

6．$3^{33}=(3^3)^{11}=(28-1)^{11}=7m-1$(m 为一整数)

7．因$a_2a_4=3$所以$a_3=3^{\frac{1}{2}}$而$\log_{\frac{1}{3}}a_1+\log_{\frac{1}{3}}a_2+\log_{\frac{1}{3}}a_3+\log_{\frac{1}{3}}a_4+\log_{\frac{1}{3}}a_5$

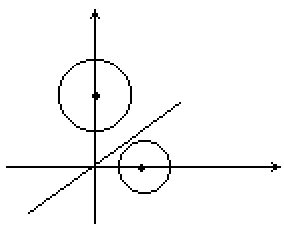
$=\log_{\frac{1}{3}}(a_1a_5)(a_2a_4)\cdot a_3$

$=\log_{\frac{1}{3}}3^{\frac{5}{2}}=-\frac{5}{2}$

8．因$m=3\Rightarrow(2-m)x+my+3=0$与$-x+my+5=0$平行，而$(2-m)+my+3=0$与$-x+my+5=0$平行$\Rightarrow m=3$(当$m=0$也成立)，所以是充分不必要条件．

9．易知两城市之间的直线距离为 R，所以两城市对应的圆心角为$\frac{\pi}{3}$，故所求距离为$\frac{\pi}{3}R$．

10．如图所示，易知向上或向下移$\sqrt{5}$个单位或向左向右移$\frac{\sqrt{5}}{2}$时圆与直线相切所以应选 B



第10题图

11．椭圆：$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，在准线$x=-\frac{a^2}{c}=-4$ ∴抛物线$P=4$方程为$(y-m)^2=2\times4(x+2)=8x+16$，将椭圆右焦点$(1,\ 0)$代入得$m=\pm2\sqrt{6}$

12．平面 PAB⊥ABCD，面 PAC⊥面 ABCD，面 PAD⊥面 ABCD，面 PAB⊥面 PBC，面 PAD⊥面 PCD，面 PBD⊥面 PAC，共有六组互相垂直的平面．

二、填空题

13．0　14．-2　15．3^6　16．$\frac{1}{6}V$

提示：13．$\frac{C_{n-1}^{n-1}-C_{n}^{n-1}}{2+4+\cdots+2n}=\frac{1-n}{2\times\frac{n(n+1)}{2}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{n^2+n}=0$．

14．椭圆方程为$\frac{(x-a)^2}{4}+y^2=1$，所以左顶点坐标为$(a-2，0)$，代入直线方程得 $a=-2$

15．易知 a_0、a_2、a_4、$a_6>0$，a_1、a_3、a_5都小于 0，所以$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_6|=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=3^6$

16．$V_{A-BCA_1}=V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h$

$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}\cdot h=2S_{\triangle ABC}\cdot h=V$

$\therefore V_{A-BCA_1}=\frac{1}{6}V$

三、解答题

17．原方程同解于$\begin{cases}x>0, & ①\\ x-a>0, & ②\\ x^2-2(a+1)x+a^2=0. & ③\end{cases}$

由③知$\Delta=4(2a+1)$，由已知可得$\Delta\geq0$，

∴③的两解为$x_1=a+1+\sqrt{2a+1}$，$x_2=a+1-\sqrt{2a+1}$，

显然 $x_1>0$，且 $x>a$ 适合①②，恒为原方程的解．

解$\begin{cases}a+1-\sqrt{2a+1}>0,\\ a+1-\sqrt{2a+1}>a,\end{cases}$

得$-\frac{1}{2}\leq a<0$．

注意到$a=-\frac{1}{2}$时，$\Delta=0$，于是

当$a=-\frac{1}{2}$或$a\geq0$时，原方程只有一个实数解$x=a+1+\sqrt{2a+1}$；

当$-\frac{1}{2}<a<0$时，原方程有两上不同实数解$x_{1，2}=(a+1)\pm\sqrt{2a+1}$．

18．(1)由已知，有$a_1=1／3$ $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=(2n-1)a_n$，

由此顺次推出$a_2=\frac{1}{3\times5}$，$a_3=\frac{1}{5\times7}$，$a_4=\frac{1}{7\times9}$，

猜想$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，$(n\in N)$，

下面用数学归纳法证明：①当 $n=1$ 时猜想显然成立；

②假设当$n=k$时猜想成立，即$a_k=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$，

又由已知有$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}=(2k-1)a_{k+1}$，

$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}=(2k-1)a_k$，

上述两式相减并整理可得

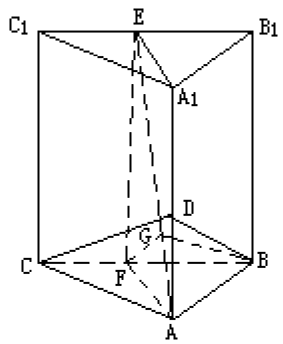
$(2k-1)a_k=(2k+3)a_{k+1}$，

$\therefore a_{k+1}=\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$，即当$n=k+1$时猜想成立.

综合①②知对一切 $n\in N$ 猜想成立.

(2)$S_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$.

19．(1)如图所示，先证 $BC\perp$平面 AA_1EF，从而平面 $AA_1E\perp$平面 BCD(F 为 BC 的中点)；



第19题图

(2)连 DF，由 DF=平面 $AA_1E\cap$平面 BCD.

在$Rt\triangle AEF$中，$\tan\angle EAF=\frac{EF}{AF}=\sqrt{2}$，

在$Rt\triangle ADF$中，$\tan\angle AFD=\frac{AD}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore\angle EAF$ 与$\angle AFD$ 互余，得 $AE\perp DF$.

又 $AE\perp BC$，则有 $AE\perp$平面 BCD，设垂足为 G，连 BG.

$\because A_1B_1\parallel AB$，$\therefore$ $\angle ABG$ 即为所求角.

容易求得$\angle ABG=30°$.

20．(1)$f(x)=\frac{2x}{4x^2-3}$，注意到

$0°\le\frac{|A-C|}{2}<60°$，又$\cos\frac{A-C}{2}=\cos\frac{|A-C|}{2}$，以及$\cos A\ne0$，

$\cos C\ne0$，$\therefore\frac{|A-C|}{2}\ne30°$.

故$\frac{1}{2}<x\leq 1$，且$x\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$．

于是函数定义域为$(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{\sqrt{3}}{2}，1]$．

(2)分别在$(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})$，$(\frac{\sqrt{3}}{2}，1]$上判定$f(x_1)-f(x_2)$的正负，可知该函数分别在这两个区间上均为减函数．

(3)由(2)可知$f(x)<-\frac{1}{2}$或$f(x)\geq 2$，于是函数值域$(-\infty，-\frac{1}{2})\cup[2，+\infty)$．

21．设该人民币 a 元，若购买股票，x 年后所拥有的总红利为

$y=a\cdot 24\%(1+6\%)^{x-1}+a\cdot 24\%(1+6\%)^{x-2}+\cdots+a\cdot 24\%(1+6\%)^{0}$

$=a\cdot 24\%(1+1.06+1.06^{2}+\cdots+1.06^{x-2})$

$=4a(1.06^{x}-1)$．

(1)令 $y=a$，则 $4a(1.06^{x}-1)=a$，解得 $x=4$．

故购买股票约 4 年后所得的红利才能和原来的投资款相等．

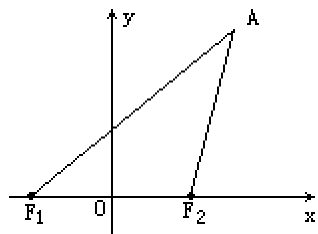
(2)若存入银行，则 x 年后，所拥有的资金为 $a(1+6\%)$

令 $y=a(1+6\%)^{x}$，即 $4a(1.06^{x}-1)=a\times 1.06^{x}$．

$\therefore 1.06^{x}=\frac{4}{3}$解得　$x=4.98=5$．

答：5 年后，购买股票所得的红利与储蓄所拥有的人民币相等．

22．(1)如图所示，设$\angle F_1AF_2=\theta$，$|F_1F_2|=2c$，$|AF_1|=p$，$|AF_2|=q$，则



第22题图

$$\begin{cases}p+q=2a,\\ p-q=2m.\end{cases}$$

故$\begin{cases}p=a+m,\\ q=a-m,\end{cases}$

又 $c^2=a^2-b^2=m^2+n^2$，

而$\cos\theta=\dfrac{p^2+q^2-(2c)^2}{2pq}=\dfrac{b^2-n^2}{a^2-m^2}$.

