高中数学习题解法辞典

Edustar
中教育星软件股份有限公司

第一部分　幂函数、指数函数和对数函数

(一)集合

提要

(1)用描述法表示集合时，关键是归纳出集合的所有元素的共同属性，并将这个属性用一个解析式表达出来。

(2)判断某个对象 x 是否为某个集合 A 的元素，就是看 x 是否具备 A 中元素的公共属性。

(3)根据子集和集合相等的定义，判断两个集合之间的关系是通过间断元素与集合的关系来进行的。例如，要确认$A \subseteq B$，只须对任意$x \in A$，证明$x \in B$。又如要确认$A \subset B$，除了要证明$A \subseteq B$外，还须找到一个$x_0 \in B$，但$x_0 \notin A$。

(4)如集合的元素是离散的，则集合间的运算可借助维恩图的直观来进行。

(5)如集合的元素是连续的，则集合间的运算可借助数轴的直观来完成。

1．集合的概念、子集

例题

解　设α=x-y，$\beta=y-z$，$\gamma=z-x$，则有$\alpha+\beta+\gamma=0$。故

$\sin\gamma=-\sin(\alpha+\beta)$，$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\sin\frac{\gamma}{2}$

[　　]

A．$3\in A$且$-3\in A$　　　B．$3\in A$但$-3\notin A$

C．$3\notin A$且$-3\notin A$　　　B．$3\notin A$但$-3\in A$

解　D　$\because 3-1=2\sqrt{3}$，$\therefore 3\notin A$；$\because -3-1<\sqrt{3}$，$\therefore -3\in A$。

例 1-1-2　集合 A= {(x，y)|y=-1+x-2x^2，x∈R，x≠0}，若点 P 的坐标(x，y)∈A，则　[　　]

A．P 在第一或第二象限

B．P 在第二或第三象限

C．P 在第三或第四象限

D．P 在第四或第一象限

由已知函数的解析式得$x=-\sqrt{2y-y^2}$，对换x，y得反函数为

$f^{-1}(x)=-\sqrt{2x-x^2}$，$x\in(0，1]$

例1-1-3　集合$A=\{x|x=\frac{m}{n}，m\in Z，|m|<2，n\in N，n\leq 3\}$用列举法表示为______；集合$B=\{\frac{2}{3}，\frac{3}{9}，\frac{4}{27}，\frac{5}{81}，\frac{6}{243}\}$用描述法表示为______。

解　$A=\{-1，0，1，-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}，-\frac{1}{3}，\frac{1}{3}\}$

$B=\{x|x=\frac{n+1}{3^n}，n\in N且n\leq 5\}$

例1-1-4　如果$x=\frac{1}{3-5\sqrt{2}}$，$y=3+\sqrt{2}\pi$，集合$M=\{m|m=a+b\sqrt{2}$，a∈Q，b∈Q}，那么 x、y 与集合 M 的关系为 x______ M，y______ M。

解　∈，$\notin$　因为$x=\frac{1}{3-5\sqrt{2}}=-\frac{3}{41}-\frac{5}{41}\sqrt{2}$，所以$x\in M$。但$\pi\notin Q$，故$y\notin M$。

例 1-1-5　集合 A= {x|ax^2+2x+1=0，a∈R} 中只有一个元素，则 a 的值为______。

解　0 或 1

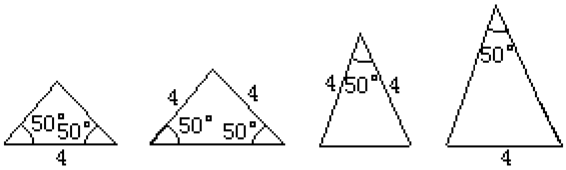
当 ax^2+2x+1=0 为一次方程时，A 只有一个元素，这时 a=0。

当 ax^2+2x+1=0 为二次方程时，由题设有 $\Delta=2^2-4\cdot a\cdot 1=0$，这时 a=1。

注　不要遗漏 a=0 的情况。

例 1-1-6　集合 {有一边长为 4、一内角为 50°的等腰三角形} 的元素个数是______。

解　4　根据下面的作图可知：



例 1-1-7　已知集合｛1，x，x^2-x｝有 3 个元素，求所有实数 x 形成的集合。

解　由题设有

$$\begin{cases} 1 \neq x \\ 1 \neq x^2 - x \\ x \neq x^2 - 2 \end{cases}$$

解之得 $x \neq 0$，1，2，$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

所以，所求x的集合为 $\{x|x \in R$，且$x \neq 0$，1，2，$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$ 。

例 1-1-8　设 M=｛α｜$\alpha = x^2 - y^2$，x，y∈Z｝，求证：

(1)一切奇数属于 M；

(2)偶数 4k-2(k∈Z)不属于 M；

(3)属于 M 的两个整数，其积仍属于 M。

解　(1)设α为任意的奇数，即α=2k-1(k∈Z)。

因 $2k-1=k^2-(k-1)^2$(k，k-1∈Z)，故α∈M。

由α的任意性知，一切奇数属于 M。

(2)假设 4k-2∈M，则存在 x，y∈Z，使

$$4k - 2 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 2(2k - 1) \qquad \text{(i)}$$

(i)式说明 x+y 和 x-y 必有一个是偶数，另一个是奇数。但是 x+y 和 x-y

具有相同的奇偶性，这是一对矛盾。故(i)式不成立。所以，$4k - 2 \notin M$。

(3)设α，β∈M 则

$\alpha = x_1^2 - y_1^2$，$\beta = x_2^2 - y_2^2$，$(x_1，x_2，y_1，y_2 \in Z)$

进而　$\alpha\beta = (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 - x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

而　　$x_1 x_2 - y_1 y_2 \in Z$，$x_1 y_2 - x_2 y_1 \in Z$

所以，αβ∈M。

例 1-1-9　设 A=｛正方形｝，B=｛矩形｝，C=｛平行四边形｝，D=｛梯形｝。下列包含关系中不正确的是　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$A \subseteq B$　　B．$B \subseteq C$　　C．$C \subseteq D$　　D．$A \subseteq C$

解　C

例 1-1-10　数集 X=｛(2n+1)2｝(n∈Z)与数集 Y=｛(4k±1)2｝(k∈Z)之间的关系是　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$X \subset Y$　　B．$X \supset Y$　　C．$X = Y$　　D．以上皆非

解　C　这是因为，当 n=2m(m∈Z)时，(2n+1)2=(4m+1)2；当 n=2m+1(m∈Z)时，(2n+1)2=[4(m+1)-1]·2。故对任意 x∈X，有 x∈Y，所以$X\subset Y$。

又(4k+1)2=(2·2k+1)·2，(4k-1)2=[2(2k-1)+1]·2，故对任意 y∈Y，有y∈X。所以$Y\subset X$。

综上可知，X=Y。

例1-1-11 若集合X满足 $\{0，1\}\subseteq X\subset\{-2，-1，0，1，2\}$，则 X 的个数是　　　　[　　]

A．2 个　B．4 个　C．6 个　D．7 个

解　D　可列出所有满足题设的 X 如下：{0，1}，{0，1，-2}，{0，1，-1}，{0，1，2}，{0，1，-2，-1}，{0，1，-2，2}，{0，1，-1，2}。

例 1-1-12　已知集合 A= {(x，y)|x+2y=7，x，y∈N}。用列举法可将 A 表示为______；集合 A 的子集有______个。

解　{(1，3)，(3，2)，(5，1)}；8。

例 1-1-13　已知 M= $\{x|x=a^2+1，a\in N\}$，P= $\{x|x=b^2-4b+5，b\in N\}$，则 M 与 P 的关系是______。

解 $M\subset P$

设任意 x∈N，则 $x=a^2+1$，a∈N。由于 $a^2+1=(a+2)^2-4(a+2)+5$，所以$x\in P$，所以$M\subseteq P$。

又当$b=2$时，$b^2-4b+4=1\in P$，但当$a\in N$时，$a^2+1>1$，$1\notin M$，所以$M\subset P$。

例1-1-14 已知集合$A=\{x，xy，\sqrt{xy-1}\}$，$B=\{0，|x|，y\}$，$A=B$，求实数x，y的值。

解 要使$\sqrt{xy-1}$有意义，必须$xy-1\geq 0$，所以$x\neq 0$，$y\neq 0$，即A中的元素 x，xy 都不可能与 B 中的元素 0 对应，于是只能有

$\sqrt{xy-1}=0\Leftrightarrow xy=1$

于是 A= {x，1，0}。但 A=B，所以 {x，1，0} = {0，|x|，y}。

而 x≠1，故 y≠1。故只有|x|=1，即 x=-1(x≠1)。所以 y=-1。

这时 A=B= {-1，1，0}。

注　若 x=1，则由 xy=1 有 y=1，这时集合 A，B 中就各有两个相同的元素，与集合元素的互异性矛盾。

例 1-1-15　已知集合 A= $\{y|y=x^2+2x+4，x\in R\}$，B= $\{y|y=ax^2-2x+4a，x\in R\}$，$A\subseteq B$。求实数a的取值范围。

解　由 $y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geq 3$ 得 A=[3，+∞)。

当$a=0$时，$B=R$，符合$A\subseteq B$；

当$a<0$时，$B=(-\infty，4a-\frac{1}{a}]$，这时$A\subseteq B$不成立；

当$a>0$时，$B=[4a-\frac{1}{a}，+\infty)$，由$[+，+\infty)\subseteq[4a-\frac{1}{a}，+\infty)$得$4a-\frac{1}{a}\leq 3$，解得$0<a\leq 1$。

综上所述，a 的取值集合为 $\{a|0\le a\le 1\}$。

注　不要把 $y=ax^2-2x+4a$ 简单地看成二次函数。事实上，当 a=0 时，它是一次函数 $y=-2x$。

例 1-1-16　设函数 $f(x)=x^2+ax+b(a，b\in R)$，集合 $A=\{x|x=f(x)，x\in R\}$，$B=\{x|x=f[f(x)]，x\in R\}$。

(1)证明：$A\subseteq B$

(2)当 $A=\{-1，3\}$ 时，求 B。

解　(1)设任意的 $x_0\in A$，则 $x_0=f(x_0)$。而 $f[f(x_0)]=f[x_0]=x_0$，故 $x_0\in B$，

从而 $A\subseteq B$。

(2)$x=f(x)$，即 $x^2+(a-1)x+b=0$。因 $A=\{-1，3\}$，所以

$$\begin{cases}(-1)^2+(a-1)(-1)+b=0\\ 3^2+(a-1)\cdot 3+b=0\end{cases}$$

解得 a=-1，b=-3。故 $f(x)=x^2-x-3$。

由 $x=f[f(x)]$，得

$$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-x-3=0$$

解得 $x=-3，3，\pm\sqrt{3}$。

数)的最小正周期是 $\frac{T}{k}$。

例 1-1-17　设 S 是数集合 {1，2，3，……，1989} 的一个子集合，且 S 中任意两个数的差不等于 4 或 7。问 S 最多可以包含多少个数？

解　1，4，6，7，9 这五个数中任何两个的差都不是 4 或 7。各加 11 得 12，15，17，18，20，显然也是这样的数，而且各与前 5 个数中任一个的差也不是 4 或 7，这样类推，每次连续十一个数中可取五个，一起组成集合 S(注意 1989=11×180+9，最后只有九个数 1981，…，1989，但仍可取五个数 1981，1984，1986，1987，1989)。那么 S 包含的数的个数是 5×181=905。

现证 S 不可能包含更多的数。若不然，则上述 181 组数中至少有一组可以从取六个数，使得两两的差不是 4 或 7。不妨考虑 1，2，…11 这组数，把它划分成五个小组：

(4，7，11)，(3，10)，(2，6)，(5，9)，(1，8)

其中至少要求有一个小组要取出两个数。显然后面四对数的每一对都不能同时取出，只能在第一小组中取 4，7。于是(3，10)中只能取 10，(2，6)中只能取 2，(5，9)中只能取 5，(1，8)中两个数都不能取，也就是不可能取得第六个数。从而得证。

习题

1-1-1　设集合 M={直角三角形}，N={小于 6 的整数}，P={比-1 大 5 的数}，Q={大于 0 且小于 1 的有理数}，其中无限集是

[　　]

A．M，N，P　　　　　B．M，N，Q

C．M，P，Q　　　　　D．N，P，Q

1-1-2　集合 A=｛x^2，3+x+2，$5y^2$-x｝，B=｛周长等于 20 厘米的三角形｝，C=｛x|x-3＜2，x∈R｝，D=｛(x，y)|y=x^2-x-1｝中描述法表示的集合有　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．1 个　B．2 个　C．3 个　D．4 个

1-1-3　集合 A=｛(x，y)|xy≤0，x，y∈R｝表示坐标平面上　　[　　]

A．第二象限的点组成的集合

B．第四象限的点组成的集合

C．第二以及第四象限的点组成的集合

D．第二、四象限以及 x 轴、y 轴上的点组成的集合

1-1-4　用描述法可将集合｛1，-3，5，-7，9，-11，…｝表示为______。

1-1-5　绝对值不大于 6 的偶数集用列举法可以表示为______。

1-1-6　设有命题 P：“若 x∈A，则 8-x∈A”。在由正整数组成的集合中：

(1)满足命题 P 的一元集 A 有______个，是______；

(2)满足命题 P 的二元集 A 有______个，是______；

(3)满足命题 P 的集合 A 共有______个。

1-1-7 设$a=\frac{y-1}{y}$，且a∈｛x|1＜x＜3｝，求y的取值范围。

1-1-8 设$S=\{x|x=m+n\sqrt{2}，m，n\in Z\}$，

(1)若 a∈Z，则 a 是否是集合 S 的元素？

(2)对 S 中任意两个元素 x_1，x_2，x_1+x_2，$x_1\cdot x_2$ 是否属于集合 S？

(3)对于给定的整数n，试求满足$0<m+n\sqrt{2}<1$的S中元素的个数。

1-1-9 已知集合$M=\{x|x\geq 3\sqrt{3}，x\in R\}$及$a=2\sqrt{7}$，则下列各式中正确的是　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$a\notin M$　　　　B．$\{a\}\in M$

C．$a\subset M$　　　　D．$\{a\}\subset M$

1-1-10 设集合$A=\{(x，y)|y=x\}$，$B=\{(x，y)|\frac{y}{x}=1\}$，则集合A，B 间的关系是　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$A\subset B$　　　B．$A\supset B$

C．$A=B$　　　D．以上都不对

1-1-11　设集合 M=｛(x，y)|x+y＞0，xy＞0｝，N=｛(x，y)|x＞0，且 y＞0｝，那么 M，N 之间的关系是　　　　　　　　[　　]

A．$M\supset N$　　　　B．$M\subset N$

C．$M=N$　　　　D．以上都不对

1-1-12 已知$x=\frac{1}{3-\sqrt{3}}$，$y=\frac{1}{\sqrt{3}-2}$，集合$A=\{x|x^2-1<0\}$，则x，y 与集合 A 的关系是 x______ A，y______ A。

1-1-13　数集 X=｛x|x=12m+8n，m，n∈Z｝与数集 Y=｛x|x=20p+16q，

$p, q\in Z\}$ 之间的关系是______。

1-1-14　集合 $M=\{1, 2, (1, 2)\}$ 有______个子集，它们是______。

1-1-15　已知集合 $M=\{a, a+d, a+2d\}$，$N=\{a, aq, aq^2\}$，其中 $a\neq 0$，若 $M=N$，求 q 的值。

1-1-16　已知集合

$A=\{(x, y)|2x+y-2=0\}$

$B=\{(x, y)|2x^2-ay^2-(2a-1)xy+4ay-2=0\}$

若 $A\subset B$，求实数 a 的值。

1-1-17　集合 A 由不同的自然数构成，其元素个数大于 7，且各个元素的最小公倍数为 210，每两个元素的最大公约数大于 1，若 A 中所有元素之积能被 1920 整除，并且不是完全平方数，求 A 的各个元素。

2．交集、并集、补集

例题

例 1-1-18　设集合 A= {(x，y)|3x+2y=7}，B= {(x，y)|2x+3y=8}，则 A∩B=　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．(1，2)　　　　　　B．{x=1} ∩ {y=2}

C．{1，2}　　　　　　D．{(1，2)}

解 D 解方程组$\begin{cases}3x+2y=7\\2x+3y=8\end{cases}$得$(x，y)=(1，2)$。所以$A\cap B=\{(1，2)\}$。

例 1-1-19　设集合 X= {0，1，2，4，5，7}，Y= {1，3，6，8，9}，Z= {3，7，8}，那么集合(X∩Y)∪Z=　　　　　　　　　　　[　　]

A．{0，1，2，6，8}

B．{3，7，8}

C．{1，3，7，8}

D．{1，3，6，7，8}

解　C

例 1-1-20　若方程 x^2-px+6=0 的解集是 M，方程 x^2+6x-q=0 的解集是 N，且 M∩N= {2}，那么 p+q=　　　　　　　　　　　[　　]

A．21　　B．8　　C．6　　D．7

解　A　因为 M∩N= {2}，所以 2^2-p·2+6=0，2^2+6·2-q=0，即 p=5，q=16。所以 p+q=21。

例 1-1-21　满足 A∪B= {a_1，a_2} 的集合 A，B 的组数为

[　　]

A．5　　B．7　　C．9　　D．10

解　C　∵ {a_1a_2} ∪ {a_1，a_2} ∪ {a_1}

= {a_1} ∪ {a_1a_2} = {a_1，a_2} ∪ {a_2} = {a_2} ∪ {a_1，a_2} = {a_1，a_2} ∪∅=∅∪ {a_1，a_2} = {a_1} ∪ {a_2} = {a_2} ∪ {a_1} = {a_1，a_2}

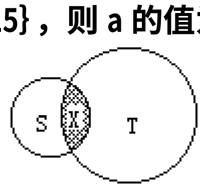
∴满足要求的 A、B 有 9 组。

例 1-1-22　S、T 是两个非空集合，且 S⊄T，T⊄S，若 X=∩T，那么 S∪X=______。

解　S　由右边的维恩图即知。

例1-1-23 设$M\cap N=\varnothing$，且$M=\{(x，y)|\dfrac{y-3}{x-2}=a+1\}$，N=

{(x，y)|(a^2-1)x+(a-1)y=15}，则 a 的值为______。



解 $1，-1，\dfrac{5}{2}，-4.$

当 x≠2 时，将 y=(a+1)(x-2)+3 代入(a^2-1)x+(a-1)y=15，得

2(a^2-1)x=(2a-1)(a-1)+15

当 $a=\pm 1$ 时此方程无解．

当 $x=2$ 时，将 $x=2$，$y=3$ 代入 $(a^2-1)x+(a-1)y=15$，得

$(a^2-1)\cdot 2+(a-1)\cdot 3=15$

解得 $a=-4$ 或 $a=\frac{5}{2}$．此时，$(2,3)\in N$，但 $(2,3)\notin M$，故 $M\cap N=\varnothing$．

综上所述，当 $a=\pm 1$ 或 $a=-4$ 或 $a=\frac{5}{2}$ 时，$M\cap N=\varnothing$．

注 此例即求方程组 $\begin{cases}\frac{y-3}{x-2}=a+1\\(a^2-1)x+(a-1)y=15\end{cases}$ 无解的条件．

例 1-1-24 已知集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$．若 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值．

解 因为 $-3\in B$，而 $a^2+1>0$，所以有两种可能：

(i) $a-3=-3$ (ii) $2a-1=-3$

由(i)得 $a=0$，这时 $a+1=1$，$a^2+1=1$，即 $1\in(A\cap B)$，与已知 $A\cap B=\{-3\}$ 矛盾．

由(ii)得 $a=-1$，这时 $A=\{1,0,-3\}$，$B=\{-4,-3,2\}$，满足题设．

综上，$a=-1$．

例1-1-25 已知 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in R\}$．若 $A\cap R^+=\varnothing$，求 p 的取值范围．

解 因为 $A\cap R^+=\varnothing$，所以：(i) $A=\varnothing$ 或 (ii) 方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 实根为非正数．

由(i)，$\triangle=(p+2)^2-4<0$，解得 $-4<p<0$．

由(ii)，有

$$\begin{cases}\triangle=(p+2)^2-4\geq 0\\-(p+2)\leq 0\end{cases}$$

解得 $p\geq 0$．

综上，$p>-4$．

注 容易漏掉 $A=\varnothing$ 的情况．

例 1-1-26 设以实数集 R 为全集，$A=\{x|-3<x\leq 3\}$，$B=\{x|x\leq -3,\}$ $C=\{x|x>3\}$，则 A 是 B 和 C 的 [ ]

A．交集　　B．并集

C．交集的补集　　D．并集的补集

解 D $\because B\cup C=\{x|x\leq -3$ 或 $x>3\}$，$\therefore A=\overline{(B\cup C)}$．

例 1-1-27 设全集 $I=\{x|1\leq x<9,x\in N\}$，则满足 $\{1,3,5,7,8\}\cap\overline{B}=\{1,3,5,7\}$ 的所有集合 B 的个数是 [ ]

A．1 个　　B．4 个

C．5 个　　D．8 个

解 D 因为 $B\neq\overline{B}$，故只需考虑 $\overline{B}$ 的个数．

因为 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，故满足题设的 $\overline{B}$ 有 $\{1,3,

5，7}，{1，3，5，7，2}，{1，3，5，7，4}，{1，3，5，7，6}，{1，3，5，7，2，4}，{1，3，5，7，2，6}，{1，3，5，7，4，6}，{1，3，5，7，2，4，6}，共8个．所以满足题设的B有8个．

例1-1-28　由A∪B=A∪C可以推出　　　　　　　　[　　]

A．B=C

B．A∩B=A∩C

C．$\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$

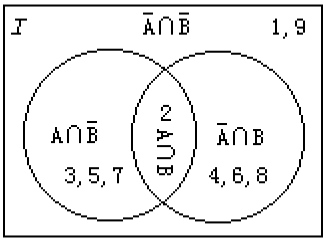
D．$A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

解　C　采用特例法．取A={1，2，3，4}，B={1，2}，C={3，4}，知A，B，D不成立，从而知C成立．

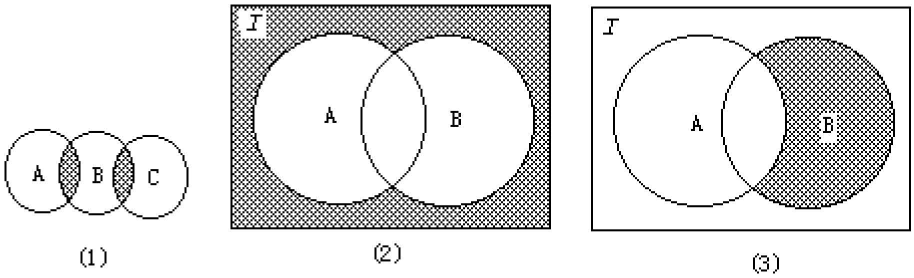
例1-1-29　设全集I={1，2，3，4，5，6，7，8，9}，集合$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，那么$A=$________，B=______．

解　A={2，3，5，7}，B={2，4，6，8}．

用维恩图来推求．如图，两圆分别表示A与B．在图上分别标出$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap B$，$A\cap B$，$A\cap\overline{B}$，并把$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$填入．从图上可得出$A\cap\overline{B}=\{3,5,7\}$．所以$A=\{2,3,5,7\}$，B={2，4，6，8}．



例1-1-30　用集合的交、并、补表示下列图形中阴影部分为：(1)______；(2)______；(3)______．



解　$(1)(A\cap B)\cup(B\cap C)$　$(2)\overline{A\cup B}$　$(3)\overline{A}\cap B$

注　表示方法不惟一，比如(3)也可表示为$(A\cup B)\cap\overline{A}$．

例1-1-31　设全集$I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{b,2\}$，$\overline{A}=\{5\}$，求实数a和b的值．

解　由$A\cup\overline{A}=I$得$\{b,2,5\}=\{2,3,a^2+2a-3\}$．所以

$b=3$且$a^2+2a-3=5\Leftrightarrow a=2$或$-4$，$b=3$

例1-1-32 设全集$I=\{x|x$为小于20的正偶数$\}$，若$A\cap\overline{B}=\{12，14\}$，$\overline{A}\cap B=\{2，4，16，18\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，求集合A与集合B．

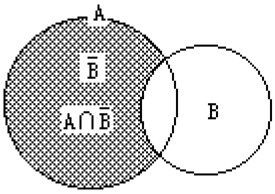
解 由下图知$A\cap\overline{B}=\overline{B}=\{12，14\}$．又

I={2，4，6，8，10，12，14，16，18}

所以 B={2，4，6，8，10，16，18}

同理可得

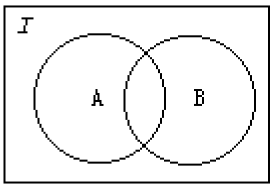
A={6，8，10，12，14}



注 本题中因为$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，所以$\overline{A\cup B}=\varnothing$，可知$A\cup B=I$．因此从维恩图上可以直接看出$A\cap\overline{B}=\overline{B}$，$\overline{A}\cap B=\overline{A}$．

例 1-1-33 50 名学生做物理、化学两种实验．已知物理实验做得正确的有 40 人,化学实验做得正确的有 31 人,两种实验都做错的有 4 人.问这两种实验都做对的有几人？

解 设学生集合为全集 I，做对物理实验的学生为集合 A，做对化学实验的学生为集合 B，则都做对的学生的集合为 A∩B，设其元素个数为 x．由图可见，只做对物理实验的人数为 40-x，只做对化学实验的人数为 31-x．故 x+(40-x)+(31-x)+4=50，解之，得 x=25(人)．



注 如用符号 n(E)表示有限集 E 的元素个数，那么，若 A，B 为有限集，则

n(A∪B)=n(A)+n(B)-n(A∩B)

习题

1-1-18 若 A={1，3，x}，B={x^2，1}，且 A∪B={1，3，x}，则这样的 x 的不同值有 [ ]

A．1 个 B．2 个

C．3 个 D．4 个

1-1-19 已知集合 P 满足 P∩{4，6}={4}，P∩{8，10}={10}，P∩{2，12}={2}，$P\subseteq\{2，4，6，8，10，12\}$，则P＝ [ ]

A．{2，4}

B．{2，4，10}

C．{6，8，12}

D．{2，4，6，8，10，12}

1-1-20 设集合$A=\{(x，y)|\frac{y}{1-x^2}=1，x，y\in R\}$，$B=\{(x，y)|y=$

$1-x^2$，x，y∈R}，C={(x，y)|(x，y)∈B，但(x，y)$\overline{\in}$A}，则B∩C=

[　　]

A．{(1，-1)}

B．{(-1，0)，(1，0)}

C．∅

D．{(-1，1)}

1-1-21　数集{x|15≤x≤125}∩{x|x=4n+1，n∈N}中，所有元素的和等于______.

1-1-22　若 a＜0＜b＜|a|，A={x|a≤x≤b，x∈R}，B={x|-b≤x≤-a，x∈R}，则 A∩B=______，A∪B=______.

1-1-23　已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x|x^2-mx+2=0\}$，且 A∪B=A，A∩C=C，求 a，m.

1-1-24　已知集合 A={(x，y)|ax+y=1}，B={(x，y)|x+ay=1}，C={(x，y)|$x^2+y^2=1$}，问：

(1)当 a 取何值时，(A∪B)∩C 为含有两个元素的集合？

(2)当 a 取何值时，(A∪B)∩C 为含有三个元素的集合？

1-1-25　设I是全集，非空集A，B满足A⊂B，则下列集合中为空集的是　[　　]

A．A∩B　B．$\overline{A}$∩$\overline{B}$　C．$\overline{A}$∩B　D．A∩$\overline{B}$

1-1-26　如果 I={a，b，c，d，e}，M={a，c，d}，N={b，d，e}，其中I是全集，那么$\overline{M}$∩$\overline{N}$=　[　]

A．∅　B．{d}　C．{a，e}　D．{b，e}

1-1-27　若集合 A∪B=I(I 为全集)，则下列关系式中一定正确的是

[　　]

A．B⊆$\overline{A}$　B．A∩B=∅　C．B⊇$\overline{A}$　D．$\overline{A}$∩$\overline{B}$=I

1-1-28　设I={a，b，c，d，e，f，g，h}，已知$\overline{A}$∪$\overline{B}$={a，b，c，e，f，g，h}，$\overline{A}$∩$\overline{B}$={a，e}，$\overline{A}$∩B={c，g}，$\overline{B}$∩A={b，f，h}，则 A=______，B=______.

1-1-29　某年级有 52 人参加了数学或英语小组，其中参加数学小组的有 32 人，参加英语小组的有 40 人，那么同时参加数学和英语小组的有______人.

1-1-30　已知全集$I=\{2，3，a^2+2a-3\}$，A={|a+1|，2}，$\overline{A}$={5}，求实数 a 的值.

1-1-31　设 I=R，P={y|y=$-x^2$，x∈R}，Q={y|y=|x|-1，x∈R}，求P∩Q，P∪Q，$\overline{P∪Q}$与$\overline{P}$∩Q.

1-1-32　(1)A={x|x=28m+20n，m，n∈Z}，B={x|x=12m+18n，m，n∈Z}，求属于 A∩B 的最小的正整数.

(2)设集合 A 的元素是正整数的平方除以 8 得到的余数，集合 B 的元素是正整数的平方除以6得到的余数，用列举法表示集合A∪B，$\overline{A}$∩B.

（二）一元二次不等式

提要

(1)解不等式$|f(x)|<c$与$|f(x)|>c(c>0)$主要依据

$|f(x)|<c \Leftrightarrow -c<f(x)<c$

与 $|f(x)|>c \Leftrightarrow f(x)<-c$**或**$f(x)>c$

将绝对值不等式转化为非绝对值不等式(组)后求解.

(2)可将(1)的依据推广为

$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$

与 $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)<-g(x)$**或**$f(x)>g(x)$

(3)型如$|f(x)|<|g(x)|$的不等式可通过对其两边平方后化为$[f(x)]^2<[g(x)]^2$求解.

(4)型如$a|x-x_1|+b|x-x_2|<c(x_1<x_2$，$a$，$b\neq0)$的不等式可通过分区间$(-\infty$，$x_1)$，$(x_1$，$x_2)$，$(x_2$，$+\infty)$去绝对值符号后求解.

(5)一元二次不等式$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$的解集实际上就是使一元二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$的函数值为正的自变量x的取值范围，故可利用二次函数的图形直观地得到一元二次不等式的解.

(6)已知一元二次不等式$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$的解集，确定不等式的系数可采用比较系数法，即作出一个解集为已知集合的一元二次不等式$a_1x^2+b_1x+c_1>0(a_1\neq0)$，然后与所求不等式比较系数：

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}(a\text{与}a_1\text{同号})$$

1．$|ax+b|<c$，$|ax+b|>c(c>0)$型不等式

例题

例1-2-1 不等式组$\begin{cases}1<|x|\\|x|<2\end{cases}$的解集为　　[　]

A．$\{x|-1<x<1\}$

B．$\{x|-2<x<-1$ 或 $1<x<2\}$

C．$\varnothing$

D．$\{x|-2<x<2\}$

解　B　由 $1<|x|$ 得 $x<-1$ 或 $x>1$；由 $|x|<2$ 得 $-2<x<2$，所以原不等式组的解为 $-2<x<-1$ 或 $1<x<2$．

例 1-2-2　不等式 $|x-1|+|x+2|<5$ 的解集是　　[　]

A．$\{x|-3<x<2\}$

B．$\{x|-1<x<2\}$

C．$\{x|-2<x<1\}$

D．$\{x|-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}\}$

解　A　分区间讨论．当 $x<-2$ 时，原不等式化为 $-(x-1)-(x+2)<5$，即 $x>-3$，此时原不等式的解为 $-3<x<-2$；

当 $-2\le x<1$ 时，原不等式化为 $-(x-1)+(x+2)<5$，即 $x\in R$，此时原不等式的解为 $-2\le x<1$；

当 $x\ge 1$ 时，原不等式化为 $(x-1)+(x+2)<5$，即 $x<2$，此时原不等式的解为 $1\le x<2$．

综上可知，原不等式的解集是 $\{x|-3<x<2\}$．

例1-2-3 使$\dfrac{\sqrt{3-|x|}}{\sqrt{|2x+1|-4}}$有意义的$x$的取值范围是　　[　]

A．$-3\le x<\frac{3}{2}$　　B．$-\frac{5}{2}<x\le 3$

C．$-3\le x<-\frac{5}{2}$ 或 $\frac{3}{2}<x\le 3$　　D．$-3\le x\le 3$

解 C 解不等式组$\begin{cases}3-|x|\ge 0\\|2x+1|-4>0\end{cases}$得$x$的取值范围．

例1-2-4 不等式$|x+2|>\dfrac{3x+14}{5}$的解是　　[　]

A．$x<-3$ 或 $x>2$

B．$-3<x<2$

C．$-2<x<0$

D．$0<x<2$

解　A　原不等式同解于

$$x+2<-\frac{3x+14}{5}\text{或}x+2>\frac{3x+14}{5}\Leftrightarrow x<-3\text{或}x>2.$$

注 显然原不等式可分为$\dfrac{3x+14}{5}<0$或$\dfrac{3x+14}{5}\ge 0$两种情况求解，

但没有上述解法简便．

例1-2-5 (1)$\frac{5|x|-1}{2}+1<3$的解集为______；

(2)$5\leq|5x-3|\leq10$的解集为______．

解 (1){x|-1＜x＜1}

(2)$\{x|-\frac{7}{5}\leq x\leq-\frac{2}{5}$或$\frac{8}{5}\leq x\leq\frac{13}{5}\}$．解不等式组$\begin{cases}|5x-3|\leq10\\|5x-3|\geq5\end{cases}$即得．

例1-2-6 不等式$\frac{|x-1|-2}{|x+3|}>0$的解集是______．

解 {x|x＜-3 或-3＜x＜-1 或 x＞3}

原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases}|x-1|-2>0\\x+3\neq0\end{cases}$$

解之，得原不等式的解集为{x|x＜-3 或-3＜x＜-1 或 x＞3}．

例1-2-7 设$A=\left\{x\,\middle|\,|\frac{3}{2}x-2|\leq|\frac{x}{2}|\right\}$，$B=\{x\,|\,|x-1|<a\}$．如果$A\cap B=B$，求a的取值范围．

解 对$|\frac{3}{2}x-2|\leq|\frac{x}{2}|$两边平方得

$$(\frac{3}{2}x-2)^2\leq(\frac{x}{2})^2\Leftrightarrow(x-1)(x-2)\leq0$$

所以 A=[1，2]．

中a和$\frac{1}{a}$的几何意义来判断．

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$$

解得 a≤0．但 a＞0，故此种情形不成立．

综合(i)、(ii)知，所求 a 的取值范围为 a≤0．

例1-2-8 设a是给定的正数，且$2a\geq\sqrt{2}$，如果对满足不等式$|x-a|<b$的一切实数x，不等式$|x^2-a^2|<\frac{1}{2}$都成立，求正数b的取值范围．

解 $|x-a|<b(b>0)\Leftrightarrow a-b<x<a+b$ (i)

$$|x^2-a^2|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow a^2-\frac{1}{2}<x^2<a^2+\frac{1}{2}\qquad\text{(ii)}$$

因为$2a\geq\sqrt{2}$，所以$a^2-\frac{1}{2}\geq0$，所以(ii)的解为

$$-\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}<x<-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\text{或}\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}<x<\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}$$

满足(i)的一切实数 x 满足(ii)，其条件是

$$\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\leq a-b\text{且}a+b\leq\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0<b\leq a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\text{且}0<b\leq\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}-a$$

因为$\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}+a}<\dfrac{\frac{1}{2}}{a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}}$，所以$\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}-a<a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}$.

故$0<b\leq\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}-a$为所求.

习题

1-2-1　若|x|≤1，则　[　]

A. $x^2\leq1$　　B. $x\leq1$

C. $x\leq-1$　　D. $x\leq-1$ 或 $x\geq1$

1-2-2 如果不等式$\frac{1}{x}<2$和$|x|>\frac{1}{3}$同时成立，那么x满足

[　]

A. $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$　　B. $x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{1}{3}$

C. $x>\frac{1}{2}$　　D. $x<-\frac{1}{3}$或$x>\frac{1}{3}$

1-2-3　不等式 $1\leq|x-2|\leq7$ 的解集是　[　]

A. $3\leq x\leq9$

B. $-5\leq x\leq1$

C. $-5\leq x\leq9$

D. $-5\leq x\leq1$ 或 $3\leq x\leq9$

1-2-4　(1)$|2-x|<1$ 的整数解为______.

(2)$5+|x|<2x-4$ 的解集为______.

1-2-5 若$|3x-1|<3$，化简$\sqrt{9x^2-24x+16}+\sqrt{9x^2+12x+4}$的结果是______.

1-2-6　不等式$|2x+3|-|4x-3|\geq0$ 的解集是______.

1-2-7　解关于 x 的不等式 $a|x-1|>2+a$.

1-2-8　已知 $a>0$，不等式$|x-4|+|x-3|<a$ 在 R 上的解集不是空集，求 a 的取值范围.

2．一元二次不等式

例题

例 1-2-9　下列不等式中无解的一个是　　[　　]

A．$2x^2-3x+2>0$

B．$x^2+4x+4\leq 0$

C．$4-4x-x^2<0$

D．$-2+3x-2x^2>0$

解　D　$\triangle=3^2-4(-2)(-2)=-7<0$

例1-2-10　若x是不等式组$\begin{cases}(2x-1)(x-3)>-2\\ 2(x+2)<\dfrac{5x+6}{3}+1\end{cases}$的解，则P(x+2，x-2)在　　[　　]

A．第一象限

B．第二象限

C．第三象限

D．第四象限

解　C　不等式组的解为 $x<-3$，所以 $x+2<0$，$x-2<0$.

例 1-2-11　已知不等式

(i)$x^2-4x+3<0$　(ii)$x^2-6x+8<0$　(iii)$2x^2-9x+a<0$

要使满足(i)、(ii)的 x 也满足(iii)，则　　[　　]

A．$a>9$　　B．$a=9$

C．$a\leq 9$　　D．$0<a\leq 9$

解　C　(i)的解是$1<x<3$,(ii)的解是$2<x<4$.所以同时满足(i)，(ii)的 x 的值 $2<x<3$.

设$f(x)=2x^2-9x+a$，要使$2<x<3$是(iii)的解，只要使$\begin{cases}f(2)\leq 0\\ f(3)\leq 0\end{cases}$成立，解得 $a\leq 9$.

注　本例可理解为：不等式组(i)、(ii)的解是不等式(iii)的解集的子集.

例 1-2-12　或关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty)$，则与不等式 $ax^2+bx+c>0$ 同解的不等式(组)是　[　　]

A．$(x-\alpha)(x-\beta)>0$

B．$(x-\alpha)(x-\beta)<0$

C．$\begin{cases}x-\alpha>0\\ x-\beta>0\end{cases}$

D．$\begin{cases}x-\alpha<0\\ x-\beta<0\end{cases}$

解　B　由题设可知 $a<0$.

注　结合二次函数的图象更容易理解此题.