$\therefore\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2bm}{a^2-m^2}$,

于是 $S_{\triangle AF_1F_2}=\dfrac{1}{2}pq\sin\theta=bn$.

(2)直线如图，AF_1、AF_2的斜率分别为$\dfrac{1}{2}$、2，可得它们的方程，联立解得交点$A(\dfrac{5c}{3}, \dfrac{4c}{3})$，结合$S_{\triangle AF_1F_2}=1$可求$c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 而$m=\dfrac{|AF_1|-|AF_2|}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$，又$n^2=c^2-m^2=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$ 双曲线的方程为$\dfrac{12x^2}{5}-3y^2=1$.

2002年高考数学模拟试题(三)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若奇函数 $y=f(x)(x\neq 0)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x-1$，那么 $f(x-1)<0$ 的 x 的集合是

[　　]

A．$\{x|1<x<2\}$

B．$\{x|-1<x<0\}$

C．$\{x|x<0$ 或 $1<x<2\}$

D．$\{x|x<-2$ 或 $-1<x<0\}$

2．设 $|z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i|\leq 1$（z是复数），则 $|z|$ 的最大与最小值分别是

[　　]

A．$\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$，$\frac{\sqrt{2}}{2}-1$

C．$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}-1$　　　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$，$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3．把正方形的各边三等分，过各等分点分别引边的平行线把正方形分成矩形和小正方形，其中不是正方形的矩形的个数为________个

[　　]

A．22　　　　B．23

C．27　　　　D．36

4．$\frac{1}{\sin 50°}+\sqrt{3}\cos 50°$ 的值为

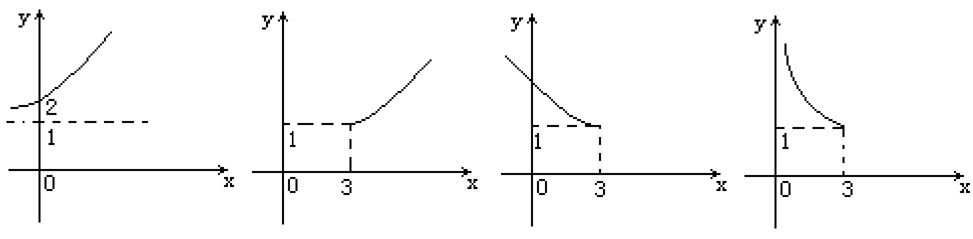
[　　]

A．1　　　　B．2

C．4　　　　D．-4

5．下列四个图形中，与函数 $y=3+\log_2 x(x\geq 1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的图形是

[　　]



A．　　　　B．　　　　C．　　　　D．

6．若 $x>y>1$ 且 $0<a<1$，下列不等式正确的是

[　　]

A．$a^x>a^y$　　　　B．$\log_a x>\log_a y$

C．$\log_x a>\log_y a$　　　　D．$x^a<y^a$

7．已知当 $x=6$ 时，不等式 $\log_a(x^2-2x-15)>\log_a(x+13)$ 成立，

则该不等式的解集是

[　　]

A．{x|－4＜x＜7}

B．{x|5＜x＜7}

C．{x|－4＜x＜－3} ∪ {|5＜x＜7}

D．{x|x＞5} ∪ {x|x＜－4}

8．两直线l_1：$x+y\sqrt{1-\cos\alpha}+b=0$，$l_2$：$x\sin\alpha+y\sqrt{1+\cos\alpha}-a=0$，且α

∈$(\pi,\ \frac{3\pi}{2})$，则l_1与l_2的位置关系是

[　　]

A．平行

B．垂直

C．平行或重合

D．不一定垂直

9．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，点 P 在棱 A_1B_1 上移动，则经过点P、B、D_1三点的$S_{\triangle PBD_1}$的最小值是

[　　]

A．$\frac{1}{2}a^2$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

C．$\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$　　　　D．$\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$

10．在圆 $x^2+y^2=4$ 上的点到直线 $4x+3y-12=0$ 的距离的最大值为

[　　]

A．$\frac{12}{5}$　　　　B．$\frac{2}{5}$

C．$\frac{22}{5}$　　　　D．$\frac{32}{5}$

11．椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$上的P点到它的左准线的距离是10，那么P点到它的右焦点的距离为

[　　]

A．15

B．12

C．10

D．8

12．一个球与一个正三棱柱的三个侧面和两个底面都相切，已知这

个球的体积是$\frac{32\pi}{3}$，那么该三棱柱的体积是

[　　]

A．$96\sqrt{3}$　　　　B．$16\sqrt{3}$

C．$24\sqrt{3}$　　　　D．$48\sqrt{3}$

二、填空题：本大题共 4 小题；每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上．

13．从 6 副不同颜色的手套中任取 4 只，其中恰好有一副同色的取法有________种．

14．直线 l 过抛物线 $y^2=4(x+1)$ 的焦点且倾斜角为 60°．那么，l 被抛物线截得的线段长为________．

15．已知二项式 $(3x+2)^n$ 的展开式中所有项的系数和为 3125，则此展开式中 x^4 的系数是________

16．在母线长为 2 的等边圆锥内作一个内接圆柱，当这个圆柱体积最大时，它的高是________．

三、解答题：本大题共 6 小题；共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(本题满分12分)已知复数 $z=1-\sin\theta+i\cos\theta\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$．求 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的模和辐角主值．

18．(本题满分 12 分)数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n=2n^2+n$．若这个数列有固定项，现从中抽取某一项(不包括首项、末项)后，余下的项的平均值是 79．求这个数列的项数 m，并问抽取的是第几项？

19．(本题满分 12 分)已知边长为 10 的等边三角形 ABC 的顶点 A 在平面α内，顶点 B、C 在平面α的上方，BD 为 AC 边上的中线，B、C 到平面α的距离 $BB_1=2$，$CC_1=4$．

(1)求证：BB_1∥平面 ACC_1

(2)求证：BD⊥平面 ACC_1

(3)求四棱锥 $A-BCC_1B_1$ 的体积

20．(本题满分 12 分)是否存在满足下列条件的二次函数 f(x)：(1)当 $|x|\leq 1$ 时 $|f(x)|\leq 1$；(2) $|f(2)|>8$，若存在，求出 f(x)的解析式；若不存在，说明理由．

21．(本题满分 12 分)某企业进行技术改造，提出两种方案．甲方案是：一次性投资 80 万元，引进一条先进生产线，每年均可增加收入 20 万元；乙方案是：一次性投资 60 万元，改进现有设备，每年均可减少成本开支 18 万元(减少成本开支相当于增加收入).资金往来都通过银行结算，银行进出款的年利率都是 5%．如果甲乙两种方案同时开始实施，实施的期限都是 10 年，问实施哪种方案所获得的净收益较高？

注①甲方案实施一年后见效益，乙方案一开始实施即见效益；

②净收益＝累计增加的总投入(或累计减少的成本开支)减去原投资额(均须计利息)

③必要时可参考以下数据：$1.05^9\approx 1.55$，$10.5^{10}\approx 1.63$，$1.05^{11}=1.71$．

22．(本题满分 14 分)已知 C_1：$x^2+y^2=1$ 与双曲线 C_2：$(x-1)^2$

$-y^2=1$，又直线 m 同时满足下列两个条件：

①与双曲线 C_2 相交；

②与圆 C_1 相切，且切点是直线 m 与双曲线 C_2 相交弦的中点．

试求直线 m 的方程．

[参考答案提示]

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	A	B	B	C	C	B	D	C	B	D

提示：

1．$f(-1)=-f(1)=0$，$f(x-1)<f(1)$ 或 $f(x-1)<f(-1)$．

$f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 和 $(+\infty,0)$ 上的增函数

$\therefore \begin{cases} x-1>0 \\ x-1<1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-1<0 \\ x-1<-1 \end{cases}$

$\therefore 1<x<2$ 或 $x<0$．

2．几何意义

$|z-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i|\leq 1$

表示以 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i)$ 为圆心以 1 为半径的圆面．

$\therefore$ 模 $|z|$ 最大为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 最小为 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$．

3．$C_4^2C_4^2-9-4-1=22$

4．猜测法，$\because 45°<50°<90°$

$\therefore \frac{1}{\sin 50°}+\sqrt{3}\cos 50°>1$

$(\because \frac{1}{\sin 50°}>1$，而 $\sqrt{3}\cos 50°$ 为正$)$

又：$\frac{1}{\sin 50°}<\frac{1}{\sin 45°}=\frac{2}{\sqrt{2}}$

$\cos 50°<\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ 原式 $<\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}<4$

$\therefore$ 只能选 B．

5．不一定求 $y=3+\log_2 x$ 的反函数，只要明确：原函数过 (1,3)．反函数过 (3，1)；原函数是增函数，反函数必是增函数．

6．用基本函数定义性质求解

7．$x=6$ 时．$x^2-2x-15=9$

$x+13=19$

$\therefore 0<a<1$

$0<x^2-2x-15<x+13$

$x^2-3x-28<0$

解得 $x\in(-4,7)$

$x^2-2x-15>0$

解得 $x\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

$\therefore x\in(-4,-3)\cup(5,7)$

8．由已知，$1\cdot\sin\alpha+\sqrt{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{1+\cos\alpha}=\sin\alpha+|\sin\alpha|$.

$\because \alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，$\therefore \sin\alpha<0$.

$\therefore 1\cdot\sin\alpha+\sqrt{1-\cos\alpha}\cdot\sqrt{1+\cos\alpha}=0$，$\therefore l_1\perp l_2$，故选B.

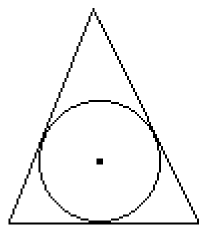
9．求出异面直线A_1B_2与BD_1的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$，即点P到BD_1的最短距离.

10．由题设，圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心到直线 $4x+3y-12=0$ 的距离为$d=\frac{|-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{12}{5}$，

$\therefore d+2=\frac{22}{5}$，选C.

11．$a=10$，$b=6$，$c=8$，左准线方程为$x=-\frac{25}{4}$. 设P到左焦点的距离为d_1，到右焦点的距离为d_2，首先根据第二定义有$\frac{d_1}{10}=\frac{8}{10}$，得$d_1=8$，再根据第一定义 $d_1+d_2=20$，得 $d_2=12$.

12．转化为平面图形，为正三角形的内切圆如图所示.



第12题图

$\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{32}{3}\pi\Rightarrow r=2$.

$\therefore$ 边长. $a=4\sqrt{3}$　　$h=2r=4$

$\therefore V=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\times4=48\sqrt{3}$

二、填空题

13．240

14．$\frac{16}{3}$

15．810

16．$\sqrt{3}/3$

提示：

13．$C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1=240$．

14．l过原点且斜率为$\sqrt{3}$．即$y=\sqrt{3}x$．代入$y^2=4(x+1)$得：

$3x^2=4(x+1)$

$x_1=2 \qquad x_2=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore |x_1-x_2|=\dfrac{8}{3}$

所截线段长$=\dfrac{8}{3}/\cos 60°=\dfrac{16}{3}$．

15．$(3+2)^n=3125$，$n=5$，含x^4系数为$C_5^1(3)^4\cdot 2=810$．

16．设圆柱底半径r，高为h，则$r/1=(\sqrt{3}-h)/\sqrt{3}$，$V=\pi r^2h=\pi\cdot(\dfrac{\sqrt{3}-h}{\sqrt{3}})^2h=(\pi/6)(\sqrt{3}-h)(\sqrt{3}-h)\cdot 2h\le(\pi/6)[(\sqrt{3}-h+\sqrt{3}-h+2h)/3]^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi$． $\therefore h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

三、解答题

17．$\bar{z}=1-\sin\theta-i\cos\theta$

$$=1-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)-i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

$$=1-\cos(\theta-\frac{\pi}{2})+i\sin(\theta-\frac{\pi}{2})$$

$$=2\sin^2(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})+2i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})$$

$$=2\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})[\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})+i\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})]$$

$$=2\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})[\cos(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2})]$$

$\because \theta\in(\dfrac{\pi}{2},\ \pi)$，

$\therefore \dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\in(0,\ \dfrac{\pi}{4})$，$\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\in(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2})$，

$\therefore |\bar{z}|=2\sin(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4})$，$\arg\bar{z}=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$．

18．由 $S_n=2n^2+n$，

$a_1=S_1=3$，当 $n\ge 2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}=4n-1$，a_1也满足通项，

$\therefore$ $\{a_n\}$ 是等差数列．

设抽取的为第t项，即a_t，数列共m项，$\therefore \dfrac{S_m-a_t}{m-1}=79$，

而 $a_1<a_t<a_m$，

$\therefore \begin{cases} \dfrac{2m^2+m-(4m-1)}{m-1} < 79 \\ \dfrac{2m^2+m-3}{m-1} > 79 \end{cases}$

解得　38＜m＜40，

∴m＝39

∴$a_t=S_m-79(m-1)=2\times39^2+39-79\times(39-1)=79$.

∴4t－1＝79，t＝20.

∴这个数列共 39 项，抽取的是第 20 项为 79.

19．(1)∵BB_1⊥面α，CC_1⊥面α，∴$BB_1 /\!/ CC_1$.

又$BB_1 \not\subset$平面ACC_1，$CC_1 \subset$平面ACC_1，

∴$BB_1 /\!/$平面 ACC_1.

(2)设E为AC_1中点，连结DE则DE$\underline{/\!/}CC_1$，且$DE=\frac{1}{2}CC_1$，连B_1E，则$DE /\!/ B_1E$.

∵CC_1⊥平面α，$B_1E \subset$平面α，∴$B_1E \perp CC_1$，

又$AB_1=\sqrt{AB^2-BB_1^2}=\sqrt{96}$，

$B_1C_1=\sqrt{BC^2-(CC_1-BB_1)^2}=\sqrt{96}$，

∴$AB_1=B_1C_1$，∴$B_1E \perp AC_1$.

∵$CC_1 \cap AC_1=C_1$，∴B_1E⊥平面 ACC_1，

∴BD⊥平面 ACC_1.

(3)Rt△ABD，中，

$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{75}$.

在Rt△ACC_1中$AC_1=\sqrt{AC^2-CC_1^2}=\sqrt{84}$.