例 1-2-13　不等式$(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$对$x\in R$恒成立，则a的取值范围是　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$(-\infty,2)$　　　　B．$(-2,2)$

C．$(-2,2)$　　　　D．$(-\infty,-2)$

解　B　由已知条件得

$$\begin{cases} a-2<0 \\ \triangle=[2(a-2)]^2-4(a-2)(a-4)<0 \end{cases}$$

解得$-2<a<2$．

又当$a=2$时，原不等式化为$-4<0$，恒成立．

所以a的取值范围是$(-2,2)$．

例 1-2-14　二次函数$y=x^2+(m-3)x+1$的图象与x轴的两个交点的横坐标分别为x_1，x_2，且$x_1<2$，$x_2>2$，则m的取值范围是______．

解　$m<\frac{1}{2}$　据题设应有$2^2+(m-3)\cdot 2+1<0$，解之得$m<\frac{1}{2}$．

例 1-2-15　使抛物线$y=x^2-2x-3$落在直线$y=x-5$的下方的x的取值范围是______．

解　$1<x<2$　由已知条件得$x^2-2x-3<x-5$，解得$1<x<2$．

例1-2-16　(1)不等式$\frac{x+1}{2x-3}<1$的解集是______．

(2)不等式$\frac{x+7}{3x^2+2x+5}>1$的解集是______．

解　(1)$\{x|x<\frac{3}{2}$或$x>4\}$

$$\frac{x+1}{2x-3}<1\Leftrightarrow\frac{x+1}{2x-3}-1<0\Leftrightarrow\frac{x-4}{2x-3}>0$$

$$\Leftrightarrow(x-4)(x-\frac{3}{2})>0\Leftrightarrow x<\frac{3}{2}\text{或}x>4$$

(2)$\{x|-1<x<\frac{2}{3}\}$　因为$3x^2+2x+5$的判别式$\triangle<0$，所以$3x^2+2x+5$恒大于0．故原不等式可化为

$$x+7>3x^2+2x+5\Leftrightarrow-1<x<\frac{2}{3}$$

例 1-2-17　已知$A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|x^2+2x-8>0\}$，$C=\{x|x^2-4ax+3a^2<0\}$．若$A\cap B\subseteq C$，求实数a的取值范围．

解　$A\cap B=\{x|-2<x<3\}\cap\{x|x>2$或$x<-4\}$

$=\{x|2<x<3\}$

由$x^2-4ax+3a^2<0$，得

$(x-a)(x-3a)<0$

当$a>0$时，$C=\{x|a<x<3a\}$；

当$a<0$时，$C=\{x|3a<x<a\}$．

欲使$A\cap B\subseteq C$则须$a>0$且$a\leq 2$，$3a\geq 3$，所以$1\leq a\leq 2$．

例 1-2-18　(1)解关于 x 的不等式 $2x^2+(a+1)x-a(a-1)<0$，其中 $a>0$．

(2)若(1)中不等式的解集包含区间(0，1)，试求 a 的取值范围．

解　(1)原不等式即

$(x-\frac{a-1}{2})(x+a)<0$．

当$0<a<\frac{1}{3}$时，$-a>\frac{a-1}{2}$，原不等式的解集为$(\frac{a-1}{2}, -a)$；

当$a=\frac{1}{3}$时，$-a=\frac{a-1}{2}$，原不等式，即$(x+\frac{1}{3})^2<0$，无解；

当$a>\frac{1}{3}$时，$-a<\frac{a-1}{2}$，原不等式的解集为$(-a, \frac{a-1}{2})$．

(2)当(1)中不等式的解集包含区间(0，1)，则只须分别满足下列二组不等式

$$(\mathrm{I})\begin{cases}a>0\\ a\neq\frac{1}{3}\\ -a\geq 1\\ \frac{a-1}{2}\leq 0\end{cases}\quad \text{或} \quad (\mathrm{II})\begin{cases}a>0\\ a\neq\frac{1}{3}\\ -a\leq 0\\ \frac{a-1}{2}\geq 1\end{cases}$$

解此二组不等式，(I)组无解，(II)组解集为[3，+∞)．

合并(I)、(II)知 a 的取值范围为[3，+∞)．

例1-2-19　对任意实数a，方程$\frac{2x-m}{x^2-4x+3}=a$都有实数解，求实数 m 的取值范围．

解　当 $x\neq 1$ 且 $x\neq 3$ 时，原方程化为

$ax^2-(4a+2)x+3a+m=0$

因为对任意实数 a 方程都有实数解，所以

$\triangle_x=[-(4a+2)]^2-4a(3a+m)\geq 0$ 恒成立，

即 $a^2+(4-m)a+1\geq 0$ 恒成立．所以

$\triangle_a=(4-m)^2-4\leq 0\Leftrightarrow 2\leq m\leq 6$

又因为 $x\neq 1$ 且 $x\neq 3$，易得 $m\neq 2$ 且 $m\neq 6$．

综上可知，$2<m<6$．

习题

1-2-9　不等式组$\begin{cases}x^2-4x+3<0\\ 2x>5\end{cases}$的解集是　　　　[　　]

A．$1<x<3$　　　　B．$\frac{5}{2}<x<3$

C．$x<1$或$x>3$　　　　D．$x<1$或$x>\frac{5}{2}$

1-2-10　抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴的两个交点为$(-\sqrt{2}，0)$，$(\sqrt{2}，0)$，则$ax^2+bx+c>0$的解集为　　　　[　　]

A．$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

B．$x>\sqrt{2}$或$x<-\sqrt{2}$

C．$x\neq\pm\sqrt{2}$

D．不确定，与a的符号有关

1-2-11　若不等式$x^2-px-q<0$的解为$2<x<3$，则不等式$qx^2-px-1>0$的解是　　　　[　　]

A．$2<x<3$

B．$-3<x<-2$

C．$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$

D．$-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$

1-2-12　使不等式$|x|^2-2|x|-15>0$成立的负值x的范围是　　　　[　　]

A．$x<-3$　　　　B．$x<0$

C．$x<-5$　　　　D．$-5<x<-3$

1-2-13　(1)不等式$x^2-2\sqrt{5}x+5>0$的解集为______；

(2)不等式$\frac{4x-2}{3x+1}\geq1$的解集为______．

1-2-14　已知全集$I=\{x|x(x-4)>0\}$，集合$A=\{x|(x+2)x<0\}$，集合$B=\{x|(x+1)x<0\}$，则$\overline{A}\cup B=$______；$A\cap\overline{B}=$______．

1-2-15　若函数$f(x)=\sqrt{kx^2-6kx+(k+8)}$的定义域为R，则实数k的取值范围是______．

1-2-16　若方程$x^2+(m+2)x+m+5=0$的两根均为正数，则m的取值范围是______．

1-2-17　已知集合$A=\{x|x^2-3x-10\leq0\}$，集合$B=\{x|p+1\leq x\leq 2p-1\}$，若$B\subseteq A$，求实数p的取值范围．

1-2-18　k为什么实数时，方程$(k-1)x^2+(2k-3)x+k-7=0$的两根异号，并且负根的绝对值较大？

1-2-19　设不等式$x^2-ax-8\geq0$与$x^2-2ax-b<0$的解集分别为A，B，确定a、b的值，使$A\cap B=[4，5)$并求这时的$A\cup B$．

1-2-20　对于满足$|m|<2$的所有实数m,求使不等式$x^2+mx+1>2x+m$成立的x的范围．

（三）映射与函数

提要

(1)判断一个对应是否为映射，可借助“对应图”直观进行．

(2)求函数的定义域的步骤是：先列出使函数的每一部分都有意义的条件组(不等式组)，然后解不等式(组)．

(3)解有关分段函数的问题时应先分段讨论函数在每一段上的解析式．

(4)作函数图象的步骤是：i)求出函数的定义域；ii)研究函数的性质(间断点、端点、极值点、增减性、奇偶性、对称性、周期性、渐近线等)；iii)在定义域上作图，并标明关键点(间断点、端点、与坐标轴的交点、极值点)的坐标．

1．映射

例题

例 1-3-1　设集合 A={x|0≤x≤4}，集合 B={y|0≤y≤1}，从 A 到 B 的下列各对应关系中不是映射的是　　　　　　　　　　[　　]

A．$f：x\to y=\frac{\sqrt{x}}{2}$　　　B．$f：x\to y=\frac{x}{3}$

C．$f：x\to y=\frac{x}{4}$　　　D．$f：x\to y=\frac{x}{5}$

解　B　$4\in A$，但$y=\frac{4}{3}\notin B$．

注　如 A 中某一元素在 B 中无象，则 f：A→B 不能是 A 到 B 的映射．

例 1-3-2　从集合 A={a，b}到集合 B={x，y}可以建立的映射的个数是　　　　　　　　　　[　　]

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

解　D

例 1-3-3　审查下述各命题：

从集合 A 到集合 B 的映射中，

(1)B 中的任一元素在 A 中必有原象；

(2)A 中的不同元素在 B 中的象必不相同；

(3)A 中任一元素在 B 中必有惟一的象；

(4)A 中的任一元素在 B 中可以有不同的象．

其中正确的有　　　　　　　　　　[　　]

A．1 个　　　　B．2 个

C．3 个　　　　D．4 个

解　A

例 1-3-4　在给定的映射 f：(x，y)→(x+y，xy)(x，y∈R)条件下，(7，10)的原象是　　　　　　　　　　[　　]

A．(2，5)

B．(5，2)

C．(2，5)或(5，2)

D．以上都不对

解　C

例 1-3-5　设集合 A={1，2，3，4，5，6}，f 是从 A 到 B 的映射，并且 f：x→x(x-4)，若 B 中元素都有原象，则 B=______．

解　{-4，-3，0，5，12}

例 1-3-6　集合 P={(x，y)|x＜0，y＜0}，f 是集合 P 到集合 Q 的映射，在 f 的作用下，点(x，y)的象是(x^2，|y|)，则集合 Q 的元素在直角坐标系中第______象限．

解　一　注意：x^2＞0，|y|=-y＞0

例 1-3-7　已知集合 A={平面α内的三角形}，B={平面α内的圆}，那么从 A 到 B 的一个映射的对应法则是______．

解　作三角形的内切圆、外接圆等．

例1-3-8　已知集合A到集合B的映射是$f：x\to\frac{1}{|x|-1}$，且$B=\{0，1，\frac{1}{2}，\frac{1}{3}\}$，那么集合A中的元素最多是几个？并写出元素个数最多时的集合A．

解　因为$\frac{1}{|x|-1}\neq 0$，所以0在A中不存在原象．

设$y=\frac{1}{|x|-1}$，且$y\in B$，则有$x=\pm(\frac{1}{y}+1)$．

当y分别等于1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$时，相应地得到x分别等于±2，±3，±4．

所以，A中元素最多6个，这时A={-4，-3，-2，2，3，4}．

注　如f：A→B为A到B的映射，则B中元素在A中可有多个原象．

例1-3-9　已知集合A={1，2，3，k}，B={4，7，a^4，a^2+3a}(这里a，k∈N)，映射f：x→y=3x+1(x∈A，y∈B)使B中元素在A中都有原象，求a，k，A，B．

解　由对应法则知1→4，2→7，3→10，k→3k+1．

因为a，k∈N，所以$a^4\neq 10$，所以$a^2+3a=10$，所以a=2(a=-5舍去)．

又$3k+1=2^4=16$，所以k=5．

从而知A={1，2，3，5}，B={4，7，10，16}．

习题

1-3-1　下列命题中正确的是　[　　]

A．若M={整数}，N={正奇数}，则一定不能建立一个从集M到集N的映射

B．若集A是无限集，集B是有限集，则一定不能建立一个从集A到集B的映射

C．若集合A={a}，B={1，2}，则从集A到集B只能建立一个映射

D．若集合A={1，2}，B={a}，则从集A到集B只能建立一个映射

1-3-2　对于从集合A到集合B的映射，下面说法错误的是　[　　]

A．A中的每一个元素在B中都有象

B．A中的两个不同元素在B中的象必不相同

C．B中的元素在A中可以没有原象

D．B中的某一元素在A中的原象可能不止一个

1-3-3　下列从集合P到Q的各对应关系f中，是映射的是　[　　]

A．P={1}，Q={1，2，3}，f：x→y，y＞x

B．$P=\{x|0\leq x\leq 2\}$，$Q=\{y|0\leq y\leq 1\}$，$f：x\to y=\frac{1}{3}x$

C．$P=\{x|x\in R\}$，$Q=\{y|0\leq y\leq 1\}$，$f：x\to y=\frac{1}{x}$

D．$P=\{0|0\leq x\leq 2\}$，$Q=\{y|0\leq y\leq 1\}$，$f：x\to y=(x-2)^2$

1-3-4　集合 A 有 n 个元素，集合 B 有 m 个元素，则由 A 到 B 的映射：A→B 的个数是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．P_n^m　　B．n^m　　C．P_m^n　　D．m^n

1-3-5　已知(x，y)在映射 f 的作用下的象是(x+y，x-y)，则在 f 的作用下，(1，2)的原象是______．

1-3-6　设$B=R$**，若映射**$f:x\to\frac{x^2-1}{x+1}$**，**$g:x\to x-1$**均为从**A**到**B**的同一映射，则 A 应满足的条件是______．**

1-3-7　集合$A=N$**，**$B=\{y|y=\frac{2x-1}{2x+1}, x\in N\}$**，**f**是从**A**到**B**的映射，且**$f:x\to y=\frac{2x-1}{2x+1}$**．**

(1)求 4 的象；

(2)**求**$\frac{9}{11}$**的原象；**

(3)集 B 的任一元素 y 是否有两个或两个以上的原象？

1-3-8　设集合 M={x|1≤x≤9，x∈N}，F={(a，b，c，d)|a，b，c，d∈M}．定义 F 到 Z 的映射

f：(a，b，c，d)→ab-cd

若 u，v，x，y 都是 M 中的元素，且满足

f：(u，v，x，y)→39，(u，y，x，v)→66

求 x，y，u，v．

2．函数

例题

例 1-3-10　审查下面四个命题：

(i) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$ **是函数；**

(ii)函数是其定义域到值域的映射；

(iii) $y=x$ **与** $y=\sqrt{x^2}$ **表示同一函数；**

(iv) $y=\frac{x}{x}$ **与** $y=x^0$ **表示同一函数．**

其中正确的有　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

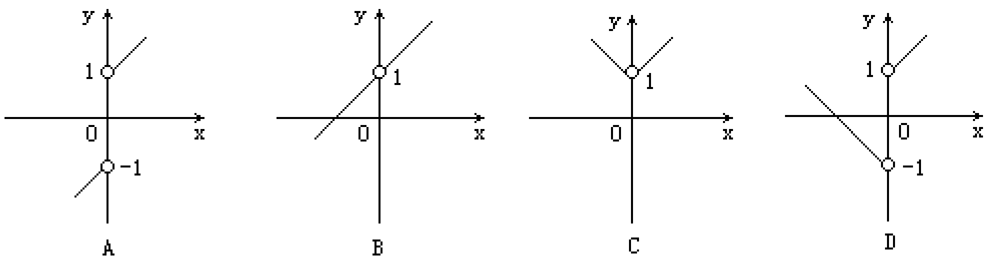
A．1 个　　　　　　B．2 个

C．3 个　　　　　　D．4 个

解　B

注　高中数学中的函数是通过映射来定义的．

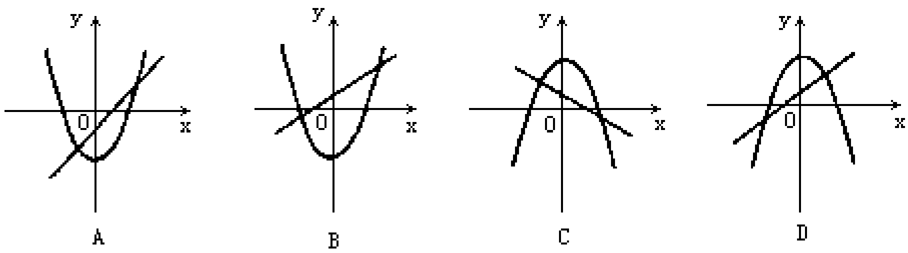
例1-3-11　函数 $y=|x|+\frac{|x|}{x}$ **的图象是　　　　　　　　[　　]**



解 D **函数** $y=|x|+\frac{|x|}{x}$ **可化为**

$$y=\begin{cases}x+1, & x>0\\ -x-1, & x<0\end{cases}$$

例 1-3-12　设 ak＞0，bc＜0，在同一坐标系中 $y=ax^2+c$ 与 y=kx+b 的图象应是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]



解　B　由 a，k 同号排除 D；由 b，c 异号排除 A，C．

例1-3-13 已知函数 $f(x)=\frac{cx}{2x+3}\left(x\neq-\frac{3}{2}\right)$ **满足** $f(f(x))=x$ **，则c的值是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]**

A．3　　　　　　　B．-3

C．3 或-3　　　　　D．不存在

解　B

$$f(f(x))=\frac{c\cdot\frac{cx}{2x+3}}{2\cdot\frac{cx}{2x+3}+3}=x\Rightarrow x(2c+6)=c^2-9$$

对任何$x(x\neq-\frac{3}{2})$成立．所以$2c+6=c^2-9=0$即$c=-3$．

而$\frac{-3x}{2x+3}\neq-\frac{3}{2}$，故所求$c=-3$．

例1-3-14 函数$y=\frac{3}{1-\sqrt{1-x}}$的定义域是 [ ]

A．(-∞，1]

B．(-∞，0)∪(0，1]

C．(-∞，0)∪(0，1]

D．无法确定

解 B 解不等式组

$$\begin{cases}1-x\geq 0\\ 1-\sqrt{1-x}\neq 0\end{cases}$$

得(-∞，0)∪(0，1)，此即所求定义域．

例1-3-15 已知函数$f(x)=\begin{cases}3x-6，x\geq 0\\ x+5，x<0\end{cases}$，则$f(f(1))$的值是

[ ]

A．2 B．-15

C．12 D．以上都不对

解 A 因为1＞0，所以f(1)=3·1-6=-3．又f(1)=-3＜0，所以f(f(1))=f(1)+5=-3+5=2

注 求分段函数的函数值时，首先应清楚自变量的值在定义域的哪一段上．

例 1-3-16 如果函数 y=f(x)的定义域是[0，1]，那么函数f(x+a)+f(2x+a)(0＜a＜1)的定义域是______．

解 $[-\frac{a}{2}，\frac{1-a}{2}]$ 解不等式组

$$\begin{cases}0\leq x+a\leq 1\\ 0\leq 2x+a\leq 1\end{cases}\quad(0<a<1)$$

得$\begin{cases}-a\leq x\leq 1-a\\ -\frac{a}{2}\leq x\leq\frac{1-a}{2}\end{cases}\quad(0<a<1)$

所以所求函数定义域为$[-\frac{a}{2}，\frac{1-a}{2}]$．

例1-3-17 已知$g(x)=1-2x$，$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq 0)$，则$f(\frac{1}{2})$等于____.

解 15 令$g(x)=\frac{1}{2}$，解得$x=\frac{1}{4}$. 代入$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}$得

$$f[g(\frac{1}{4})]=f(\frac{1}{2})=\frac{1-(\frac{1}{4})^2}{(\frac{1}{4})^2}=15$$

例1-3-18 若$f(\frac{1-x}{1+x})=x$，则满足等式$f(-2-x)=m-f(x)$的m的值是______.

解 -2 因为$f(\frac{1-x}{1+x})=x$，所以$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. 由题设得

$$\frac{1-(-2-x)}{1+(-2-x)}=m-\frac{1-x}{1+x}\Leftrightarrow m=\frac{3+x}{-1-x}+\frac{1-x}{1+x}=-2$$

例1-3-19 设$A=[1，b](b>1)$，$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+1(x\in A)$. 若$f(x)$的值域也为A，则b的值为______.

解 3 函数 f(x)的对称轴为 x=1,而 f(1)=1,b>1,故可令 f(b)=b，即$\frac{1}{2}(b-1)^2+1=b$，解得$b=3(b=1$舍去).

例 1-3-20 已知 y 是 x 的函数，$x=2^t+2^{-t}$，$y=4^t+4^{-t}-4(2^t+2^{-t})$，$t\in R$ 求函数 y=f(x)的解析式及其定义域.

解 $y=4^t+4^{-t}-4(2^t+2^{-t})=(2^t+2^{-t})^2-4(2^t+2^{-t})-2=x^2-4x-2$

因为$t\in R$，所以$2^t+2^{-t}\geq 2\sqrt{2^t\cdot 2^{-t}}=2$，即$x\geq 2$.

所以所求函数为 $y=x^2-4x-2(x\geq 2)$；其定义域为$[2，+\infty)$.

例1-3-21 设$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}(x\in R)$的值域为$[-1，4]$，求a，b的值.

解 设$y=\frac{ax+b}{x^2+1}$，则$yx^2-ax+y-b=0$，$y\neq 0$.

因为 $x\in R$，所以$\triangle=a^2-4y(y-b)\geq 0$.

即$y^2-by-\frac{a^2}{4}\leq 0$ (i)

易知$-1\leq y\leq 4$ 是不等式$(y+1)(y-4)\leq 0$ 即 $y^2-3y-4\leq 0$ 的解，与(i)比较系数，得 b=3，a=4.

例 1-3-22 求下列函数的值域：

$(1)y=\sqrt{x^2+2x+4}$

$(2)y=x^4+x^2+1$

由$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$，θ为锐角得

解 (1)因为$y=\sqrt{(x+1)^2+3}\geq\sqrt{3}$，所以值域为$\{y|y\geq\sqrt{3}\}$．

(2)因为$y=(x^2+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$，所以值为$\{y|y\geq 1\}$．

注 此题容易误解为$[\frac{3}{4}，+\infty)$．

(3)因为$x^2+4x+7=(x+2)^2+3\geq 3$，所以$0<\frac{5}{x^2+4x+7}\leq\frac{5}{3}$．

所以值域为$\{y|0<y\leq\frac{5}{3}\}$．

(4)令$\sqrt{2x-1}=t(t\geq 0)$，则$x=\frac{t^2+1}{2}$，从而

$$y=\frac{t^2+1}{2}+t=\frac{1}{2}(t+1)^2$$

因为$t\geq 0$，所以$t+1\geq 1$．于是$y=\frac{1}{2}(t+1)^2\geq\frac{1}{2}$，故值域为$\{y|y\geq\frac{1}{2}\}$．

(5)函数的定义域为 $x\neq-1$，$x\neq-2$ 的一切实数．当 $x\neq-1$，$x\neq-2$ 时，函数变形为

$(y-1)x^2+(3y+1)x+2(y+1)=0$

若 $y-1=0$，即 $y=1$，由上式得 $x=-1$，不属于函数的定义域，故 $y\neq 1$．

因为 $x\in R$，所以

$\triangle=(3y+1)^2-4\cdot 2(y-1)(y+1)=(y+3)^2\geq 0$

于是可知 $y\in R$，但 $y\neq 1$．

令 $y=-3$，得 $x=-1$，不属于函数的定义域，所以 $y\neq-3$．

综上所述，所求值域为$\{y|y\in R，y\neq 1，y\neq-3\}$．

例 1-3-23 已知 $f(x)$ 是 x 的二次函数，且 $f(2x)+f(3x+1)=13x^2+6x-1$，求 $f(x)$．

解 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，则有

$f(2x)=4ax^2+2bx+c$

$f(3x+1)=9ax^2+(6a+3b)x+(a+b+c)$

所以 $f(2x)+f(3x+1)=13ax^2+(6a+5b)x+(a+b+2c)$

又 $f(2x)+f(3x+1)=13x^2+6x-1$，比较系数，得 $a=1$，$b=0$，$c=-1$．所以所求函数为 $f(x)=x^2-1$．

例 1-3-24 已知 $f(x+y)=f(x)+5(x-y+1)$，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$．

解 令 $y=-x$，代入 $f(x+y)=f(x)+5(x-y+1)$，得

$f(0)=f(x)+10x+5$

又 $f(0)=2$，所以 $f(x)=-10x-3$．

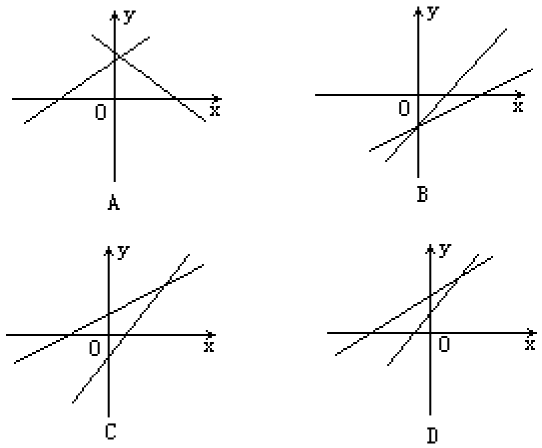
习题

1-3-9 函数$y=\frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{4-x}}$的定义域是 [ ]

A．[-3，＋∞)　　　　　B．$[-3,\ \frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},\ 0]$

C．(-∞，4]　　　　　D．$[-3,\ \frac{1}{2})\ \cup\ (\frac{1}{2},\ 4]$

1-3-10　函数 $y_1=ax+b$ 与 $y_2=bx+a(a\neq 0，b\neq 0，a\neq b)$在同一直角坐标系中的图象应是　[　　]



1-3-11　已知函数 $f(x)=x^2-4x$，$x\in[1，5)$，则这个函数的值域是 [　　]

A．[-4，+∞)　　　　B．[-3，5)

C．[-4，5]　　　　D．[-4，5)

1-3-12 已知$f(x)=\frac{x-2}{x+2}$**，则使**$f\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=-\frac{1}{2}x$**成立的实数**$x$**是**

[　　]

A．4　　　　B．2

C．-4　　　　D．-2

1-3-13 若$\varphi(x)=\begin{cases}x^2(x\geq 0)\\x(x<0)\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x(x\geq 0)\\-x^2(x<0)\end{cases}$**，则当**$x<0$**时，**$\varphi[f(x)]$**等于________．**

1-3-14 函数$y=3x+\sqrt{1-6x}$**的值域是**

[　　]

A．(-∞，1]　　　　B．[0，＋∞)

C．[0，1]　　　　D．$[\frac{1}{2},\ 1]$

1-3-15　若 $3x^2+2y^2=6x$，则 x^2+y^2 的值域是______．

1-3-16　A={(x，y)|y=a|x|}，B={(x，y)|y=x+a}，C=A∩B，且 C 中恰有两个元素，则实数 a 的取值范围是______．

1-3-17 当k**为何值时，函数**$f(x)=\frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$**的定义域为实数集**R**．**

1-3-18　求下列函数的定义域．

$(1) y=\sqrt{|2x-1|+5x-2}$　　　　$(2) y=\dfrac{1}{x^2-|x|}$

$(3) y=\sqrt{1-|x-a|}+\sqrt{1-|x+a|}\ \ (a>0)$

1-3-19　已知函数 f(x)的定义域为[a，b]，且 b＞-a＞0．求：
(1)F(x)=f(x)-f(-x)的定义域；
(2)g(x)=f(x+c)+f(x-c)(c＞0)的定义域．

1-3-20 已知函数$y=a+\sqrt{-x^2+ax+b}$**的值域为**$4\le y\le 7$**，求 a，b 的值．**

1-3-21 函数$f(x)$**满足条件**$2f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$**，求**$f(x)$**的解析式．**

（四）　幂函数

提要

(1)关于根式，去掉根号的途径有两条：(i)对根号下的式子配方，使其成为完全平方、完全立方等；(ii)对根式乘方．

(2)幂函数的图象可分为 11 类，作函数图象时，应先判断它属于哪一类．

(3)由于幂函数的图象构图简单，故有关幂函数性质的问题可尽量利用幂函数的图象来解决．

1．分数指数幂与根式

例题

例 1-4-1　下列等式中正确的是[　　]

A．$\sqrt[4]{(-2)^4}=-2$　　B．$\sqrt[3]{(-2)^3}=2$

C．$\left(\sqrt[3]{-2}\right)^3=-2$　　D．$\sqrt[3]{-2}=\sqrt[3]{2}$

解　C

例 1-4-2　a∈R，下列各式中一定有意义的是　[　　]

A．a^{-2}　　B．$a^{\frac{1}{4}}$

C．a^0　　D．$a^{\frac{2}{3}}$

解　D

例1-4-3 $(-0.000343)^{\frac{1}{3}}-(-1024)^{\frac{1}{5}}+\sqrt[3]{10\frac{21}{125}-16}$**的值等于**

[　　]

A．2.13　　B．-2.13

C．2.31　　D．-2.31

解　A　原式=-0.07+4-1.8=2.13

例 1-4-4　化简：

$$(1+2^{-\frac{1}{32}})(1+2^{-\frac{1}{16}})(1+2^{-\frac{1}{8}})(1+2^{-\frac{1}{4}})(1+2^{-\frac{1}{2}})=\_\_\_\_\_\_$$

[　　]

A．$\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})$　　B．$\frac{1}{2}(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$

C．$(1-2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$　　D．$1-2^{-\frac{1}{32}}$

解 B **乘以**$(1-2^{-\frac{1}{32}})$**，反复利用公式**$(1-x)(1+x)=1-x^2$**即得．**

例 1-4-5　化简：

(1)$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{-a}=\_\_\_\_\_\_$

(2)$\left(27a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}a^2\cdot\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}=\_\_\_\_\_\_$

解　(1)$-\sqrt{-a}$　　(2)$3a^{\frac{2}{9}}$

例 1-4-6　计算：

$$\left(\frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+\cdots+n\cdot2n\cdot4n}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+\cdots+n\cdot3n\cdot9n}\right)^{\frac{1}{3}}=\_\_\_\_\_\_$$

解　$\frac{2}{3}$　**原式**$=\left[\frac{1\cdot2\cdot4(1^3+2^3+\cdots+n^3)}{1\cdot3\cdot9(1^3+2^3+\cdots+n^3)}\right]^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$

例1-4-7 化简： $\dfrac{\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(6+\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(6-\sqrt{35}\right)^{\frac{3}{2}}}$

解 原式 $=\dfrac{\left(\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\dfrac{12+2\sqrt{35}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\dfrac{12-2\sqrt{35}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^{3}+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^{3}}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^{3}-\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^{3}}=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{42\sqrt{5}+10\sqrt{5}}=\frac{7}{13}$$

例1-4-8 若$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$**，求**$\dfrac{x^{2}+x^{-2}-2}{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}$**的值．**

解 对$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ **两边平方得**

$x+x^{-1}=7$

再两边平方，得

$x^{2}+x^{-2}=47$

又$\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^{3}=27$**，即**$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)=27$**，所以**

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=18$

所以 原式$\dfrac{47-2}{18-3}=3$

例 1-4-9 化简

$(x+x^{-1})^{-2}+(1-x^{-1})^{-2}$

其中$x=(1-n^{-1})^{\frac{1}{2}}\cdot(1+n^{-1})^{-\frac{1}{2}}$**，** $n>1$**．**

解 $x=(1-n^{-1})^{\frac{1}{2}}(1+n^{-1})^{-\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$**，所以**

原式 $=\dfrac{(1-x^{-1})^{2}+(1+x^{-1})^{2}}{(1-x^{-2})^{2}}=\dfrac{2\cdot\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}}}{\left(\dfrac{x^{2}-1}{x^{2}}\right)^{2}}$

$$=2\cdot\frac{x^{2}(x^{2}+1)}{(x^{2}-1)^{2}}=2\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{\dfrac{n-1}{n+1}+1}{\left(\dfrac{n-1}{n+1}-1\right)^{2}}$$

$$=2\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{2n(n+1)}{4}=n(n-1)$$

例1-4-10　求证：$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1$

解　设$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$，则

$$x^3=1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)}\cdot$$

$$\left[\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}\right]+1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$=2+3\sqrt[3]{1-\frac{28}{27}}x=2-x$$

即　$x^3+x-2=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+2)=0$

因为$x^2+x+2=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$，所以$x-1=0$．所以

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1$$

习题

1-4-1　考虑如下四个判断：

(i)当$a<0$时，$(a^2)^{\frac{3}{2}}=a^3$；

(ii)$(3-a)^{\frac{1}{2}}<(a-5)^{\frac{1}{3}}$；

(iii)函数$y=(x-2)^{\frac{1}{2}}-(3x-7)^0$的定义域为$x\geq 2$；

(iv)已知 $100^a=50$，$10^b=2$，则 $2a+b=1$．

其中正确的有　[　　]

A．0个　　　　B．1个

C．2个　　　　D．3个

1-4-2 学生甲：$[(-3)^2]^{\frac{3}{2}}=(-3)^3=-27$；

学生乙：$[(-3)^2]^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$．

则　[　　]

A．甲对，乙不对　　　　B．甲不对，乙对

C．甲、乙都对　　　　D．甲、乙都不对

1-4-3 化简：$\left[\frac{a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}\right]^{-4}=$________．

[　　]

A．$\frac{a}{b}$　　B．$\frac{b}{a}$　　C．$\frac{a^2}{b}$　　D．$\frac{a}{b^2}$

1-4-4　$\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=$________．

[　　]

A．$-\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$-\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{2}$

1-4-5 化简：$(1)\left(\sqrt{a^{3}}\cdot a^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\cdot a^{\frac{13}{3}}}=$________

$(2)(0.064)^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}\div 16^{0.75}\div\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{6}=$________

1-4-6　设$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$**，**$b=\frac{1}{\sqrt{7}}$**，则**

$[a^{-\frac{3}{2}}\cdot b(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}]^{3}=$________

1-4-7　化简：$\frac{x+y}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}$

1-4-8　设$x=a\cdot\frac{m^{3}+n^{3}}{m^{3}-n^{3}}$**，**$a>0$，$m>n>0$，**化简**

$[(x+a)^{\frac{1}{3}}(x-a)^{-\frac{1}{3}}+(x+a)^{-\frac{1}{3}}(x-a)^{\frac{1}{3}}-2]^{-\frac{1}{2}}$

1-4-9　已知$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$，**求证：**$(x+y+z)^{3}=27xyz$．

2．幂函数

例题

例1-4-11 幂函数$y=x^{\frac{3}{4}}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，$y=x^{-\frac{4}{3}}$的定义域分别为M，N，P，则 [ ]

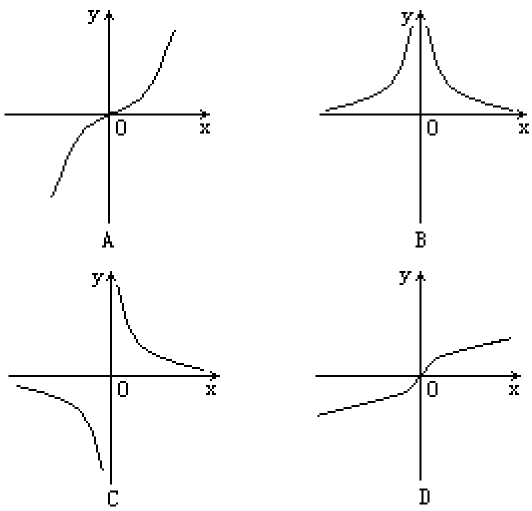
A．$M\subset N\subset P$　　　　B．$N\subset M\subset P$

C．$M\subset P\subset N$　　　　D．A，B，C都不对

解 D M=[0，∞)，N=R，P=(-∞，0)∪(0，+∞)

例1-4-12 幂函数$y=x^{-\frac{1}{3}}$的图象是

[ ]



解 C

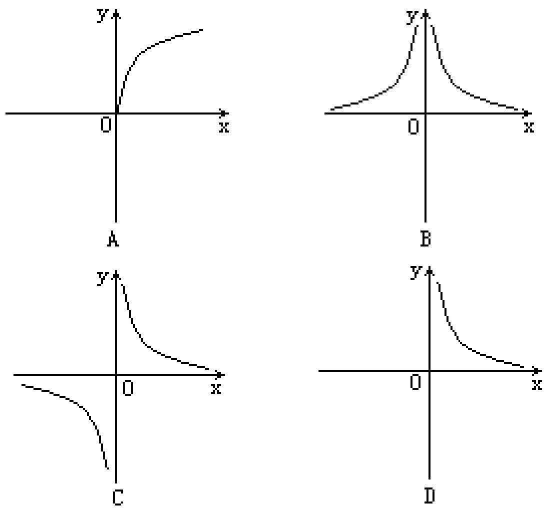
例1-4-13 若$a=1.1^{-\frac{1}{2}}$，$b=0.9^{-\frac{1}{2}}$，$c=1$，那么a、b、c的大小关系是 [ ]

A．c＞b＞a　　　　B．a＜c＜b

C．a＞c＞b　　　　D．b＞a＞c

解 B

例1-4-14 已知$y=x^{\frac{n}{m}}$(m为不等于0的偶数，n为奇数，且mn＜0)那么它的图象只可能是 [ ]



解　D

例1-4-15　作函数$y=(x+1)^{-\frac{1}{2}}$的图象，只需将函数$y=x^{-\frac{1}{2}}$的图象 [　　]

A．向上平移1个单位

B．向下平移1个单位

C．向左平移1个单位

D．向右平移1个单位

解　C

例1-4-16　已知幂函数$y=x^{\frac{p}{q}}$(p∈N，q∈Z且q≠0)的图象在第一象限的部分随x的增加y减小，则 [　　]

A．p为偶数，q为奇数

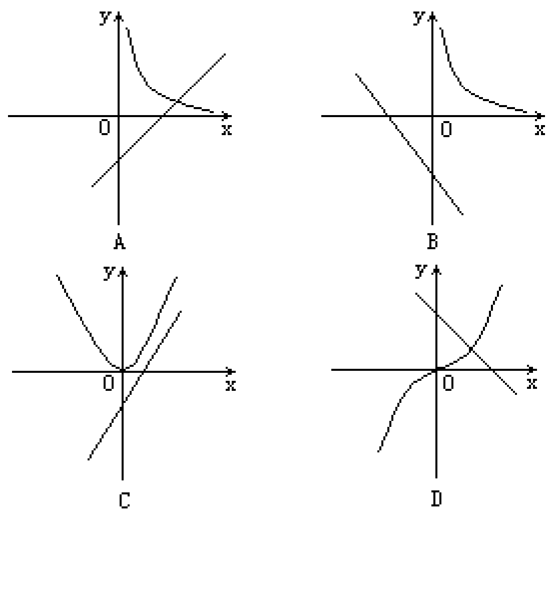
B．p为偶数，q为负奇数

C．p为奇数，q为偶数

D．p为奇数，q为负偶数

解　D

例1-4-17　在同一坐标系内，函数$y=x^a(a\neq 0)$和$y=ax+\frac{1}{a}$的图象可能是 [　　]



解　B

注　就 a 的正负，利用幂函数在第一象限 a 的几何意义和一次函数中 a 和 $\frac{1}{a}$ 的几何意义来判断．

例 1-4-18　若函数 $y=x^a$ 的图象当 $0<x<1$ 时位于直线 $y=x$ 下方，则 a 的取值范围是______．

解　$a>1$

例 1-4-19　用不等号填空：

(1)若 $-5^a<-4^a$，则 a______0；

(2)若 $0.39^b<0.38^b$，则 b______0；

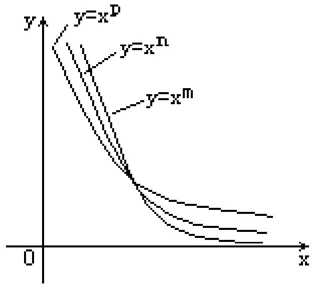
(3)若 $\left(-\frac{1}{2}\right)^n>\left(-\frac{1}{3}\right)^n(n\in Z)$，当 n 为偶数时 n_______0；当 n 为奇数时 n______0；

(4)4^{55}_____5^{44}．

解　(1)＞　(2)＜　(3)＞，＜　(4)＞

第(4)小题中，$4^{55}=(4^5)^{11}$，$5^{44}=(5^4)^{11}$，而 $4^5>5^4$．

例 1-4-20　幂函数 $y=x^m$，$y=x^n$，$y=x^p$ 在第一象限的图象如下图所示，则 m，n，p 的大小关系是______．



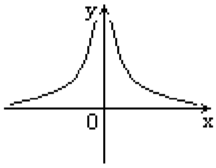
解　$p>n>m$　由图象知 m，n，p 均小于 0．令 $x=2$，由图象有 $2^m<2^n<2^p$，所以 $m<n<p$．

例 1-4-21　已知幂函数 $y=x^{m^2-2m-3}(m\in Z)$ 的图象与 x 轴、y 轴都无公共点，且关于 y 轴对称，求 m 的值，并画出函数的图象．

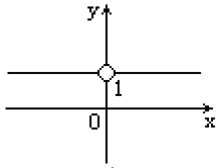
解　由题设，得 $m^2-2m-3\le 0(m\in Z)$，解得 $-1\le m\le 3(m\in Z)$．

又函数图象关于 y 轴对称，所以 m^2-2m-3 为偶数，故 $m=-1，1，3$．

当 $m=1$ 时，幂函数为 $y=x^{-4}$，其图象如图甲；



甲



乙

当 $m=-1，3$ 时，幂函数为 $y=x^0$，其图象如图乙．

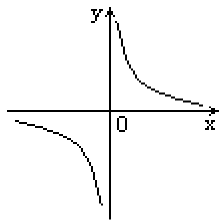
例 1-4-22　讨论函数 $y=x^{-\frac{3}{5}}$ 的定义域、值域以及函数值的变化