连 BC_1

$\therefore V_{四棱锥A-BCC_1B_1}=V_{三棱锥B-AB_1C_1}+V_{三棱锥B-ACC_1}=1/3\cdot1/2\cdot\sqrt{84}$

$\cdot\sqrt{75}\cdot2+1/3\cdot1/2\cdot\sqrt{84}\cdot4\cdot\sqrt{75}$

$=\sqrt{84}\cdot\sqrt{75}=30\sqrt{7}$.

20．假设存在满足条件的 f(x)，$f(x)=ax^2+bx+c$，

则由|x|≤1 时|f(x)|≤1，

∴|f(0)|≤1 即|c|≤1　　　　①

而 f(1)＝a＋b＋c　　　　②

f(－1)＝a－b＋c　　　　③

②－③得 2b＝f(1)－f(－1)，

∴|2a|＝|f(1)＋f(－1)|≤|f(1)|＋|f(－1)|≤2，

即|b|≤1.

②＋③得 2a＝f(1)＋ f(－1)－2c，

∴|2b|≤|f(1)＋f(－1)|＋2|c|≤4，

∴|a|≤2

而 f(4)＝4a＋2b＋c＝a＋b＋c－3a＋b＝f(1)＋3a＋b.

$\therefore |f(2)| \le |f(1)| + 3|a| + |b| < 1 + 6 + 1 = 8$，

$\therefore f(x)$不满足条件(2)，

即不存在满足①、②的二次函数 $f(x)$.

21．设甲方案得净收益是 $S_{甲}$，乙方案得到的净收益是 $S_{乙}$，依题意得

$S_{甲} = 20(1 + 1.05 + 1.05^2 + \cdots + 1.05^9) - 80 \times 1.05^{10} = 20 \times \dfrac{1 - 1.05^{10}}{1 - 1.05} - 80 \times 1.05^{10} \approx 121.60$万元

$S_{乙} = 18(1.05 + 1.05^2 + \cdots + 1.05^{10}) - 60 \times 1.05^{10} = 18 \times \dfrac{1.05(1 - 1.05^{10})}{1 - 1.05} - 60 \times 1.05^{10} \approx 140.34$万元

∴乙方案净收益较高．

22．(1)若直线 m 的斜率不存在，显然，$x = -1$，符合条件．

(2)若直线 m 的斜率存在，设方程为 $y = kx + b$

∵m 与 C_1 相切，

$\therefore \dfrac{|b|}{\sqrt{1 + k_2}} = 1$，

即 $b^2 = 1 + k^2$.

由 $\begin{cases} y = kx + b, \\ (x-1)^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

得 $(1 - k^2)x^2 - 2(kb + 1)x - b^2 = 0$　　　　　①

若 $k = \pm 1$，则 m 与 C_2 的渐近线平行，m 不可能与 C_2 有两个交点，故 $k \ne \pm 1$.

①的判别式为 $\Delta = 4(kb + 1)^2 + 4(1 - k2)b^2$　　　　②

设m与C_2的两个交点是(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，则 $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{kb + 1}{1 - k^2}$，

代入$y = kx + b$中，得 $\dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{k + b}{1 - k^2}$，

∴m与C_2相交弦的中点为$P(\dfrac{kb + 1}{1 - k^2}, \dfrac{k + b}{1 - k^2})$，又P为m与$C_1$的切点，

所以$(\dfrac{kb + 1}{1 - k^2})^2 + (\dfrac{k + b}{1 - k^2})^2 = 1$　　　　③

由 $b^2 = 1 + k^2$ 及③可得

$4k^2 + 4kb + b^2 = 0$，即 $(2k + b)^2 = 0$，

$\therefore b = -2k$

④代入 $b^2 = 1 + k^2$，得

$k = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$b = \pm \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

把k与b的值代入③，$\Delta > 0$，故所有的直线方程为$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

或，$y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

或 $x=-1$.

2002年高考数学模拟试题(四)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．函数$f(x)=\sqrt{(x+1)(1-x)}$的定义域是

[　　]

A．[－1，1]
B．[1，＋∞]
C．[－∞，1]
D．[－∞，－1]∩[1，＋∞)

2．已知$z\in C$，适合方程$z-\bar{z}+z\cdot\bar{z}=3$的点的集合是

[　　]

A．圆
B．直线
C．两点
D．双曲线

3．如图4－1，四边形ABCD为矩形，PA⊥平面ABCD，则图中互相垂直的平面共有

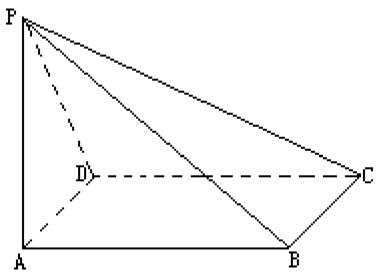


图 4-1

[　　]

A．2对
B．4对
C．5对
D．6对

4．若α＝－4，则α的终边在

[　　]

A．第一象限
B．第二象限
C．第三象限
D．第四象限

5．在$[0，2\pi]$上满足$\sin x\geq\frac{1}{2}$的x的取值范围是

[　　]

A．$[0,\frac{\pi}{6}]$　　B．$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$

C．$[\frac{\pi}{6},\frac{2}{3}\pi]$　　D．$[\frac{5}{6}\pi,\pi]$

6．一批货物随17列货车从A市以V千米／小时匀速直达B市，已

知两地铁路线长为400千米，为了安全，两列货车的间距不得小于$(\frac{V}{20})^2$千米，那么这批货物全部运到B市，最快需要

[　　]

A．6小时

B．8小时

C．10小时

D．12小时

7．已知：0＜a＜b＜1，则下列不等式中，正确的是

[　　]

A．$(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^b$

B．$(1+a)^a>(1+b)^b$

C．$(1-a)^b>(1-a)^{\frac{b}{2}}$

D．$(1-a)^a>(1-b)^b$

8．设l、m是两条不同的直线，α、β是两个不同的平面，则下面四个命题：

①若$m\perp l$，$l\perp\alpha$，$l\not\subset\alpha$，则$l\parallel\alpha$．

②若m∥α，α⊥β，则m⊥β．

③若$m\perp\beta$，α⊥β，则$m\parallel\alpha$或$m\subset\alpha$．

④若$m\perp l$，m⊥α，$l\perp\beta$，则α⊥β．

其中正确的个数是

[　　]

A．0个

B．1个

C．2个

D．3个

9．已知Rt△ABC，沿直角C的平分线CT折成二面角，此时∠ACB的大小为

[　　]

A．90°

B．60°

C．30°

D．由Rt△ABC的边长决定

10．直线m与平面α间距离为d，那么到m与α距离都等于2d的点的集合是

[　　]

A．一个平面
B．一条直线
C．两条直线
D．空集

11．已知点$F(\frac{1}{4}，0)$，直线l：$x=-\frac{1}{4}$，点B是l上的动点．若过B垂直于 y 轴的直线与线段 BF 的垂直平分线交于点 M，则点 M 的轨迹是

[　　]

A．双曲线
B．椭圆
C．圆
D．抛物线

12．已知正三棱台上、下底面的边长分别为2和4，高为$2\sqrt{3}$，则它的中截面截得的较大部分几何体的体积为

[　　]

A．$\frac{37}{4}$　　B．$\frac{111}{4}$

C．$\frac{19}{4}$　　D．$\frac{37}{2}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分．把答案填在题中横线上．

13．已知$f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$，则$f^{-1}(\frac{2}{5})$与$f^{-1}(\frac{3}{5})$的大小关系是________．

14．θ是三角形的一个内角，则 sinθ＋cosθ的取值范围是________．

15．若$(2-x)^9=a_9x^9+a_8x^8+\cdots+a_1x+a_0$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_8=$________．