规律，并画出它的图象．

解　$y=x^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$，

函数定义域为(-∞，0)∪(0，+∞)，值域为(-∞，0)∪(0，+∞)．

函数图象如下．由图象知，函数在区间(-∞，0)，(0，+∞)上函数值 y 都随 x 的增大而减小．



例1-4-23　设$(a+1)^{-\frac{1}{3}}<(3-2a)^{-\frac{1}{3}}$，试求a的取值范围．

解　根据幂函数的性质，有三种可能：

$$\begin{cases}a+1>0\\3-2a>0\\a+1>3-2a\end{cases}\text{或}\begin{cases}a+1<0\\3-2a<0\end{cases}\text{或}\begin{cases}a+1<0\\3-2a<0\\a+1>3-2a\end{cases}$$

解得　$\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$或$a<-1$

习题

1-4-10　函数$y=-x^{-\frac{2}{5}}-x^{\frac{4}{3}}$的定义域为

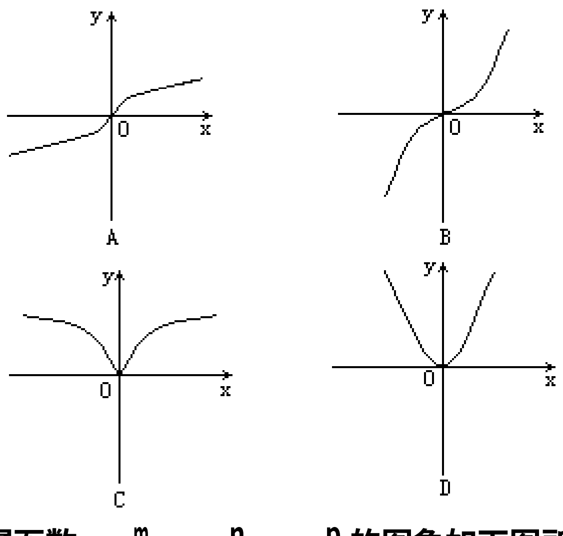
[　]

A．(-∞，+∞)　　B．(-∞，0)∪(0，+∞)

C．(-∞，0)　　D．(0，+∞)

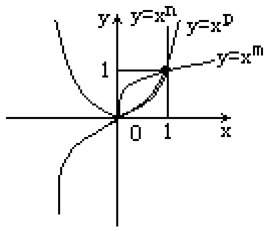
1-4-11　函数$y=|x|^{\frac{1}{n}}$($n\in N$，$n>2$)的图象只可能是

[　]



1-4-12　幂函数 $y=x^m$，$y=x^n$，$y=x^p$ 的图象如下图所示，则

[　]



A．m＞n＞p　　　　　　　B．m＞p＞n

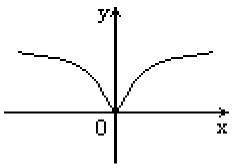
C．n＞p＞m　　　　　　　D．p＞n＞m

1-4-13　当 x∈(1，+∞)时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象恒在 y=x 的下方，则α的取值范围是　[　　]

A．0＜α＜1　　　　　　　B．α＜1

C．α＞0　　　　　　　　D．α＜0

1-4-14 函数$y=x^{\frac{n}{m}}$(m，n∈N，且m，n互质)的图象如图所示，则　[　　]



A．m为奇数，n为偶数，$\frac{n}{m}<1$

B．m、n均为奇数，$\frac{n}{m}<1$

C．m为奇数，n为偶数，$\frac{n}{m}>1$

D．m为偶数，n为奇数，$\frac{n}{m}<1$

1-4-15　若α∈(-1，0)，则下列不等式中正确的是[　　]

A．$2^{\alpha}>2^{-\alpha}>0.2^{\alpha}$

B．$0.2^{\alpha}>2^{-\alpha}>2^{\alpha}$

C．$2^{-\alpha}>0.2^{\alpha}>2^{\alpha}$

D．$2^{\alpha}>0.2^{\alpha}>2^{-\alpha}$

1-4-16　比较大小：$-3.4^{\frac{5}{3}}$______$(-4.3)^{\frac{5}{3}}$；$\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$______$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$；$-\pi^{\frac{2}{5}}$______$\left(-2\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{5}}$；$(-\pi)^{\frac{2}{3}}$______$5^{\frac{1}{3}}$．

1-4-17　设$f(x)=(m-1)x^{m^2-2}$，如果f(x)是正比例函数，则m=______，如果 f(x)是反比例函数，则 m=______，如果 f(x)是幂函数，则m=______．

1-4-18　$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$，$3^{-\frac{2}{3}}$，$2^{\frac{2}{3}}$的大小关系用不等号“＜”顺次连接是______．

1-4-19　讨论函数$y=x^{-\frac{2}{3}}$**的定义域、值域及函数值**y**随**x**变化的规律，并画出其图象．**

1-4-20　(1)**比较**$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[4]{4}$，$\sqrt[5]{5}$**的大小；**

(2)**利用图象解不等式**$\sqrt{x}>x-1$．

1-4-21 求曲线$y=\sqrt{2x+1}$**分别与下列直线的交点个数：**

(1)y=x+b(b∈R)；

(2)y=kx-1(k∈R)．

（五） 函数的性质、反函数

提要

(1)判断函数的单调性的方法就是函数增减性的定义，即在属于同一单调区间的自变量的两个取值大小关系一定的条件下，比较其对应的函数值的大小．

(2)函数的单调性是比较函数值大小的依据，对于属于函数同一单调区间的两个函数值大小的比较可通过比较其自变量值的大小来确定．

(3)判断函数奇偶性的程序是：(i)求函数的定义域．若定义域不关于原点对称，则函数为非奇非偶函数；(ii)若定义域关于原点对称，则比较 f(-x)，f(x)，-f(x)，并根据奇、偶函数的定义作出判断．

(4)在判断函数的奇偶性时，可利用下列的等价关系：

$$f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)}=1\ \ (f(x)\neq 0)$$

$$f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)}=-1(f(x)\neq 0)$$

(5)可利用函数的奇偶性来判断函数的对称性：奇函数的图象关于原点对称；偶函数的图象关于 y 轴对称．利用函数的对称性可简化对函数性质的讨论，即先讨论函数在 y 轴某一侧的性质，然后利用对称性将其推广到整个定义域上．

(6)求函数 y=f(x)的反函数的步骤：(i)判断原函数是否有反函数，如有反函数，则求出原函数的值域(即反函数的定义域)；(ii)从 y=f(x)中解出 x，得 $x=f^{-1}(y)$；(iii)对换 x，y，得反函数 $y=f^{-1}(x)$，并写出其定义域．

(7)判断两个函数图象是否关于直线y=x对称的方法之一是判断这两个函数是否互为反函数．

(8)求某些函数的值域可通过求其反函数的定义域来实现．

1．函数的单调性

例题

例 1-5-1　下列函数中，属于增函数的是　[　　]

A．$y=x^{-4}(x>0)$　　B．$y=\sqrt{-x}\ (x\leq 0)$

C．$y=-x+\frac{1}{x}(x\in R且x\neq 0)$　　D．$y=x^2-16x+9(x\geq 10)$

解　D

例 1-5-2　若一次函数 y=kx+b(k≠0)在(-∞，+∞)上是单调递减函数，则点(k，b)在直角坐标平面的　[　　]

A．上半平面　　B．下半平面

C．左半平面　　D．右半平面

解　C　因为 k＜0，b∈R．

例 1-5-3　函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间(-∞，4)上是减函数，则实数 a 的取值范围是　[　　]

A．a≥3　　B．a≤-3

C．a≤5　　D．a=-3

解　B　因抛物线开口向上，对称轴方程为 x=1-a，所以 1-a≥4，即 a≤-3．

例 1-5-4　已知 $f(x)=8+2x-x^2$，如果 $g(x)=f(2-x^2)$，那么 g(x)　[　　]

A．在区间(-1，0)内是减函数

B．在区间(0，1)内是减函数

C．在区间(-2，0)内是增函数

D．在区间(0，2)内是增函数

解　A　$g(x)=-(x^2-1)^2+9$．画出草图可知 g(x)在(-1,0)上是减函数．

例1-5-5　若$y=ax$，$y=-\frac{b}{x}$在$(0，+\infty)$上都是减函数，则$y=ax^2+bx$ 在(0，+∞)上是______函数(选填“增”或“减”)．

解　减函数　由条件知$a<0$，$b<0$，所以$-\frac{b}{2a}<0$．

例1-5-6　函数$y=-\sqrt{5-4x-x^2}$的单调递增区间是________．

解　[-2，1]

已知函数的定义域是-5≤x≤1．设

$$u=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$$

可知当 x∈[-5，-2]时，随 x 增大时，u 也增大但 y 值减小；当 x∈[-2，1]时，随 x 增大时，u 减小，但 y 值增大，此时 y 是 x 的单调增函数，即当$x\in[-2，1]$时，$y=-\sqrt{5-4x-x^2}$是增函数．

注　在求函数单调区间时，应先求函数的定义域．

例 1-5-7　y=f(x)在定义域上是单调递增函数，且 f(x)＞0，那么在同

一定义域上，$y=-f(x)$是单调________函数；$y=\frac{1}{f(x)}$是单调________函数；$y=[f(x)]^2$是单调______函数．

解　递减；递减；递增．

例 1-5-8　(1)证明函数 $f(x)=x^2-1$ 在$(-\infty，0)$上是减函数；

(2)讨论函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$在区间$(0，+\infty)$上的单调性．

解　(1)任取 $x_1<x_2<0$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2^2-1)-(x_1^2-1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$$

所以　$f(x_1)>f(x_2)$．

故 $f(x)$在$(-\infty，0)$上递减．

(2)任取 $0<x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}$$

当 $x_2>x_1>1$ 时,$f(x_2)>f(x_1)$ 当 $1>x_2>x_1>0$ 时,$f(x_2)<f(x_1)$．

所以函数在$(0，1]$上是减函数，在$[1，+\infty)$上是增函数．

例 1-5-9　已知 $f(x)=-x^3-x+1(x\in R)$，证明 $y=f(x)$是定义域上的减函数，且满足等式 $f(x)=0$ 的实数值 x 至多只有一个．

解　设 x_1，$x_2\in R$，且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=(-x_2^3-x_2+1)-(-x_1^3-x_1+1)\\&=(x_1-x_2)\left[(x_1+\frac{x_2}{2})^2+\frac{3x_2^2}{4}+1\right]<0\end{aligned}$$

所以 $f(x_1)>f(x_2)$．所以 $y=f(x)$是 R 上的减函数．

假设使 $f(x)=0$ 成立的 x 的值有两个，设为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则

$f(x_1)=f(x_2)=0$

但因 $f(x)$为 R 上的减数，故有 $f(x_1)>f(x_2)$．矛盾．所以使 $f(x)=0$ 成立的 x 的值至多有一个．

例 1-5-10　定义域为 R 的函数 $y=f(x)$，对任意 $x\in R$，都有 $f(a+x)=f(a-x)$，其中 a 为常数．又知 $x\in(a，+\infty)$时，该函数为减函数，判断当 $x\in(-\infty，a)$时，函数 $y=f(x)$的单调状况，证明自己的结论．

解　当 $x\in(-\infty，a)$时，函数是增函数．

设 $x_1<x_2<a$，则 $2a-x_1>2a-x_2>a$．

因为函数 $y=f(x)$在$(a，+\infty)$上是减函数，所以

$f(2a-x_1)<f(2a-x_2)$

注意到对任意 $x\in R$，都有 $f(a+x)=f(a-x)$，可见对于实数 $a-x_1$，也有 $f[a+(a-x_1)]=f[a-(a-x_1)]$，即 $f(2a-x_1)=f(x_1)$．

同理 $f(2a-x_2)=f(x_2)$．

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $y=f(x)$在$(-\infty，a)$上是增函数．

例 1-5-11　设 $f(x)$是定义在 R^+上的递增函数，且

$f(xy)=f(x)+f(y)$

(1)求证 $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$；

(2)若 $f(3)=1$，且 $f(a)>f(a-1)+2$，求 a 的取值范围．

解　(1)因为 $f(x)=f(y\cdot\frac{x}{y})=f(y)+f(\frac{x}{y})$，所以

$$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$$

(2)因为 $f(3)=1$，$f(9)=f(3)+f(3)=2$，于是

$$f(a)>f(a-1)+2\Leftrightarrow f(a)>f(a-1)+f(9)$$

$$\Leftrightarrow f(a)>f[9(a-1)]$$

由题设有

$$\begin{cases}a>0\\9(a-1)>0\\a>9(a-1)\end{cases}$$

解得　$1<a<\frac{9}{8}$

习题

1-5-1　已给函数①$y=|x|$；②$y=\frac{|x|}{x}$；③$y=-\frac{x^2}{|x|}$；④$y=x+\frac{x}{|x|}$，其中在(-∞，0)上为增函数的有 [　　]

A．①和②　　　　B．②和③

C．③和④　　　　D．④和①

1-5-2　下列命题中正确的是　[　　]

A．y=kx(k≠0 常数)在 R 上是增函数

B．$y=\frac{1}{x}$ 在 $x\in R$，且 $x\neq 0$ 上是减函数

C．$y=x^{k^2+1}$(k 为常数，且 $k\in Z$)在 $x\geq 0$ 上是增函数

D．$y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x\in R$ 上是增函数

1-5-3　函数 $f(x)=4x^2-mx+5$ 在区间[-2，+∞)上是增函数，则 f(1)的取值范围是　[　　]

A．f(1)≥25　　　　B．f(1)=25

C．f(1)≤25　　　　D．f(1)<25

1-5-4　$y=\frac{1}{x-1}$ 的增减性的正确说法是

[　　]

A．单调递减函数

B．在(-∞，0)上是减函数，在(0，+∞)上是增函数

C．在(-∞，1)上是减函数，在(1，+∞)上是减函数

D．除 x=1 点外，在(-∞，+∞)上是单调递减函数

1-5-5　(1)函数 y=|x+1|+|2-x|的递增区间是______；

(2)函数$y=-\frac{1}{3}\sqrt{1-4x^2}$的递减区间是________.

1-5-6　函数 $f(x)=2x^2-mx+3$ 当 $x\in[-2,+\infty)$时是增函数，当 $x\in(-\infty,-2)$时是减函数，则 $f(1)=$______.

1-5-7　用定义证明$f(x)=\sqrt{x^2-1}$在$[1,+\infty)$上是增函数.

1-5-8　讨论函数$f(x)=\frac{ax}{x^2-1}$在$(-1,1)$上的增减性.

1-5-9　已知函数 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上是增函数，$a,b\in R$.

(1)证明：如果 $a+b\geq 0$，那么 $f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$；

(2)判断(1)中命题的逆命题是否正确，请证明你的结论.

1-5-10　已知函数 $f(x)$是定义在 R^+上的减函数，并且满足 $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$，$f(\frac{1}{3})=1$.求

(1)$f(1)$的值；

(2)如果 $f(x)+f(2-x)<2$，x 的取值范围.

1-5-11　证明：

(1)函数$f(x)=\frac{x}{1+x}$是$[0,+\infty)$上的增函数；

(2)$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$

2．函数的奇偶性

例题

例 1-5-12　下列函数中，既是奇函数，又是区间(-∞，0)上的单调减函数的是 [　　]

A．$y=x^{-\frac{1}{2}}$　　B．$y=x^{-\frac{1}{3}}$

C．$y=x^{\frac{2}{3}}$　　D．$y=x^{-\frac{2}{3}}$

解　B

例 1-5-13　若 f(x)是奇数，g(x)是偶函数，且在它们的定义域的公共部分上都不恒等于 0，则 f(x)·g(x)是　[　　]

A．奇函数

B．偶函数

C．非奇非偶函数

D．既是奇函数又是偶函数

解　A

例 1-5-14　函数 y=f(x)(x∈R)是奇函数，则下列各点中在 y=f(x)的图象上的点一定是　[　　]

A．$(a，f(-a))$　　B．$(-a，-f(a))$

C．$(-a，f(a))$　　D．$(\frac{1}{a}，f(\frac{1}{a}))$

解　B

例 1-5-15　函数 f(x)在(-∞，+∞)上为奇函数，且当 x∈(-∞，0]时，f(x)=x(x-1)，则当 x∈(0，+∞)时，f(x)为　[　　]

A．-x(x+1)　　B．-x(-x+1)

C．x(-x+1)　　D．x(x-1)

解　A　设 x＞0，则-x＜0．所以

f(-x)=-x(-x-1)=x(x+1)

又 f(-x)=-f(x)，所以 f(x)=-x(x+1)

例 1-5-16　函数 y=f(x)在(0，2)上是增函数，函数 y=f(x+2)是偶函数．下列结论中正确的是 [　　]

A．$f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f\left(\frac{7}{2}\right)$　　B．$f\left(\frac{7}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)$

C．$f\left(\frac{7}{2}\right)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f(1)$　　D．$f\left(\frac{5}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{7}{2}\right)$

解　B　y=f(x)的图象关于直线 x=2 对称，且在(0，2)上是增函数，所以$f<\left(\frac{7}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)$.

例 1-5-17　函数 f(x)是奇函数，且在 x＞0 上是增函数；函数 g(x)是偶函数，且在 x＞0 上是减函数．那么当 x＜0 时，它们的增减性是

[　　]

A．f(x)是减函数，g(x)是增函数

B．f(x)是增函数，g(x)是减函数

C．f(x)是减函数，g(x)也是减函数

D．f(x)是增函数，g(x)也是增函数

解　D

例1-5-18　与$y=x^{\frac{5}{3}}$关于y轴对称图形的函数式为_________．

解　$y=-x^{\frac{5}{3}}$

例 1-5-19　函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与函数 $y=3x^2+2x-1$ 的图象关于原点对称，则 a=______，b=______，c=______．

解　a=-3，b=2，c=1　设点(x，y)在 $y=3x^2+2x-1$ 的图象上，那么点(-x，-y)在 $y=ax^2+bx+c$ 的图象上．所以

$$-y=a(-x)^2+b(-x)+c$$

即　$$y=-ax^2+bx-c$$

从而　a=-3，b=2，c=1

例1-5-20　若f(x)是偶函数，g(x)是奇函数，且$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，则 f(x)=______，g(x)=______(写出 f(x)与 g(x)的解析式)．

解　$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{x}{x^2-1}$

由题设知，f(-x)=f(x)，g(-x)=-g(x)．

$$\because\ f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$$

(i)

$$\therefore\ f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$$

$$=\frac{tgk\alpha}{tg\alpha}+\frac{tg(k+1)\alpha-tgk\alpha}{tg\alpha}-(k+1)$$

$$=\frac{tgk\alpha+tg(k+1)\alpha-tgk\alpha}{tg\alpha}-(k+1)=\frac{tg(k+1)\alpha}{tg\alpha}-(k+1)$$

(ii)

由(i)，(ii)解得$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{x}{x^2-1}$．

例 1-5-21　函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx$ 为奇函数，函数 $g(x)=x^2+cx+3$ 在区间(-∞,3)上为减函数,在(3,+∞)上为增函数,则 b=______,c=______．

解　b=0，c=-6

由 f(-x)=-f(x)得$-x^3+bx^2-cx=-x^3-bx^2-cx$，即 $2bx^2=0$ 恒成立，所以 b=0．

由题设知抛物线$g(x)=x^2+cx+3$的对称轴为$x=3$，即$-\frac{c}{2}=3$，所以 c=-6．

例 1-5-22　已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 f(-2)=10，那么 f(2)=______．

解　$f(2)=-26$

令 $g(x)=x^5+ax^3+bx$，则 $g(x)$为奇函数，又 $f(x)=g(x)-8$，$f(-2)=g(-2)-8=-g(2)-8=10$，所以 $g(2)=-18$，$f(2)=g(2)-8=-18-8=-26$.

例 1-5-23　判断下列函数的奇偶性：

$$(1)f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

(2) $f(x)=|x-a|-|x+a|(a\neq 0)$

解　(1)当 $x=1$ 时函数无定义，而 $x=-1$ 时，$f(x)=0$，所以函数的定义域区间关于原点不对称，故 $f(x)$是非奇非偶函数.

(2) $f(x)$的定义域为 R，又

$$f(-x)=|-x-a|-|-x+a|=|x+a|-|x-a|$$

$$=-(|x-a|-|x+a|)=-f(x)$$

所以 $f(x)$为奇函数.

例 1-5-24　设函数 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数，并在区间$(-\infty,0)$内单调递增，$f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$，试确定实数 a 的取值范围.

解　因为 $f(x)$是偶函数，且在$(-\infty,0)$内单调递增，由偶函数的图象特征知，$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递减．又有

$$2a^2+a+1=2(a+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}>0$$

$$3a^2-2a+1=3(a-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}>0$$

由 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$，得

$$2a^2+a+1>3a^2-2a+1$$

所以　$0<a<3$

例 1-5-25　求证：定义在区间$(-m,m)(m>0)$内的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

解　设 $f(x)$为定义在$(-m,m)$上的一个函数，令

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\qquad \varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

易知$g(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-g(x)$，所以$g(x)$为奇函数.

易知$\varphi(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=\varphi(x)$，所以$\varphi(x)$为偶函数.

另一方面，显然有

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x)+\varphi(x)$$

命题得证.

例 1-5-26　设函数 $f(x)$对任意 x，$y\in R$，都有

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

若 $x>0$ 时，$f(x)<0$，且 $f(1)=-2$，求 $f(x)$在$[-3,3]$上的最大值和最小值.

解　在 $f(x+y)=f(x)+f(y)$中，令 $y=0$，得 $f(x)=f(x)+f(0)$，所以 $f(0)=0$.

又令 $y=-x$，得 $f(0)=f(x)+f(-x)$，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数．

任取 x_1，$x_2\in[-3,3]$，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，从而 $f(x_2-x_1)<0$，故

$$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)<0$$

故 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上是减函数．从而

$$f(x)_{min}=f(3)=3f(1)=-6$$

$$f(x)_{max}=f(-3)=-f(3)=6$$

例 1-5-27　设 m，n 为自然数，证明：

$$\frac{\left(1+\sqrt{m}\right)^n-\left(1-\sqrt{m}\right)^n}{\sqrt{m}}$$

是整数．

解　令 $\sqrt{m}=x$，记

$$g(x)=(1+x)^n-(1-x)^n(x\in R).$$

显然 $g(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，故 $g(x)$ 是 x 的奇次项的整系数多项式．所以 $\frac{g(x)}{x}$ 是x的偶次项的整系数多项式．所以 $\frac{\left(1+\sqrt{m}\right)^n-\left(1-\sqrt{m}\right)^n}{\sqrt{m}}$ 是整数．

习题

1-5-12　下列函数中，既是奇函数，又是区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减函数是［　　］

A．$y=x^{-\frac{1}{2}}$　　　　B．$y=x^{-\frac{1}{3}}$

C．$y=x^{\frac{2}{3}}$　　　　D．$y=x^{-\frac{2}{3}}$

1-5-13　设 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时，有 $f(x)=x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$，那么 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)$ 等于

［　　］

A．$-x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$　　　　B．$x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$

C．$-x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)$　　　　D．$x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)$

1-5-14　在所有定义域为 R 的函数中，一定不存在的函数是

［　　］

A．既是增函数，又是奇函数

B．既是奇函数，又是偶函数

C．既是偶函数，又有反函数

D．两个互为反函数的函数是同一函数

1-5-15　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x(1+x)(x>0)\\x(1-x)(x<0)\end{cases}$，则 $f(x)$ 是

［　　］

A．奇函数

B．偶函数

C．既是奇函数又是偶函数

D．非奇非偶函数

1-5-16　设 f(x)为定义在(-∞，+∞)上的偶函数，且 f(x)在[0，+∞)上为增函数，则 f(-2)，f(-π)，f(3)的大小顺序是［　　］

A．f(-π)＞f(3)＞f(-2)

B．f(-π)＞f(-2)＞f(3)

C．f(-π)＜f(3)＜f(-2)

D．f(-π)＜f(-2)＜f(3)

1-5-17　若 f(x)是偶函数，则

$$f\left(1+\sqrt{2}\right)-f\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_$$

1-5-18 函数$f(x)$在R上是奇函数，$\varphi(x)$在R上是偶函数，则$F(x)=\varphi[f(x)]$在R上是________函数．

1-5-19　若 f(x)为偶函数，其定义域为 R，且在[0，+∞)上是减函数，

则$f\left(-\frac{3}{4}\right)$，$f(a^2-a+1)$的大小关系是_________．

1-5-20　已知 f(x)是奇函数，且当 x∈[0，+∞)时，f(x)≤m(m＜0)，则 f(x)的值域是______．

1-5-21　若 f(x)是定义在 R 上的偶函数，且当 x≥0 时为增函数，那么使 f(π)＜f(a)的实数 a 的取值范围是______．

1-5-22　判断下列函数的奇偶性：

$$(1)f(x)=\frac{2x-1}{5-x}$$

$$(2)f(x)=x^{\frac{k}{2}}(k\in Z)$$

$$(3)f(x)=\begin{cases}x^2(x-1) & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -x^2(x+1) & (x<0)\end{cases}$$

1-5-23　已知 y=f(x)在 R 上是偶函数，当 x≥0 时，

$$f(x)=x^2-2x-3$$

(1)用分段函数写出函数 y=f(x)表达式；

(2)利用对称性画出其图象；

(3)指出其单调区间；

(4)利用图象指出在什么区间上 f(x)＞0，在什么区间上 f(x)＜0；

(5)求出函数的最值．

1-5-24 设$f(x)=ax^5+bx^3+cx+d\sqrt[3]{x}+5$，已知$f(-7)=-17$，求$f(7)$之值．

1-5-25　证明函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$的图象关于原点对称．

1-5-26　已知函数 $f(x)$ 的定义域是 R，且对任意实数 x_1，x_2 总有

$$f(x_1+x_2)+f(x_1-x_2)=2f(x_1)\cdot f(x_2)$$

成立，求证 $f(x)$ 是偶函数.

3．反函数

例题

例 1-5-28　y=2x-1(x∈N)的反函数是　　[　　]

A．$y=\frac{x+1}{2}(x\in N)$　　B．$y=\frac{x+1}{2}(x\in Z)$

C．$y=\frac{x+1}{2}(x\in\{正奇数\})$　　D．$y=\frac{x-1}{2}(x\in\{正奇数\})$

解　C

注　求反函数时应先求原函数的值域，它就是反函数的定义域．

例1-5-29　函数$y=\sqrt{x-2}+1(x\geq 2)$的反函数是　　[　　]．

A．$y=2-(x-1)^2(x\geq 2)$

B．$y=2-(x-1)^2(x\geq 1)$

C．$y=2+(x-1)^2(x\geq 2)$

D．$y=2+(x-1)^2(x\geq 1)$

解　D

例1-5-30　若函数$y=\frac{ax+1}{4x+3}$在其定义域内存在反函数，则常数a的取值范围是　　[　　]

A．$(-\infty,\ +\infty)$

B．$(-\infty,\ \frac{4}{3})\cup(\frac{4}{3},\ +\infty)$

C．$(-\infty,\ -\frac{4}{3})\cup(-\frac{4}{3},\ +\infty)$

D．$(-\infty,\ -\frac{4}{3})\cup(-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3})\cup(\frac{4}{3},\ +\infty)$

解　B

例1-5-31　函数$y=f(x)$和$y=\varphi(x)$互为反函数，则$y=f(-x)$的反函数是　　[　　]

A．$y=\varphi(x)$　　B．$y=\varphi(-x)$

C．$y=-\varphi(x)$　　D．$y=-\varphi(-x)$

解　C

令$-x=t$，则$y=f(t)$，所以$t=\varphi(y)$，即$-x=\varphi(y)$．将x，y对换，即$y=-\varphi(x)$为$y=f(-x)$的反函数．

例1-5-32　函数$y=\frac{ax+1}{bx-1}$的反函数就是它本身，则a，b必须满足的条件是______．

解　$a=1$，$b\in R$　由$y=\frac{ax+1}{bx-1}$解出x，得$x=\frac{y+1}{by-a}$．对换x，y，得其反函数$y=\frac{x+1}{bx-a}$．令$\frac{x+1}{bx-a}\equiv\frac{ax+1}{bx-1}$，即

$$bx^2+(b-1)x-1\equiv abx^2+(b-a^2)x-a$$

所以 b=ab，且 $b-1=b-a^2$，且 1=a，解得 a=1，b∈R．

例 1-5-33　已知函数 y=f(x)是定义在区间(-∞，0]上，并且

$$f(x+1)=x^2+2x$$

则$f^{-1}(\sqrt{2})=$_____．

解　$-\sqrt{1+\sqrt{2}}$　由$f(x+1)=x^2+2x=(x+1)^2-1$，知$y=f(x)=x^2-1(-\infty，0]$，其反函数为$y=-\sqrt{x+1}$．所以$f^{-1}(\sqrt{2})=-\sqrt{\sqrt{2}+1}$．

例1-5-34　已知函数$y=-\sqrt{1-x^2}$的反函数是$y=-\sqrt{1-x^2}(-1\leq x\leq 0)$，则原函数的定义域是_____．

解　[-1，0]

例1-5-35　已知函数$f(x)=\dfrac{4+x}{2+3x}(x\geq 1)$，求$f^{-1}[f(x)]$及$f[f^{-1}(x)]$．

解　$f^{-1}[f(x)]=f[f^{-1}(x)]=x$

例1-5-36　已知函数$f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2(x\geq 1)$，$f^{-1}(x)$是$f(x)$的反函数，又$g(x)=\dfrac{1}{f^{-1}(x)}+\sqrt{x}+2$，求$f^{-1}(x)$及其定义域、单调区间和$g(x)$的最小值．

解　因为$x\geq 1$，所以$0\leq\dfrac{x-1}{x+1}<1$，所以$0\leq\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2<1$，即函数$f(x)$的值域为$[0，1)$，$f^{-1}(x)$的定义域为$[0，1)$．

由$f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$，得$f^{-1}(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}(0\leq x<1)$．

设 $0\leq x_1<x_2<1$，那么

$$f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)=\frac{1+\sqrt{x_1}}{1-\sqrt{x_1}}-\frac{1+\sqrt{x_2}}{1-\sqrt{x_2}}$$

$$=\frac{2(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})}{(1-\sqrt{x_1})(1-\sqrt{x_2})}<0$$

所以　$f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$

故 $f^{-1}(x)$在[0，1)上为增函数，[0，1)为 f(x)的递增区间．于是

$$g(x)=\frac{2}{1+\sqrt{x}}+\left(1+\sqrt{x}\right)\geq 2\sqrt{2}$$

当且仅当$\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}=1+\sqrt{x}$，即$x=3-2\sqrt{2}$时，上式取等号．所以当$x=3-2\sqrt{2}$，$g(x)_{max}=2\sqrt{2}$．

例1-5-37　函数$y=x^3$与$y=x^{\frac{1}{3}}$的两个图象之间的关系是

[　　]

A．关于原点对称　　　　　　B．关于 x 轴对称

C．关于 y 轴对称　　　　　　D．关于直线 y=x 对称

解　D

1-5-38　函数 $y=f(x)$ 的图像经过第三、四象限，那么 $y=-f^{-1}(x)$ 的图象经过　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

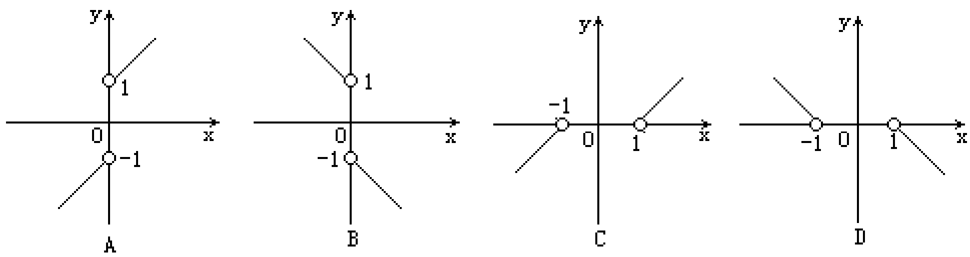
A．第一、二象限　　　　　　B．第二、三象限

C．第三、四象限　　　　　　D．第一、四象限

解　B　第三、四象限关于直线 y=x 对称的点分别位于第三、二象限，而第三、二象限关于 x 轴对称的点分别位于二、三象限．

例1-5-39　函数 $f(x)=\begin{cases}x+1(x>0)\\x-1(x<0)\end{cases}$ 的反函数图象是

[　　]



解　C

例 1-5-40　函数 $y=-f(x)$ 与 $y=-f^{-1}(x)$ 的图象一定关于直线______对称．

解　y=-x　因为 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 y=x 对称，而 $f(x)$ 与 $-f(x)$，$f^{-1}(x)$ 与 $-f^{-1}(x)$ 的图象分别关于 x 轴对称．

例1-5-41　若点 $A(1,2)$ 既在函数 $y=\sqrt{ax+b}$ 图象上，又在其反函数的图象上，则 a=______，b=______．

解　-3，7　由题设知点 $A(1,2)$ 及 $A'(2,1)$ 均在 $y=\sqrt{ax+b}$ 的图象上，所以

$$\begin{cases}2=\sqrt{a+b}\\1=\sqrt{2a+b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=7\end{cases}$$

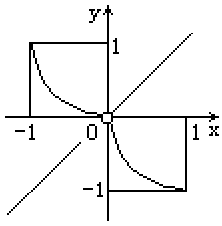
例1-5-42　求函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leq x<0)$ 的反函数，并在同一直角坐标系中画出原函数及其反函数的图象．

解　$y=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leq x<0)$ 的值域是 $(0,1]$．

由已知函数的解析式得 $x=-\sqrt{2y-y^2}$，对换 x，y 得反函数为

$$f^{-1}(x)=-\sqrt{2x-x^2},\ x\in(0,1]$$

图象如右．



例 1-5-43　设 $c\in R$，$c\neq 0$，$c\neq 1$，且

$$y=\frac{x-1}{cx-1}\quad (x\in R,\ x\neq \frac{1}{c})$$

试证：

(1)经过这个函数图象上任意两个不同点的直线与 x 轴不平行．

(2)这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形．

解　(1)设 $P(x_1,y_1)$ 与 $Q(x_2,y_2)$ 是图象上两个不同点，且 PQ 与 x 轴平行，则 $x_1\neq x_2$，$y_1=y_2$．于是

$$\frac{x_1-1}{cx_1-1}=\frac{x_2-1}{cx_2-1}$$

去分母并整理，得 $c(x_1-x_2)=x_1-x_2$．因此 $c=1$，与已知条件矛盾，故 PQ 不与 x 轴平行．

(2)由$y=\frac{x-1}{cx-1}$解得$x=\frac{y-1}{cy-1}$，对换x，y得

$$y=\frac{x-1}{cx-1}$$

即$y=\frac{x-1}{cx-1}$的反函数就是其自身，所以$y=\frac{x-1}{cx-1}$的图象关于直线$y=x$对称．

习题

1-5-27　函数$y=\sqrt{x+5}\,(x\geq -5)$的反函数是　[　]

A．$y=x^2+5(x\geq -5)$　B．$y=x^2-5(x\geq -5)$

C．$y=x^2+5(x\geq 0)$　D．$y=x^2-5(x\geq 0)$

1-5-28　若 $f(2x-1)=x+1$，则 $f^{-1}(x)=$　[　]

A．$x-1$　B．$2x-3$

C．$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$　D．$2x+3$

1-5-29　对于 $x\in[0,1]$的所有 x 值，函数 $y=x^2$ 与其反函数 $f^{-1}(x)$的相应的函数值之间一定成立的关系是　[　]

A．$f(x)\leq f^{-1}(x)$　B．$f(x)\geq f^{-1}(x)$

C．$f(x)=f^{-1}(x)$　D．不能确定

1-5-30　函数$f(x)=\frac{x+a}{bx+c}$(a，b，c为常数)的反函数是$f^{-1}(x)=\frac{-x+5}{2x-1}$，

则 a，b，c 的值是　[　]

A．a=5，b=2，c=-1　　　B．a=2，b=1，c=5

C．a=5，b=2，c=1　　　D．a=1，b=2，c=5

1-5-31　(1)函数$f(x)=2\sqrt{1-x^2}(-1\leq x\leq 0)$的反函数是_____．

(2)函数$y=(\frac{1}{x})^4(x<0)$的反函数是_____．

1-5-32　设函数$f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$，$x\in(-\infty，1]$，则$f^{-1}(x)$的定义域是______．

1-5-33　y=f(x)和其反函数$y=f^{-1}(x)$的定义域都为(0,+∞)，且f(x)是(0,+∞)上的增函数，则$f^{-1}(1)$和$f^{-1}(3)$的大小关系是______．

1-5-34　求下列函数的反函数：

$(1)f(x)=2x^2-x+1(x\geq 1)$　　$(2)f(x)=\begin{cases}x，x\in(-1，0]\\x^2，x\in(0，2)\end{cases}$

1-5-35　已知y=f(x)在其定义域内是增函数，求证y=f(x)的反函数$y=f^{-1}(x)$在它的定义域内也是增函数．试判断对于减函数，这一结论是否正确．

1-5-36　点(a，b)在函数y=f(x)图象上，则下列各点必在其反函数图象上的点是　　　　[　　]

A．$P_1(a，f^{-1}(a))$　　　B．$P_2(f^{-1}(b)，b)$

C．$P_3(f^{-1}(a)，a)$　　　D．$P_4(b，f^{-1}(b))$

1-5-37　审查下面四个命题：

(i)因为函数y=f(x)和其反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线y=x对称，所以原函数与反函数的图象不能相交；

(ii)函数$y=f^{-1}(x)$的反函数是y=f(x)；

(iii)关于直线y=x成轴对称的两个图象一定是互为反函数的一对函数的图象；

(iv)若M(a，b)在y=f(x)的图象上，则M′(b，a)一定在其反函数$y=f^{-1}(x)$图象上，其中错误的命题有　　　　[　　]

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

1-5-38　函数y=ax+b与它的反函数是同一函数时，a，b的值为　　　　[　　]

A．a=1，b=0

B．a=-1，b=0

C．a=±1，b=0

D．a=1，b=0，或a=-1，b∈R

1-5-39　已知两个函数的图象关于直线y=x对称，如果其中一个函数

是$y=-\sqrt{x-1}(x\geq 1)$，那么另一个函数是_____．

1-5-40 函数$f(x)=\begin{cases}3x+6 & (x\geq 0)\\ x+5 & (x<0)\end{cases}$，则$f[f^{-1}(1)]=$______.

1-5-41 已知$y=\dfrac{2x+1}{x+a}(a\neq\dfrac{1}{2})$.

(1)求它的反函数；

(2)若已知函数及其反函数的图象相同，求实数 a；

(3)若$f^{-1}(3)=-\dfrac{2}{a}$，求实数a.

(六)指数函数和对数函数

提要

(1)可通过指数函数或对数函数的单调性来比较两个指数式或对数式的大小.

(2)求函数 $y=a^{f(x)}$的单调区间，应先求出 f(x)的单调区间，然后根据 $y=a^u$ 的单调性来求出函数 $y=a^{f(x)}$的单调区间.求函数 $y=\log_a f(x)$的单调区间，则应先求出 f(x)的单调区间，然后根据 $y=\log_a u$ 的单调性来求出函数 $y=\log_a f(x)$的单调区间.

(3)根据对数的定义，可将一些对数问题转化为指数问题来解.

(4)通过换底，可将不同底数的对数问题转化为同底的对数问题来解.

(5)指数方程的解法：

(i)$a^{f(x)}=a^{g(x)}$ ($a>0$且$a\neq 1$) $\Leftrightarrow f(x)=g(x)$；

(ii)$a^{f(x)}=b^{g(x)}$($a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$b\neq 1$) $\Leftrightarrow f(x)\lg a=g(x)\lg b$；

(iii)对于方程 $f(a^x)=0$，可令 $a^x=y$，换元化为 $f(y)=0$.

(6)对数方程的解法：

(i)$\log_a f(x)=\log_a g(x)$($a\neq 0$且$a\neq 1$) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

(ii)对数方程 $f(\log_a x)=0$，可令 $\log_a x=y$ 化为 $f(y)=0$.

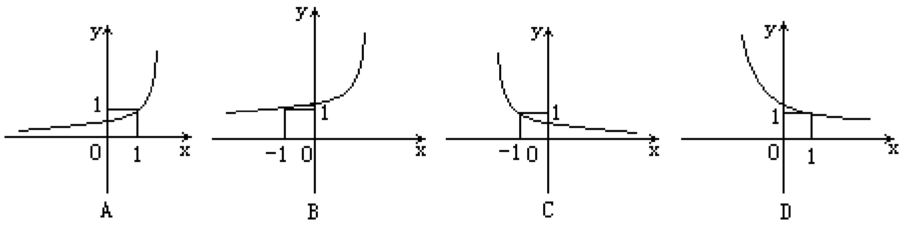
(7)对于某些特殊的指数方程或对数方程可通过作函数图象来求其近似解.

1．指数函数

例题

例1-6-1 函数$y=\left(\frac{\pi-1}{2}\right)^{x-1}$的图象可能是

[　　]



解　A

例 1-6-2　$f(x)=3^{x}+5$，则 $f^{-1}(x)$的定义域是　　　　[　　]

A．(0，+∞)　　　　B．(5，+∞)

C．(6，+∞)　　　　D．(-∞，+∞)

解　B　因为 $f(x)=x^{2}+5>5$，即 f(x)的值域为(5，+∞)，故 $f^{-1}(x)$的定义域为(5，+∞)．

例 1-6-3　下列函数中，值域是(0，+∞)的一个函数是 [　　]

A．$y=3^{\frac{1}{2-x}}+1$　　　　B．$y=\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}$

C．$y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1}$　　　　D．$y=\sqrt{1-2^{x}}$

解　B

例 1-6-4　函数 $y=(a^{2}-1)^{x}$ 在(-∞，+∞)上是减函数，则 a 的取值范围是　　　　[　　]

A．$|a|>1$　　B．$|a|<2$　　C．$a>\sqrt{2}$　　D．$1<|a|<\sqrt{2}$

解　D 由题设，有$0<a^{2}-1<1$，所以$1<|a|<\sqrt{2}$．

例 1-6-5　已知 a>b，ab≠0．审查下列不等式．

(i)$a^{2}>b^{2}$　　(ii)$2^{a}>2^{b}$　　(iii)$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

(iv)$a^{\frac{1}{3}}>b^{\frac{1}{3}}$　　(v)$\left(\frac{1}{3}\right)^{a}<\left(\frac{1}{3}\right)^{b}$

其中恒成立的有　　　　[　　]

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

解　C

解1-6-6　若$m^{\frac{2}{3}}>m^{\frac{3}{5}}(m>0)$，则$m\in$______．

解　(0，1)

例 1-6-7　使函数 $y^{x^{2}-x-12}$ 递减的 x 的取值范围是______．

解　$(-\infty，\frac{1}{2})$ 因为$u = x^2 - x - 12$的递减区间为$(-\infty，\frac{1}{2})$，而$y = 2^u$为增函数，故所求范围是$(-\infty，\frac{1}{2})$．

例 1-6-8　根据不等式确定正数 a 的取值范围：

(1)$a^{-0.3}<a^{0.2}$，则 a∈______；

(2)$a^{7.5}<a^{3.9}$，a∈______；

(3)$a^{\frac{7}{4}}<1$，a∈______．

解　(1)(1，+∞)　(2)(0，1)　(3)(0，1)

例1-6-9　已知$f(x) = x\left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2}\right)$．

(1)指出函数的奇偶数，并予以证明；

(2)求证：对任何 x(x∈R 且 x≠0)，都有 f(x)＞0．

解　(1)f(x)的定义域为$R^- \cup R^+$，关于原点对称．又

$$f(-x) = (-x)\left(\frac{1}{2^{-x} - 1} + \frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{2^x}{2^x - 1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= x\left(\frac{2^x}{2^x - 1} - 1 + \frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2}\right) = f(x)$$

所以 f(x)是偶函数．

(2)当 x＞0 时，2^x＞1，所以 f(x)＞0．

当 x＜0 时，由 f(x)为偶函数，有 f(x)=f(-x)＞0．

所以对一切 x∈R，x≠0，恒有 f(x)＞0．

注　利用函数的奇偶性常可使解法简化．如本例(2)，当 x＜0 时，证明 f(x)＞0 较繁．若注意到 f(x)为偶函数，则只须证明，当 x＞0 时 f(x)＞0，而这是显然的．

例1-6-10　比较$\sqrt[n-1]{a^n}$与$\sqrt[n]{a^{n+1}}$$(a＞0，a≠1，n＞1，n∈N)$的大小．

解　$\sqrt[n-1]{a^n} = a^{\frac{n}{n-1}}$，$\sqrt[n]{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n}}$

因为$\frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}＞0$，所以$\frac{n}{n-1}＞\frac{n+1}{n}$．

由指数函数的单调性，知当$a＞1$时，$\sqrt[n-1]{a^n}＞\sqrt[n]{a^{n+1}}$；当$0＜a＜1$时，$\sqrt[n-1]{a^n}＜\sqrt[n]{a^{n+1}}$．

例1-6-11　已知函数$f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}(a＞1)$．

(1)判断函数 f(x)的奇偶性；

(2)证明 f(x)是区间(-∞，+∞)上的增函数；

(3)求函数的值域．

解　(1)f(x)的定义域为 R．又

$$f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{a^x}-1}{\frac{1}{a^x}+1}=\frac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$$

所以 f(x)为奇函数．

$$(2)f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}=\frac{a^x+1-2}{a^x+1}=1-\frac{2}{a^x+1}$$

因为$a>1$，所以a^x在R上递增，所以$\frac{2}{a^x+1}$在R上增减．所以f(x)在 R 上为增函数．

(3)因为$0<\frac{2}{a^x+1}<2$，所以$-1<1-\frac{2}{a^x+1}<1$，即值域为(-1，1)．

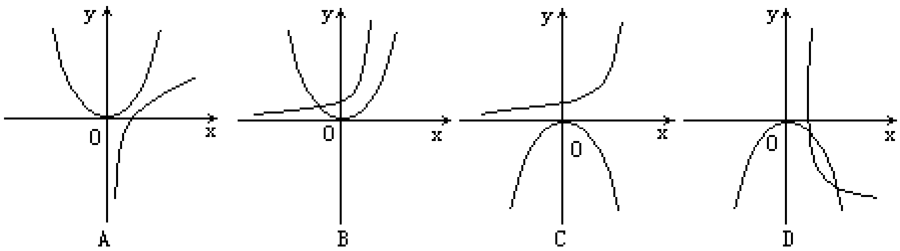
习题

1-6-1　若 a＞1，-1＜b＜0，则函数 $y=a^x+b$ 的图象一定经过 [　　]

A．第一、二、三象限　　B．第一、三、四象限

C．第二、三、四象限　　D．第一、二、四象限

1-6-2　在同一坐标系下，函数 $y=ax^2$ 和 $y=(-a)^x$ 的图象可能是 [　　]



1-6-3　对任何实数 a＞0，且 a≠1，函数 $f(x)=a^{x-1}+3$ 的反函数的图象必经过点 [　　]

A．(5，2)　　B．(2，5)　　C．(4，1)　　D．(1，4)

1-6-4　函数$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，$y=\frac{1}{x^3}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，$y=3^x$，$y=3^{|x|}$中在(0，+∞)上为增函数有 [　　]

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

1-6-5　已知 x＞y＞1，且 0＜a＜1，则 [　　]

A．$x^{-a}<y^{-a}$　　B．$a^{-x}<a^{-y}$　　C．$x^a<y^a$　　D．$a^{\frac{1}{x}}<a^{\frac{1}{y}}$

1-6-6　函数$y=a^{x-1}$，$y=a^{\frac{1}{x-1}}$，$y=\frac{3^x}{\sqrt{x-1}}$的定义域分别为M，N，P，则 M，N，P 的包含关系是______．

1-6-7　已知函数 $f(x)=a^x+k$ 的图象过点(1，3)，又其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象过点(2，0)，则 f(x)=______．

1-6-8　不等式 $0.2^{|2x+1|}>0.2^{|x|}$的解集是______．

1-6-9　若 $a^m>a^n$(a＞0 且 a≠1)，试比较 m，n 的大小．

1-6-10 **已知**$9^x+4^y=a^2(a>\frac{1}{4})$**，求**$3^x+2^{2y+1}$**的量大值．**

1-6-11 **已知**$y=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$**，**$a>1$**．**

(1)**用**x**表示函数**$z=y+\sqrt{y^2-1}$**，并化简；**

(2) z 是 x 的奇函数还是偶函数．

1-6-12 **已知**$f(x)=\frac{a}{a^2-2}(a^x-a^{-x})$**，**$(a>0$**且**$a\neq1)$**是**$R$**上的增函数，求 a 的取值范围．**

2．对数

例题

A．$\sin\alpha\cos\beta = 2(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2})$

B．$\cos\alpha\sin\beta = 2[\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

[ ]

A．a＜b＜c　　B．a＜c＜b

C．b＜c＜a　　D．c＜b＜a

解　C

例1-6-13　$a = \log_{(2-\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3})$，则

[ ]

A．$a\in N$　　B．$a\in Z$且$a\notin N$

C．$a\in Q$，且$a\notin Z$　　D．$a\in R$且$a\notin Q$

解　A　$\because 7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$，$\therefore a = \log_{(2-\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^2 = 2$

例 1-6-14　对数式 $\log_a(x+1)$，$\log_a x^2$，$\log_a(-x)$，$\log_a(1-|x|)$中的 x 的
取值范围分别为A，B，C，D，则$(A\cup B)\cap(C\cup D) =$ ________

[ ]

A．$(-1, +\infty)$　　B．$(-\infty, 1)$

C．$(-1, 1)$　　D．$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$

解　B　$\because A = (-1, +\infty)$，$B = (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，$C = (-\infty, 0)$，$D = (-1, 1)$

$\therefore$ $A\cup B = R$，$C\cup D = (-\infty, 1)$

$\therefore$ $(A\cup B)\cap(C\cup D) = (-\infty, 1)$．

例 1-6-15　如果 f(lgx)=x，则 f(3)的值等于　[ ]

A．log3　　B．$\log_3 10$　　C．$l0^3$　　D．3^{10}

解　C　令 lgx=3，则 $x=10^3$．

例 1-6-16　若 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z>0$，则　[ ]

A．$x^{\frac{1}{2}} > y^{\frac{1}{3}} > z^{\frac{1}{5}}$　　B．$y^{\frac{1}{3}} > x^{\frac{1}{2}} > z^{\frac{1}{5}}$

C．$y^{\frac{1}{3}} > z^{\frac{1}{5}} > x^{\frac{1}{2}}$　　D．$z^{\frac{1}{5}} > x^{\frac{1}{2}} > y^{\frac{1}{3}}$

解　B　令 $\log_2 x=\log_3 y=\log_5 z=k$，有 $x=2^k$，$y=3^k$，$z=5^k$．于是

$$x^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{k}{2}} = (\sqrt{2})^k = (\sqrt[6]{8})^k = (\sqrt[10]{32})^k$$

$$y^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{k}{3}} = (\sqrt[3]{3}) = (\sqrt[6]{9})^k$$

$$z^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{k}{5}} = (\sqrt[10]{25})^k$$

所以 $y^{\frac{1}{3}}>x^{\frac{1}{2}}>z^{\frac{1}{5}}$

例 1-6-17 已知 ab=M(a＞0，b＞0，M≠1)且 $\log_M b=x$，则 $\log_M a$ 的值为 [ ]

A．$1-x$ B．$1+x$ C．$\frac{1}{x}$ D．$x-1$

解 A 因为 ab=M，所以 $\log_M ab=\log_M M=1$，即 $\log_M a+\log_M b=1$．但 $\log_M b=x$，所以 $\log_M a=1-x$．

例 1-6-18 计算：

(1)$25^{\log_5 3}$=______

(2)$(\sqrt{2})^{\log_2 3}=$______

解 (1)9 $25^{\log_5 3}=5^{2\log_5 3}=5^{\log_3 3^2}=9$

(2)$\sqrt{3}$

例1－6－19 已知$\log_{\sqrt{3}}2=\frac{1-a}{a}$，则$\log_{\sqrt{3}}12=$______．

解 $\frac{2}{a}$

$$\log_{\sqrt{3}}12=\log_{\sqrt{3}}(3\times 2^2)=\log_{\sqrt{3}}3+2\log_{\sqrt{3}}2$$

$$=2+2\frac{1-a}{a}=\frac{2}{a}$$

例 1-6-20 设 M={0，1}，N={11-a，$\log_{10}a$，2^a，a}，是否存在a的值使$M\cap N=\{1\}$？

解 不存在a的值使$M\cap N=\{1\}$成立．

事实上，若 lga=1，则 a=10．此时 11-a=1，从而 11-a=lga=1，此与集合元素互异性矛盾．

若 2^a=1，则 a=0．此时 lga 无意义．

若$a=1$，此时$\lg a=0$，从而$M\cap N=\{0，1\}$与条件不符；若$11-a=1$，则 a=10，从而 lga=1，与集合元素互异性矛盾．

例1-6-21 已知$f(x)=a^{x-\frac{1}{2}}$，$f(\lg a)=\sqrt{10}$，求a．

解 ∵ $f(\lg a)=a^{\lg a-\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

∴ $(\lg a-\frac{1}{2})\lg a=\frac{1}{2}$

解得$a=10^{-\frac{1}{2}}$或$a=10$．经检验知都满足要求．

例 1-6-22 化简：

(1)$\sqrt{\lg^2 99-2\lg 99^2+4}$

(2)$\frac{1}{2}\lg\left(2x+2\sqrt{x^2-1}\right)-\lg 2+\lg\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$

解 (1)原式$=\sqrt{\lg^2 99-4\lg 99+4}=\sqrt{(\lg 99-2)^2}$

$=|\lg 99-2|=2-\lg 99$(注意：$\lg 99<2$．)

(2) 原式 $=\frac{1}{2}\lg\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2+\lg\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)-\lg 2$

$=\lg\left[\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\right]-\lg 2=\lg 2-\lg 2=0$

例 1-6-23 设 a，b 同号，且 $a^2-2ab-9b^2=0$，求

$\lg(a^2+ab-6b^2)-\lg(a^2+4ab+15b^2)$

的值．

解 令 $\frac{a}{b}=x>0$，由 $a^2-2ab-9b^2=0$，得 $x^2-2x-9=0$．所以 $x=1+\sqrt{10}$，且 $x^2=2x+9$．所以

$\lg(a^2+ab-6b^2)-\lg(a^2+4ab+15b^2)$

$=\lg\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+15}=\lg\frac{(2x+9)+x-6}{(2x+9)+4x+15}$

$=\lg\frac{x+1}{2(x+4)}=\lg\frac{2+\sqrt{10}}{2(5+\sqrt{10})}=\lg\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{1}{2}$

习题

1-6-13 设 $x=4^{-3.3}$，$y=4^{-\log_4 3}$，$z=-\log_3\frac{1}{9}$，则 [ ]

A．x>y>z B．z>y>x

C．x>z>y D．z>x>y

1-6-14 审查下列各等式(a>0 且 a≠1)：

(i) $2a^{-1}=\frac{1}{2a}$ (ii) $\frac{\log_a 6}{\log_a 2}=\log_a 3$

(iii) $(3\cdot a^{\log_a\frac{\sqrt{3}}{3}}-\sqrt{3})^0=1$ (iv) $\log_a 9+\log_a 4-2\log_a 6=0$

其中成立的有 [ ]

A．1 个 B．2 个 C．3 个 D．4 个

1-6-15 $2\log_a M+3\log_a N=$ [ ]

A．$\log_a(2M+3N)$ B．$\log_a(2M\cdot 3N)$

C．$\log_a(M^2\cdot N^3)$ D．$\log_a(M^2+N^3)$

1-6-16 若 $|x-\log_a y|=x+\log_a y$，则有 [ ]

A．x=0 B．x=0 且 y=1

C．y=1 D．x(y-1)=0

1-6-17 已知定义在实数集上的偶函数 f(x)在[0，+∞)上是增函数．记

$a=f(-\sqrt{2})$，$b=f(\log_2\frac{1}{4})$，$c=f(-\frac{\pi}{2})$，则a，b，c之间的大小关系是 [ ]

1-6-18 $\log_{2x-1}\sqrt{3-2x}$ 的x的取值范围是______．

1-6-19　若 $f(10^x)=x$，则 $f(3)$ 的值等于______.

1-6-20　(1)$\log_{\sqrt{5}}\dfrac{\sqrt[3]{25}}{5}=x$，则$x=$______；

(2)$\log_{10}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)=y$，则$y=$______.

1-6-21　不查表，计算：

(1) $\lg2\cdot\lg50+\lg5\cdot\lg20-\lg100\cdot\lg5\cdot\lg2$

(2)$\lg5^2+\dfrac{2}{3}\lg8+\lg5\cdot\lg20+(\lg2)^2$

1-6-22　已知 $f(10^x)=2x-3$，求 $f(x)$.

1-6-23　已知 a，b，c 是△ABC 的三边，且方程

$$x^2-2x+\log_2(c^2-b^2)-2\lg_2a+1=0$$

有等根，求证△ABC 是直角三角形.

1-6-24　设$d>0$，$d\neq1$，$y=d^{\frac{1}{1-\log_d x}}$，$z=d^{\frac{1}{1-\log_d y}}$，求证：$x=d^{\frac{1}{1-\log_d z}}$.

1-6-25　试证$\lg3$是一个无理数.

3．对数函数

例题

例1-6-24　函数$y=\log_{2x-1}\sqrt{3x-2}$的定义域是

[　　]

A．$(\frac{2}{3},1)\cup(1,+\infty)$　　B．$(\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$

C．$(\frac{2}{3},+\infty)$　　D．$(\frac{1}{2},+\infty)$

解　A

解不等式组$\begin{cases}2x-1>0\\2x-1\neq 0\\3x-2>0\end{cases}$得$\frac{2}{3}<x<1$或$x>1$．

例1-6-25　函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+17)$的值域是

[　　]

A．R　　B．(-∞，-3]

C．[8，+∞)　　D．[3，+∞)

解　B

$\because\ x^2-6x+17=(x-3)^2+8\geq 8$，$\therefore y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+17)\leq -3$．

例 1-6-26　若 $f(x)=\log_a|x+1|$在(-1，0)内 $f(x)>0$，则 $f(x)$

[　　]

A．在(-∞，0)内单调递增

B．在(-∞，0)内单调递减

C．在(-∞，-1)内单调递减

D．在(-∞，-1)内单调递增

解　D　依题设，f(x)的图象关于直线 x=-1 对称，且 0＜a＜1．画出图象(略)即知 D 正确．

例 1-6-27　已知函数 f(x)是奇函数，且当 x＞0 时，$f(x)=x^2+\lg(x+1)$，那么当 x＜0 时，f(x)的解析式是　　[　　]

A．$-x^2-\lg(1-x)$　　B．$x^2+\lg(1-x)$

C．$x^2-\lg(1-x)$　　D．$-x^2+\lg(1-x)$

解　A　设 x＜0，则-x＞0，所以

$f(-x)=(-x)^2+\lg(-x+1)=x^2+\lg(1-x)=-f(x)$

$f(x)=-x^2-\lg(1-x)$

例 1-6-28　函数 $y=5^x+1$ 的反函数是　　[　　]

A．$y=\log_5(x+1)$　　B．$y=\log_x 5+1$

C．$y=\log_5(x-1)$　　D．$y=\log_{(x-1)}5$

解　C

例1-6-29 函数$y=f(x)$，$x\in(\frac{1}{2},3]$，则$f(\log_3 x)$的定义域为____.

解 $(\sqrt{3},27]$ 由题设知$\frac{1}{2}<\log_3 x\leq 3$，所以$\sqrt{3}<x\leq 27$.

例1-6-30 (1)函数$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性是____.

(2)若$\varphi(x)=x^2+\lg(x+\sqrt{1+x^2})$，且$\varphi(2)=4.627$，则$\varphi(-2)=$____.

解 (1)奇函数.

$$\because\quad f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+x^2})=\lg\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$为奇函数

(2)3.373 因为$\psi(x)=x^2+f(x)$，又由(1)知，$f(x)$为奇函数，所以$f(-2)=-f(2)$. 所以

$$\psi(-2)=(-2)^2+f(-2)=2\times 2^2-(2^2+f(2))$$
$$=8-\psi(2)=8-4.627=3.373$$

例1-6-31 若$1<x<2$，则$(\log_2 x)^2$，$\log_2 x^2$，$\log_2(\log_2 x)$的大小关系是______.

解 $\log_2(\log_2 x)<(\log_2 x)^2<\log_2 x^2$

$$\log_2 x^2-(\log_2 x)^2=\log_2 x(2-\log_2 x)=\log_2 x\cdot\log_2\frac{4}{x}$$

因为$1<x<2$，所以$1<x<\frac{4}{x}$，所以$\log_2\frac{4}{x}>0$，$\log_2 x>0$，所以$\log_2 x^2>(\log_2 x)^2>0$，又因为$\log_2 x<1$，$\log_2(\log_2)x<0$，所以

$$\log_2(\log_2 x)<(\log_2 x)^2<\log_2 x^2$$

例1-6-32 已知$f(x^2-3)=\log_a\frac{x^2}{6-x^2}$ ($a>0$且$a\neq 1$.)

(1)判断$f(x)$的奇偶性；

(2)已知$f(x)$存在反函数$f^{-1}(x)$，若$f^{-1}(x)<0$，求x的取值范围.

解 (1)因为$f(x^2-3)=\log_a\frac{(x^2-3)+3}{3-(x^2-3)}$，所以

$$f(x)=\log_a\frac{3+x}{3-x}$$

由$\frac{3+x}{3-x}>0$，得$f(x)$的定义域为$(-3,3)$.

另一方面，有

$$f(-x)=\log_a\frac{3-x}{3+x}=\log a\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{-1}=-\log_a\frac{3+x}{3-x}=-f(x)$$

所以$f(x)$是奇函数.

(2) 设$y=\log_a\frac{3+x}{3-x}$，则$\frac{3+x}{3-x}=a^y$，解得$x=\frac{3(a^y-1)}{a^y+1}$．所以

$$f^{-1}(x)=\frac{3(a^x-1)}{a^x+1}$$

由$f^{-1}(x)<0$得$\frac{3(a^x-1)}{a^x+1}<0$，而$a^x+1>0$，故$a^x-1<0$，所以$a^x<1$．

故当 a＞1 时，x＜0；当 0＜a＜1 时，x＞0．

例 1-6-33　已知常数 a，b 满足 a＞1＞b＞0，若 $f(x)=\lg(a^x-b^x)$，

(1)求 y=f(x)的定义域；

(2)证明 y=f(x)在其定义域内是增函数；

(3)若 f(x)恰在(1，+∞)上恒取正值，且 f(2)=lg2，求 a，b 的值．

解　(1)由$a^x-b^x>0$，得$\left(\frac{a}{b}\right)^x>1$．

因为$a>b>0$，所以$\frac{a}{b}>1$，所以$y=\left(\frac{a}{b}\right)^x$是增函数，而由$\left(\frac{a}{b}\right)^x>1$得$x>0$，即函数$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$．

(2)任取 x_1，x_2∈(0，+∞)，且 $x_1<x_2$．

因为 a＞1，所以 $g_1(x)=a^x$ 是增函数，所以 $a^{x_1}-a^{x_2}<0$．

于是$(a^{x_1}-a^{x_2})-(b^{x_1}-b^{x_2})<0$，即

$$(a^{x_1}-b^{x_1})-(a^{x_2}-b^{x_2})<0\Rightarrow 0<a^{x_1}-b^{x_1}<a^{x_2}-b^{x_2}$$

$$\Rightarrow \lg(a^{x_1}-b^{x_1})<\lg(a^{x_2}-b^{x_2})$$

故 $f(x)=\lg(a^x-b^x)$在(0，+∞)内是增函数．

(3)因为 f(x)在(1，+∞)内为增函数，所以对于 x∈(1，+∞)内每一个 x 值，都有 f(x)＞f(1)．要使 f(x)恰在(1，+∞)上恒取正值，即 f(x)＞0 只须 f(1)=0．于是 f(1)=lg(a-b)=0，得 a-b=1．

又 f(2)=lg2，所以 $\lg(a^2-b^2)=\lg2$，所以 $a^2-b^2=2$，即(a+b)(a-b)=2．而 a-b=1，所以 a+b=2．

由$\begin{cases}a-b=1\\a+b=2\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$．

经检验知，$a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$为所求．

例 1-6-34　设 0＜x＜1，a＞0 且 a≠1，试比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小．

解　作差比较．

因为 0＜x＜1，所以 0＜1-x＜1，1＜1+x＜2，0＜$1-x^2$＜1．

当 a＞1 时，$|\log_a(1-x)|=-\log_a(1-x)$，$|\log_a(1+x)|=\log_a(1+x)$．所以

$$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)$$

$=-\log_a(1-x^2)>0$

即 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

当 $0<a<1$ 时，

$|\log_a(1-x)|=\log_a(1-x)$，$|\log_a(1+x)|=-\log_a(1+x)$

所以 $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)$

$=\log_a(1-x^2)>0$

即 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

注　本例也可用作商比较法来解.

例 1-6-35　设对所有实数 x，不等式

$$x^2\cdot\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$$

恒成立，求 a 的取值范围.

解　根据题意，可知原不等式(关于 x 的二次不等式)应满足下列条件：

$$\begin{cases}\dfrac{a}{a+1}>0 & \text{(i)}\\ \log_2\dfrac{4(a+1)}{a}>0 & \text{(ii)}\\ \left(2\log_2\dfrac{2a}{a+1}\right)^2-4\log_2\dfrac{4(a+1)}{a}\cdot\log_2\dfrac{(a+1)^2}{4a^2}<0 & \text{(iii)}\end{cases}$$

由(iii)得 $\left(\log_2\dfrac{2a}{a+1}\right)^2-6\log_2\dfrac{2a}{a+1}>0$，所以

$$\log_2\frac{2a}{a+1}<0 \text{或} \log_2\frac{2a}{a+1}>6$$

又由(ii)，得 $\log_2\dfrac{2a}{a+1}<3$，所以

$$\log_2\frac{2a}{a+1}<0\Rightarrow\frac{2a}{a+1}<1$$

由 $\dfrac{a}{a+1}>0$ 及 $\dfrac{2a}{a+1}<1$ 解得 $0<a<1$.

例 1-6-36　设函数 $f(x)=\log_2[(3-2k)x^2-2kx-k+1]$，求使 f(x) 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，而在 $(1,+\infty)$ 内单调递增的所有实数 k 组成的集合 M.

解　令 $g(x)=(3-2k)x^2-2kx-k+1$. 由题意知，在 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 上必须有 $g(x)>0$，$3-2k>0$，且 g(x) 的图象的对称轴与 x 轴的交点的横坐标必须属于 $[0,1]$. 于是 k 确定于不等式组

$$\begin{cases}3-2x>0\\0\le\dfrac{k}{3-2k}\le 1\\g(0)=-k+1\ge 0\\g(1)=-5k+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k<\dfrac{3}{2}\\0\le k\le 1\\k\le 1\\k\le\dfrac{4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow 0\le k\le\frac{4}{5}$$

所以 $M=\{k|0\le k\le\frac{4}{5}\}$

例 1-6-37　在函数 $y=\log_a x(0<a<1，x\ge 1)$的图象上有 A，B，C 三点，它们的横坐标分别是 m，m+2，m+4.

(1)若△ABC 面积为 S，求 S=f(m)；

(2)判断 S=f(m)的增减性；

(3)求 S=f(m)的最大值.

解　(1)由 A，B，C 三点分别向 x 轴作垂线，设垂足依次为 A_1，B_1，C_1，则

$$S=S_{梯形AA_1B_1B}+S_{梯形BB_1C_1C}-S_{梯形A_1C_1CA}$$

$$=\frac{-\log_a m-\log_a(m+2)}{2}\times 2+\frac{-\log_a(m+2)-\log_a(m+4)}{2}\times 4$$

$$-\frac{-\log_a m-\log_a(m+4)}{2}\times 4$$

$$=\log_a\frac{m(m+4)}{(m+2)^2}=\log_a\left[1-\frac{4}{(m+2)^2}\right]\quad(m\ge 1)$$

(2)当$m\ge 1$时，$g(m)=1-\dfrac{4}{(m+2)^2}$递增．又由$0<a<1$，故$S=f(m)$为减函数.

(3)因为$m\ge 1$，所以$(m+2)^2\ge 9$，即$\dfrac{4}{(m+2)^2}\le\dfrac{4}{9}$，即$1-\dfrac{4}{(m+2)^2}\ge\dfrac{5}{9}$，所以

$$\log_a\left[1-\frac{4}{(m+2)^2}\right]\le\log_a\frac{5}{9}$$

所以所求最大值为$\log_a\dfrac{5}{9}$

习题

1-6-26　函数$y=\log_x(1+x)+(1-x)^{\frac{1}{2}}$的定义域是　[　　]

A．(-1，0)　　B．(-1，1)

C．(0，1)　　D．[-1，1]

1-6-27　函数 $f(x)=\log_{0.5}(2x^2-3x+1)$的递减区间为　[　　]

$(2) y = 2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x$

1-6-28　已知 f(x)=lg(x^2-3x+2) 的定义域是 F，函数 g(x)=lg(x-1)+lg(x-2)的定义域为 G，那么 F 与 G 之间应有的关系为　[　　]

A．$F \cap G = \varnothing$　　B．$F = G$　　C．$F \subset G$　　D．$G \subset F$

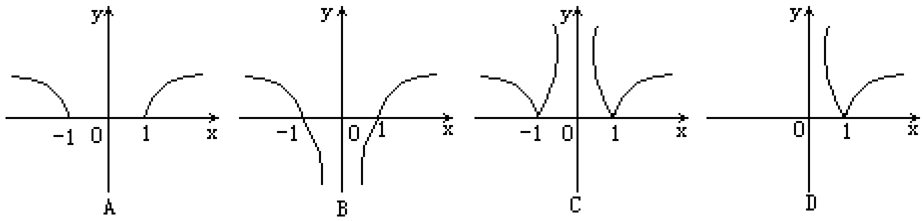
1-6-29　函数$f(x) = \lg\dfrac{1-x}{1+x}$　[　　]

A．既是奇函数，又是增函数
B．既是偶函数，又是增函数
C．既是奇函数，又是减函数
D．既是偶函数，又是减函数

1-6-30　$a = \log_9\dfrac{2}{3}$，$b = \log_8\sqrt{3}$，$c = \dfrac{1}{4}$三个数的大小关系是　[　　]

A．a＜c＜b　　B．a＜b＜c
C．c＜a＜b　　D．c＜b＜a

1-6-31　函数 y=|$\log_2$|x||的图象可能是　[　　]



1-6-32　比较下列各式的大小：

(1) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 5.24$____ $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 5.25$　　(2) $\log_8 7$____ $\log_7 8$

(3) $\log_7 12$____ $\log_8 12$　　(4) $\dfrac{(\log_9 10 - \log_{10} 9)(1 - \log_5 8)}{(1 + \log_8 0.1)\log_{3/7} 2}$____0

1-6-33　函数$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x - 1} + \dfrac{x-3}{\sqrt{2^x} - \sqrt[3]{2}}$的定义域是____．

1-6-34　若$\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{2}\right)^{-1}$，则$x \in$____．

1-6-35　若函数 f(x)=(x-1)($\log_3 a$)^2-6x$\log_3 a$+x+1 在区间[0，1]上的值恒为正，则 a 的取值范围是____．

1-6-36　若$\log_a\dfrac{2}{5} < 1$，则a的取值范围是____．

1-6-37　已知 f(x)=$\log_a$(a^x-1)(a＞0 且 a≠1)．

(1)求 f(x)的定义域；　　(2)讨论 f(x)的单调性．

(3)解方程 f(2x)=f^{-1}(x)．

1-6-38 设$\frac{1}{27}\leq t\leq 1$，如果$x=\log_3 t$，并且$y=(\log_3\sqrt{t})^2-1$，求函数$y=f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$．

1-6-39 设$a>0$，$a\neq 1$，$t>0$，比较$\frac{1}{2}\log_a t$与$\log_a\frac{t+1}{2a}$的大小，并证明你的结论．

1-6-40 设函数$f(x)=\log_3\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$的定义域为R，值域为[0，2]，求m，n的值．

1-6-41 已知函数$f(x)=\log_b(x+\sqrt{x^2-2})$的反函数为$f^{-1}(x)$(其中$b>0$，$b\neq 1$)．求$f^{-1}(x)$的解析式，并指出它的定义域．

1-6-42 已知函数$f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)$．

(1)求 f(x)的定义域；

(2)f(x)是否存在最大值或最小值？如果存在，请把它求出来．

4．换底公式

例题

例 1-6-38　$\log_3 4\cdot\log_4 8\cdot\log_8 m=\log_4 16$，则 m 为　　[　　]

A．$\frac{9}{2}$　　B．9　　C．18　　D．27

解　B　由已知有

$$\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 4}\cdot\frac{\lg m}{\lg 8}=\frac{\lg 16}{\lg 4}\Leftrightarrow \lg m=2\lg 3\Leftrightarrow m=9$$

例1-6-39 若$\log_a(\sqrt{2}-1)+\log_b(\sqrt{2}+1)<$，则下列各式中正确的是

[　　]

A．b＞a＞1

B．1＞a＞b＞0

C．a＞b＞1

D．1＞b＞a＞0

解　A　由已知不等式得

$$\log_a(\sqrt{2}-1)<\log_b(\sqrt{2}-1)$$

换底得$\frac{1}{\lg a}>\frac{1}{\lg b}>0$，所以$\lg b>\lg a$．又$\lg a>0$，$\lg b>0$，所以$b>a>1$．

故选 A．

例1-6-40 若$\log_a\frac{2}{3}<1$，则a的取值范围是

[　　]

A．$(0，\frac{2}{3})\cup(1，+\infty)$　　B．$(\frac{2}{3}，+\infty)$

C．$(\frac{2}{3}，1)$　　D．$(0，\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3}，+\infty)$

解 A 因为$\log_a\frac{2}{3}<1$，所以$\frac{\lg\frac{2}{3}}{\lg a}<1$.

当$a>1$时，$\lg\frac{2}{3}<\lg a$，解得$a>\frac{2}{3}$，所以$a>1$；

当$0<a<1$时，$\lg\frac{2}{3}>\lg a$，解得$0<a<\frac{2}{3}$.

故选 A.

例1-6-41 $f(x)$的图象与$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$的图象关于直线$y=x$对称，则$F(x)=f(2x-x^2)$的单调递增区间为

[ ]

A. [1，+∞] B. (-∞，1] C. (0，2) D. [1，2)

解 D 由已知得$f(x).=\log_{\frac{1}{3}}x$，所以$F(x)=\log_{\frac{1}{3}}(2x-x^2)$. 由$2x-x^2>0$得$0<x<2$. 又$t=2x-x^2=-(x-1)^2+1$在[1，+∞)上是减函数，$F(x)=\log_{\frac{1}{3}}t$在定义域上是减函数，所以$F(x)$在[1，2)上是增函数.

例1-6-42 已知$a^2>b>a>1$，如果$\log_a b=m$，$\log_b a=n$，$\log_b\frac{b}{a}=p$，$\log_a\frac{a}{b}=q$，则下式正确的是

[ ]

A. m>p>n>q

B. n>p>m>q

C. m>n>p>q

D. m>q>p>n

解 C 令$a=2$，$b=2^{\frac{3}{2}}$即知.

例 1-6-43 (1)若 $\log_a c+\log_b c=0(c\neq0)$，则 $ab+c-abc=$____；

(2)$\log_8 9=a$，$\log_3 5=b$，则 $\log_{10}2=$____(用 a，b 表示).

解 (1)1 $\log_a c=-\log_b c\Rightarrow\frac{\lg c}{\lg a}=-\frac{\lg c}{\lg b}$

但 $c\neq1$，所以 $\lg a+\lg b=0$，所以 $ab=1$，所以 $ab+c-abc=1$.

(2)$\frac{2}{3ab+2}$由$\log_8 9=a$，$\log_3 5=b$换底得$\log_2 3=\frac{3}{2}a$，$\log_2 5=b\log_2 3$.

所以$\log_2 5=\frac{3ab}{2}$，所以$\log_{10}2=\frac{1}{\log_2 10}=\frac{1}{1+\log_2 5}=\frac{2}{3ab+2}$.

例 1-6-44 函数 $y=f(x)$的定义域为[0，1]，则函数 $f[\lg(x^2-1)]$的定义域是____.

解 $\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{11}$或$-\sqrt{11}\leq x\leq-\sqrt{2}$

由题设有 $0\leq\lg(x^2-1)\leq1$，所以 $1\leq x^2-1\leq10$. 解之即得.

例 1-6-45 已知 $\log_{12}27=a$，求 $\log_6 16$ 的值.