16．如图 4－2，在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H 分别为棱 CC_1、C_1D_1、D_1D、DC 的中点，N 是 BC 的中点，点 M 是四边形 EFGH 内部或其边上一点，则点 M 在________位置时，就有 MN∥面 BB_1D_1D．(注：填上你认为正确的一个条件即可，不必考虑所有可能的情况．)

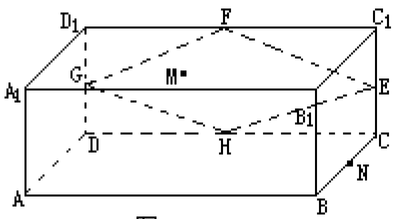


图 4-2

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(**本小题满分**12**分**)**已知**$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=-\frac{1}{2}$，**求**$\frac{\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}$**的值．**

18．(**本小题满分**12**分**)**已知**$(2^x-\frac{\sqrt{2}}{2})^9$**展开式的第**7**项为**$\frac{21}{4}$，**求极限**$\lim\limits_{n\to\infty}(x+x^2+\cdots+x^n)$．

19．(本小题满分 12 分)如图 4－3，边长为 a 的菱形 ABCD 中，∠A＝60°，又 PA⊥面 ABCD，PA＝a，E 为 PC 中点．

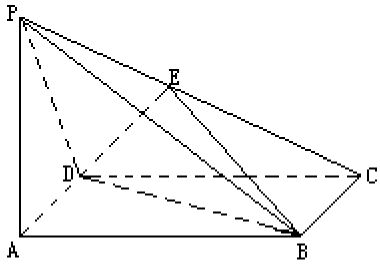


图 4-3

(1)求证：面 BDE⊥面 ABCD；

(2)求 PB 与面 BDE 所成角的大小；

(3)求二面角 B—DE—C 的大小．

20．(本小题满分 12 分)如图 4－4，在平行四边形 OABC(O，A，B，C 按逆时针方向)中，各顶点对应的复数依次是 z_0＝0，z_A＝a＋$\frac{a}{2}i$，$z_B=-2a+3i$，$z_C=-b+ai(a，b\in R)$，**求**$\arg\frac{z_C}{z_A}$**的值．**

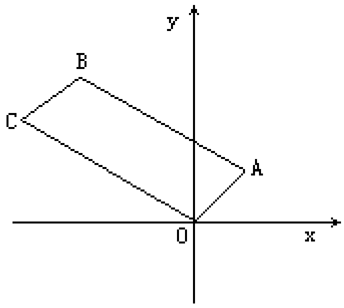


图 4-4

21．(本小题满分 12 分)某地在抗洪抢险中接到预报，24 小时后有一个超历史最高水位的洪峰到达，为保万无一失，指挥部决定在 24 小时内筑一道堤坝作为第二道防线．经计算，其工程量除须现有参战军民继续奋战外，还需要 20 台大型翻斗车同时作业 24 小时，但是，除了有 1 辆车可以马上投入工作外，其余车辆需从各处紧急抽调，且每隔 20 分钟才能有 1 辆车到达并投入工作．已知指挥部最多可组织到 25 辆车，问 24 小时内能否完成第二道防线的工程？简要说明理由．

22．(**本小题满分**14**分**)**设**F_1**是椭圆**C_1：$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{9}+\frac{4y^2}{27}=1$**的左焦点，**

M 是 C_1 上任意一点，P 是线段 F_1M 上的点，且满足 $|F_1M|:|MP|=3:1$.

(1)求点 P 的轨迹 C_2；

(2)过点 A(0，2)作直线 l 与 C_2 相交，求 l 与 C_2 有且仅有两个交点时，l 的斜率的取值范围。

(3)过 A 与 F_1 的直线交 C_2 于 B、C，求△F_2BC 的面积(F_2 为 C_2 的右焦点).

[参考答案提示]

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	C	C	B	B	D	D	B	C	D	A

提示：

1．由 $f(x)=\sqrt{(x+1)(1-x)}$，得 $(x+1)(1-x)\geq 0$

即 $(x+1)(x-1)\leq 0$

故 $-1\leq x\leq 1$

因此本题应选 A.

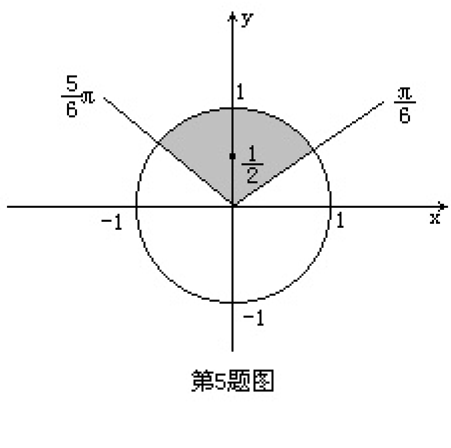
2．考查复数概念及复平面内曲线的普通方程的求法.

设 $z=x+yi(x，y\in R)$．代入 $z-\bar{z}+z\cdot\bar{z}=3$，得到 x，y 的实数方程组：$\begin{cases}y=0\\x^2+y^2=3\end{cases}$，解为 $\begin{cases}x_1=\sqrt{3}\\y_1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x_2=-\sqrt{3}\\y_2=0\end{cases}$，所以表示的是 $(\sqrt{3}，0)$ 和 $(-\sqrt{3}，0)$ 两个定点．故选C．

3．如图 4－1 所示，可以证明 AB⊥PA，则有平面 PAB⊥平面 PAD，平面 ABCD⊥PAD，平面 ABCD⊥平面 PAB；同理可以证明平面 PCD⊥平面 PAD．还可以证明 BC⊥平面 PAB，DA⊥平面 PAB，所以平面 PBC⊥平面 PAB．因此选 C.

4．－4 弧度的角大约为 228.4°，它的终边在第三象限；所以选 C.

5．本题主要考查三角函数值的取值范围，逻辑推理能力，以及已知三角函数值求角，用单位圆中的线段表示三角函数值等基本知识.这个题最简捷的解法是用单位圆中的线段表示三角函数值．如图所示．



第5题图

在单位圆中先求出在$[0, 2\pi]$上$\sin x=\frac{1}{2}$的角x，得$x=\frac{\pi}{6}$和$x=\frac{5}{6}\pi$.

由于题目要求$\sin x\geq\frac{1}{2}$.

从单位圆中很容易找到相应的角在$[0, 2\pi]$上应为$[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$.

故本题应选 B.

6．$t=\frac{(\frac{V}{20})^2\times16+400}{V}=\frac{400}{V}+\frac{16V}{400}\geq2\sqrt{16}=8$小时

7．本题考查构造函数，应用函数性质及中间量的方法来比较实数大小的知识．因为 $0<a<b<1$，所以 $0<1-a<1$，$y=(1-a)^x$在R上是减函数；又因为$\frac{1}{b}>1>b>\frac{b}{2}$；所以有$(1-a)^{\frac{1}{b}}<(1-a)^b<(1-a)^{\frac{b}{2}}$，选项 A、C 不正确．借助中间量$(1+b)^b$，以及 $y=(1+b)^x$在 R 上是减函数，$y=x^a$ 在$[0, +\infty)$上是增函数，可知，$(1+b)^b>(1+b)^a>(1+a)^a$，故选项 B 不正确，只能选 D．事实上，$(1-a)^a>(1-a)^b>(1-b)^b$，故选 D.

8．当直线 m 在平面β内，且 m 平行α、β的交线时，②不成立．其余均可证明成立．因此选 D.

11．由题意知$|MB|=|MF|$，即动点到定直线的距离与到定点的距离相等，故选 D.

12．$S_上=\sqrt{3}$，$S_下=4\sqrt{3}$，中截面面积$S_0=\frac{9\sqrt{3}}{3}$，利用台体体积公式，可知选 A.