解 由$\log_{12}27=a$，得$\log_{12}3=\frac{a}{3}$．所以

$$\log_6 16=\frac{\log_{12}16}{\log_{12}6}=\frac{2\log_{12}4}{\log_{12}36}=\frac{4\log_{12}\frac{12}{3}}{\log_{12}(3\times 12)}$$

$$=\frac{4(1-\log_{12}3)}{1+\log_{12}3}=\frac{4(1-\frac{a}{3})}{1+\frac{a}{3}}=\frac{4(3-a)}{3+a}$$

例 1-6-46　比较下列各组中两个式子的大小：

(1)$\log_a x$与$\log_{\frac{1}{a}}x(0<a<1)$

(2)$\log_b a$与$\log_{2b}a(a>1，b>0，b\neq\frac{1}{2}，b\neq 1)$

解 $(1)\log_a x-\log_{\frac{1}{a}}x=2\log_a x$

因为$0<a<1$，所以当$0<x<1$时，$2\log_a x>0$，从而$\log_a x>\log_{\frac{1}{a}}x$；当$x=1$时，$2\log_a x=0$，从而$\log_a x=\log_{\frac{1}{a}}x$；当$x>1$时，$2\log_a x<0$，从而$\log_a x<\log_{\frac{1}{a}}x$．

$$(2)\log_b a-\log_{2b}a=\frac{1}{\log_a b}-\frac{1}{\log_a(2b)}=\frac{\log_a 2}{\log_a b\cdot\log_a(2b)}$$

当$0<b<\frac{1}{2}$或$b>1$时，上式为正，故$\log_b a>\log_{2b}a$；

当$\frac{1}{2}<b<1$时，上式为负，故$\log_b a<\log_{2b}a$．

例 1-6-47　已知常数 a＞0 且 a≠1，变数 x，y 满足

$$3\log_x a+\log_a x-\log_x y=3$$

(1)若 $x=a^t(t\neq 0)$，试以 a，t 表示 y；

(2)若 $t\in\{t|t^2-4t+3\leq 0\}$时，y 有最小值 8，求 a 和 x 的值．

解　(1)由换底公式，得

$$\frac{3}{\log_a x}+\log_a x-\frac{\log_a y}{\log_a x}=3$$

即
$$\log_a y=(\log_a x)^2-3\log_a x+3$$

当 $x=a^t$ 时，$\log_a y=t^2-3t+3$，所以

$$y=a^{r^2-3t+3}$$

(2)由 $t^2-4t+3\leq 0$，得 $1\leq t\leq 3$．

当$0<a<1$且y有最小值8时，$u=t^2-3t+3=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$必有最大值，所以当 $t=3$ 时，$u_{max}=3$．即 $a^3=8$，所以 $a=2$，与 $0<a<1$ 矛盾．此

时满足条件的 a 值不存在．

当$a>1$且y有最小值8时，$u=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$必有最小值，所以当$t=\frac{3}{2}$时，$u_{min}=\frac{3}{4}$．即$a^{\frac{3}{4}}=8$，所以$a=16$，此时$x=a^{\frac{3}{2}}=64$．所以$a=16$，$x=64$．

习题

1-6-46 在$\frac{1}{\log_b a}$，$\frac{\lg a}{\lg b}$，$\log_{\sqrt[n]{b}}\sqrt[a]{a}$，$\log_{b^n}a^n$，$\frac{1-\log_{ab}a}{1-\log_{ab}b}$($a>0$，$a\neq1$，$b>0$，$b\neq1$，$n\in N$)中和 $\log_a b$ 相等的有　　[　　]

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

1-6-44　若 $\log_a 9<\log_b 9<0$，则 a，b 满足的条件是　[　　]

A．$a>b>1$

B．$b>a>1$

C．$0<b<a<1$

D．$0<a<b<1$

1-6-45　设 $0<a<1$，则　　[　　]

A．$\log_{0.3}a>\log_{\frac{1}{3}}a>\log_3 a$　　B．$\log_3 a>\log_{\frac{1}{3}}a>\log_{0.3}a$

C．$\log_{\frac{1}{3}}a>\log_{0.3}a>\log_3 a$　　D．$\log_3 a>\log_{0.3}a>\log_{\frac{1}{3}}a$

1-6-46　考虑下列 4 个式子：

(i)$\log_a b\cdot\log_b a$　　(ii)$\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2$

(iii)$\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)+\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$　(iv)$\frac{m\log_a b}{n\log_{a^n}b^n}$

其中值为 1 的有　　[　　]

A．(i)，(ii)，(iii)，(iv)　B．(i)，(ii)，(iv)

C．(i)，(ii)，(iii)　　D．(i)，(ii)

1-6-47　已知集合 $A\{x|2\leq x\leq\pi\}$，定义在集合 A 上的函数 $y=\log_a x$ 的最大值要比最小值大 1，则底数 a 的值是　　[　　]

A．$\frac{\pi}{2}$　B．$\frac{\pi}{2}$　C．$\frac{\pi}{2}$或$\frac{2}{\pi}$　D．不可能是$\frac{2}{\pi}$或$\frac{\pi}{2}$

1-6-48 (1)已知$\log_{\sqrt{3}}2=\frac{1-a}{a}$，则$\log_{12}3=$______；

(2)若 $a\neq b$，$a>0$，$b>0$ 且 $a^{\lg(bx)}=b^{\lg(bx)}$，则$(ab)^{\lg(abx)}$=____．

1-6-49 设$a=|\log_3\frac{1}{4}|$，$b=|\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}|$，$c=|\log_2 5|$，则a，b，c的大小顺序是_____．

1-6-50　若 $a>b>1$，则 $\log_b a$ 与 $\log_{(b+1)}(a+1)$中比较大的一个是____．

1-6-51　已知 $\log_3 10=a$，$\log_6 25=b$，求 $\log_4 45$．

1-6-52　已知$(2a)^x=a$，$\log_{3a}2a=y$，求证：$2^{1-xy}=3^{y-xy}$．

1-6-53 设$y=\log_{\frac{1}{2}}[a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}+1](a>0，b>0)$，求使y为负值的x的取值范围．

1-6-54　已知$\log_m a>\log_n a(a>1)$，试比较 m 与 n 的大小．

1-6-55　已知 $f(x)=5(\log_3 x)^2-12(\log_3 x)+1$，当 $x\in N$ 时，求使得f(x)取最小值时的 x 的值．

5．指数方程和对数方程

例题

例 1-6-48　若 $2^{2x}+4=5\cdot 2^x$，则 $x^2+1=$　　　　[　　]

A．1　　B．5　　C．5 或 1　　D．3

解　C　由已知得$(2^x)^2-5\cdot 2^x+4=0$，解得 2x=1 或 $2^x=4$．所以 $x_1=0$，$x_2=2$，所以 $x^2+1=1$ 或 $x^2+1=5$．

例 1-6-49　指数议程 $3^{x^2+2x}=2$ 的解集为　　　　[　　]

A．$\varnothing$

B．$\{-1+\sqrt{1+\log_3 2}\}$

C．$\{-1-\sqrt{1+\log_3 2}\}$

D．$\{-1\pm\sqrt{1+\log_3 2}\}$

解 D 取对数得$x^2+2x=\log_3 2$，所以$x=-1\pm\sqrt{1+\log_3 2}$．

例 1-6-50　方程 $2^x=x+2$ 的实数解的个数是　　　　[　　]

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

解　C　在同一坐标分别作出函数 $y=2^x$ 及 $y=x+2$ 的图象(略)观察即得．

例1-6-51 (1)议程$\dfrac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$的解是_____．

(2)方程 $5^{x-1}\cdot 10^{3x}=8^x$ 的解集是____．

解　(1)x=-1　左端分子分母同乘以 3^{-x} 得

$3^{-x}=3\Leftrightarrow x=-1$．

$(2)\left\{\dfrac{1}{4}\right\}5^{4x-1}=14x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

例1-6-52 指数方程$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$的解集为_____．

解 {-2，2} 令$u=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$，$v=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$，则

$$\begin{cases}u+v=4\\u\cdot v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2+\sqrt{3}\\v=2-\sqrt{3}\end{cases}或\begin{cases}u=2-\sqrt{3}\\v=2+\sqrt{3}\end{cases}$$

从而易求得 x=-2 或 x=2．

例 1-6-53　若指数方程 $9^x+(4+a)\cdot 3^x+4=0$ 有解，则 a 的取值范围

是____.

解 (-∞，-8]令 $t=3^x$，原方程可化为

$$t^2+(4+a)t+4=0 \qquad (\text{i})$$

原方程有解等价于方程(i)至少有一正数解．注意到方程(i)两根之积为 4，故问题等价于

$$\begin{cases}\triangle=(4+a)^2-16\geq 0\\ 4+a<0\end{cases}\Leftrightarrow a\leq -8$$

例 1-6-54 解下列方程：

$(1)\left(\sqrt{3}\right)^{3x+2}=\dfrac{27\sqrt{3}}{3^x}$ $\qquad (2)4^x+6^x=2\cdot 9^x$

$(3)8\cdot 2^x=3^{x^2-9}$

解 (1)原方程 $\Leftrightarrow 3^{x+\frac{3x+2}{2}}=3^{\frac{7}{2}}$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{3x+2}{2}=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow 5x+2=7\Leftrightarrow x=1$

(2)原方程 $\Leftrightarrow\left(\dfrac{4}{9}\right)^x+\left(\dfrac{6}{9}\right)^x=2$

$\Leftrightarrow\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right]^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-2=0\Leftrightarrow\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+2\right]\cdot\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-1\right]=0$

但$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+2>0$，所以$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-1=0$，解之得$x=0$.

(3)原方程化为 $2^{x+3}=3^{x^2-9}$，取以 3 为底的对数，得

$(x+3)\log_3 2=(x+3)(x-3)\Leftrightarrow x+3=0$或$x-3=\log_3 2$

$\Leftrightarrow x=-3$或$x=3+\log_3 2$

例1-6-55 已知函数$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}(x\geq 0)$，求证：

(1)函数 f(x)在[0，+∞)上是增函数；

(2)讨论方程$\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=a$的大于0的解的个数.

解 $(1)f(x)=1-\dfrac{2}{2^x+1}$，任取$x_2>x_1\geq 0$，从而$2^{x_2}>2^{x_1}$，故

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{2}{2^{x_1}+1}-\frac{2}{2^{x_2}+1}=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}>0$$

所以 f(x)在[0，+∞)上为增函数.

(2)因为 f(0)=0，由(1)所证的单调性知，当 x∈(0，+∞)时，恒有 f(x)>0，所以，

当 a≤0 时，方程 f(x)=a 无正数解；

当 a>0 时，方程 f(x)=a 的正数解恰有一个.

例 1-6-56 对数方程 $2\log_6 x=1-\log_6 3$ 的解是 [ ]

A．$\sqrt{3}$ B．$\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$ C．$\sqrt{2}$ D．$\sqrt{3}$或$\sqrt{2}$

解　C

例 1-6-57　已知方程 $\lg(x-1)^2=2$ 的解集为 P，又方程 $2\lg(x-1)=2$ 的解集为 Q，则　[　]

A．$P\cap Q=\varnothing$
B．$P\cap Q=P$
C．$P\cup Q=Q$
D．$P\cup Q=P$

解　D　$\because P=\{11,-9\}$，$Q=\{11\}$，$\therefore P\cup Q=P$．

例 1-6-58　方程 $\log_{2-x}(x^2-2x)=\log_{2-x}(5x-6)$ 的根的个数是　[　]

A．2　B．1　C．0　D．无穷多个

解　C　原方程同解于

$$\begin{cases}2-x>0\\2-x\neq 1\\x^2-2x=5x-6\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

例 1-6-59　方程 $\lg x+\lg(x-1)=\lg a(a>0)$ 的解的个数是 [　]

A．0　B．1　C．0 或 1　D．由 a 的值确定

解　B　原方程 $\Leftrightarrow x>1$ 且 $x(x-1)=a(a>0)$

由后一方程得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$，但 $x>1$，故原方程有惟一解．

例 1-6-60　(1) $\lg(3-x)-\lg(3+x)=\lg(1-x)-\lg(2x+1)$ 的解集是____；

(2) $\dfrac{\lg 2x}{\lg(x+\frac{1}{2})}=2$ 的解集是_____．

解　(1) $\{0\}$　(2) $\varnothing$

例 1-6-61　(1) $\log_2(x-3)=\log_4(5-x)$ 的解集为____；

(2) $x^{\lg x}\cdot x^2=1000$ 的解集为____．

解　(1) $\{4\}$

(2) $\{10^{-3},10\}$　方程两边取以 10 为底的对数，得

$$(\lg x)^2+2\lg x-3=0\Leftrightarrow \lg x=-3 \text{ 或 } \lg x=1$$

$$\Leftrightarrow x=10^{-3} \text{ 或 } x=10$$

例 1-6-62　解下列方程

(1) $\log_{(x+2)}(x^2+4)=2$　　(2) $\lg x+\lg(x^2-4)=\lg 3+\lg(x+3)$

(3) $2\log_4 x+2\log_x 4=5$

解　(1)原方程同解于

$$\begin{cases}x+2>0 & \text{(i)}\\x+2\neq 1 & \text{(ii)}\\(x+2)^2=x^2+4 & \text{(iii)}\end{cases}$$

由(iii)得，x=0．显然 x=0 满足(i)，(ii)．

所以原方程的解为 x=0．

(2)原方程可变形为$\lg\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{3}{x}$，所以

$x-2=\frac{3}{x}\Leftrightarrow x=3$或$x=-1$

经检验 x=-1 是增解．原方程的解为 x=3．

(3)原方程可变形为

$$2\log_4^2 x-5\log_4 x+2=0\Leftrightarrow \log_4 x=\frac{1}{2}\text{或}\log_4 x=2$$

$\Leftrightarrow x=2$或$x=16$

经检验知都是原方程的解．

例 1-6-63　已知 a＞0,a≠1,试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$有解的 k 的取值范围．

解　原方程同解于

$$\begin{cases}x-ak>0\\x^2-a^2>0\\(x-ak)^2=x^2-a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-ak>0 & \text{(i)}\\(x-ak)^2=x^2-a^2 & \text{(ii)}\end{cases}$$

由(ii)得，

$$2kx=a(1+k^2)\qquad\text{(iii)}$$

当 k=0 时，由 a＞0 知(iii)式无解，故原方程无解；

当 k≠0 时，

$$x=\frac{a(1+k^2)}{2k}\qquad\text{(iv)}$$

将(iv)代入(i)，得

$$\frac{a(1+k^2)}{2k}-ak>0\Leftrightarrow\frac{(k-1)(k+1)}{k}<0$$

$\Leftrightarrow k<-1$或$0<k<1$

综上可知，当 x∈(-∞，-1)∪(0，1)时，原方程有解．

例 1-6-64　解关于 x 的方程 lg(ax-1)-lg(x+a)=1．

解　原方程同解于

$$\begin{cases}ax-1>0\\x+a>0\\ax-1=10(x+a)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+a>0\\(a-10)x=10a+1\end{cases}$$

当 a=10 时，原方程无解；

当$a\neq10$时，则$x=\frac{10a+1}{a-10}$；

当$a<10$时，$x+a=\frac{a^2+1}{a-10}<0$；

当$a>10$时，$x+a=\frac{a^2+1}{a-10}>0$．

综上所述，当 a≤10 时，原方程无解；当 a＞10 时，原方程的解为

$$x=\frac{a^2+1}{a-10}$$

习题

1-6-56 满足方程$(x^2-4)(3^x-9)(\sqrt{x-1}-1)=0$**的不同的**$x$**值有** [ ]

A．1个　B．2个　C．3个　D．4个

1-6-57 不论p**为何实数，函数**$y=(p-1)\cdot 2^x-\frac{p}{2}$**的图象恒过一定点，这个点的坐标是** [ ]

A．$(1，-\frac{1}{2})$　B．$(0，-1)$　C．$(-1，-\frac{1}{2})$　D．$(-2，-\frac{1}{4})$

1-6-58 指数方程组$\begin{cases}3^x+3^y=30\\3^{x+y-1}=27\end{cases}$**的解集为** [ ]

A．{(1，3)}　B．{(3，1)}

C．{1，3}∪{3，1}　D．{(1，3)，(3，1)}

1-6-59 (1)**方程**$\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{1}{2}$**的解集为**_____；

(2)$5^x\cdot 10^{3x}=8^x$ 的解集为____；

(3)$\sqrt{25^{x^2+x-0.5}}=\sqrt[4]{5}$**的解集为**_____．

1-6-60 已知函数 $f(x)=9^x$，方程 $f(x)=f[f^{-1}(3^x+6)]$的解集是____．

1-6-61 关于x**的方程**$5x=\frac{a+3}{5-a}$**有负根，则**a**的取值范围是**_____．

1-6-62 解方程

(1)$4^x-7=3\cdot 2^{x-1}$　(2)$5^{x-2}=3^{x^2-4}$

1-6-63 已知关于 x 的方程 $2a^{2x-2}-7a^{x-1}+3=0$ 有一个根是2，求 a 的值和方程其余的根．

1-6-64 设 $p\in R$，试讨论方程 $a^{3x}+2pa^{2x}+(p^2+1)a^x+p=0(a>0，a\neq 1)$实数的个数．

1-6-65 下列方程中，与方程 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$一定同解的方程是 [ ]

A．$f(x)=g(x)$　B．$\frac{1}{\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{\sqrt{g(x)}}$

C．$a^{f(x)}=a^{g(x)}$　D．$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

1-6-66 方程 $\log_a x=x-2(0<a<1)$的实数解的个数是 [ ]

A．0　B．1　C．2　D．3

1-6-67 如果方程$(\lg x)^2+(\lg 7+\lg 5)\lg x+\lg 7\lg 5=0$ 的两根是 $\lg\alpha$，$\lg\beta$，则$\alpha\beta$的值是 [ ]

A．$\lg 7\lg 5$　　B．$\lg 35$　　C．35　　D．$\frac{1}{35}$

1-6-68 (1)方程$\sqrt{\lg^2 x-2}=1-\lg x$的解是____．

(2)方程 $\log_{(x+1)}(2x^2-2x+1)=2$ 的解集是____．

1-6-69 (1)$(\sqrt{x})^{\log_a x-1}=a$的解集为____；

(2)$2\log_x 25-3\log_{25}x=1$ 的解集为____．

1-6-70　解下列方程：

(1)$\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$

(2)$\lg^2(x+10)-\lg(x+10)^3=4$

(3)$\log_4(3-x)+\log_{0.25}(3+x)=\log_4(1-x)+\log_{0.25}(2x+1)$

1-6-71　解关于 x 的方程 $2\lg x-\lg(x-1)=\lg a$．

1-6-72　已知关于 x 的方程

$\log_a{}^2(6x^2+x-1)-\log_a{}^2(3x-1)=\log_a{}^2(a+2)-\frac{1}{2}$有实数解，求实数a的范围．

第二部分　三角函数

(一)任意角的三角函数

提要

(1)角的概念：角的概念推广到任意角(正角、负角和零角)的情形，引出了“终边相同的角”、“区间角”、“象限角”等一些既有联系又有区别的新概念．正确区分这些概念并掌握有关运算，都是重要的基本训练．

(2)角的度量：关于角的大小，有角度制和弧度制两种度量方法．它们通过度与弧度的换算公式$\frac{\theta}{\pi}=\frac{\alpha}{180}$($\alpha$和$\theta$分别表示同一角的度数与弧度数)可以互相转化．弧度制的建立，使任意角的集合与实数集合之间建立了一一对应的关系，从而使三角函数可以看成是以实数为自变量的函数．

(3)三角函数的定义：有了任意角的概念，三角函数可通过直角坐标系给出一般定义，即由角的终边上的任意一点P(x，y)的坐标x，y与点P到原点O的距离r的比或x,y的比来定义．这叫比值定义(还有“线值”定义，即用单位圆中的一些有向线段来定义)，它是研究三角函数基本理论的出发点，是推导所有三角公式的基础，也是直接用来解决有关数学问题的重要依据．

(4)同角三角函数间的基本关系式：同角的六个三角函数，可由它们的定义直接推出八个基本关系式，这些关系式都是在各自的公共定义域内的恒等式，它们解决了“同角”而“不同名”的三角函数的转化问题．在同角的六个三角函数中，如果已知其中之一，那么蓁五个便可由相应的关系式求得．但要注意，使用平方关系时，要涉及到符号的取舍，即要根据角的范围来确定函数值的符号，这可以分区间或象限进行讨论．

(5)诱导公式：诱导公式的导出，解决了把任意角的三角函数转化0°～90°间角的三角函数的问题．诱导公式与同角三角函数的基本关系式是进行三角恒等变形的重要基础，必须熟练掌握．但重要的不在于硬记公式，而在于认真领会公式的来龙去脉．即使对于“奇变偶不变，符号看象限”这样的精彩口诀，也要在深刻领悟的基础上才能有效运用．

1．终边相同的角、弧度制

例题

例 2-1-1　分别写出与下列各角终边相同的所有角的集合S以及它在0～6π间的各个角：

(1) $-\frac{\pi}{4}$　　(2) $\frac{22}{3}\pi$　　(3) $-300°$

解 (1)$S=\{\alpha\,|\,\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{4}，k\in Z\}$

S中在0～6π之间的角是：$2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$；$4\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{15\pi}{4}$；$6\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{23\pi}{4}$．

(2)$S=\{\alpha\mid\alpha=2k\pi+\frac{22\pi}{3}, k\in Z\}$

S 中在 0～6π之间的角是：

$-2\pi+\frac{22\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$；$-4\pi+\frac{22\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$；$-6\pi+\frac{22\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

(3)因为 $-300°=-\frac{300}{180}\pi=-\frac{5\pi}{3}$，所以

$S=\{\alpha\mid\alpha=2k\pi-\frac{5\pi}{3}, k\in Z\}$

S中在0～6π之间的角是：$2\pi-\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$；$4\pi-\frac{5\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$；$6\pi-\frac{5\pi}{3}=\frac{13\pi}{3}$.

注 (i)如何确定整数 k，使所求结果符合题目指定的范围？简单的问题可通过试算，如(2)中的$\frac{22\pi}{3}=6\pi+\frac{4\pi}{3}>6\pi$，k只能取负数中的-1，-2，-3；复杂一些的问题可通过解不等式以确定 k 的取值.

(ii)指定范围 0～6π的区间长度为三个周角，终边相同的角也应是三个.

例2-1-2 已知α是第二象限的角，求$\frac{\alpha}{2}$所在的象限.

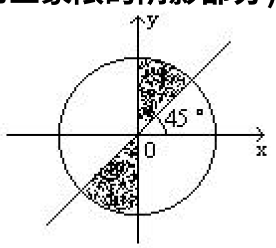
解 α是第二象限的角，可表示为：

$k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°\ (k\in Z)$

因此，$\frac{a}{2}$所在的范围为

$$k\cdot 180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+90°\ (k\in Z)$$

可知$\frac{\alpha}{2}$是第一象限或第三象限的角(k为偶数时为图中第一象限的阴影部分，k 取奇数时为图中第三象限的阴影部分).



例 2-1-3 一个小于π的正角与它的 7 倍角的终边相同，求这个角.

解 设这个角为 x，依题意 7x 与 x 的终边相同，即

$7x=2k\pi+x(k\in Z)\Leftrightarrow 6x=2k\pi\ (k\in Z)$

$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}(k\in Z)$

又 $0<x<\pi$，所以 k=1，2.

当$k=1$时，$x=\frac{\pi}{3}$.

当$k=2$时，$x=\frac{2\pi}{3}$.

故所求的角是$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

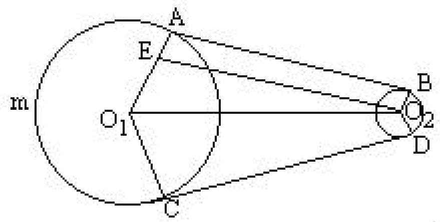
注　在不引起误会的前提下，弧度制中角的单位“弧度”二字可略去不写.

例 2-1-4　如图所示，两轮半径分别是(A，B，C，D 分别是切点)25cm 和 5cm，轴心距 O_1O_2=40cm，求连接两轮的传动皮带的长.

解　设 AB，CD 是⊙O_1 和⊙O_2 的外公切线，过 O_2 作 $O_2E\perp O_1A$，垂足是 E.

在直角三角形 O_2EO_1 中，O_1O_2=40cm，$O_1E=O_1A-O_2B$=25-5=20(cm)，故

$$\angle EO_1O_2=\frac{\pi}{3}$$



设优弧$\overset{\frown}{AmC}$含圆心角α弧度，长为 Lcm，劣弧$\overset{\frown}{BD}$含圆心角β弧度，长为 lcm，则

$$\alpha=2\pi-\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{4\pi}{3}，\beta=\angle DO_2B=\angle AO_1C=2\angle EO_1O_2=\frac{2\pi}{3}$$

从而　$L=\alpha\cdot R=\frac{4\pi}{3}\cdot 25=\frac{100\pi}{3}(cm)$，

$l=\beta\cdot r=5\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}(cm)$

所以皮带的长为

$$AB+CD+L+l=O_1O_2\sin\frac{\pi}{3}+O_1O_2\sin\frac{\pi}{3}+\frac{100\pi}{3}+\frac{10\pi}{3}$$

$$=40\sqrt{3}+\frac{110\pi}{3}(cm)$$

例 2-1-5　试证：扇形周长一定时，当且仅当圆心角α=2 时，扇形的面积最大.

解　设扇形的半径为 r，弧长是 l，面积为 S，则周长为 2r+l．由已知，周长一定，设为 A(A 是常数)，根据扇形的面积公式，得

$$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(A-2r)\cdot r=-r^2+\frac{1}{2}Ar$$

这是关于r的二次函数，当且仅当$r=-\frac{\frac{1}{2}A}{2\cdot(-1)}=A$时，S有最大值，此时

$$L=A-2r=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}，\ \alpha=\frac{l}{r}=\frac{\frac{A}{2}}{\frac{A}{4}}=2$$

即当圆心角α=2时，扇形面积最大．

习题

2-1-1　当我们在直角坐标系里讨论角时，我们说角α为第三象限的角，是指角α的顶点在____，角α的始边在____上，角α的终边在____的角．

2-1-2　角α是第一象限角是指　　　　[　　]

A．α是锐角

B．0°≤α<180°

C．α的终边在第一象限的角

D．α的顶点在原点，始边在x轴的正半轴上，终边在第一象限的角

2-1-3　在-360°～360°间与-1120°角终边相同的角是____；它们都是第____象限的角．

2-1-4　对于在同一直角坐标系中按通常意义规定的角，有下列说法：

(i)相等的角终边相同；

(ii)终边相同的角相等；

(iii)终边相同的角的同名三角函数值相等；

(iv)某个同名三角函数值相等的角终边相同．

其中正确的说法是　　　　[　　]

A．(i)，(ii)　B．(iii)，(iv)　C．(i)，(iii)　D．(ii)，(iv)

2-1-5　终边在x轴正半轴上的角的集合是____；终边在x轴负半轴上的角的集合是____；终边在x轴上的角的集合是____．

2-1-6　集合$M=\{\alpha\mid\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}，k\in Z\}$，集合$N=\{\beta=k\pi+\frac{\pi}{6}，k\in Z\}$，集合$P=\{r|r=k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}，k\in Z\}$的关系是

[　　]

A．M⊂N⊂P

B．P⊂N⊂M

C．M=N≠P

D．M≠N=P

2-1-7　$M=\{\alpha|k\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}，k\in Z\}$，集合$N=\{\beta\mid\beta=k\pi\pm\frac{\pi}{6}，k\in Z\}$，集合$P=\{r|r=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}，k\in Z\}$的关系是

[　　]

A．N=M∪P　　B．N=M∩P

C．M=N∪P　　　　　D．M=N∩P

2-1-8　在直角坐标系里，角α与角β的终边有如下位置关系，请分别写出它们的等量关系．

(1)相同；　　　　　　　　　(2)关于原点对称；

(3)关于 x 轴对称；　　　　　(4)关于 y 轴对称．

2-1-9　终边落在图中阴影部分(不包括边界)的角α的集合是

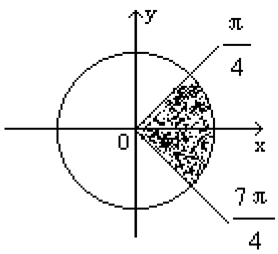
[　　]

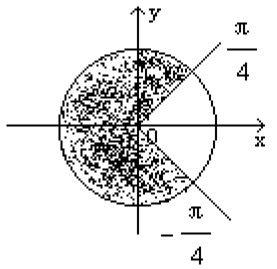
A．$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{4}，k\in\}\cup\{\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{7\pi}{4}，k\in Z\}$

B．$\{\alpha|\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{7\pi}{4}\}$

C．$\{\alpha|2k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha<2k\pi+\frac{7\pi}{4}，k\in Z\}$

D．$\{\alpha|2k\pi-\frac{\pi}{4}<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{4}，k\in Z\}$





2-1-10　终边落在圆中阴影部分(不包括边界)的角α的集合可表示为____．

2-1-11　$-\frac{\pi}{12}$弧度＝____度，$-225°$＝____弧度，$11°45'$＝____弧度．

2-1-12　圆弧的长等于圆的半径，则圆弧所对的圆心角等于____弧度；弦长等于半径，则这段弦所对的圆心角是____弧度．

2-1-13　半径是 4㎝ 的圆中，圆心角是 1.5π，这个圆心角所对的弧长是____㎝，相应的扇形面积是____$㎝^2$．

2-1-14　在半径是 120㎜ 的圆上有一条长 144㎜ 的弧，求这条弧所对的圆心角的弧度数和度数．

2-1-15　经过 1 小时，时钟的分针旋转了____弧度，秒针旋转了____弧度，时针旋转了____弧度．(规定按顺时针方向旋转所形成的角为负角．)

2-1-16　圆盘以每秒 20°的等角速度旋转，求离轴心 18㎝ 的圆盘

上一点的线速度．

2-1-17　已知一扇形的半径为 r，圆心角为 60°，求此扇形的面积与其内切圆的面积的比．

2-1-18　半径都为 r 的两个圆 O，O′相交于 A，B 两点．已知它们的公共部分的面积等于圆O的面积的一半，且$\angle AOB=\frac{\pi}{2}+\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，试证：$\theta=\cos\theta$．

2．任意角的三角函数、诱导公式

例题

例 2-1-6　已知角α的终边经过 P(3a，-4a)(a≠0)，求α角的正弦、余弦、正切、余切函数值．

解　设 P 点到原点 O 的距离为 r．

当$a>0$时，$r=\sqrt{(3a)^2+(-4a)^2}=5|a|=5a$，所以，

$$\sin\alpha=\frac{-4a}{5a}=-\frac{4}{5}；\cos\alpha=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{-4a}{3a}=-\frac{4}{3}；\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{3a}{-4a}=-\frac{3}{4}$$

当 a<0 时，r=5|a|=-5a．这时，

$$\sin\alpha=\frac{-4a}{-5a}=\frac{4}{5}；\cos\alpha=\frac{3a}{-5a}=-\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{-4a}{3a}=-\frac{4}{3}；\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{3a}{-4a}=-\frac{3}{4}$$

例 2-1-7　设α角终边上的一点 P 的坐标是(x，y)，P 点到原点的距离是 r．

(1)已知 r，α，求 P 点的坐标；

(2)已知α，y，求 r；

(3)已知α，x，求 y．

解　(1)由$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，得$x=r\cos\alpha$；

由$\sin\alpha=\frac{y}{r}$；得$r=\frac{y}{\sin\alpha}$；

所以P点的坐标是$(r\cos\alpha，r\sin\alpha)$．

(2)由$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，得$y=\frac{y}{\sin\alpha}$；

(3)由$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x}$，得$y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha$．

例 2-1-8　已知|cosθ|≤|sinθ|，求θ的取值范围．

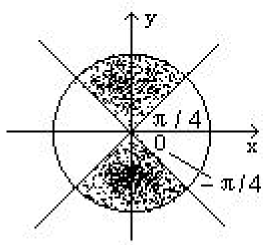
解　由三角函数的定义，知

$$\cos\theta=\frac{x}{r}，\sin\theta=\frac{y}{r}$$

其中(x，y)是角θ终边上任意一点 P 的坐标，r 是 P 点到原点的距离．

因为 $r>0$，要使$|\cos\theta|\le|\sin\theta|$，只须$|x|\le|y|$．所以，θ角的终边落在如图所示的阴影部分内，即

$$k\pi+\frac{\pi}{4}\le\theta\le k\pi+\frac{3\pi}{4}\ (k\in Z)$$



例 2-1-9　化简下列各式：

(1)$\sin(\alpha-\pi)\sec(-\alpha+4\pi)\operatorname{tg}(\alpha-3\pi)+\operatorname{tg}^2(3\pi-\alpha)\cdot\csc^2(2\pi+\alpha)$

(2)$\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})\cdot\operatorname{ctg}(-\alpha-\frac{3\pi}{2})\sec(-\alpha+\frac{5\pi}{2})\cdot\operatorname{tg}(1\frac{3}{2}\pi+\alpha)$

(3)$\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\cdot\dfrac{\cos(4\pi-\alpha)}{\csc(-\alpha+\frac{\pi}{2})}\cdot\dfrac{\csc(1\frac{1}{2}\pi+\alpha)}{\cos(-2\frac{1}{2}\pi+\alpha)}$

解　(1)　原式$=\sin[-(-\pi-\alpha)]\sec(4\pi-\alpha)\operatorname{tg}[-(3\pi-\alpha)]$

$+\operatorname{tg}^2(3\pi-\alpha)\cdot\csc^2(2\pi+\alpha)$

$=-\sin\alpha\cdot\sec\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\csc^2\alpha$

$=-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\csc^2\alpha=-\operatorname{tg}^2\alpha(1-\csc^2\alpha)$

$=-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot(-\operatorname{ctg}^2\alpha)=1$

(2)　原式$=\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\csc\alpha(-\operatorname{ctg}\alpha)=-1$

(3)　原式$=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha}\cdot\dfrac{-\sec\alpha}{\sin\alpha}=1$

注　第(1)题是按任意角—→正角—→α的顺序化简．也可由把α看成锐角时，确定原三角函数的符号，由$\frac{\pi}{2}$的奇偶数倍确定三角函数的名称，即可直接得出结果．如(2)中的$\operatorname{ctg}(-\alpha-\frac{3\pi}{2})$，$-\frac{3\pi}{2}$与$\frac{\pi}{2}$终边相同，$-\frac{3\pi}{2}-\alpha\operatorname{ctg}(-\alpha-\frac{3\pi}{2})=\alpha$．以上这些，可记忆为“奇变偶不变，符号看象限．”

习题

2-1-19　求下列各角的六个三角函数值：

(1)$-45°$　　(2)$270°$　　(3)$420°$

2-1-20　求角α的六个三角函数值，α的终边分别经过

(1)$P(-12，-5)$　　(2)$Q(-1，\sqrt{3})$

2-1-21　已知α的终边在直线 $y=kx(k>0)$上，求角α的六个三角函

数值．

2-1-22 已知$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，则α的终边经过点 [ ]

A．$(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ B．$(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ C．$(1,-\frac{3}{4})$ D．(3，-4)

2-1-3 试根据三角函数的定义证明：

(1)$tg^2\alpha+1=\sec^2\alpha$ (2)$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ (3)$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

2-1-24 已知 A 是三角形 ABC 的一个内角，下列各式中一定成立的是[ ]

A．sinA·cosA＞0 B．tgA·cosA＞0

C．sinA·cscA＞0 D．ctgA·tgA＞0

2-1-25 已知θ是第二象限的角，试判断

sin(cosθ)cos(sinθ)

的符号．

2-1-26 已知$(2k+1)\pi<\alpha<2(k+1)\pi-\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，计算

$$\frac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}+\frac{|\cos\alpha|}{\cos\alpha}+tg\alpha\cdot ctg\alpha$$

2-1-27 若$\sqrt{tg^2\alpha}=-tg\alpha$，$|\cos\alpha|=\cos(-\alpha)$，则$\frac{\alpha}{2}$的取值范围是 [ ]

A．$(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi](k\in Z)$ B．$(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{4}](k\in Z))$

C．$(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{4}](k\in Z)$ D．$(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{4}](k\in Z)$

2-1-28 设α解终边上一点 P(x，y)到原点的距离是 r．

(1)已知$\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$r=10$，求y；

(2)已知$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$r=10$，求x；

(3)已知$\sin\alpha=-\frac{2}{3}$，$y=-3$，求r；

(4)已知$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$x=-4$，求r．

2-1-29 下列四个诱导公式中正确的一个是 [ ]

A．sin(180°+150°)=-sin150°

B．sin(180°-150°)=-sin150°

C．sin(90°+150°)=sin150°

D．sin(90°-150°)=-cos150°

2-1-30 用含α角的式子表示：

(1)α是第一象限的角，与α有相同正弦的第二象限的角可表示为____；

(2)α是第一象限的角，与α有相同正切的第三象限的角可表示为

____；

(3) α是第二象限的角，与α的余弦互为相反数的第四象限的角可表示为____.

2-1-31　求 cos1230°·tg210°+ctg585°的值.

2-1-32 化简：(1) $\dfrac{\csc(5\pi+\alpha)+\cos(\alpha+\frac{3\pi}{2})}{\sec(\alpha-\frac{5\pi}{2})+\sin(\alpha-3\pi)}(k\in Z)$

(2) $\dfrac{\sin(k\pi-\alpha)\cos(k\pi+\alpha)}{\sin[(k+1)\pi+\alpha]\cdot\cos[(k+1)\pi-\alpha]}(k\in Z)$

(3) $\dfrac{tg(-15°)\cos17°\cdot\sin540°\cdot tg45°}{1+\sec215°}$

2-1-33　在△ABC 中，求证：

(1)sin(A+B)=sinC　　　(2)cos(A+B)=-cosC

(3)tg(A+B)=-tgC(∠C≠90°)

2-1-34　在△ABC 中，求证：

(1) $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$　　(2) $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$

(3) $tg\dfrac{A+B}{2}=ctg\dfrac{C}{2}$

2-1-35　(1)已知α+β=90°，sinα=α，求 cosβ的值；

(2)已知 sin(36°+α)=α，求 cos(54°-α)的值.

2-1-36　已知 sin36°=0.5878，求 cos54°，sin54°的值.

2-1-37 求 $\sin\dfrac{2n+3}{4}\pi+\cos\dfrac{3-2n}{4}\pi\ (n\in Z)$的值.

2-1-38　求 tg(50°+α)·ctg(153°-α)·tg(207°+α)tg(140°+α)的值.

3．同角三角函数的基本关系

例题

例 2-1-10　对于$\alpha\in R$，下列式子恒成立的是 [　　].

A．$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

B．$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

C．$1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha$

D．$ctg^2\alpha+\csc^2\alpha=1$

解　A只有当α是第一，四象限角时，B才成立，淘汰B．当$\alpha=\frac{\pi}{2}$的奇数倍时，C不成立；当$\alpha=\frac{\pi}{2}$的偶数倍时D不成立，淘汰C，D．故而选A．

注　同角三角函数的八个基本公式，是在α取能使等式两边都有意义的值时，等式才成立．除正、余弦的定义域是全体实数外，要特别注意正切、余切、正割、余割的定义域，当α取这些函数定义域以外的值时，函数无意义，公式当然也就不成立．

例 2-1-11　如果α是第二象限的角，下列各等式中，成立的是 [　　].

A．$tg\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

B．$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

C．$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

D．$\cos\alpha=-\frac{1}{\sec\alpha}$

解　B

注　用同角三角函数的八个公式求某个三角函数值时，仅当开平方运算才需要由α角所在的象限确定根号前的符号．而用商数关系、倒数关系时不需要讨论符号．

例 2-1-12　求证下列恒等式：

(1)$tgx+ctgx=\sec x\cdot\csc x$

(2)$\frac{1}{1+tg^2x}+\frac{1}{1+ctg^2x}=\frac{1}{1+\sin^2x}+\frac{1}{1+\csc^2x}$

(3)$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$

解 (1)左边$=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}$

$=\sec x\cdot\csc x=$右边

所以，原等式成立．

(2)**左边** $=\dfrac{1}{\sec^2 x}+\dfrac{1}{\csc^2 x}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

右边 $=\dfrac{1}{1+\sin^2 x}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2 x}}=\dfrac{1}{1+\sin^2 x}+\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2+1}=\dfrac{1+\sin^2 x}{1+\sin^2 x}=1$

左边=右边，所以原等式成立．

(3)因为 $1-\sin^2 x=\cos^2 x$，即 $(1-\sin x)(1+\sin x)=\cos^2 x$，两边同除以 $\cos x(1-\sin x)$，得

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1-\sin x}$$

所以，原等式成立．

注　三角恒等式的证明，可以从恒等式的一边开始，证得它等于另一边(如本例(1))；也可以分别证明左、右两边都等于同一个式子(如本例(2))；或者由已知的恒等式出发，推得需要证明的恒等式(如本例(3))．

例 2-1-13　证明下列恒等式：

(1) $\dfrac{tg^2 A-ctg^2 A}{\sin^2 A-\cos^2 A}=\sec^2 A+\csc^2 A$

(2) $\dfrac{tgA\sin A+ctgA\cos A}{(\sin A+\cos A)^2-3\sin A\cos A}=\sec A+\csc A$

解　(1)**左边** $=\dfrac{\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}-\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}{\sin^2 A-\cos^2 A}=\dfrac{\sin^4 A-\cos^4 A}{\cos^2 A\sin^2 A(\sin^2 A-\cos^2 A)}$

$=\dfrac{(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^2 A-\cos^2 A)}{\sin^2 A\cos^2 A(\sin^2 A-\cos^2 A)}$

$=\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin^2 A\cos^2 A}=\dfrac{\sin^2}{\sin^2 A\cos^2 A}+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A\cos^2 A}$

$=\dfrac{1}{\cos^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 A}=\sec^2 A+\csc^2 A$

所以，原式成立．

(2)**左边** $=\dfrac{\dfrac{\sin^2 A}{\cos A}+\dfrac{\cos^2 A}{\sin A}}{\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A-3\sin A\cos A}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin^3 A+\cos^3 A}{\sin A\cos A}}{a-\sin A\cos A}=\dfrac{(\sin A+\cos A)(\sin^2 A-\sin A\cos A+\cos^2 A)}{\sin A\cos A(1-\sin A\cos A)}$

$=\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}\cdot\dfrac{1-\sin A\cos A}{1-\sin A\cos A}=\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\sin A}=\sec A+\csc A$

所以，原式成立．

注　“切、割化弦”是证明三角恒等式或化简三角表达式的重要技巧．通过它常把式子中的正切、余切、正割、余割用基本公式中的商数关系或倒数关系化为正弦、余弦，归一到正、余弦后再用平方关系或代数运算将式子化简．

例2-1-14 (1)已知$\cos a=\dfrac{4}{5}$，求$\sec^2\alpha+\csc^2\alpha$；

(2)已知$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$， α是第四象限的角，求$\sec\alpha+\csc\alpha$；

(3)已知 $\cos\alpha=m(m\neq0，m\neq\pm1)$，求 $\sec\alpha+\csc\alpha$；

解 (1)$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\sec\alpha=\dfrac{5}{4}\Rightarrow\sec^2\alpha=\dfrac{25}{16}$

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{9}{25}\Rightarrow\csc^2\alpha=\frac{25}{9}$$

所以，$\sec^2\alpha+\csc^2\alpha=\dfrac{25}{16}+\dfrac{25}{9}=\dfrac{625}{144}$．

$$\left.\begin{array}{r}(2)\ \alpha\text{是第四象限角}\Rightarrow\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}\\ \sec\alpha=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\csc\alpha=-\dfrac{5}{3}\\ \sec\alpha=\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

所以，$\sec\alpha+\csc\alpha=\dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{5}{12}$．

(3)因为 $m\neq0$，$m\neq\pm1$，即 $\cos\alpha\neq0$，$\cos\alpha\neq\pm1$，所以角α的终边不可能在坐标轴上．于是，有以下两种情况：

当α是第一、二象限角时，则得

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\sin\alpha=\sqrt{1-\cos\alpha}\\ \cos\alpha=m\end{array}\right\}\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-m^2}\\ m\neq\pm1\end{array}\right\}\Rightarrow\csc\alpha\frac{\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$$

又因$\cos\alpha=m$且$m\neq0$，所以$\sec\alpha=\dfrac{1}{m}$．这时

$$\sec\alpha+\csc\alpha=\frac{1}{m}+\frac{\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}=-\frac{1-m^2+m\sqrt{1-m^2}}{m(1-m^2)}$$

当α是三、四象限角时，同法可得到

$$\sec\alpha+\csc\alpha=\frac{1-m^2-m\sqrt{1-m^2}}{m(1-m^2)}$$

注　已知α角的一个三角函数值，用平方关系求α角的另一个三角函数值时，要由α角所在的象限来确定根号前的符号(如本例(2))．如果α角的象限不确定，要对α角所在的象限进行分类讨论(如本例(3))．分类的标准当然可以按α角在一、二、三四象限及各坐标轴上逐一列举；但由于α角在某两个象限的某个三角函数值的符号是相同的，所以可以把这两个符号相同的象限归在一起．同时注意别遗漏了α角终边在坐标轴上的情形．

例2-1-15 求证：$\frac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+2\sin x\cos x}$

解 左边 $=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

$=\frac{(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

右边 $=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}$

$=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

左边=右边，原等式成立．

注 在三角恒等式的证明过程中，根据恒等变形的需要，“1”可扮演不少角色．如本例中的 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$．还有

$\sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha=1$，$\csc^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha=1$，$\csc\alpha\cdot\sin\alpha=1$，$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1$ $\sin 90°=1$，$\cos 0°=1$，$\mathrm{tg}45°=1$，$\mathrm{ctg}45°=1$，…

均可恰当应用．

例 2-1-16 (1)已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=m$，求 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$；

(2)已知 $\sin\alpha\cos\alpha=m\left(-\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{1}{2}\right)$，求 $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$ 的值．

解 (1)由已知等式，得

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=m^2$

所以 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{m^2-1}{2}$

(2)由已知，得

$1+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2m$

$\Rightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2m$

$\Rightarrow (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2m$

$\Rightarrow \sin\alpha+\cos\alpha=\pm\sqrt{1+2m}$ (i)

类似地，可得

$\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\sqrt{1-2m}$ (ii)

(i)×(ii)，得

$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\pm\sqrt{1-4m^2}$

(当 $k\pi+\frac{\pi}{4}\leq\alpha\leq k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in Z)$ 时，取正号；当 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leq\alpha\leq k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$ 时，取负号．)

习题

2-1-39 化简下列各式：

(1) $\sqrt{1-\sin^2 300°}$

(2) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

(3) $\sqrt{\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1}$

(4) $\sqrt{\mathrm{tg}^2 300°-2\mathrm{tg}300°+1}$

2-1-40 $\sin 280°\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 280°}+\cos 280°\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 280°}=(\quad)$

[　　].