二、填空题

13．$f^{-1}(\frac{2}{5})>f^{-1}(\frac{3}{5})$

14．$(-1, \sqrt{2}]$

15．-510

16．只要点 M 取在线段 FH 上的任意一点均正确

提示：

13．$\because f(x)$为减函数，$\therefore f^{-1}(x)$为减函数 $f^{-1}(\frac{2}{5})>f^{-1}(\frac{3}{5})$

14．$0<\theta<\pi$ $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

$\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{4}\pi$ $\sin\theta+\cos\theta\in(-1, \sqrt{2}]$

15．令 $x=1$ $a_0+a_1+\cdots+a_9=1$

$a_0=2^9=512$ $a_9=-1$ $a_1+\cdots+a_8=-510$

三、解答题

17．由$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=-\frac{1}{2}$，得$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-\frac{1}{2}$，

解得 $\tan\alpha=-3$

$$\frac{\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}$$

$$=-2\cos^2\alpha\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

$$=4\cos^2\alpha$$

$$=\frac{4}{1+\tan^2\alpha}$$

$$=\frac{2}{5}$$

18．由 $T_7=C_9^6 2^{3x}(-\frac{\sqrt{2}}{2})^6$，

得 $C_9^6\cdot 2^{3x}\cdot\frac{1}{8}=\frac{21}{4}$，

有 $x=-\frac{1}{3}$ 得

$$\lim_{n\to\infty}(x+x^2+\cdots+x^n)=\frac{x}{1-x}=-\frac{1}{4}$$

19．(1)如图所示，连结 AC，记 AC∩BD＝O，由菱形知

$$\left.\begin{matrix}AO=OC\\ \text{又}PE=EC\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}EO\parallel PA\\ PA\perp\text{面}ABCD\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}EO\perp\text{面}ABCD\\ EO\subset\text{面}BDE\end{matrix}\right\}\Rightarrow\text{面}BDE\perp\text{面}ABCD$$

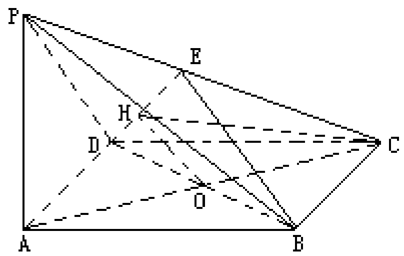


图19题图

(2)设点 P 到面 BDE 的距离为 d，PB 与面 BDE 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{d}{PB}$ 而 $PA\parallel EO\Rightarrow PA\parallel\text{面}BDE$，$PA\perp\text{面}ABCD\Rightarrow$

$$\begin{cases}PA\perp AB\Rightarrow PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{2}a\\ PA\perp AO\end{cases}$$

$$\left.EO\parallel PA\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}AO\perp EO\\ AO\perp BD\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}AO\perp\text{面}BDE\\ PA\parallel EOPA\parallel\text{面}BDE\end{matrix}\right\}\Rightarrow d=AO=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$\therefore \sin\theta = \frac{d}{PB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

从而PB与平面BDE所成角的大小为$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$

(3)由(2)知 AO⊥面 BDE，即 CO⊥面 BDE，作 OH⊥DE 于 H，连结 CH，则 CH⊥DE，故∠OHC 就是二面角 B—DE—C 的平面角

在截面△BDE中，易求得$DO = \frac{1}{2}a$，$EO = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}a$，

则$DE = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，$OH = \frac{DO \cdot EO}{DE} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$，

又$CO = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

在Rt△COH中，由$\tan\angle OHC = \frac{CO}{OH} = \sqrt{6}$得二面角B—DE—C的大小是$\arctan\sqrt{6}$

20．∵OABC 是平行四边形，

$\therefore z_A + z_C = z_B$

$\therefore (a + \frac{a}{2}i) + (-b + ai) = -2a + 3i$

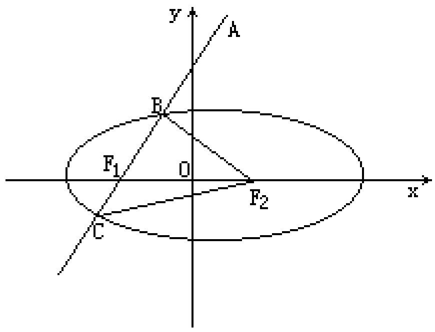
根据复数相等的条件是，a＝2，b＝6

$\therefore \arg\frac{z_C}{z_A} = \arg\frac{-6+2i}{2+i} = \arg 2(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$

21．从第一辆车投入工作算起，设各车的工作时间分别为 $a_1, a_2, \cdots a_{25}$小时，依题意，它们组成一个公差为$a = -\frac{1}{3}$(小时)的等差数列．只须证明，当 $a_1 = 24$ 时，各车的工程量之和不小于欲完成的工程量 20×24(车·小时)，即应有$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{25}) \geq 20 \times 24$，也即$\frac{(a_1 + a_{25}) \times 25}{2} \geq 20 \times 24$，$25a_{13} \geq 20 \times 24$，把$a_{13} = a_1 - \frac{12}{3} = 24 - \frac{12}{3} = 20$代入，得$25 \times 20 \geq 20 \times 24$．可见，25 辆车陆续投入工作可以完成 20 辆车同时作业 24 小时的工程量．

22．(1)易求椭圆中心$O'(\frac{1}{2}, 0)$，左焦点$F_1(-1, 0)$．由$\frac{|F_1M|}{|MP|} = \frac{3}{1}$，

得$\dfrac{|F_1P|}{|PM|}=\dfrac{2}{1}$，即$\lambda=2$．设$P(x，y)$，$M(x_0，y_0)$，则$x=\dfrac{-1+\lambda x_0}{1+\lambda}=\dfrac{-1+2x_0}{3}$，$y=\dfrac{0+\lambda y_0}{1+\lambda}=\dfrac{2}{3}y_0$，得$x_0=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$，$y_0=\dfrac{3}{2}y$．代入$\dfrac{(x_0-\frac{1}{2})^2}{9}+\dfrac{4y_0^2}{27}=1$，有$\dfrac{(\frac{3}{2}x)^2}{9}+\dfrac{4(\frac{3}{2}y)^2}{27}=1$，整理得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$为$C_2$的轨迹．



第22题图

(2)由$\begin{cases}3x^2+4y^2=12，\\ y=kx+2，\end{cases}$消y整理，得$(4k^2+3)x^2+16kx+4=0$当$\Delta=256k^2-16(4k^2+3)=192k^2-48>0$时，$l：y=kx+2$与$C_2$有两交点，得$k<-\dfrac{1}{2}$或$k>\dfrac{1}{2}$

(3)由$k_{AF_1}=2$，知AF_1的方程为$y=2x+2$，由$\begin{cases}y=2x+2，\\ 3x^2+4y^2=12，\end{cases}$得$19x^2+32x+4=0$．

则$|BC|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{(-\dfrac{32}{19})^2-4\times\dfrac{4}{19}}=\dfrac{60}{19}$．

F_2到AC的距离$d=\dfrac{|2-0+2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$．

所以，$S_{\triangle F_2BC}=\dfrac{1}{2}|BC|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{60}{19}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{24\sqrt{5}}{19}$

2002年高考数学模拟试题(五)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．**已知集合**$A=\{x|\frac{1}{2}(x+1)\in Z\}$，$B=\{x|x=3k，k\in Z\}$，$I=Z$，**则**$\overline{A}\cap B$**等于**

[　　]

A．$\{x|x=6k，k\in Z\}$
B．$\{x|x=6k-3，k\in Z\}$
C．$\{x|x=2k-1，k\in Z\}$
D．$\varnothing$

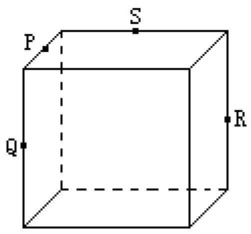
2．**已知**$\frac{\sin(\alpha+30°)-\sin(\beta+30°)}{\cos\alpha-\cos\beta}=a\cdot\cot\frac{\alpha+\beta}{2}+b$，**则复数**$a+bi$**的辐角主值是**

[　　]

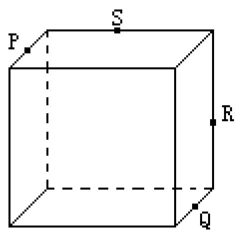
A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{5\pi}{6}$
C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

3．**下列各图是正方体或正四面体，P、Q、R、S分别是所在棱的中点，这四个点不共面的一个图是**

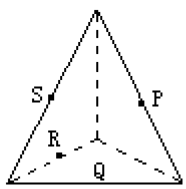
[　　]



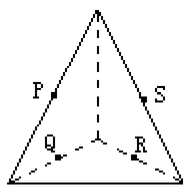
A．



B．



C．



D．

4．**三个数**$a=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，$c=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$**的大小关系是**

[　　]

A．$a>c>b$
B．$c>b>a$
C．$b>c>a$
D．$b>a>c$

5．函数$f(x)=\log_3(\frac{2}{1-x}-x)$的图象关于______对称．

[　　]

A．y轴
B．原点
C．直线y=x
D．以上都不对

6．已知函数 f(x)=1－2x，对任意正数ε，使得$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ $(x_1, x_2\in R)$成立的一个充分但不必要条件是

[　　]

A．$|x_1-x_2|<\varepsilon$
B．$|x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{2}$
C．$|x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{3}$
D．$|x_1-x_2|>\frac{\varepsilon}{4}$

7．不等式$\sqrt{x+6}>x$的解集是

[　　]

A．$\{x|x>0\}$
B．$\{x|x>-6\}$
C．$\{x|-6\le x<3\}$
D．$x|-6\le x\le 3\}$

8．已知两条直线 l_1：$x+m^2y+12=0$ 和 l_2：$(m-2)x+3my+4m=0$，则 $l_1 /\!/ l_2$ 是 $m=-1$ 的

[　　]

A．充分非必要条件
B．必要非充分条件
C．充分且必要条件
D．既不充分又不必要条件

9．已知直线 l 过点 P(0，2)，且被圆 $x^2+y^2=4$ 所截得的线段长为2，那么 l 的斜率为

[　　]

A．$\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$　　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$或$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$或$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

10．直线 l：$2x-y-4=0$ 绕它与x轴的交点逆时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$所得直线方程是

[　　]

A．$x+y+2=0$

B．$x+3y-2=0$

C．$3x-y-6=0$

D．$3x+y-6=0$

11．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，F、A分别是它的左焦点和右顶点，B是它的短轴的一个端点，则∠ABF等于

[　　]

A．60°

B．75°

C．90°

D．120°

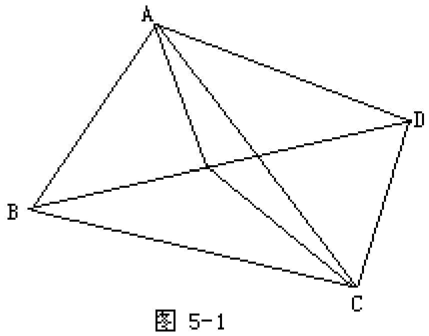


图5-1

12．将正方形ABCD沿对角线BD折成直二面角(如图5－1所示)，则下面四个结论：①AC⊥BD；②△ACD是等边三角形；③AB与CD成60°角；④AB与面BCD成60°角．其中正确的序号是

[　　]

A．①②③

B．①②④

C．①③④

D．②③④

二、填空题：本大题共4小题；每小题4分，共14分．把答案填在题中横线上．

13．三名男歌唱家和两名女歌唱家联合举行一场音乐会，演出的出场排序要求两名女歌唱家之间恰有一名男歌唱家，共有出场方案________．

14．已知点A(3，2)，F(2，0)，在双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$上求一点P，当点P的坐标为________时，能使$|PA|+\frac{1}{2}|PF|$的值最小．

15．在$(3+2x^3)(1-x)^{10}$的展开式中，x^5的系数等于________(用数字作答)．

16．若表面积相等的球、正方体、等边圆柱(轴截面是正方形)的体积分别为V_1、V_2、V_3、则V_1、V_2、V_3的大小关系为________．

三、解答题：本大题共6小题；共74分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(本题满分 12 分)已知复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，设 $\omega=3z+\dfrac{4}{z^2}$，求使 $|\omega|$ 最小时的复数 z．

18．(本题满分 12 分)在△ABC 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 的对边．

(1)求证：$\dfrac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}=\dfrac{a+b}{a-b}$

(2)若 $a=5$，$b=4$，$\cos(A-B)=\dfrac{31}{32}$，求 c 的值．

19．(本题满分 12 分)如图 5－2，正三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，底面边长和侧棱长都是 1，D、E 分别是 C_1C 和 A_1B_1 的中点．

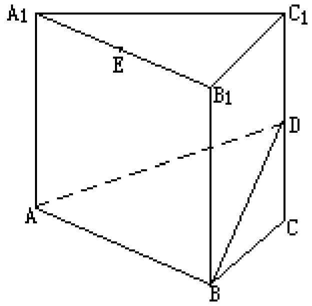


图 5-2

(1)求点 E 到平面 ABD 的距离：

(2)(文)求二面角 A—BD—C 的正切值．

20．(本题满分 12 分)在圆 C：$(x-1)^2+y^2=2$ 上有两个动点 A 和 B，且满足条件∠AOB＝90°(O 为坐标原点)．求以 OA、OB 为邻边的矩形 OAPB 的顶点 P 的轨迹方程．

21．(本题满分 12 分)政府收购某种农产品的原价格是 220 元／担，其中征税标准为每 100 元征 10 元(称作税率为 10 个百分点,即 10%)，计划可收购 a 万担，为了减轻农民负担，现决定将税率降低 x 个百分点，预计收购量可增加 x 个百分点。

(1)写出税收 y(万元)与 x 的函数关系式；

(2)要使此项税收在税率调节后不低于原计划税收的 83.2%，试确定 x 的范围。

22．(本题满分 14 分)如图 5－3 是抛物线拱桥，设当水面宽 AB＝2a 米，拱顶离水面的距离为 h 米，一货船在水面上的部分的横断面为一矩形 CDEF．

(1)若矩形的长 CD＝a 米，那么矩形的高 DE 不能超过多少米才能使船通过拱桥？

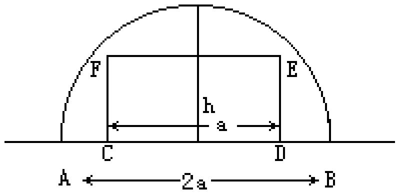


图 5-3

(2)求矩形面积 S 的“临界值”m：即当 S＜m 时，无论怎样调整矩形的长和高，船都不能通过此拱桥．

[参考答案提示]

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	C	D	D	C	C	B	D	D	A	D

提示：

1．**在集合**A**中，元素**x**满足**$\frac{1}{2}(x+1)\in Z$，**因此，可以设**$\frac{1}{2}(x+1)=k$，$k\in Z$，**由此得到** $x=2k-1$，$k\in Z$，**可见集合 A 中的元素是奇数，因此，集合**$\overline{A}$**中的元素是偶数．即**$\overline{A}=\{x|x=2k,k\in Z\}$**．而**B**中的元素则是**3**的倍数，因此**$\overline{A}\cap B$**中的元素应既是**2**的倍数又是**3**的倍数，即应是**6**的倍数．所以**$\overline{A}\cap B=\{x|x=6k,k\in Z\}$**．故选**A．