A. -2

B. 0

C. 1

D. 2

2-1-41　化简下列各式：

(1) $\dfrac{\sec\alpha\cdot\csc\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}$　　(2) $\dfrac{\sin\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\csc\alpha}$

2-1-42 求证： (1) $\dfrac{1}{\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha}=\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha$

(2) $\dfrac{3+5\sin\alpha}{4+5\cos\alpha}=\dfrac{5\cos\alpha-4}{3-5\sin\alpha}$

2-1-43　求值：

$lg\mathrm{tg}1°+lg\mathrm{tg}2°+lg\mathrm{tg}3°+\cdots+lg\mathrm{tg}89°=$______

2-1-44　求证下列恒等式：

(1) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$

(2) $(1-\mathrm{tg}^2A)^2=(\sec^2A-2\mathrm{tg}A)(\sec^2A+2\mathrm{tg}A)$

2-1-45　求证：

(1) $\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha+\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha$

(2) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

2-1-46 已知$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\sec\alpha<0$，则$\mathrm{ctg}\alpha=(\quad)$

[　　].

A. $-\dfrac{12}{5}$

B. $-\dfrac{5}{12}$

C. $\dfrac{12}{5}$

D. $\dfrac{5}{12}$

2-1-47　已知 $\mathrm{ctg}\alpha=k(k\neq 0)$，则$(\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=(\quad)$　[　　]

A. 1

B. k

C． $\frac{1}{k}$

D． $\frac{1}{k^2}$

2-1-48　已知 tgα=m，α是二、三象限的角，则 sinα的值等于　　　　[　　]．

A． $\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$

B． $-\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$

C． $\pm\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$

D． $-\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$

2-1-49　(1)已知 sinθ-cosθ=m，则 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$=______(用 m 表示．以下均同)

(2)已知 sinθ-cosθ=m，则 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$=______；

(3)已知 tgθ+ctgθ=m，则 $tg^2\theta+ctg^2\theta$=______；

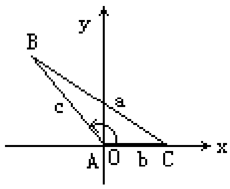
(4)已知 $tg^2\theta+ctg^2\theta$=m，则 tgθ+ctgθ=______．

2-1-50 已知A是三角形的内角，并且 $\sin A\cos A=-\frac{1}{8}$，那么，cosA- sinA 的值为______．

2-1-51　如果 asinθ+cosθ=1，bsinθ-cosθ=1，求证 ab=1．

2-1-52 已知 $tg\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\frac{2\cos\alpha-3\sin\alpha}{3\cos\alpha-2\sin\alpha}$ 的值为______．

2-1-53 已知 $m\sin\alpha-n\cos\alpha=0(m\neq0，n\neq0)$，则 $\frac{m\cos\alpha-n\sin\alpha}{m\cos\alpha+n\sin\alpha}$ ______=(用 m，n 表示．)



2-1-54　以△ABC 的顶点 A 为坐标原点建立如图所示的坐标系 xAy．如果 AB=c，AC=b，∠BAC=α，

(1)写出△ABC 的顶点 B 的坐标及 AC 边上的高；

(2)求 BC 边的长．

2-1-55　(1)已知 x=acosθ，y=bsinθ(a≠0，b≠0)，求证

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(2)已知 xcosθ=a，yctgθ=b(a≠0，b≠0)，求证

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

2-1-56 已知$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\cos^2\beta\sin x}{2\cos x}+\frac{\sin^2\alpha\cos x}{2\sin x}$**，求证**$\operatorname{tg}x=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$

2-1-57 已知$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m$，$b\sin^2\varphi+a\cos^2\varphi=n$，$a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi$，

求证：$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

4．已知三角函数的值求角

例题

例2-1-17 已知$\sin x=-\frac{1}{2}$，求x的集合．

解 因为$\sin x=-\frac{1}{2}<0$，所以x是第三、第四象限的角．由于符合条件$\sin\theta=\frac{1}{2}$的锐角$\theta=\frac{\pi}{6}$，因此，在$0\sim 2\pi$间符合条件的角为

$x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$及$x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$

所以，x的集合是

$$\{x\mid x=2k\pi+\frac{7\pi}{6},k\in Z\}\cup\{x\mid x=2k\pi+\frac{11\pi}{6},k\in Z\}$$

注　已知一个角的三角函数值求角的一般步骤是：

第一步，由三角函数值的符号确定角所在的象限；

第二步，求一个锐角θ，使θ的这个三角函数值等于已知三角函数值的绝对值；

第三步，根据诱导公式求出0～2π间符合条件的角．一般地，第一象限角即θ，第二象限的角可用π-θ，第三象限的角可用π+θ，第四象限的角可用2π-θ表示；

第四步，写出与上述角终边相同的角．

例2-1-18 已知$\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$，则

[　　]．

A．$x=\frac{\pi}{6}$

B．$x=\pm\frac{\pi}{6}$

C．$x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$

D．$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$

解　D

注　如果两个角相等，则其同名三角函数值一定相等，如，若α=β，则cosα=cosβ．反之则不然，即若两外角的同名三角函数值相等，则这两个角不一定相等．它们的关系或者是终边相同的角，或者是在不同象限里有相同函数值的角．

例2-1-19 已知$\sin(\frac{\pi}{2}+2x)=-\frac{1}{2}$，求x．

解 $\sin(\frac{\pi}{2}+2x)=-\cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\quad(k\in Z)\Leftrightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}\quad(k\in Z)$

例2-1-20 (1)满足条件$\cos A=-\frac{1}{2}$的三角形内角A的个数是

[　　].

A．0

B．1

C．2

D．3

(2)满足条件$\sin x=\frac{1}{2}$，且$0<x<7$的角x的个数是

[　　].

A．0

B．1

C．2

D．3

解　左$=\frac{1}{\sin^4\alpha\cos^4\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha}-\frac{1}{\sin^4\alpha}+1$

(2)D因为$0<x<7$，而$2\pi+\frac{\pi}{6}<7<2\pi+\frac{\pi}{2}$，所以有

$x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，$x_3=2\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$

例2-1-21 已知$\sin<-\frac{1}{2}$，并且$\cos\alpha<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，求α的范围．

解

$$\left.\begin{array}{l}\sin<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2k\pi+\frac{7\pi}{6}<\alpha<2k\pi+\frac{11\pi}{6}\ (k\in Z)\\ \cos\alpha<-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2k\pi+\frac{3\pi}{4}<\alpha<2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\in Z)\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow 2k\pi+\frac{7\pi}{6}<\alpha<2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\in Z)$$

习题

2-1-58 已知$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

(1)若 x∈(0°，90°)，则 x=______；

(2)若 x∈(0°，180°)，则 x=______；

(3)若 x 是第一象限的角，则 x=______；

(4)若 x∈R，则 x=______；

(5)若 x 是△ABC 的内角，则 x=______．

2-1-59 已知$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$．

(1)若 x∈(0，π)，则 x=______；

(2)若 x∈(0，2π)，则 x=_______；

(3)若 x∈R，则 x=______；

(4)若 x 是第三象限的角，则 x=______；

(5)若 x 是△ABC 的一个内角，则 x=______．

2-1-60 (1)已知名$\mathrm{ctg}x=\sqrt{3}$，且$0°\leq x<360°$，求x；

(2)$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+3x)=1$，且$-2\pi\leq x<2\pi$，求x．

2-1-61 (1)A是△ABC的内角，且$\sin A=\frac{1}{2}$，求角A；

(2)A是△ABC的内角，且$\cos A=\frac{1}{2}$，求角A．

2-1-62　在△ABC中，已知cosA=0.3764，求cos(B+C)．

2-1-63　下列命题中正确的是　　　　　　　　　　　　[　　]．

A．若sinx= sinα，则x=α．

B．若sinx=sinα，则x=2kπ+α(k∈Z)．

C．若sinx=sinα，则x=2kπ±α(k∈Z)

D．若sinx=sinα，则x=2kπ+α或x=(2k+1)π-α(k∈Z)．

2-1-64　集合M是△ABC一个内角A的集合，那么下列条件中，使得M不是单元素集合的是　　　　　　　　　　　　[　　]．

A．$\sin A=\frac{1}{2}$

B．$\cos A=\frac{1}{2}$

C．$\mathrm{tg}A=\frac{1}{2}$

D．$\mathrm{ctg}A=\frac{1}{2}$

2-1-65 已知$x\in[-360°，360°)$,使$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$的角x共有______个，它们分别是______．

2-1-66 已知$\cos(\frac{\pi}{3}-\alpha)-\frac{1}{2}$，$\alpha\in[0，2\pi]$，求角α．

2-1-67 已知$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，求α．

2-1-68 已知$\cos(\frac{\pi}{3}+2\alpha)=-\frac{1}{2}$，求α．

2-1-69　设x是△ABC的一个内角，那么下列命题中正确的一个是　　　　　　　　　　　　[　　]．

A．若$\sin x=\frac{1}{2}$，则$x=30°$或$150°$

B．若$\cos x=\frac{1}{2}$，则$x=60°$或$120°$

C．若$|a|\leq 1$，则方程$\sin x=a$必有两解

D．若$|a|\leq 1$，则方程$\cos x=a$必有两解

2-1-70 已知$\sin\alpha=-\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，求α，β．

2-1-71　如果sinα=a，用α的代数式表示sinx=-a中的x的集合．

2-1-72　已知α为锐角，$x\in[-2\pi,2\pi)$．若 $\cos\alpha=a$，试用α的代数式表示 $\cos x=-a$ 中的 x．

2-1-73　(1)已知 $\cos(\alpha+2\beta)=0$，求证 $\cos(\alpha+\beta)=\pm\sin\beta$；

(2)已知 $\sin(\alpha+\beta)=1$，求证 $\sin(2\alpha+\beta)=\sin\beta$．

2-1-74　已知 $1+\sin^2x=\cos x$，求 x．

(二)三角函数的图象和性质

提要

三角函数的图象从“形”的方面反映出三角函数的变化规律．它给我们理解、记忆三角函数的定义域、值域、单调性、周期性、奇偶性、多值性和三角方程(或不等式)的解等提供了直观的依据．

作三角函数的图象的基本方法仍然是列表、描点、画图．正弦曲线 $y=\sin x$ 和余弦曲线 $y=\cos x$ 上的五个特征点对确定图象的位置起着关键的作用．

在研究怎样由函数 $y=\sin x$ 的图象变换成形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象时，应明白：后者的最大(小)值点仅仅与 A 有关(振幅变换)，周期仅仅与

ω 有关(伸缩变换)，零值点则与 ω、φ 有关(左右平移变换)．变换的次序一般是“先移后缩”，即先左($\varphi>0$时)、右($\varphi<$时)平移 $|\varphi|$ 个单位，再作周期变换．如果要“先缩后移”，则应左($\frac{\varphi}{\omega}>0$时)、右($\frac{\varphi}{\omega}<0$时)平移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位，而不是平移 $|\varphi|$ 个单位．至于振幅变换则可先可后．

正、余弦(割)涵数的值域在解决某些问题中往往以隐含条件出现，应予充分注意．

正确理解函数的周期性和周期的定义是解决有关周期函数问题的关键．在 $f(x+T)=f(x)$ 中，应特别注意两点：一是 x 在定义域中的任意性；二是 T 为常数且不为 0．

1．三角函数的图象

例题

例2-2-1 已知函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A，\omega，\varphi$为常数，$\omega>0)$的图象的相邻两个最高点的坐标分别是$(\frac{\pi}{12}，2)$，$(\frac{13\pi}{12}，2)$．

(1)求函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的一个表达式；

(2)画出函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$在长度为一个周期的闭区间上的简图；

(3)说明经过怎样的变换，可以由$y=\sin x$的图象得到$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象．

解 (1)显然，A=2．相邻两个最高点的距离即一个最小正周期的长度，由两点间的距离公式，得

$$T=|x_1-x_2|=\left|\frac{\pi}{12}-\frac{13\pi}{12}\right|=\pi$$

再由$\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，得$\omega=2$．

由中点坐标公式得一个最小值点 x_m 及一个零值点 x_0 的横坐分别为

$$x_m=\frac{\frac{\pi}{12}+\frac{13\pi}{12}}{2}=\frac{7\pi}{12}，x_0=\frac{\frac{\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}}{2}=\frac{\pi}{3}$$

于是，$2x_0+\varphi=k\pi(k\in Z)$．$\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3}$．令$k=1$，得$\varphi=\frac{\pi}{3}$．

所以，函数的一个表达式是$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

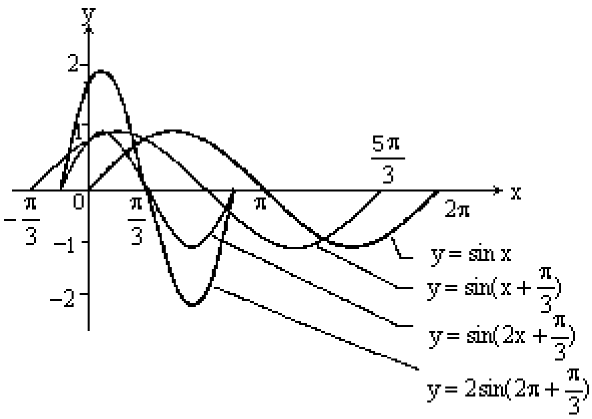
(2)用“五点作图法”作出函数在长度为一个周期的闭区间$[-\frac{\pi}{6}，\frac{5\pi}{6}]$上的简图．

列表

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$	0	2	0	-2	0

描点：以上表中各对 x，y 的值作为点的坐标在直角坐标系中作出各点．

画图：以正弦曲线的大致形状连接各点，得$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$在一个周期内的简图(如图)．



(3)如上图，先把$y=\sin x$图象的所有点向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位得到$y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$的图象；再把$y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$的图象的所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，得到$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$的图象；最后把$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$的图象

(2) 求证$\frac{\cos(\alpha+2\beta)}{\sin\beta}+2\sin(\alpha+\beta)=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$。

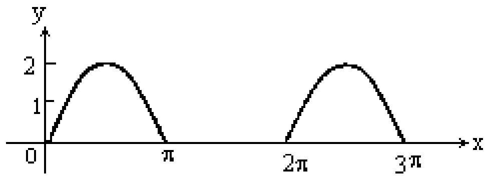
例 2-2-2　作下列函数的图象：

(1) $y=|\sin x|+\sin x$　　(2)$y=\sqrt{\sin x}$

解　(1)所给函数为

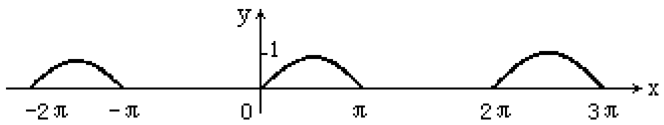
$$y=\begin{cases}\sin x+\sin x=2\sin x & (2k\pi\leq x<2k\pi+\pi, k\in Z)\\ -\sin x+\sin x=0 & (2k\pi-\pi\leq x<2k\pi，k\in Z)\end{cases}$$

函数图象如下图．

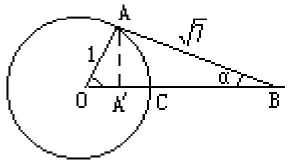


(2)由 $\sin x\geq 0$ 知函数的定义域为 $2k\pi\leq x\leq 2k\pi+\pi(k\in Z)$

函数图象如下图．



例 2-2-3　右图是转动变平动装置示意图．连杆 AB 的一端 A 以π弧度/秒的等角速度逆时针方向沿着⊙O 作圆周期转动，带动活塞 B 在直线 OB上往返平动．设A点的初始位置$\angle AOC=\frac{\pi}{3}$(C点是⊙O与OB的交点)．设⊙O的半径是1，连杆$AB=\sqrt{7}$，经过时间t秒时$OB=s$．



(1)求 s 与 t 的函数关系；

(2)求经过 $-\frac{1}{3}$秒，$\frac{2}{3}$秒，1秒时活塞离圆心O的距离；

(3)画出 s 随时间 t 变化的函数图象．

解 (1)设经过时间 t 秒时，A，B 的位置如上图所示．这时∠AOC= $\pi t+\frac{\pi}{3}$．过A作OB的垂线AA′，垂足是A′．设∠ABA′ = α．由于 $1<\sqrt{7}$，所以有$0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$．由正弦定理，得$\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{\sin(\pi t+\frac{\pi}{3})}{\sqrt{7}}$

所以 $\cos\alpha\sqrt{1-\frac{\sin^2(\pi t+\frac{\pi}{3})}{7}}=\sqrt{\frac{7-\sin^2(\pi t+\frac{\pi}{3})}{7}}$

$$A'B=\sqrt{7}\cos\alpha=\sqrt{7-\sin^2(\pi t+\frac{\pi}{3})}=\sqrt{6+\cos^2(\pi t+\frac{\pi}{3})}$$

$$OB=OA'+A'B=OA\cos(\pi t+\frac{\pi}{3})+\sqrt{6+\cos^2(\pi t+\frac{\pi}{3})}$$

$$=\cos(\pi t+\frac{\pi}{3})+\sqrt{6+\cos^2(\pi t+\frac{\pi}{3})}$$

即s与t的函数关系为$s=\cos(\pi t+\frac{\pi}{3})+\sqrt{6+\cos^2(\pi t+\frac{\pi}{3})}$

(2)当$t=-\frac{1}{3}$秒时，活塞离圆心O的距离

$$s=\cos[\pi(-\frac{1}{3})+\frac{\pi}{3}]+\sqrt{6+\cos[\pi(-\frac{1}{3})+\frac{\pi}{3}]}$$

$$=\cos 0+\sqrt{6+\cos^2 0}=1+\sqrt{7}$$

当$t=\frac{2}{3}$秒时，$s=\cos(\pi\cdot\frac{2}{3}+\frac{\pi}{3})+\sqrt{6+\cos^2(\pi\cdot\frac{2}{3}+\frac{\pi}{3})}=\sqrt{7}-1$

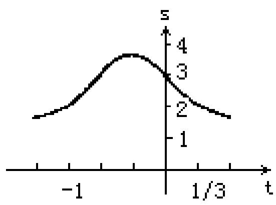
当$t=1$秒时，$s=\cos(\pi+\frac{\pi}{3})+\sqrt{6+\cos^2(\pi+\frac{\pi}{3})}=-\frac{1}{2}+\sqrt{6+\frac{1}{4}}=2$

(3)列表：

t	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{6}$	-1	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\pi t+\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\pi t+\frac{\pi}{3})$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
s	1.6	1.7	2	2.4	3	3.5	3.6	3.5	3	2.4	2	1.7	1.6

描点：取上表中对 t，s 值作为点的坐标，在直角坐标系中描出各点.

画图：用光滑曲线顺次连接各点，得函数在一个周期内$(-\frac{4}{3}\leq t<\frac{2}{3})$**的图象(右图)，根据函数的周期性(由题设 A 点每经过 2 秒钟便回到初始位置可知函数的周期为**2)**可作出**$t<-\frac{4}{3}$**或**$t>\frac{2}{3}$**时函数的图象.**

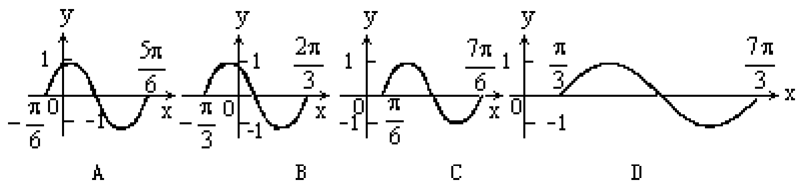


习题

2-2-1 已知函数$y=A\sin x+k(A>0)$**最大值是**$\frac{3}{2}$**，最小值是**$-\frac{1}{2}$**，则 A=______；k=______.**

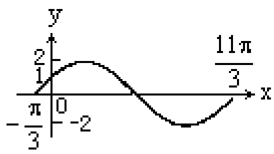
2-2-2 函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$**在长度为一个周期上的简图是**

[　　].



2-2-3 函数$y=2\sin(\frac{1}{2}x+\varphi)$**在长度为一个周期内的图象如右图，则**

[　　].



A．$\varphi=\frac{\pi}{6}$

B．$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

C．$\varphi=\frac{2\pi}{3}$

D．$\varphi=-\frac{2\pi}{3}$

2-2-4 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+k(A>0，\omega>0，|\varphi|<\frac{\pi}{2})$在一个周期内的图象的最大值点为$(\frac{\pi}{12}，3)$，最小值点为$(\frac{7\pi}{12}，-1)$，则$A=$____；$\omega=$____；$\varphi=$____；$k=$____．

2-2-5 对于函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A，\omega，\varphi$是常数，$\omega\neq0，A\neq0)$．下列说法中，正确的是 [ ]．

A．$-A\leq y\leq A$

B．最小正周期是$\frac{2\pi}{\omega}$

C．$x=-\frac{\varphi}{\omega}$时，$y=0$

D．由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq\omega x+\varphi<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$解得的$x$的取值范围是函数的单调递增区间

2-2-6 (1)先将函数$y=f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，得到函数$y=f'(x)$的图象；再把函数$y=f'(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到$y=\sin x$的图象．求函数$y=f(x)$的表达式．

(2)先把函数$y=f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到$y=f'(x)$的图象，再把函数$y=f'(x)$的图象上每一点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，得到$y=\sin x$的图象．求函数$y=f(x)$的表达式．

2-2-7 已知函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0)$的图象的一个最高点为$(\frac{\pi}{3}，3)$，由这个最高点到相邻最低点，图象与$x$轴的交点为$(\frac{\pi}{2}，0)$．求此函数的一个表达式，并画出函数在长度为一个周期的区间内的图象．

2-2-8 用“五点作图法”作出下列函数在长度为一个周期内的简图：

(1)$y=\frac{2}{3}\sin 2x$

(2)$y=1+\sin 2x$

$(3)y=\cos(2x-\frac{\pi}{2})$

$(4)y=2\cos(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3})$

2-2-9　作出下列函数的图象：

$(1)y=|\sin x|$　$(2)y=\sin|x|$　$(3)y=|\tg x|$　$(4)y=\tg|x|$

2-2-10　作下列函数的图象：

(1)y= sinx+cosx

$(2)y=2\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$

2-2-11　经过怎样的变换可由 y=tgx 的图象得到 y=ctgx 的图象？

2-2-12　一根长 *l*cm 的细线一端固定，另一端悬一小球，小球摆动时离开平衡位置的位移 s(cm)和时间 t(秒)的函数关系是

$s=\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\pi}{6}\right)$**.**

(1)求小球摆动的频率与周期(用含 g，*l*，π的式子表示)；

(2)如果要使小球往返一次的时间恰好是 1 秒，那么函数的表达式如何？求 t=0 时，小球离开平衡位置的位移；再经过几秒小球又第一次回到平衡位置.

2-2-13　利用三角函数线证明：

$(1)|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geq 1$

(2)**若**$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$**，则**$\sin\alpha<\alpha<\tg\alpha$**.**

2.三角函数的性质(一)

例题

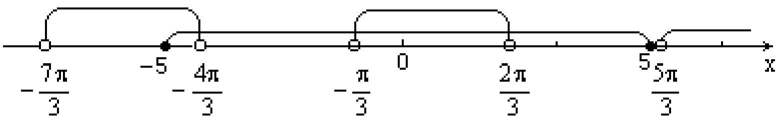
例2-2-4 求函数$y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin(x+\frac{\pi}{3})$**的定义域.**

解 函数的定义域决定于下列不等式组

$$\begin{cases}25-x^2\geq 0\\ \sin(x+\frac{\pi}{3})>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ 2k\pi-\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{2\pi}{3}\text{，}k\in Z\end{cases}$$

所以所求定义域为

$$\{x\mid -5\leq x<-\frac{4\pi}{3}\}\cup\{x\mid -\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}\}$$



例 2-2-5 求下列函数的最大值、最小值及使函数取得这些值的 x 的集合：

$(1)y=tg^2x-2\sqrt{3}tgx+4$ $\quad(2)y=\sin^2x-2\sqrt{3}\sin x+4$

解 $(1)y=tg^2x-2\sqrt{3}tgx+4=(tgx-\sqrt{3})^2+1$

因为 tgx 可取所有实数，所以函数 y 没有最大值.

又当$tgx=\sqrt{3}$**，即**$x=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in Z)$**时，函数**$y$**有最小值，**$y_{min}=1$**.**

$(2)y=\sin^2x-2\sqrt{3}\sin x+4=(\sin x-\sqrt{3})^2+1$

当$\sin x=1$**即**$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$**时，函**$y$**有最小值**

$y_{min}=(1-\sqrt{3})^2+1=5-2\sqrt{3}$

当$\sin x=-1$**即**$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in Z)$**时，函数**$y$**有最大值**

$y_{max}=(-1-\sqrt{3})^2+1=5+2\sqrt{3}$

注 本例中(1)是关于 tgx 的二次函数,由于 tgx 的值域是全体实数，所以可以按一般二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 求它的最大值或最小值.

本例中(2)**是关于**$\sin x$**的二次函数，由于**$|\sin x|\leq 1$**，**$\sin x$**不可能取到**$\sqrt{3}$**，故函数的最小值不是**$(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+1$**．而当**$\sin x=-1$**时，函数**y**有最大值**$(-1-\sqrt{3})^2+1$**.**

例 2-2-6 求下列函数的最大值和最小值：

$(1)y=\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$ $\qquad(2)y=\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$，$x\in[0,\pi]$

$(3)y=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ $\qquad(4)y=\frac{\sin x+2}{\sin x-2}$

解 (1)当 sinx 取最大值 1 时，分母有最大值 3，分子有最小值 1，

这时函数y有最小值$\frac{1}{3}$.

当 sinx 取最小值-1 时，分母有最小值 1，分子有最大值 3，这时函数 y 有最大值 3.

(2)注意到x∈[0，π]时，0≤sinx≤1，所以$y_{min}=1$，$y_{min}=\frac{1}{3}$

(3)注意到sinx≠ -1，即-1<sinx≤1，所以$y_{min}=0$

函数无最大值.

$$(4)y=\frac{\sin x+2}{\sin x-2}=\frac{\sin x-2+4}{\sin x-2}=1+\frac{4}{\sin x-2}$$

$y_{max}=1+\frac{4}{-1-2}=-\frac{1}{3}$，$y_{min}=1+\frac{4}{1-2}=-3$

注　数学题，有的是“形似神异”，有的是“形异神似”. 这里的“神”是指解题的精要.

本例所选的 4 个小题形式上基本相同. 其中(1)，(2)，(3)由于当 sinx 取最大(或最小)值时，分子取得最小(或最大)值，同时分母有最大(或最小)值，从而确定函数有最小(或最大)值(同时要注意(2)，(3)中的定义域). 但(4)中的情况却不同，当 sinx 取最大(或最小)值时，分子、分母同时取得最大(或最小)值，从而无法确定函数是否取最大值还是最小值，因此要另辟蹊径求解.

习题

2-2-14　把下列函数的定义域写在题后的空白处：

(1)$y=\cos(x+\frac{\pi}{4})$：________

(2)$y=\sqrt{3}\sin^2(\frac{\pi}{3}-x)$：________

(3)$y=\sqrt{\sin 2x}$：________

(4)$y=\frac{1}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$：________

2-2-15　求下列函数的定义域：

(1)$y=tg(x+\frac{\pi}{3})$　(2)$y=\sqrt{1+ctgx}$　(3)$y=\frac{tg2x}{1+tgx}$

(4)$y=\sqrt{2tgx\cos x+1}$　(5)$y=\lg(ctgx-tgx)$

2-2-16　求下列函数的定义域：

(1)$y=\log_{tgx}(1-2\sin 2x)$

(2)$y=\sqrt{\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})}$

2-2-17　(1)函数$y=\cos\sqrt{x}$的定义域是______，值域是______；

(2)函数 y=*l*gsinx 的定义域是______，值域是______.

2-2-18　下列等式可能成立的是　[　　].

A. sinx+cosx+2

B．sinx-cosx=2

C．tgx·ctgx=0

D．sinx·ctgx=0

2-2-19　函数 $y=\log_{\cos(\pi/3)}\sin x$ 的值域是　　　　　[　　]．

A．[0，1]

B．R

C．[0，+∞)

D．(-∞，0]

2-2-20　求下列函数的值域：

$$(1)y=\frac{\sin x+2}{\sin x-1}\qquad (2)y=\frac{2-\cos\frac{x}{2}}{2+\cos\frac{x}{2}}，x\in[0，\pi]$$

2-2-21　求函数 y=a+bsinx(a，b 是常数，b≠0)的值域．

2-2-22 已知 $\sin x=\frac{3k+1}{1-2k}$，求 k 的取值范围．

2-2-23　关于 x 的方程 $\sin^2x-(a^2+2a)\sin x+a^3+a^2=0$ 有实数解，求实数 a 的取值范围．

2-2-24　设 sinα+cosα=k，求使 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha<0$ 成立的 k 的取值范围．

2-2-25　求下列函数的最小值：

$$(1)y=\frac{2+\cos x}{\sqrt{1+\cos x}}\qquad (2)y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x,x\in(0，\frac{\pi}{2})$$

2-2-26　求下列函数的值域：

$(1)y=\sqrt{\sin x}$

$(2)y=\sqrt{M^2+2M\sin x+1}$(M为非零常数)

2-2-27　求下列函数的最大值和最小值：

$(1)y=2\sin^2x-\cos x$

$(2)y=\sin^2x-4\sin x+5$

2-2-28　当 x 取何值时，下列函数有最大值或最小值，并求出这个最大值或最小值．

$(1)y=\operatorname{ctg}^2x-2\operatorname{ctg}x+2$

$(2)y=\cos^2x-\sqrt{3}\sin x-2$

$(3)y-\sin^2x-\sqrt{2}\cos x+2$

$(4)y=\sin^2x-2\sqrt{2}\sin x+3$

2-2-29　设 b∈R，b 是常数，试讨论函数 $y=2\sin^2x+4b^2\cos x-b^4$ 的最大值和最小值．

2-2-30 求使 $\sin x=\frac{n-2}{4}\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x\neq 0)$ 成立的一切整数 n．

2-2-31　已知 A，B，C 是△ABC 的内角，并且 cos(A-B)cos(B-C)cos(C-A)=1 试判断△ABC 的形状．

2-2-32 求函数$y=\left|\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x}\right|$**的值域.**

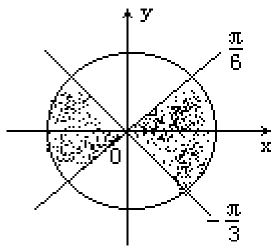
3．三角函数的性质(二)

例题

例 2-2-7　求下列函数的单调递增区间，并把它在单位圆上表示出来：

(1) $y=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$

(2) $y=\sin(\frac{\pi}{3}-x)$



解　(1)**设**$u=2x-\frac{\pi}{3}$**，则**u**是**x**的增函数，而**$y=\cos u$**在区间**$[2k\pi-\pi,2k\pi]$ $(k\in Z)$**上单调递增，故当**$2k\pi-\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi$**，即**$x\in[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}]$ $(k\in Z)$**时，函数**$y=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$**单调递增。**

故函数$y=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$**的单调递增区间是**$[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}]$ $(k\in Z)$。

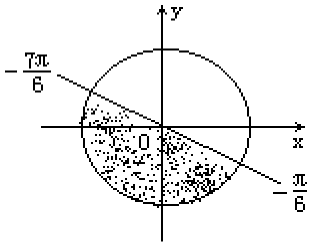
把它在单位圆上表示出来，如上图中的阴影部分。

(2)**设**$u=\frac{\pi}{3}-x$**，则**u**是**x**的减函数，而**$y=\sin u$**在区间**$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$**上单调递减，故当**

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{3}-x\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\ (k\in Z)$$

即$x\in[2k\pi-\frac{7\pi}{6},2k\pi-\frac{\pi}{6}]$ $(k\in Z)$**时，函数**$y=\sin(\frac{\pi}{3}-x)$**单调递增。**

故函数$y=\sin(\frac{\pi}{3}-x)$**的单调递增区间是**$[2k\pi-\frac{7\pi}{6},2k\pi-\frac{\pi}{6}]$ $(k\in Z)$**，把它在单位圆上表示出来即右图中的阴影部分。**



注　求复合函数 y=f(u)，u=ψ(x)的单调区间，应注意：如果 u 是ψ(x)的增函数,那么由 y=f(u)的递增(减)区间确定的 x 所在的区间是函数 y=f[ψ(x)]的单调递增(减)区间；如果 u 是 x 的减函数，那么由 y=f(u)的递增(减)区间确定的 x 所在的区间是函数 y=f[ψ(x)]的递减(增)区间。

例 2-2-8　比较下列各函数值的大小：

$\sin 1$，$\cos 1$，$\cos 2$，$\mathrm{tg}\pi$，$\sin(-\frac{9}{2}\pi)$，$\cos 6$，$\mathrm{ctg}\pi°$，$\cos 119°$

解　可转化为同名函数再利用其单调性进行比较。因为

$$\sin 1 = \cos(\frac{\pi}{2}-1)，\mathrm{tg}\pi = 0 = \cos\frac{\pi}{2}，\sin(-\frac{9}{2}\pi) = \cos\pi$$

$$\cos 6 = \cos(2\pi-6)，\cos 119° = \cos(\frac{\pi}{180}\times 119)$$

$$\mathrm{ctg}\pi° > \mathrm{ctg}45° = 1 = \cos 0$$

而$0 < 2\pi - 6 < \frac{\pi}{2} - 1 < 1 < \frac{\pi}{2} < 2 < \frac{\pi}{180}\times 119 < \pi$．又$y = \cos x$在区间[0，π]上是减函数，故

$$\cos 0 > \cos(2\pi - 6) > \cos(\frac{\pi}{2} - 1) > \cos 1$$

$$> \cos\frac{\pi}{2} > \cos 2 > \cos(\frac{\pi}{180}\times 119) > \cos\pi$$

于是，

$$\mathrm{ctg}\pi° > \cos 6 > \sin 1 > \cos 1 > \mathrm{tg}\pi$$

$$> \cos 2 > \cos 119° > \sin(-\frac{9}{2}\pi)$$

例 2-2-9　已知函数 y=f(x)的定义域是全体实数。如果 f(x+2)=-f(x)，并且当$-1\le x\le 1$时，f(x)=x，求证：

(1)函数 y=f(x)是最小正周期为 4 的周期函数；

(2)函数 y=f(x)是奇函数；

(3)当 x∈[4k-1，4k+1] (k∈Z)时，y=f(x)是增函数；当 x∈[4k+1，4k+3] (k∈Z)时，y=f(x)是减函数。

解　(1)由题设，对任意 x∈R，都有

$$f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$$

成立，所以 4 是函数 y=f(x)的一个周期。

下面进一步证明 4 是最小正周期。

用反证法。设最小正周期为 T，而 0<T<4。那么，对任意 x∈R，

f(x+T)=f(x)恒成立。于是，令 x=0，应有 f(0+T)=f(0)=0(0∈[-1，1])，从而得 f(T)=0。但是，

当 0<T≤1 时，f(T)=T≠0，与 f(T)=0 矛盾。故 T∉(0，1]；

当 0<T≤3 时，令 T′=T-2，则-1<T′≤1，T=T′+2。这时，

$$f(T)=f(T'+2)=-f(T')=-T'$$

故 T′=0，从而 T=2，这时 T=2 可能是 y=f(x)的一个周期。然而，当 x=1 时，f(x+2)=f(1+2)=-f(1)≠f(1)，即 f(x+2)=f(x)不恒成立，故 T=2 不是函数 f(x)的周期，即 T∉(1，3]。

当 3<T<4 时，令 T′=T-4，-1<T′<0，T=T′+4 这时，

$$f(T)=f(T'+4)=f(T')=T'\neq 0$$

此与 f(T)=0 矛盾，说明 T∉(3，4)。

综上所述，不存在 T∈(0，4)，使 f(x+T)=f(x)对一切 x∈R 都成立，即假设 4 不是最小正周期不成立。这就证明了函数 y=f(x)的最小正周期是 4。

(2)任取 x∈R，x 可表示为 x=2k+x′，其中-1≤x′≤1，k∈Z。于是，由 f(x+2)=f(x)及 y=f(x)的周期性可知，

$$f(x)=f(2k+x')=\begin{cases}-f(x')=-x' & (k\text{为奇数})\\ f(x')=x' & (k\text{为偶数})\end{cases}$$

注意到-1≤x′≤1，-1≤-x′≤1，又有

$$f(-x)=f(-2k-x')$$

$$=\begin{cases}-f(-2k-x'+2k)=-f(-x')=x' & (k\text{为奇数})\\ f(-2k-x'+2k)=f(-x')=-x' & (k\text{为偶数})\end{cases}$$

综合上述结果，无论 k 为奇数或偶数，对于 x∈R，总有

$$f(-x)=-f(x)$$

故 y=f(x)是奇函数。

(3)先证 y=f(x)在区间[4k-1，4k+1]（k∈Z)上是增函数。

设 $4k-1\le x_1<x_2\le 4k+1$(k∈Z)，则 x_1，x_2 可分别表示为

$$x_1=4k+x_1'，x_2=4k+x_2'，其中-1\le x_1'<x_2'\le 1$$

于是，

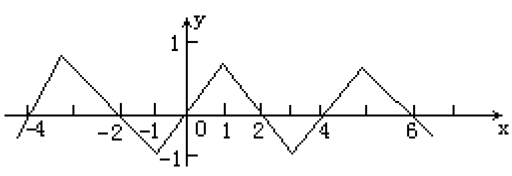
$$f(x_1)=f(4k+x_1')=f(x_1')=x_1'$$

$$f(x_2)=f(4k+x_2')=f(x_2')=x_2'$$

因为 $x_1'<x_2'$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$。即当 x∈[4k-1，4k+1](k∈Z)时，函数 y=f(x)是增函数。

同理可证，当 x∈[4k+1，4k+3]（k∈Z)时，函数 y=f(x)是减函数。

注　如果根据已知作出函数 y=f(x)的图象(如下图)，借助图象的直观，将会启发我们寻求证明途径和设计证明方法。



习题

2-2-33　观察正弦函数 y=sinx 和余弦函数 y=cosx 的图象，当 x∈______时，它们同为增函数，当 x∈______时，它们同为减函数。

2-2-34　下列一个命题：

(1)y=tgx 是增函数。

(2)y=ctgx 在它的定义域内是减函数。

(3)$y = \sin x$在区间$[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$上是增函数。

(4)$y = \sin x$和$y = \cos x$在区间$[\pi，\frac{3\pi}{2}]$上都是减函数。

其中正确的有　[　　]

A．1 个　　B．2 个

C．3 个　　D．4 个。

2-2-35　若 $\sin^2 x > \cos^2 x$，则 x 的取值范围是　[　　]

A．$2k\pi - \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4}$，$k \in Z$

B．$2k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$，$k \in Z$

C．$k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{4}$，$k \in Z$

D．$k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{3\pi}{4}$，$k \in Z$

2-2-36　已知α，$\beta \in (-\frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{2})$，且$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$，$\beta \neq \frac{\pi}{2}$．考虑下列各式：

(1) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$　　(2) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2}$

(3) $0 < \beta < \alpha < \pi$　　(4) $\frac{\pi}{2} < \beta < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

其中使 $tg\alpha < tg\beta$ 必不成立的有　[　　]

A．1 个　　B．2 个

C．3 个　　D．4 个

2-2-37　试比较 sin3，cos3，tg0.8，的大小。

2-2-38　若函数 y=cosx 在区间[a，b]上是单调递增的，则 y=cosx 在区间[-b，-a]上是单调______的。

2-2-39　求下列函数的单调递增区间：

(1) $y = -2\sin(x - \frac{\pi}{6})$　　(2) $y = \sin(-\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{4})$

2-2-40　求下列函数的最小正周期：

(1)$y = \sin\frac{2}{3}x$　　(2)$y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$

(3)$y = tg\frac{1}{2}x$　　(4)$y = ctg(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4})$

2-2-41　下列函数中以π为最小正周期的是　[　　]

A．$y = \sin\frac{1}{2}x$　　B．$tg2x$　　C．$|\sin x|$　　D．$\sin|\pi x|$

2-2-42　关于函数 $y=\sin|x|$，下列判断：

(1)它是周期函数，周期为π；

(2)它的图象关于 y 轴对称；

(3)当 x＞0 时，它是周期函数，周期为 2π；

(4)它的图象关于原点成中心对称。

其中正确的有

A．1 个　　　　B．2 个

C．3 个　　　　D．4 个

2-2-43　对于定义在实数集上的函数 $f(x)=c$(c 为常数)，下列判断中正确的一个是　　[　　]

A．它是以任意实数 T 为周期的周期函数

B．它是以任意非负实数为周期的周期函数

C．它是以任意非零实数为周期的周期函数

D．因无法确定最小正周期，所以它不是周期函数

2-2-44　已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})+1(\omega>0)$，

(1)求 f(x)的最大值 M，最小值 m 以及最小正周期 T；

(2)试求最小正整数ω，使得自变量 x 在任意两个整数间(包括整数本身)变化时，函数 f(x)至少有一个值是 M，另一个值是 m。

2-2-45　证明：(1)函数 $f(x)=\sin x\cos x$ 的最小正周期是π；

(2)若函数 $y=f(x)(x\in R)$的最小正周期是 T，则 f(kx)(k 是大于零的常

数)的最小正周期是 $\frac{T}{k}$。

2-2-46　证明：(1) $f(x)=\sin^2x$ 的最小正周期是π。

(2) $f(x)=\sin(\pi x)$的最小正周期是 2。

2-2-47　设 f(x)是定义在区间[-1，1]上的函数，并且满足

$$2f(-\sin t)+3f(\sin t)=4\sin t\cos t\quad(-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2})$$

(1)证明 f(x)是奇函数；(2)求出 f(x)的表达式。

2-2-48　已知下列函数：

(1) $f(x)=\sin x+\cos x$　　(2) $f(x)=\sin x\cos x$

(3) $f(x)=x\sin x$　　(4) $f(x)=x^2\operatorname{tg}x$

(5) $f(x)=\sin|x|$　　(6) $f(x)=\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{1+\cos x}$

(7) $f(x)=x\cos x+x^3$

其中，是奇函数的有______；是偶函数的有______；既不是奇函数也不是偶函数的有______。

第三部分　两角和与差的三角函数、解斜三角形

(一)两角和与差的三角函数

提要

这一部分的题目类型较多，难度也较大，需要掌握一些三角变换的技巧(本书的第二部分曾用到过一些)，归纳起来，常用的三角变换有：

(1)**归一变换：从角的方面讲，用倍角、半角公式化**$\frac{\alpha}{2}$，α，2α**为同一角(如α)的三角函数；从函数名称方面讲，有切弦变换，一般化切、割为弦，有时也用万能公式化弦为切。**

归一变换的目的都是化“不同”为“相同”，以减少变量个数。

(2)**降**(**升**)**幂变换：常常用倍角公式的变形**$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$**，降幂或升幂后再用代数或其他三角变换。**

(3)和(差)积变换：把和(差)化积后，可以约去分子分母的公因式或出现特殊角；把积化和(差)后常可以抵消其中某些项。

(4)“1”的变换：“1”可以充当不同角色，如

$$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin90°=\cos0°=tg45°=ctg45°=\cdots$$

(5)凑项与拆项变换：从角方面讲，如

$$\alpha+\beta=(2\alpha+\beta)-\alpha=(\alpha+2\beta)-\beta=2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\alpha=(\alpha+\beta)-\alpha$$

等；从式子方面讲，有时需要加、减、乘、除某一项才能运用公式，再减、加、除乘同一项以保持相等关系。有时需要将某些项拆成某两项的差，以便前后抵消，等等。

(6)诱导变换：用诱导公式化任意角的三角函数为锐角的三角函数，以便发现角之间的和、差、倍、半关系，或者改变函数名称以便应用某些公式。

1．两角和与差的三角函数(一)

例题

例 3-1-1　不查表，求 sin105°，cos75°，tg15°的值。

解　sin105°=sin(60°+45°)=sin60°cos45°+sin45°cos60°

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

cos75°=cos(45°+30)=cos45°cos30-sin45°sin30°

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg}15° = \text{tg}(45° - 30°) = \frac{\text{tg}45° - \text{tg}30°}{1+\text{tg}45°\,\text{tg}30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

例 3-1-2　化简 cos35°sin65°-cos55°sin25°。

解　[法一]　cos35°sin65°-cos55°sin25°

=cos35°cos25°-sin35°sin25°

$$=\cos(35°+25°)=\cos60°=\frac{1}{2}$$

[法二]　原式=cos35°sin65°-sin35°cos65°

$$=\sin(65°-35°)=\sin30°=\frac{1}{2}$$

例 3-1-3　求证 cos(n-1)αcosα-cosnα=sin(n-1)　αsinα。

解　∵　cos(n-1)　αcosα-sin(n-1)　αsinα

=cos[(n-1)　α+α]=cosnα

∴　cos(n-1)　αcosα-cosnα=sin(n-1)　αsinα

例3—1—4　(1)**已知**$\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{12}{13}$，$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，**求**$\cos\alpha$；

(2)**已知α，β均为锐角，且**$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\cos(2\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，**求**$\sin\alpha$。

解　$(1)\cos\alpha=\cos[(\alpha-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]$

$$=\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}-\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{12}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{13}\cdot\frac{1}{2}=\frac{12\sqrt{3}-5}{26}$$

(2)**因为α，β均为锐角，**$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，**所以**$\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$。

又$0°<2\alpha+\beta<270°$，**但**$\cos(2\alpha+\beta)=\frac{5}{13}>0$，**所以**$0°<$ **2α+β>90°。所以**

$$\sin(2\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(2\alpha+\beta)}=\frac{12}{13}$$

从而　sinα=sin[(2α+β)-(α+β)]

$=\sin(2\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-\cos(2\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)$

$$=\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}=\frac{36-20}{65}=\frac{16}{65}$$

例3-1-5 已知$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，求证$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$。

解 因为$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，且$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$。

因为$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，且$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以$\sin\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$。

于是，有

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{5\sqrt{50}}{50}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

又因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以$-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$。所以

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

例3-1-6 在△ABC中，已知

(1)$\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{3}{5}$，求ΔABC是直角三角形；

(2)$\cos A=\frac{8}{17}$，$\cos B=\frac{12}{13}$，求证ΔABC是钝角三角形。

解 (1)在△ABC中，$0°<A<180°$，$\cos A=\frac{4}{5}$，故$\sin A=\frac{3}{5}$。又$0°<B<180°$，$\cos B=\frac{3}{5}$，故$\sin B=\frac{4}{5}$．从而

$\cos C=\cos[180°-(A+B)]=-\cos(A+B)$

$$=-[\cos A\cos B-\sin A\sin B]=-\left[\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\right]=0$$

而$0°<C<180°$，所以$C=90°$。即△ABC是直角三角形。

(2)因$\cos A=\frac{8}{17}$，且$0°<A<180°$，所以$\sin A=\frac{15}{17}$。

又$\cos B=\frac{12}{13}$，且$0°<B<180°$，所以$\sin B=\frac{5}{13}$。

于是有

$\cos C=\cos[180°-(A+B)]=-\cos(A+B)$

$=-[\cos A\cos B-\sin A\sin B]$

$$=-\left[\frac{8}{17}\times\frac{12}{13}-\frac{15}{17}\times\frac{5}{13}\right]=-\frac{96-75}{17\times13}<0$$

而$0°<C<180°$，所以$90°<C<180°$。

故△ABC是钝角三角形。

注 (i)因为 0＜x＜π时，正弦函数 y=sinx 对于同一个大于 0 而小于 1 的函数值，对应的 x 有两个值，一般无法确定角α是锐角还是钝角；而在这个范围内，余弦函数 y=cosx 却是单值的，所以在这种情况下求角或确定角的范围时，一般应取余弦。

(ii)在以上各题的解答过程中可以看到，常常碰到已知一个角的正弦(或余弦)值，要求这个角的余弦(或正弦)值，所以如能记住一些常用勾股数是有好处的，如 3，4，5；5，12，13；8，15，17；7，24，25；9，40，41；…

例 3-1-7 化下列各式为一个角的一个三角函数的形式：

$(1) y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ $(2) y=a\sin x+b\cos x(a，b\in R)$

解 $(1)\ y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$

$$=2(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

(2)因为$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$，可以设

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$$

则$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$，于是有

y=asinx+bcosx

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x+\sin x\varphi\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

(其中φ的象限由a，b的符号决定，φ的值由$\mathrm{tg}\varphi=\frac{b}{a}$确定。)

注 将式子$a\sin x+b\cos x(a，b\in R，a，b\neq 0)$化为$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$后，很容易确定周期、最大值、最小值，并便于作出图象。

习题

3-1-1 不查表求 sin15°，cos105°，sin75°的值。

3-1-2 已知$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，又α是第三象限的角，试求$\cos(\alpha-\frac{\pi}{3}$，$\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$，$\mathrm{tg}(\alpha+\frac{\pi}{6})$，的值。

3-1-3 已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，α，β都是第二象限的角，求下列各三角函数值：

(1)sin(α+β) (2)cos(α-β) (3)tg(α+β)

3-1-4 已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$，$\sin\gamma=\frac{15}{17}$，并且α，β，γ都是锐角。求 sin(α+β+γ)，cos(α-β+γ)的值。

3-1-5　化简下列各式：

(1) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$

(3) $\cos(43°+x)\cos(47°-x)-\sin(43°+x)\sin(47°-x)$

(4) $\sin(80°+\alpha)\cos(20°+\alpha)-\cos(80°+\alpha)\sin(20°+\alpha)$

3-1-6　求下列各式的值：

(1) $\cos20°\cos40°-\sin20°\sin40°$

(2) $\sin14°\cos16°+\sin76°\cos74°$

(3) $\sin73°\cos28°-\sin28°\sin17°$

(4) $\sin155°\cos35°+\cos25°\sin145°$

3-1-7　在△ABC 中，已知

(1) $\cos A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{40}{41}$，求 $\sin C$；

(2) $\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{40}{41}$，求 $\sin C$。

3-1-8　(1) 已知 $tg\alpha=-\frac{4}{3}$，α 是第二象限角，则

$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=$______

(2) 若 $tg(\alpha+\beta)=\frac{2}{5}$，$tg(\beta-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$，则 $tg(\alpha+\frac{\pi}{4})=$______；

(3) 若 $\frac{1+tg\theta}{1-tg\theta}=3+2\sqrt{2}$，则 $ctg(\theta+\frac{\pi}{4})=$______。

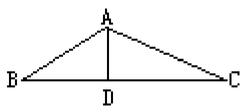
3-1-9　使等式 $\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{1}{2}$ 成立的一组 x，y 的值是[　　]

A. $\begin{cases}x=50°\\y=10°\end{cases}$　B. $\begin{cases}x=50°\\y=-10°\end{cases}$　C. $\begin{cases}x=50°\\y=20°\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=50°\\y=-20°\end{cases}$

3-1-10　求证 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$。

3-1-11　用两角和(差)的公式证明：“$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$，$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ 的三角函数值等于 α 的原函数的余函数值，前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号。”

3-1-12　如图，在△ABC 中，AD⊥BC，AD：BD：DC=1：2：3，求∠BAC 的度数。



3-1-13　已知 tgx=2，tgy=3，x，y 都是锐角，求 x+y。

3-1-14　已知 α，β，γ 都是锐角，并且 $tg\alpha=\frac{1}{2}$，$tg\beta=\frac{1}{5}$，$tg\gamma=\frac{1}{8}$，求证 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$。

3-1-15　求适合下列各式的角 x：

(1) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$

(2) $\cos(x+\frac{\pi}{6})+\cos(x-\frac{\pi}{6})=\frac{3}{2}$

(3) $\cos(x+\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{\pi}{3}-x)=1$

3-1-16 已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且$\alpha$，$\beta$都是锐角，求证

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

3-1-17 已知$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，α是锐角，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{12}{13}$，则$\beta$一定是 [ ]

A．第一象限角 B．第一或第二象限角

C．第二象限角 D．第一或第二或第三象限角

3-1-18 已知$3\sin\alpha+5\cos\beta=5$，$3\cos\alpha+5\sin\beta=2\sqrt{6}$，求$\alpha+\beta$的值。

3-1-19 已知$0<\beta<\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\sin(\frac{\alpha}{2}-\beta)=\frac{2}{3}$，$\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})=-\frac{1}{9}$，求$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$的值。

3-1-20 化下列函数为一个角的三角函数的形式：

(1) y=cosx-sinx (2)y=5sinx+12cosx

3-1-21 (1)化函数$y=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x$为一个角的三角函数，其结果可以是______；它的最大值是______；最小值是______；最小正周期是______；单调递增区间是______。

(2)化函数 y=4sinx-3cosx 为一个角的一个三角函数，其结果可以是______；它的最大值是______；最小正周期是______。

3-1-22 当$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$的 [ ]

A．最大值是 1，最小值是-1

B．最大值是1，最小值是$-\frac{1}{2}$

C．最大值是 2，最小值是-2

D．最大值是 2，最小值是-1

3-1-23 化简：

(1) $\frac{\cos 15°}{\sin 15°+\sqrt{3}\cos 15°}$ (2) $\frac{1-tg15°}{1+tg15°}$

3-1-24 已知 sinα=ksin(α+2β)(k≠1)，求证：

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{1+k}{1-k}tg\beta$$

2．两角和与差的三角函数(二)

例题

例 3-1-8　求证 $tg10°tg20°+tg60°tg20°+tg10°tg60°=1$。

解　由公式 $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$ 得

应用上面这个变形的公式得

左边 $=tg10°tg20°+tg60°(tg20°+tg10°)$

$=tg10°tg10°+\sqrt{3}tg(10°+20°)(1-tg10°tg20°)$

$=tg10°tg20°+1-tg10°tg20°=1=$ 右边

所以，原等式成立。

例 3-1-9　已知 $tg\alpha$，$tg\beta$ 是方程 $7x^2-8x+1=0$ 的两根，求 $tg(\alpha+\beta)$ 的值。

解　因为 $tg\alpha$，$tg\beta$ 是方程 $7x^2-8x+1=0$ 的两根，由韦达定理知

$tg\alpha+tg\beta=\dfrac{8}{7}$，$tg\alpha\cdot tg\beta=\dfrac{1}{7}$

所以　$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{\frac{8}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{8}{7-1}=\frac{4}{3}$$

例 3-1-10　求证

$$tg\alpha tg2\alpha+tg2\alpha tg3\alpha+\cdots+tg(n-1)\alpha tgn\alpha=\frac{tgn\alpha}{tg\alpha}-n(n\in Z)$$

解　[法一]　(数学归纳法)

当 $n=1$ 时，

左边 $=tg(1-1)\alpha tg\alpha=tg0tg\alpha=0$，右边 $=\dfrac{tg\alpha}{tg\alpha}-1=0$

所以当 $n=1$ 时，等式成立。

假设 $n=k(k\in N)$ 时等式成立，即

$$tg\alpha tg2\alpha+tg2\alpha tg3\alpha+\cdots+tg(k-1)\alpha tgk\alpha=\frac{tgk\alpha}{tg\alpha}-k$$

则当 $n=k+1$ 时，

左边 $=tg\alpha tg2\alpha+tg2\alpha tg3\alpha+\cdots+tg(k-1)\alpha tgk\alpha+tgk\alpha tg(k+1)\alpha$

$$=\frac{tgk\alpha}{tg\alpha}-k+tgk\alpha tg(k+1)\alpha$$

$$=\frac{tgk\alpha}{tg\alpha}-k+\frac{tg(k+1)\alpha-tgk\alpha}{tg[(k+1)\alpha-k\alpha]}-1$$

$$=\frac{tgk\alpha}{tg\alpha}+\frac{tg(k+1)\alpha-tgk\alpha}{tg\alpha}-(k+1)$$

$$=\frac{tgk\alpha+tg(k+1)\alpha-tgk\alpha}{tg\alpha}-(k+1)=\frac{tg(k+1)\alpha}{tg\alpha}-(k+1)$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立。

由上述可知，对于任意自然数 n，等式都成立。

[法二] （拆项法）

由正切的差角公式，得$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}(2\alpha-\alpha)=\dfrac{\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}2\alpha\mathrm{tg}\alpha}$，即

$$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}2\alpha=\frac{\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}-1$$

同理 $\mathrm{tg}2\alpha\mathrm{tg}3\alpha=\dfrac{\mathrm{tg}3\alpha-\mathrm{tg}2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}-1$

……

$$\mathrm{tg}(n-1)\alpha\mathrm{tgn}\alpha=\frac{\mathrm{tgn}\alpha-\mathrm{tg}(n-1)\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}-1$$

以上 n-1 个等式左右两边分别相加，得

$$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}2\alpha+\mathrm{tg}2\alpha\mathrm{tg}3\alpha+\cdots+\mathrm{tg}(n-1)\alpha\mathrm{tgn}\alpha$$

$$=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}[-\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}2\alpha+\mathrm{tg}3\alpha+\cdots-\mathrm{tg}(n-1)\alpha+\mathrm{tgn}\alpha]-(n-1)$$

$$=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}(-\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tgn}\alpha)-(n-1)$$

$$=-1+\frac{\mathrm{tgn}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}-n+1=\frac{\mathrm{tgn}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}-n$$

即原等式成立。

例 3-1-11 (1) 求证$\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$；

(2)已知$0<\alpha<\pi$，求证$\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{8}-\mathrm{ctg}\alpha>3$。

解 (1) $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$

$$=\frac{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

所以，原等式成立。

(2) $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{8}-\mathrm{ctg}\alpha$

$$=(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{8}-\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{4})+(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{4}-\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2})+(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{ctg}\alpha)$$

$$=\frac{\sin(\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{8})}{\sin\frac{\alpha}{8}\sin\frac{\alpha}{4}}+\frac{\sin(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4})}{\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\sin(\alpha-\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{8}}+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

因为$0<\alpha<\pi$，$\sin\dfrac{\alpha}{8}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\sin\alpha$均为大于0而小于或等于1

的正数，且不同时为1，所以$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{8}}+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\alpha}>1+1+1=3$，从而

$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{8}-\mathrm{ctg}\alpha>3$

习题

3-1-25 求证：

(1)$\mathrm{tg}15°+\mathrm{tg}30°+\mathrm{tg}15°\mathrm{tg}30°=1$

(2)$1+\mathrm{tg}65°+\mathrm{tg}70°=\mathrm{tg}65°\mathrm{tg}70°$

3-1-26 求证$\mathrm{tg}10°\mathrm{tg}20°+\mathrm{tg}20°\mathrm{tg}30°=\frac{\mathrm{tg}30°}{\mathrm{tg}10°}-3$。

3-1-27 在△ABC中，求证$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C$。

3-1-28 求证$\sin50°(1+\sqrt{3}\mathrm{tg}10°)=1$。

3-1-29 (1)已知$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{tg}\beta$是关于x的二次方程

$x^2+ax+a+1=0$

的两根，求证：

$\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$

(2)已知$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{tg}\beta$是关于x的二次方程

$ax^2+(2a-3)x+(a-2)=0$

的两根，求证：

$4\sin(\alpha+\beta)\geq-3\cos(\alpha+\beta)$

3-1-30 已知A，B，C是△ABC的三个内角，且关于x的方程的两根之积是两根之和的2倍。求证△ABC是等腰三角形。

3-1-31 已知$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，求证$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\beta+2\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$。

3-1-32 已知$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，求证$0<\frac{\sin(\alpha+\beta)-4\sin\alpha+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-4\cos\alpha+\cos(\alpha-\beta)}<1$。

3-1-33 已知$\frac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)}{\mathrm{tg}\alpha}+\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1$，求证$\mathrm{tg}^2\gamma=\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$。

3-1-34 已知$\sin(\alpha+\beta)=k\sin\alpha(k\neq0，\cos\beta\neq\frac{1}{k})$，求证

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\mathrm{ctg}\beta-\frac{1}{k\sin\beta}$$

3-1-35 已知$\mathrm{tg}A=a+1$，$\mathrm{tg}B=a-1$，求证$2\mathrm{ctg}(A-B)=a^2$。

3-1-36 已知α，β满足$\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，并且$\alpha$，$\beta$都是锐角，求$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$的值。

3-1-37 (1) 求证$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$；

(2) 求证$\frac{\cos(\alpha+2\beta)}{\sin\beta}+2\sin(\alpha+\beta)=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$。

3-1-38 已知$a\mathrm{tg}\alpha=b\mathrm{tg}\beta$，$a^2x^2=a^2-b^2$，求证：

$$(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)=1-x^2$$

3-1-39　已知$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\alpha\sin\beta}{1-\alpha\cos\beta}$**，**$\mathrm{tg}\beta=\dfrac{b\sin\alpha}{1-b\cos\alpha}$**，求证**$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{a}$**。**

3-1-40　(1)已知 $a\sin(\theta+\alpha)=b\sin(\theta+\beta)$，求证

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{b\sin\beta-a\sin\alpha}{a\cos\alpha-b\cos\beta}$$

(2)已知 $a\cos(\alpha+x)=b\cos(\beta+x)$，求证

$$\mathrm{tg}x=\frac{a\cos\alpha-b\cos\beta}{a\sin\alpha-b\sin\beta}$$

3．二倍角的正弦、余弦、正切

例题

例 3-1-12　函数$y=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1$**的振幅是______；最小正周期是______；最小值是______；单调递减区间是______。**

解　$y=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1=1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-1$

$$=2(\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$$

可知，振幅是 2，最小正周期是π，最小值是-2，单调递减区间是

$$[k\pi+\frac{\pi}{6}，k\pi+\frac{2\pi}{3}]\quad (k\in Z)$$

例 3-1-13　不查表求 sin10°sin30°sin50°sin70°的值。

解　原式$=\frac{1}{2}\cos 20°\cos 40°\cos 80°$

$$=\frac{1}{4\sin 20°}2\sin 20°\cos 20°\cos 40°\cdot\cos 80°$$

$$=\frac{1}{4\sin 20°}\cdot\sin 40°\cos 40°\cos 80°$$

$$=\frac{1}{8\sin 20°}\sin 80°\cos 80°$$

$$=\frac{1}{16\sin 20°}\cdot\sin 160°=\frac{1}{16\sin 20°}\cdot\sin 20°=\frac{1}{16}$$

注　乘积前乘以一个 2sin20°后,就能连续使用二倍角的正弦公式。

例 3-1-14　求证$\frac{1+\sin 2\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$。

解　左边$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$$

可见，左边等于右边，故原等式成立。

例 3-1-15　已知$2tg\alpha-3tg\beta=0$，**求证**$tg(\alpha+\beta)=\frac{5\sin 2\beta}{5\cos 2\beta-1}$。

解　由$2tg\alpha-3tg\beta=0$**得**$tg\alpha=\frac{3}{2}tg\beta$，**所以**

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{3}{2}\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta}{1-\frac{3}{2}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\beta}=\frac{5\operatorname{tg}\beta}{2-3\operatorname{tg}^2\beta}$$

$$=\frac{5\sin\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta-3\sin^2\beta}=\frac{5\sin2\beta}{4\cos^2\beta-4\sin^2\beta-2\sin^2\beta}$$

$$=\frac{5\sin2\beta}{4\cos2\beta-(1-\cos2\beta)}=\frac{5\sin2\beta}{5\cos2\beta-1}$$

注　注意到等式右边是关于β的三角函数，因此，应利用已知条件2tgα-3tgβ=0把角都“归一”为惟一的角β。

例3-1-16　tgα，tgβ是关于x的方程$x^2+4ax+3a+1=0(a>1)$的两根，α，$\beta\in(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$**，求**$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$。

解　由韦达定理可得

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-4a\\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=3a+1\end{cases}\Rightarrow\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{-4a}{1-3a-1}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{4}{3}\Rightarrow2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}+3\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}-2=0$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=-2\text{或}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$$

另一方面，

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-4a<0\\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=3a+1>0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha<0\\ \operatorname{tg}\beta<0\end{cases}\\ \alpha，\beta\in(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\alpha，\beta\in(-\frac{\pi}{2}，0)\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{2}\in(-\frac{\pi}{2}，0)\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}<0$$

因此，$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$**应舍去。所以**$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=-2$。

习题

3-1-41　$\sqrt{1+\sin190^\circ}=$ ______　　[　　]

A. sin95°+cos95°　　B. -sin95°-cos95°

C. sin95°-cos95°　　D. cos95°-sin95°

3-1-42　$(\sin^4 7°30'-\cos^4 7°30')(\sin23°\cos8°-\sin67°\sin8°)=$______　　[　　]

A. -1　B. $-\frac{1}{4}$　C. $\frac{1}{4}$　D. 1

3-1-43　已知$\operatorname{tg}\theta=2$**，则**$\frac{\sin2\theta-\cos2\theta}{1+\cos^2\theta}=$ ______　　[　　]

A. $-\frac{1}{6}$　B. $\frac{1}{6}$　C. $\frac{7}{6}$　D. $\frac{3}{2}$

3-1-44　已知$\mathrm{tg}(45°+\alpha)=3+2\sqrt{2}$**，则**$\sin 2\alpha=$______　[　]

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　D. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

因此$y=\arccos(3x+2)$**的反函数为**$y=\frac{\cos x-2}{3}$**。此反函数的定义域为**$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$**，值域为**$[-\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}-4}{6}]$**。**

3-1-48　求 tg9°-tg27°-tg63°+tg81°的值。

3-1-49　已知$0<\beta<\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\sin(\frac{\alpha}{2}-\beta)=\frac{2}{3}$，$\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})=-\frac{1}{9}$，**求** $\cos(\alpha+\beta)$**。**

3-1-50　已知$\mathrm{tg}A=\frac{\sqrt{6}}{12}$**，**$\mathrm{tg}B=\frac{1}{3}$**，求证** $\cos^2 A=\sin 4B$**。**

3-1-51　已知$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{7}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$**，且**$\alpha$**，**$\beta$**都是锐角，求证** $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$

3-1-52　求证下列各式：

(1) $\mathrm{tg}\alpha+\sec\alpha=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

(2) $\frac{1}{4}\left(\mathrm{ctg}\frac{A}{2}-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\right)\frac{1+\mathrm{tg}^2 A}{\sin 2A}=\csc^2 2A$

(3) $\frac{1+\sin\alpha}{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$

(4) $\frac{2\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}-\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$

3-1-53　求证

(1) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{tg}\frac{x}{4}=\frac{1}{4}\mathrm{ctg}\frac{x}{4}-\mathrm{ctg}x$

(2) $\mathrm{tg}A+2\mathrm{tg}2A+4\mathrm{tg}4A=\mathrm{tg}A-8\mathrm{ctg}8A$

3-1-54　求证$\frac{1+\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{1+\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha$**。**

3-1-55　求证$\frac{1-\cos^2 2\theta-16\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2 2\theta+4\sin^2\theta-4}=\mathrm{tg}^4\theta$**。**

3-1-56　求证 $2^{n+1}\sin x\cos x\cos 2x\cdot\cdots\cdot\cos 2^n x=\sin 2^{n+1}x$**。**

4．半角的正弦、余弦、正切

例题

例 3-1-17 已知 tgα=-0.75。

(1)如果$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$；

(2)如果α是第二象限角，求$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$。

解 由已知，无论“$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$”还是“α是第二象限角”，都有$\cos\alpha<0$，且

$$\sec^2\alpha=1+\mathrm{tg}^2\alpha=1+0.75^2=\frac{25}{16}，\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=-\frac{4}{5}$$

(1)$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\frac{\alpha}{2}>0$，且$\cos\frac{\alpha}{2}>0$

所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+(-\frac{4}{5})}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

(2)α是第二象限角$\Rightarrow 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi(k\in Z)$

$\Rightarrow k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)\Rightarrow$ α是第一或第三象限的角

所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+(-\frac{4}{5})}{2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$$

例 3-1-18 已知$\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta=-4$，θ是第四象限的角，求$\sin\theta$的值。

解 $\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\sin2\theta}$

又已知$\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta=-4$，故$\frac{2}{\sin2\theta}=-4$，从而

$$\sin2\theta=-\frac{1}{2}，\cos2\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因θ是第四象限角，则2θ是第三或第四象限角。

当$\cos2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\sin\theta=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$；

当$\cos2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\sin\theta=-\sqrt{\frac{1-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$。

例 3-1-19 求证：

$$\frac{1}{\sin(x-y)\sin(x-z)}+\frac{1}{\sin(y-x)\sin(y-z)}+\frac{1}{\sin(z-x)\sin(z-y)}$$
$$=\frac{1}{2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{y-z}{2}\cos\frac{z-x}{2}}$$

解　设α**=x-y，**$\beta=y-z$**，**$\gamma=z-x$**，则有**$\alpha+\beta+\gamma=0$**。故**

$$\sin\gamma=-\sin(\alpha+\beta)，\quad \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\sin\frac{\gamma}{2}$$

从而

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2})$$
$$=-4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

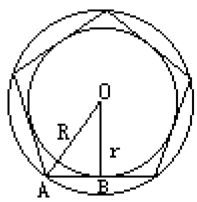
两边同除以$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$**，得**

$$\frac{1}{\sin\gamma\sin\beta}+\frac{1}{\sin\alpha\sin\gamma}+\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}=-\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

此即

$$\frac{1}{\sin(x-y)\sin(x-z)}+\frac{1}{\sin(y-x)\sin(y-z)}+\frac{1}{\sin(z-y)(z-x)}$$
$$=\frac{1}{2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{y-z}{2}\cos\frac{z-x}{2}}$$

例 3-1-20　已知正五边形的边长是 a，它的外接圆和内切圆的半径分别为R，r**。求证**$R+r=\frac{a}{2}\text{ctg}\frac{\pi}{10}$**。**



解　在 Rt△OAB 中，OA 是正五边形的外接圆之半径，OA=R；OB**是正五边形的边心距即内切圆半径，**$OB=r$**；**$\angle OBA=\frac{\pi}{2}$**，**$\angle AOB=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$**，**$AB=\frac{a}{2}$**。所以**

$$R=\frac{\frac{a}{2}}{\sin\frac{\pi}{5}}，\quad r=\frac{a}{2}\text{ctg}\frac{\pi}{5}$$

从而

$$R+r=\frac{a}{2}[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}]=\frac{a}{2}\frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$$

习　题

3-1-57　已知$\sin\theta=-\frac{4}{5}$**，**θ**是第四象限的角，则**$\sin(\frac{\theta}{2})=$

[　　]

A．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　　B．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$

C．$\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　D．$\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3-1-58　若$\pi<\alpha<2\pi$**，**$\cos\alpha=a$**，则**$\cos\frac{\alpha}{2}=$

[　　]

A．$\pm\sqrt{\frac{1+a}{2}}$　　　B．$\pm\sqrt{\frac{1-a}{2}}$

C．$\sqrt{\frac{1-a}{2}}$　　　D．$-\sqrt{\frac{1+a}{2}}$

3-1-59　已知$\sin10°=a$**，则**$\sqrt{\frac{1+\cos340°}{2}}=$

[　　]

A．a　　　B．-a

C．$\sqrt{1-a^2}$　　　D．$-\sqrt{1-a^2}$

3-1-60　若$\sqrt{1+\cos\theta}=-\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$**，**$\theta$**是第二象限的角，则**$\frac{\theta}{2}$**是**

[　　]

A．第一或第三象限的角　　　B．第一象限的角

C．第二象限的角　　　D．第三象限的角

3-1-61　若$\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}=8+2\sqrt{15}$**，**$2\theta$**是第二象限的角，则**$\operatorname{tg}\theta=$

[　　]

A．$\pm(\sqrt{5}+\sqrt{3})$　　　B．$-(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

C．$\sqrt{5}+\sqrt{3}$　　　D．$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

3-1-62　$\sin\frac{35\pi}{12}$**的值是______；**$\cos\frac{5\pi}{8}$**的值是______；**$\operatorname{tg}\frac{23\pi}{8}$**的值是______。**

3-1-63　求证下列各式：

(1)$2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$　　　(2)$2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta$

(3)$2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=1+\sin\theta$　　　(4)$2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})=1-\sin\theta$

3-1-64

(1)已知$\cos\alpha=\frac{1}{5}$，$\alpha\in(\frac{3\pi}{2}，2\pi)$，求$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$。

(2)已知$\sin\alpha=0.6$，$\alpha\in(0，\pi)$，求$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$。

3-1-65 (1)已知$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2\alpha}}$；

(2)已知$-\frac{5\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\alpha}}$。

3-1-66 求

$$\frac{1-\cos78°}{2\sin39°}-\frac{1+\mathrm{tg}10°\mathrm{tg}25°}{\mathrm{tg}10°-\mathrm{tg}25°}+\frac{1+\cos258°}{2\cos129°}+\frac{1+\mathrm{ctg}^2105°}{\csc105°\sec105°}$$

的值。

3-1-67 求证$\frac{1}{1+\sin15°-\cos15°}=\frac{1}{\sin30°}+\frac{1}{\sin45°}$。

3-1-68 求证$2\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos^2\theta\cos^2\varphi=1+\cos2\theta\cos2\varphi$。

3-1-69 求证$\cos^4 22.5°+\cos^4 67.5°+\cos^4 112.5°+\cos^4 157.5°=\frac{3}{2}$。

3-1-70 已知α是第二象限角，$\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$，求$\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}$的值。

3-1-71 已知α是第二象限角，$\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，求$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$的值。

5．积化和差与和差化积

例　题

例 3-1-21　把下列各式化为和或差的形式：

(1)$2\cos(\alpha-45°)\sin(\alpha+45°)$　　　　(2) $\sin\alpha\cos^3\alpha$

解　(1) $2\cos(\alpha-45°)\sin(\alpha+45°)$

$$=\sin[(\alpha-45°)+(\alpha+45°)]-\sin[(\alpha-45°)-(\alpha+45°)]$$

$$=\sin 2\alpha+\sin 90°=\sin 2\alpha+1$$

(2) $$\sin\alpha\cos^3\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{8}\sin 4\alpha$$

例 3-1-22　把下列各式化为积的形式：

(1)$1-\sin\alpha-\cos\alpha$　　　　(2)$1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta$

解　(1) $$1-\sin\alpha-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2})$$

$$=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4})$$

(2)$$1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta=1+\sqrt{3}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)$$

$$=2\sec\theta\sin\theta(\theta+\frac{\pi}{6})$$

例 3-1-23　求值：sec50°+tg10°。

解　$$\sec 50°+\operatorname{tg}10°=\frac{1}{\cos 50°}+\frac{\sin 10°}{\cos 10°}$$

$$=\frac{1}{\sin 40°}+\frac{\sin 10°}{\sin 80°}$$

$$=\frac{2\cos 40°+\cos 80°}{\sin 80°}$$

$$=\frac{\cos 40°+2\cos 60°\cos 20°}{\sin 80°}$$

$$=\frac{2\cos 30°\cos 10°}{\sin 80°}=\sqrt{3}$$

例 3-1-24　求值：tg9°-tg27°-tg63°+tg81°。

解　原式 $=(\operatorname{tg}9°+\operatorname{tg}81°)-(\operatorname{tg}27°+\operatorname{tg}63°)$

$$=(\frac{\sin 9°}{\cos 9°}+\frac{\sin 81°}{\cos 81°})-(\frac{\sin 27°}{\cos 27°}+\frac{\sin 63°}{\cos 63°})$$

$$=\frac{1}{\cos 9^\circ\cos 81^\circ}-\frac{1}{\cos 27^\circ\cos 63^\circ}=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}$$

$$=\frac{2(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=\frac{4\cos 36^\circ\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}=4$$

例 3-1-25　求值：sin6°sin42°sin66°sin78°。

解

[法一]　sin6°sin42°sin66°sin78°

$$=\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 72^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos 36^\circ-\cos 120^\circ)$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}-\cos 72^\circ)(\frac{1}{2}+\cos 36^\circ)$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}[\frac{1}{2}(\cos 36^\circ-\cos 72^\circ)-\cos 36^\circ\cos 72^\circ]$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}(\sin 54^\circ\sin 18^\circ-\cos 36^\circ\cos 72^\circ)$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}(\sin 54^\circ\sin 18^\circ-\sin 54^\circ\sin 18^\circ)=\frac{1}{16}$$

[法二]　sin6°sin42°sin66°sin78°

$$=\frac{2\sin 6^\circ\cos 6^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ}{2\cos 6^\circ}$$

$$=\frac{\sin 12^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ}{2\cos 6^\circ}$$

$$=\frac{\sin 24^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ}{4\cos 6^\circ}$$

$$=\frac{\sin 48^\circ\cos 48^\circ}{8\cos 6^\circ}=\frac{\sin 96^\circ}{16\cos 6^\circ}=\frac{1}{16}$$

例 3-1-26　求证 $\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\mathrm{tg}(A+B)$。

解　左式 $=\frac{(1-\cos 2A)-(1-\cos 2B)}{\sin 2A-\sin 2B}=\frac{\cos 2B-\cos 2A}{\sin 2A-\sin 2B}$

$$=\frac{2\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\cos(A+B)\sin(A-B)}=\mathrm{tg}(A+B)$$