2．$\frac{\sin(\alpha+30°)-\sin(\beta+30°)}{\cos\alpha-\cos\beta}$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta+60°}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}+30°)}{-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{2}=a\cdot\cot\frac{\alpha+\beta}{2}+b\quad a=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad b=\frac{1}{2}.$$

$\therefore \arg(a+bi)=\frac{5}{6}\pi$，**故选**B．

3．SPQ 确定一个平面，很显然，R 不在 SPQ 所确定的平面上．

4．$b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$ a、$c<1$

$a=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}>(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}=bc$　　$\therefore b>a>c$，**故选**D．

6．$|f(x_1)-f(x_2)|=|2(x_1-x_2)|<\varepsilon \Leftrightarrow |x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{2} \Leftarrow |x_1-x_2|<\frac{\varepsilon}{3}$，故选C．

7．$\sqrt{x+6}>x \Leftrightarrow \begin{cases} x+6>x^2 \\ x+6\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+6\geq 0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow -6\leq x<3$，故选C．

8．m＝－1 时，$l_1 /\!/ l_2$．而 m＝3 时亦有 $l_1 /\!/ l_2$．

∴ $l_1 /\!/ l_2$ 是 m＝－1 的必要不充分条件．故选 B．

10．l 与x轴交点(2，0)逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$后斜率为：－3

∴直线方程：3x＋y－6＝0．故选 D．

11．设原点为O，$\tan\angle ABO=\frac{a}{b}$ $\tan\angle FBO=\frac{c}{b}$ · $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $a^2-b^2=c^2$．

$$\therefore \tan\angle FBA=\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}}{1-\frac{ac}{b^2}}=\frac{(a+b)b}{b^2-ac}=\sqrt{3}$$

∴∠FBA＝60°，故选 A．

12．设 BD 中点为 E．BD⊥AE．BD⊥EC．∴BD⊥面 AEC．∴BD⊥AC．

$AC=\sqrt{2}AE=AD=CD$

∴△ACD 为正三角形．AB 与 CD 也成 60°角

∴①、②、③正确，故选 A．

二、填空题

13．$3\cdot 2\cdot P_3^3$

14．$(\frac{\sqrt{21}}{3}，2)$

15．－666

16．$V_1>V_3>V_2$

提示：

13．共有出场方案：$3\cdot 2\cdot P_3^3$种

15．$C_{10}^5\cdot 1^5\cdot(-x)^5+2x^3\cdot C_{10}^2 1^8(-x)^2$

$=-3C_{10}^5+2C_{10}^2$

＝－756＋90

＝－666

16．设球半径为 R，正方体边长为 A，圆柱底半径为 r，则：

$4\pi R^2=6A^2=6\pi r^2$．

$\therefore A=\sqrt{\frac{2}{3}\pi}R \qquad r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

$\therefore V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{12}{9}\pi R^3$

$V_{正}=A^3=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{2}{3}\pi}R^3=\frac{2}{9}\pi\sqrt{6}R^3$

$V_{柱}=\pi r^2h=2\pi r^3=2\pi\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}R^3=\frac{4\pi}{9}\sqrt{6}R^3$

$\because \frac{12\pi}{9}>\frac{4\pi}{9}\sqrt{6}>\frac{2}{9}\pi\sqrt{6}$

$\therefore V_1>V_3>V_2$

三、解答题

17．$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

18．(1) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$

(2) $\tan\frac{A-B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos(A-B)}{1+\cos(A-B)}}=\frac{1}{\sqrt{63}}$，再利用本题设及(1)的结论有 $\tan\frac{A+B}{2}=\frac{9}{\sqrt{63}}$.

$\tan\frac{C}{2}=\cot\frac{A+B}{2}==\frac{\sqrt{7}}{2}$，则 $\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{C}{2}}=\frac{9}{16}$，从而 $\cos C=\frac{1}{8}$，

再利用余弦定理可得 $c=6$.

19．(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$．提示一：取AB的中点F，连结DE、DF、EF，易证平面ABD⊥平面DEF过E在平面DEF内作EG⊥DF，G是垂足，则EG即为所求．

提示二：利用体积关系式 $V_{B_1-ABD}=V_{A-BB_1D}$ 亦可．

(2)提示：取BC的中点M，连结AM，则AM⊥BC．由侧面 BCC_1B_1⊥底面ABC，知AM⊥侧面 BCC_1B_1．又作MN⊥BD于N，连结AN，则AN⊥BD．则∠ANM为所求的二面角A—BD—C的平面角．由Rt△BMN∽Rt△BDC可求得 $MN=\frac{1}{2\sqrt{5}}$，且易知 $AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$．从而 $\angle ANM=\arctan\sqrt{15}$.

20．$(x-1)^2+y^2=3$．提示：矩形两对角线中点重合．

21．(1)由题设，调节后税率为(10－x)%，预计可收购 a(1＋2x%)

万担，总金额$200a(1+2x\%)$万元，依题意得，

$$y=\frac{200}{10000}a(100+2x)(10-x)$$
$$=\frac{1}{50}a(100+2x)(10-x)\quad (0<x<10).$$

(2)原计划税收为 200a×10%＝20a 万元．

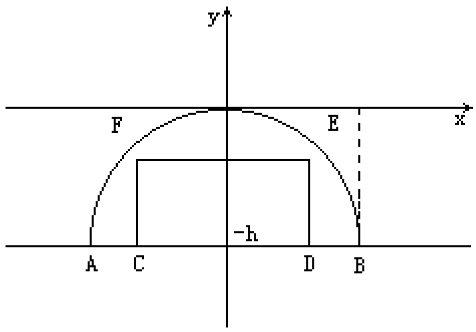
依题意有：

$\frac{1}{50}a(100+2x)(10-x)\geq 20a\times 83.2\%\Rightarrow x^2+40x-84\leq 0$．

$(x+42)(x-2)\leq 0\Rightarrow -42\leq x\leq 2$，$2x>0$，

∴$0<x\leq 2$．

22．(1)如图所示，取抛物线顶点为原点，对称轴为 y 轴建立直角坐标系，设抛物线的方程为 $x^2=-2py$，则 B 点坐标为$(a,-h)$，代入上式得$a^2=2ph$，∴$2p=\frac{a^2}{h}$，∴抛物线方程为$x^2=-\frac{a^2}{h}y$，当E点在抛物线上时，其横坐标为$\frac{a}{h}$，代入抛物线方程得$y=-\frac{h}{4}$，这时$|DE|=h-\frac{h}{4}=\frac{3}{4}h$，即矩形的高不能超过$\frac{3}{4}h$．



第22题图

(2)由题意，S 的“临界值”就是当 E、F 两点在抛物线上时，矩形CDEF面积的最大值，设F点的坐标为$(x,-\frac{h}{a^2}x^2)(x>0)$，则$|CD|=2x$，$DE=|h-\frac{h}{a^2}x^2|$，$S=|CD|\cdot|DE|=2x(h-\frac{h}{a^2}x^2)$，$S=2h\sqrt{x^2(1-\frac{x^2}{a^2})^2}=2h\sqrt{\frac{a^2}{2}\cdot\frac{2x^2}{a^2}\cdot(1-\frac{x^2}{a^2})^2}\leq 2h\sqrt{\frac{a^2}{2}[\frac{\frac{x^2}{a^2}+1-\frac{x^2}{a^2}+1-\frac{x^2}{a^2}}{3}]^3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}ah$，当且仅当$\frac{2x^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$，即$x=\frac{\sqrt{3}}{3}a$时取等号，

∴所求S的“临界值”为$\frac{4\sqrt{3}}{9}ah$．