例 3-1-27　求证 $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$。

解　$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

$$=\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{-\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}=-\frac{1}{2}$$

注　积化和差、和差化积两套公式的运用灵活性较大。既要注意公式的正确选择，又要认真考虑项与项之间的适当组合。

例 3-1-28　在△ABC 中，求证：

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2\cos A\cos B\cos C+2$$

解　因为 A+B+C=180°，所以 C=180°-(A+B)。于是，

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$$

$$=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)-\frac{1}{2}\cos 2C$$

$$=\frac{3}{2}-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2(A+B)+\frac{1}{2}$$

$$=2-\cos(A+B)[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

$$=2\cos A\cos B\cos C+2$$

例 3-1-29　在△ABC 中，若 cos3A+cos3B+cos3C=1，则△ABC 中必有一个内角为 120°。

解　因为 A+B+C=180°，所以 C=180°-(A+B)。于是，

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2}-2\cos^2\frac{3(A+B)}{2}+1=1$$

$$\Rightarrow \sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}=0$$

因此，$\sin\frac{3A}{2}$，$\sin\frac{3B}{2}$，$\sin\frac{3C}{2}$**中必有一个为**0。**不妨设**$\sin\frac{3A}{2}=0$，**则**$A=120$°。

所以△ABC 中必有一个内角为 120°。

例 3-1-30　设 A，B，C 是三角形的三个内角，求证

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

解　令$S=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，**则**

$$S=\frac{1}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 2S=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}+2S=0$$

上式是关于$\sin\frac{C}{2}$**的二次方程，而**$\sin\frac{C}{2}$**为实数，因此其判别式应大于或等于**0**，即有**

$$\cos^2\frac{A-B}{2}-8S\geq 0\Rightarrow 8S\leq\cos^2\frac{A-B}{2}\leq 1\Rightarrow S\leq\frac{1}{8}$$

此即 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$

例 3-1-31 求证：

$$\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-2\cos\alpha\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$$

的值与θ**无关。**

解 $\cos^2\theta+\cos^2(\alpha+\theta)-2\cos\alpha\cos\theta\cos(\alpha+\theta)$

$$=\cos^2\theta+\cos(\alpha+\theta)[\cos(\alpha+\theta)-2\cos\alpha\cos\theta]$$

$$=\cos^2\theta+\cos(\alpha+\theta)[-\cos(\alpha-\theta)]$$

$$=\cos^2\theta-\cos(\alpha+\theta)\cos(\alpha-\theta)$$

$$=\cos^2\theta-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\theta)$$

$$=\cos^2\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha$$

最后的式子中不含θ**，故已知表达式的值与**θ**无关。**

例 3-1-32 求函数

$$y=4\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sin(x+\frac{\pi}{4})\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

在闭区间$[0,\frac{\pi}{2}]$**上的最大值和最小值。**

解 $y=4\sqrt{2}\sin x\cos x-2\sin(x+\frac{\pi}{4})\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$$=2\sqrt{2}\sin 2x+\cos 2x=3(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin 2x+\frac{1}{3}\cos 2x)$$

$=3\sin(2x+\theta)$(**其中**$\mathrm{tg}\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$**，**$\theta$**为锐角。**)

由$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$**，**θ**为锐角得**

$$\theta\leq 2x+\theta\leq\pi+\theta$$

因此，当$2x+\theta=\frac{\pi}{2}$**时，函数**y**取得最大值**3**。**

下面讨论函数 y 的最小值：

(i)**若**$2x+\theta\in[\theta,\frac{\pi}{2}]$**，函数**$y=3\sin(2x+\theta)$**是增函数，所以当**$2x+\theta=\theta$**，即**$x=0$**时，函数**y**有最小值**$y_{min}=3\sin\theta=1$**；**

(ii)若$2x+\theta\in[\frac{\pi}{2}，\pi+\theta]$，函数$y=3\sin(2x+\theta)$是减函数，所以当$2x+\theta=\pi+\theta$，即$x=\frac{\pi}{2}$时，函数y有最小值

$$y_{min}=3\sin(\pi+\theta)=-3\sin\theta=-1$$

综上所述，函数y在闭区间$[0，\frac{\pi}{2}]$上的最大值是3，最小值是-1。

习　题

3-1-72　$2\sin 37°30'\sin 7°30'=$　[　]

A．$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$　B．$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

C．$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}$　D．$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

3-1-73　下列各式中，正确的是　[　]

A．$\sin\alpha\cos\beta=2(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha-\beta}{2})$

B．$\cos\alpha\sin\beta=2[\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

C．$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

D．$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

3-1-74　设α，β为锐角，则$\sin(\alpha+\beta)$与$\sin\alpha+\sin\beta$的值满足不等式　[　]

A．$\sin(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$

B．$\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$

C．$\sin(\alpha+\beta)\geq\sin\alpha+\sin\beta$

D．$\sin(\alpha+\beta)\leq\sin\alpha+\sin\beta$

3-1-75　$\cos 36°-\cos 72°=$　[　]

A．$\frac{1}{3}$　B．$\frac{1}{2}$

C．$3-\sqrt{6}$　D．$2\sqrt{3}-3$

3-1-76　函数$y=\sin x\sin(x-\frac{\pi}{4})$的最小值是

[　]

A．$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$　B．$-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

C．$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$　D．$\frac{\sqrt{2}-2}{4}$

3-1-77　$\cos^2 75°+\cos^2 15°+\cos 75°\cos 15°=$　[　]

A．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$

C．$\frac{5}{4}$　　D．$1+\frac{\sqrt{3}}{4}$

3-1-78 $\sin\frac{\pi}{14}-\sin\frac{3\pi}{14}+\sin\frac{5\pi}{14}=$

[　　]

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{4}$

C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

3-1-79 若$\sin x+\sin y=\frac{2}{3}$**，则**$\cos x+\cos y$**的取值范围是**

[　　]

A．$[-\frac{1}{3}，\frac{1}{3}]$　　B．$[-\frac{2}{3}，\frac{2}{3}]$

C．$[-\frac{4\sqrt{2}}{3}，\frac{4\sqrt{2}}{3}]$　　D．[-2，2]

3-1-80 函数$y=\cos^2(x-\frac{\pi}{12})+\sin^2(x+\frac{\pi}{12})-1$**是**

[　　]

A．最小正周期为π的奇函数
B．最小正周期为π的偶函数
C．最小正周期为2π的奇函数
D．最小正周期为2π的偶函数

3-1-81 若$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$**，且**$\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{1}{3}$**，则**$\cos(\alpha+\beta)=$

[　　]

A．$\frac{59}{72}$　　B．$\frac{61}{84}$

C．$\frac{13}{36}$　　D．$\frac{29}{36}$

3-1-82 $\frac{\sin 7°+\cos 15°\sin 8°}{\cos 7°-\sin 15°\sin 8°}=$

[　　]

A．$2+\sqrt{3}$　　B．$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

C．$2-\sqrt{3}$　　D．$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

3-1-83 函数 $y=\cos 4x\cos 2x-\cos^2 3x$ 的值域是　　[　　]

A．[-1，1]　　B．[-1，0]

C．[0，1]　　D．[-2，0]

3-1-84 函数 $y=2\sin x(\sin x+\cos x)$ 的单调减区间是　　[　　]

A．$[k\pi-\frac{\pi}{8}，k\pi+\frac{3\pi}{8}](k\in Z)$

B．$[k\pi+\frac{3\pi}{8}，k\pi+\frac{7\pi}{8}](k\in Z)$

C．$[2k\pi-\frac{\pi}{8}，2k\pi+\frac{7\pi}{8}](k\in Z)$

D．$[2k\pi+\frac{7\pi}{8}，2k\pi+\frac{15\pi}{8}](k\in Z)$

3-1-85　函数 f(x)=3sin(x+20°)+5sin(x+80°)的最大值是　[　]

A．6.5　　B．5.5

C．7　　D．8

3-1-86　已知α∈(0，π)，并且函数

$$f(x)=\cos^2 x+\cos^2(x+\alpha)+\cos^2(x+2\alpha)$$

的图象是一条直线，则常数α=　[　]

A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$

C．$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}$

3-1-87　2cos42°cos18°-sin114°=______

3-1-88　$\sin^2 5°+\cos35°\cos25°$=______

3-1-89　化简：cos2αcosα-sin5αsin2α-cos4αcos3α=______

3-1-90　如果方程 sinx+cosx=a 在区间[0，π]上有两个不同的解，则 a 的取值范围是______。

3-1-91　化简：$\frac{1}{2}\cos2\alpha\cos2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta$

3-1-92　化积 1-sinα-cosα

3-1-93　化简：$\sin\frac{3}{2}(\cos\frac{3}{2}+\cos\frac{9}{2})$

3-1-94　化简：$\frac{1}{\cos^2 100°}-\frac{3}{\cos^2 100°}$

3-1-95　求值：4tg10°+tg20°+2tg40°-tg70°

3-1-96　已知：$\sin\alpha$：$\sin\frac{\alpha}{2}=8$：5，且$\alpha\in(4\pi，\frac{9\pi}{2})$，则$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{4}=$______

3-1-97　化简：$\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}-\cos\frac{7\pi}{15}-\cos\frac{\pi}{15}$。

3-1-98　把 1+sinα-cosα-tgα化成积的形式。

3-1-99　化简：$\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{6}-\alpha)-\sin\frac{\pi}{12}\cos(\frac{\pi}{12}+2\alpha)$。

3-1-100　化简：$\sin3\alpha\sin^3\alpha+\cos3\alpha\cos^3\alpha$。

3-1-101 化简：$\dfrac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}$。

3-1-102 求$\cos\dfrac{11\pi}{36}\cos\dfrac{13\pi}{36}\cos\dfrac{35\pi}{36}$**的值。**

3-1-103 求$\dfrac{\sqrt{3}\mathrm{tg}48°-1}{2\sec 48°}-\cos 36°$**的值。**

3-1-104 化简：cos47°-cos61°-cos11°+cos25°。

3-1-105 求证：$\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\mathrm{tg}(A+B)$。

3-1-106 求证：$\sin 3\theta=4\sin\theta\sin(\dfrac{\pi}{3}+\theta)\sin(\dfrac{2\pi}{3}+\theta)$。

3-1-107 求证：$\sin^2\varphi+\sin^2(\theta-\varphi)+2\sin(\theta-\varphi)\sin\varphi\cos\theta=\sin^2\theta$。

3-1-108 求证：

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

3-1-109 求证：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}+\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0$$

3-1-110 已知$\mathrm{tg}x=a$，**求**$\dfrac{3\sin x+\sin 3x}{3\cos x+\cos 3x}$**的值。**

3-1-111 若$\dfrac{\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}\alpha}=\dfrac{m+\cos^2\theta}{m+\sin^2\theta}$，$\theta\neq\alpha+k\pi(k\in Z)$。**求证：**

$$\frac{\sin(3\theta+\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}=4m+3$$

3-1-112 已知：$\dfrac{a}{b}+\dfrac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\beta)}{\cos(\alpha-2\pi)}=0$，$\alpha$，$\beta\neq k\pi$，$\alpha+\beta\neq 2k'\pi$ $(k，k'\in Z)$，**求证**

$$\frac{a+b}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{a}{\mathrm{ctg}\beta}+\frac{b}{\mathrm{ctg}\alpha}$$

3-1-113 (1)已知 sinA+sin3A+sin5A=a，cosA+cos3A+cos5A=b，求证

(1)**当**$b\neq 0$**时，**$\mathrm{tg}3A=\dfrac{a}{b}$；

(2)$(1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2$

3-1-114 已知$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{4}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$，**求**$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$**的值。**

3-1-115 已知：$a\sin\alpha+b\cos\beta=\sin\beta$，$a\sin\beta+b\cos\alpha=\sin\alpha$，$|a|\neq 1$，$\alpha\pm\beta\neq k\pi(k\in Z)$。**求证：**$a^2-b^2=1$。

3-1-116 在△ABC，求证：

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$$

3-1-117　在△ABC，求证：

$$1-\cos C<\cos A+\cos B\leq 2\sin\frac{C}{2}$$

3－1－118　已知关于x**的方程**$\sin x+\sqrt{3}\cos x+m=0$**在**$0<x<2\pi$**范围内有两个不同的实数根**$\alpha$**，**$\beta$**，求实数**$m$**的取值范围和**$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$**的值。**

3-1-119　已知关于 x 的方程 $4\sin^2x-4\cos x+4a+1=0$。

(1)要使上述方程在[0，π]上有相异两根，求 a 的取值范围；

(2)要使上述方程在[0，π]上有且仅有一根，求 a 的取值范围。

3-1-120　设α为任意实数，求证：

$$-4\leq\cos 2\alpha+3\sin\alpha\leq 2\frac{1}{8}$$

3－1－121 求证：$-\frac{1}{3}\leq\frac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}\leq 3$。

3-1-122　在△ABC 中，已知 a，b，c 成等差数列，最大角 C 比最小角A**大**$\frac{\pi}{2}$**，求证：**$a:b:c=(\sqrt{7}-1):\sqrt{7}:(\sqrt{7}+1)$。

3－1－123 已知$0<x<2\pi$**，问**x**为何值时，函数**$y=\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$**取最大值？最大值是多少？**

3-1-124　试证明△ABC 中有一个角是 120°的充要条件是等式 cos3A+cos3B+cos3C=1 成立。

6．综合题

例　题

例 3－1－33 已知α，$\beta\in(0，\pi)$，且$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求$\cos\beta$。

解 将$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$代入万能公式，得

$$\sin\alpha=\frac{\frac{1}{2}\times 2}{1+(\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{5}，\quad \cos\alpha=\frac{1-(\frac{1}{2})^2}{1+(\frac{1}{2})^2}=\frac{3}{5}$$

因为$0<\alpha<\pi$，$\sin\alpha>\cos\alpha>0$，所以$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$。再结合$0<\beta<\pi$及

$$0<\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

知$\frac{3\pi}{4}<\alpha+\beta<\pi$，所以$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{12}{13}$，从而

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\\&=-\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}+\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}=\frac{-16}{65}=-\frac{16}{65}\end{aligned}$$

注 一般，若$y^2=a(a>0)$，则$y=\pm\sqrt{a}$。如果x代表一个三角函数，那么 y 究竟取算术平方根，或是它的相反数，或是平方根，取决于三角函数中角所在的象限。因此角的范围的讨论是不容忽视的。角的范围除了直接从已知条件得出以外，还要注意已知条件所隐含的条件。如本例，由已知$0<\alpha+\beta<2\pi$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$，如果推出$\sin(\alpha+\beta)=\pm\frac{12}{13}$就不对了。（请读者仔细想想，为什么？）

例 3－1－34 求证$\frac{1}{\sin 24°}+\frac{1}{\sin 48°}+\frac{1}{\sin 96°}=\frac{1}{\sin 12°}$。

解 由等式$\frac{1}{\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{ctg}\alpha$（等式不难证明，请注意等式中角的倍数关系及函数名称的特点），得

$$\frac{1}{\sin 24°}=\mathrm{ctg}12°-\mathrm{ctg}24°，\quad \frac{1}{\sin 48°}=\mathrm{ctg}24°-\mathrm{ctg}48°$$

$$\frac{1}{\sin 96°}=\mathrm{ctg}48°-\mathrm{ctg}96°$$

将以上三式左右两边分别相加，并合并同类项，得

$$\frac{1}{\sin 24°}+\frac{1}{\sin 48°}+\frac{1}{\sin 96°}=\mathrm{ctg}12°-\mathrm{ctg}96°$$

$$=\mathrm{ctg}12°+\mathrm{tg}6°=\frac{\cos 12°}{\sin 12°}+\frac{\sin 6°}{\cos 6°}$$

$$=\frac{\cos 12°\cos 6°+\sin 12°\sin 6°}{\sin 12°\cos 6°}$$

$$=\frac{\cos(12°-6°)}{\sin 12°\cos 6°}=\frac{1}{\sin 12°}$$

所以 $\frac{1}{\sin 24°}+\frac{1}{\sin 48°}+\frac{1}{\sin 96°}=\frac{1}{\sin 12°}$。

注　本例的证法不是最简便的，这里只是借此介绍“拆项”的方法。显然本例可推广到一般情形，即

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}2^n\alpha$$

例 3-1-35　若 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值。

解　设 $\sin\alpha+\cos\alpha=x$，则

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=x^2\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{x^2-1}{2}$$

又由 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1$ 知，$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$，即 $\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0$。于是，

$$\frac{x^2-1}{2}=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$$

此即　$\sin\alpha+\cos\alpha=\pm1$

注　本例所采用的方法，与“列方程解应用问题”相仿：先设一个量（这里是式）为 x，然后用含 x 的代数式表示其他量，再代入相等关系中，得到一个关于 x 的方程，求出 x，即得到题目所要求的结果。请读者应用这一方法解习题 3-1-129。

3－1－36　求证$\left(\frac{1}{\sin^4\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^4\alpha}-1\right)\geq 9$。

解　左$=\frac{1}{\sin^4\alpha\cos^4\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha}-\frac{1}{\sin^4\alpha}+1$

$$=\frac{1}{\sin^4\alpha\cos^4\alpha}-\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha}+1$$

$$=\frac{1}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha}-\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha}+1$$

$$=\frac{1}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha}+\frac{2}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}+1$$

$$=\frac{2^2\cdot 2}{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}+1=\frac{8}{\sin^2 2\alpha}+1\geq 8+1=9$$

(**上式当且仅当** $\sin^2 2\alpha=1$，**即** $\alpha=k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$**时取等号**)

例 3-1-37　已知方程 $x^2-(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)x+1=0$ **的一个根是** $2+\sqrt{3}$，**求** $\sin\theta$ **的值。**

解　设方程的另一个根是 x'，**则** $(2+\sqrt{3})x'=1$，**解得** $x'=2-\sqrt{3}$。**于是，**

$$\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\Leftrightarrow\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4 \Leftrightarrow \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=4$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

当$\cos 2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$；

当$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$。

习　题

3-1-125　不查表求下列各式的值：

(1) $\sin\frac{\pi}{12}=$ ________　　(2) $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=$ ________

(3) $\cos^2\frac{\pi}{12}-1=$ ________　　(4) $8\sin\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}=$ ________

3-1-126　化简下列各式：

(1) $\operatorname{ctg}2\alpha+\csc 2\alpha=$ ________

(2) $(\operatorname{tg}5°-\operatorname{ctg}5°)\cdot\frac{\cos 70°}{1+\sin 70°}=$ ________

(3) $\frac{(\sin x+\cos x-1)(\sin x-\cos x+1)}{\sin 2x}=$ ________

(4) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}}}\ (-\pi<\theta<\pi)=$ ________

3－1－127　函数$y=\sqrt{\cos^4\frac{x}{2}-\cos x}$的最大值是

[　　]

A. $\frac{1}{2}$　　B. 0

C. 1　　D. 2

3-1-128　不查表求下列各式的值：

(1) $\sin 18°\cos 36°$　　(2) $\cos 36°-\sin 18°$

(3) $\cos^2 36°+\sin^2 18°$　　(4) $\cos 36°+\sin 18°$

3-1-129　用 $\cos 54°=\sin 36°$ 的关系求 $\sin 18°$ 的值。

3-1-130　求证下列各式：

(1) $\cos 36°\cos 72°=\frac{1}{4}$

(2) $\sin 10°\cos 20°\sin 30°\cos 40°\sin 50°\cos 60°\sin 70°\cos 80°\sin 90°=2^{-8}$

3-1-131　求 $\operatorname{tg}^2 36°\cdot\operatorname{tg}^2 72°$ 的值。

3-1-132　求 $\sec 50°+\operatorname{tg}10°$ 的值。

3-1-133　求证：

$(1)\cos 2\theta+4\cos\theta+3\geq 0$

$(2)\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geq 9$

$(3)\sin\alpha > \sec^2\dfrac{\alpha}{2}-1\quad(\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2}))$

3-1-134 求证：

$(1)2\sin\alpha+\sin 2\alpha=\dfrac{2\sin^3\alpha}{1-\cos\alpha}$

$(2)\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha+1}{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}=\sec 2\alpha$

$(3)\dfrac{2-2\cos^4\alpha-2\sin^4\alpha+\sin^2 2\alpha}{2-2\cos^2\alpha}=4\cos^2\alpha$

$(4)\dfrac{8\cos 2\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\sec^2\alpha(1-\mathrm{tg}^2\alpha)$

3－1－135 化简$\dfrac{(1+\mathrm{tg}2\alpha)^2-2\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}-\sin 4\alpha-1$。

3-1-136 求证：

$(1)\cos^2 A+\cos^2(60°-A)+\cos^2(60°+A)=\dfrac{3}{2}$

$(2)(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2=4\cos^2\dfrac{x-y}{2}$

$(3)\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\mathrm{tg}(A+B)$

3-1-137 求证：

$(1)\dfrac{2(\cos\theta-\sin\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$(2)\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-3\mathrm{ctg}\dfrac{3\alpha}{2}=\dfrac{4\sin\alpha}{1+2\cos\alpha}$

3-1-138 若 $\mathrm{tg}^2\alpha=2\mathrm{tg}^2\beta+1$，求证 $\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$。

3-1-139 求下列各函数的最大值和最小值：

(1)$y=a\sin 2x\cos 2x\quad(a\neq 0)$

(2)$y=\cos^4 x-\sin^4 x$

$(3)y=\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}\quad(x\in[0,\pi])$

3－1－140 (1)**已知等腰三角形底角的正弦等于$\dfrac{4}{5}$，求这个三角形顶角的余弦。**

(2)**已知等腰三角形顶角的余弦等于$\dfrac{7}{25}$，求这个三角形底角的正弦。**

(二)解斜三角形

提　要

由斜三角形六个元素(三条边和三个角)中的三个元素(至少有一个是边)，求其余三个未知元素(可能有两解、一解、或无解)的过程，叫做解斜三角形。

利用余弦定理可以解决以下两类解斜三角形的问题：

(1)已知三边，求三个角；

(2)已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角。

利用正弦定理可以解决以下两类解斜三角形的问题：

(1)已知两角和任一边，求其他两边和一角；

(2)已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，从而进一步求出其他的边和角。

1．余弦定理

例　题

例 3-2-1　在△ABC 中，已知 a=7，b=3，c=8，求角 A。

解　由余弦定理，得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 8}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=60°$$

例 3-2-2　在△ABC 中，求证：a=bcosC+ccosB。

解　由余弦定理，得

$$b\cos C+c\cos B=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2+c^2+a^2-b^2}{2a}=\frac{2a^2}{2a}=a$$

例 3-2-3　证明三角形的中线长公式：

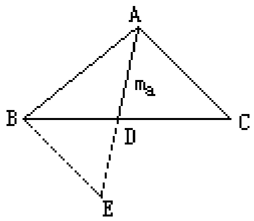
$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos B}=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C}=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$

其中 m_a，m_b，m_c 分别表示△ABC 的 a，b，c 边上的中线。

解　如下图。设 AD 为 BC 边上的中线，延长 AD 到 E，使 DE=AD。连 BE，则在△ABE 中，AB=c，BE=AC=b，AE=2AD=$2m_a$，∠ABE=π-∠BAC。



(i)

根据余弦定理，有

$$(2m_a)^2=b^2+c^2-2bc\cos(\pi-A)$$

$$=b^2+c^2+2bc\cos A$$

$$\Leftrightarrow m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$$

将$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$**代入**(i)**，得**

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

另两公式同法可证。

例 3-2-4　在△ABC 中，若 acosA+bcosB=ccosC，试判定这个三角形的形状。

解　根据余弦定理，有

$$a \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=c \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\Leftrightarrow a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$$

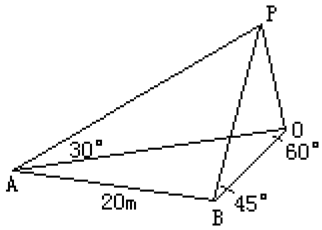
$$\Leftrightarrow a^4+b^4-c^4-2a^2b^2=0 \Leftrightarrow (a^2-b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+c^2=b^2 \text{或} b^2+c^2=a^2$$

故△ABC 是直角三角形，其中 A 或 B 是直角。

注　此题也可以利用正弦定理来解。一般地欲判定三角形的形状，总是先利用正弦定理或余弦定理将已知的边和角的三角函数的关系变换成只含边或者只含角的函数关系，再进行判定。

例 3-2-5　如下图。地平面上有一旗杆 OP。为了测得它的高度，在地面上选一基线 AB，AB=20 米。在 A 点测得 P 点的仰角∠OAP=30°；在 B 点测得 P 点的仰角∠OBP=45°；又测得∠AOB=60°。求旗杆的高度 h。



解　在 Rt△PBO 中，因为∠PBO=45°，所以 BO=PO=h。

在 Rt△PAO 中，因为∠PAO=30°，所以

$$AO = h\text{ctg}30° = \sqrt{3}h$$

在△AOB 中，由余弦定理，有

$$AB^2=AO^2+BO^2-2AO \cdot BO \cdot \cos 60°$$

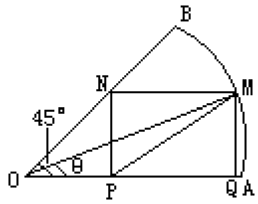
即 $$20=(\sqrt{3}h)^2+h^2-2 \cdot \sqrt{3}h \cdot h \cdot \frac{1}{2}$$

解这个方程，得正根

$$h=\frac{20}{13}\sqrt{13(4+\sqrt{3})}$$

故旗杆的高度 h 为 $\frac{20}{13}\sqrt{13(4+\sqrt{3})}$ 米。

例 3-2-6　扇形 AOB 的中心角为 45°，半径为 R，矩形 PQMN 内接于扇形（如下图）。求矩形的对角线 PM 的最小值。



解　设 $OP = x$。连 OM。设 $\angle POM = \theta$，矩形对角线 $PM = l$。

在△OPM 中，由余弦定理，有

$$l^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\theta$$

又 $\cos\theta = \frac{OQ}{OM}$，且

$$OQ=\sqrt{OM^2-MQ^2}=\sqrt{OM^2-NP^2}$$
$$=\sqrt{OM^2-OP^2}=\sqrt{R^2-x^2}$$

所以 $l^2=R^2+x^2-2x\sqrt{R^2-x^2}$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{R^2-x^2}=R^2+x^2-l^2$$
$$\Leftrightarrow 5x^4-2(l^2+R^2)x^2+(R^2-l^2)^2=0$$

由题意知，这个关于 x^2 的实系数二次方程有实数解，故其判别式非负，即

$$\Delta=4(l^2+R^2)^2-20(R^2-l^2)^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow [l^2+R^2+\sqrt{5}(R^2-l^2)][l^2+R^2-\sqrt{5}(R^2-l^2)]\geq 0$$

由题意显然 $R>l$，故

$$l^2+R^2+\sqrt{5}(R^2-l^2)\geq 0\Leftrightarrow l^2+R^2-\sqrt{5}(R^2-l^2)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow l^2\geq\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}R^2=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}R^2\Leftrightarrow l\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$$

故PM的最小值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$。

习　题

3-2-1　在三角形的六个元素中，已知下列哪一组条件，一定可以利用余弦定理来解三角形，这一组是　　[　　]

A．任意三个元素　　B．两边和一个角

C．一边和两个角　　D．三边

3-2-2　在△ABC 中，已知 $a^2=b^2+bc+c^2$，则 A=　　[　　]

A．60°　　B．120°

C．150°　　D．60°或 120°

3-2-3　已知锐角三角形的两边长为 2 和 3，那么第三边长 x 的取值范围是　　[　　]

A．(1，5)　B．(1，$\sqrt{5}$)　C．($\sqrt{5}$，5)　D．($\sqrt{5}$，$\sqrt{13}$)

3-2-4　在△ABC 中，已知 acosB=bcosA，则这个三角形是　　[　　]

A．锐角三角形　　B．钝角三角形

C．等腰三角形　　D．直角三角形

3-2-5　在△ABC中，若 $\frac{tgA}{tgB}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$，则这个三角形是　　[　　]

A．等腰三角形　　B．等腰三角形或直角三角形

C．直角三角形　　D．等腰直角三角形

3-2-6　在△ABC中，已知a，b，c成等差数列，则 $ctg\frac{A}{2}ctg\frac{C}{2}=$　　[　　]

A．3　　B．$\frac{1}{3}$　　C．1　　D．3或 $\frac{1}{3}$

3－2－7 在△ABC中，若$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$，$A=45°$，则$a=$______。

3－2－8 在△ABC中，若边$a:b:c=\sqrt{2}:(\sqrt{3}+1):2$，则内角A =______。

3-2-9 在△ABC 中，若 acosA=bcosB，则这个三角形是______。

3-2-10 在△ABC 中，已知三边 a=4，b=5，c=6，则这个三角形是______。

3-2-11 在△ABC 中，三边的长为连续自然数，且最大角是钝角，这个三角形三边的长分别为______。

3－2－12 在△ABC中，若$A=150°$，$a=2b\cos C$，则$a^2-b^2-\sqrt{2}ab=$

3-2-13 在△ABC中，求证：$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$。

3-2-14 在△ABC中，求证：$\cos A=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$。

3-2-15 在△ABC 中，求证：

$$a^2+b^2-2ab\cos(C+60°)$$

$$=b^2+c^2-2bc\cos(A+60°)=c^2+a^2-2ca\cos(B+60°)$$

3-2-16 在△ABC 中，已知

$$(a+b+c)(a+b-c)=3ab，\sin A\sin B=\frac{3}{4}$$

试判定此三角形的形状。

3-2-17 在△ABC中，已知$\frac{\cos A+2\cos C}{\cos A+2\cos B}=\frac{\sin B}{\sin C}$，求证：此三角形为等腰三角形或直角三角形。

3-2-18 在△ABC 中，已知

$$a(1-2\cos A)+b(1-2\cos B)+c(1-2\cos C)=0$$

求证：此三角形是等边三角形。

3-2-19 已知：△ABC 中，

$$a^2-a-2b-2c=0，a+2b-2c+3=0$$

求此三角形的最大角。

3-2-20 已知△ABC 的三边为 a，b，c，且△ABC 的面积$S=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，试证：$C=\frac{\pi}{4}$。

3-2-21 在梯形 ABCD 中，上、下两底边长为 a，b，两腰长为 c，d，两对角线的夹角为α，它们的长分别为 m，n，求证

$$m^2+n^2=c^2+d^2+2ab$$

3-2-22 在△ABC 中，若 $a^2+c^2-b^2=ac$，又 lgsinA+lgsinC=-2lg2，且

△ABC的面积为$\sqrt{3}$。解此三角形。

3-2-23 我海军某舰艇在 A 处测得入侵敌舰在方位角为 45°、距离为 10 海里的 C 处，正沿方位角为 105°的方向以每小时 9 海里的速度逃跑，我舰艇立即以每小时 21 海里的速度沿直线前去追捕，问我舰艇需用

多少小时才能追上敌舰？

3-2-24　已知正方形ABCD内一点P到三顶点A，B，C的距离分别为$PA=\sqrt{7}$，$PB=1$，$PC=3$。求正方形的边长。

3-2-25　a，b是两条异面直线，它们的夹角为θ，公垂线PQ=h，在a，b上分别有A，B两点，它们对PQ的视角分别为α，β。求：

(1)线段AB的长；

(2)AB与PQ所成的角的正切。

2．正弦定理

例题

例3-2-7　在△ABC中，已知a=4，B=105°C=60°，解此三角形。

解　由已知，有A=180°-B-C=180°-105°-60°=15°

再由正弦定理，得

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{4\sin 105°}{\sin 15°}=4\operatorname{ctg}15°=\frac{4(1+\cos 30°)}{\sin 30°}=8+4\sqrt{3}$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{4\sin 60°}{\sin 15°}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$$

所以$A=15°$，$b=8+4\sqrt{3}$，$c=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$。

例3-2-8　在△ABC中，已知$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45°$。解此三角形。

解　因为$B=45°<90°$，且$a\sin B=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}<\sqrt{2}=b$，故此题有两解。

由正弦定理，得

$$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}\sin 45°}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow A=60°\text{ 或 }A=120°$$

当A=60°时，C=180°-A-B=75°，这时

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 75°}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

(2)当A=120°时，C=180°-A-B=15°，这时

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 15°}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

所以$A=60°$，$C=75°$ $c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$或$A=120°$，$C=15°$ $c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$。

例3-2-9　在△ABC中，已知$C=60°$，$a+b=2(\sqrt{3}+1)$，$c=2\sqrt{2}$。求其余两角。

解　根据等比定理及正弦定理，有

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Leftrightarrow\frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sin A+\sin B}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 60°}$$

$$\Leftrightarrow \sin A+\sin B=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

而 A+B=180°-C=120°，所以 B=120°-A。于是，

sinA+sinB=sinA+sin(120°-A)

$$=\sqrt{3}\cos(A-60°)=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-60°)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow A=75° \text{或} A=45°$$

于是可得 A=75°，B=45°或 A=45°，B=75°。

例 3-2-10　在△ABC 中，已知

$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$，$\sin A=2\sin B\cos C$

试判定此三角形的形状。

解　据正弦定理，从 $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$，得 $a^2=b^2+c^2$。于是，

A=90°，B+C=90°

又从 $\sin A=2\sin B\cos C$ 得 $2\sin B\cos(90°-B)=\sin 90°$，故 $\sin^2 B=\frac{1}{2}$，

从而 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin B=-\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍去)，因此 $B=45°$，$C=45°$。

故△ABC 是以 A 为直角的等腰直角三角形。

例3-2-11　在△ABC中，已知 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{8}$，求证：△ABC是正三角形。

解　因为

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2})^2+\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}=\frac{1}{8}$$

故由题设可知

$$\frac{1}{8}\sin^2\frac{A-B}{2}+\frac{1}{2}(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2})^2=0$$

由此可得

$$\sin\frac{A-B}{2}=0 \qquad \text{(i)}$$

且

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \text{(ii)}$$

因为 $-\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以由(i)可得 $A=B$，从而由(ii)得 $\cos A=\frac{1}{2}$，

而 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$。从而 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$。

故△ABC 是正三角形。

例 3-2-12　在△ABC 中，求证：

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$$

解　由正弦定理，得

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A=\frac{\sin^2B-\sin^2C}{\sin^2A}\cdot\sin 2A$$

$$=\frac{2\sin(B+C)\sin(B-C)\cos A}{\sin A}$$

$=2\sin(B-C)\cos A=-2\sin(B-C)\sin(B+C)$

$=\sin 2C-\sin 2B$　　(i)

同理　$\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B=\sin 2A-\sin 2C$　　(ii)

$\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=\sin 2B-\sin 2A$　　(iii)

(i)，(ii)，(iii)三式相加即得欲证的等式。

注　由于左端是一个关于三角形三条边和三个内角的轮换式。解题时应充分利用这一特点。上面的证法就是一例。

例 3-2-13　在△ABC 中，已知 a，b，c 成等差数列，证明

$$a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$$

解　因为

$$a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=2R\sin A\cdot\frac{1+\cos C}{2}+2R\sin C\cdot\frac{1+\cos A}{2}$$

$=R(\sin A+\sin C+\sin A\cos C+\sin C\cos A)$

$=R[\sin A+\sin C+\sin(A+C)]$

$$=R\sin A+R\sin C+R\sin B=\frac{1}{2}(a+c+b)$$

又 a，b，c 成等差数列，所以 2b=a+c。于是，

$$a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$$

例 3-2-14　在△ABC 中，已知 a，b，c 成等比数列，证明

$\cos(A-C)=1-\cos B-\cos 2B$

解　因为 a，b，c 成等比数列，所以 $b^2=ac$。

由正弦定理，可得

$\sin^2B=\sin A\sin C\Longleftrightarrow\sin A\sin C-\sin^2B=0$

于是，

$\cos(A-C)-(1-\cos B-\cos 2B)$

$=\cos(A-C)+\cos B-2\sin^2B$

$$=2\cos\frac{A-C+B}{2}\cos\frac{A-C-B}{2}-2\sin^2B$$

$$=2\cos(\frac{\pi}{2}-C)\cos(A-\frac{\pi}{2})-2\sin^2B$$

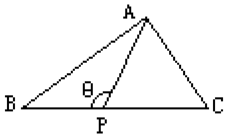
$=2(\sin A\sin C-\sin^2B)=0$

此即　$\cos(A-C)=1-\sin B-\sin 2B$

例 3-2-15　设 P 是将△ABC 的 BC 边分成 m：n 的分点，求证

$n\cdot BP^2+m\cdot CP^2+(m+n)AP^2=nc^2+mb^2$

解　如图，在△ABP和△ACP中，由余弦定理得



$$\cos\theta=\frac{AP^2+BP^2-AB^2}{2\cdot AP\cdot BP}$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\frac{AP^2+CP^2-AC^2}{2\cdot AP\cdot CP}=-\cos\theta$$

于是，有

$$\frac{AP^2+BP^2-AB^2}{2\cdot AP\cdot BP}=-\frac{AP^2+CP^2-AC^2}{2\cdot AP\cdot CP}$$

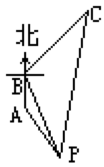
$$\Leftrightarrow\frac{AP^2+BP^2-c^2}{AP^2+CP^2-b^2}=-\frac{BP}{CP}$$

而$\frac{BP}{CP}=\frac{m}{n}$，所以

$$\frac{AP^2+BP^2-c^2}{AP^2+CP^2-b^2}=-\frac{m}{n}$$

$\Longleftrightarrow nBP^2+mCP^2+(m+n)AP^2=nc^2+mb^2$

例 3-2-16　某海轮以每小时 30 海里的速度航行，在 A 点测得海面上油井 P 在南偏东 60°；向北航行 40 分钟后到达 B 点，测得油井 P 在南偏东 30°。海轮改为东偏北 30°的航向再航行 80 分钟到达 C 点。试求 P，C 间的距离。



解　如图。在△ABP中，$AB=30\times\frac{40}{60}=20$，$\angle BAP=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，$\angle ABP=30^\circ$。所以$\angle APB=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ$。

由正弦定理，得

$$BP=\frac{AB\sin120^\circ}{\sin30^\circ}=\frac{20\times\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12}=20\sqrt3$$

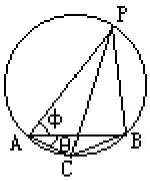
又在 Rt△PBC 中，

$$BC=30\times\frac{80}{60}=40，BP=20\sqrt3$$

所以　$PC=\sqrt{BC^2+BP^2}=\sqrt{40^2+(20\sqrt3)^2}=20\sqrt7$

故PC间的距离为$20\sqrt7$海里。

例 3-2-17　已知：C 为$\overset{\frown}{AB}$的中点，P 为 AB 弦所对的另一弧上的任一点。求证：$\frac{PC}{PA+PB}$为定值。



解 如图。连 AC，BC

设∠PAB=φ，∠BAC=θ，则

∠BPC=∠BAC=∠APC=θ

∠PCB=∠PAB=φ

∠PCA=180°-(2θ+φ)

在△PAC 和△PBC 中，由正弦定理，得

PC=2Rsin(φ+θ)，PA=2Rsin(2θ+φ)，PB=2Rsinφ

其中 R 是△ABC 外接圆的半径，于是

$$\frac{PC}{PA+PB}=\frac{2R\sin(\varphi+\theta)}{2R\sin(2\theta+\varphi)+2R\sin\varphi}$$

$$=\frac{\sin(\varphi+\theta)}{2\sin(\varphi+\theta)\cos\theta}=\frac{1}{2\cos\theta}(\text{定值})$$

例 3-2-18 在△ABC 中，已知：

$2\sin^2A=3\sin^2B+3\sin^2C$，$\cos2A+3\cos A+3\cos(B-C)=1$

求△ABC 的三边之比和三内角的大小。

解 已知 $\cos2A+3\cos A+3\cos(B-C)=1$，即

$-3\cos(B+C)+3\cos(B-C)=1-\cos2A$

$\Longleftrightarrow 6\sin B\sin C=2\sin^2A$ (i)

又已知 $3\sin^2B+3\sin^2C=2\sin^2A$ (ii)

(ii)-(i)得

$\sin^2B-2\sin B\sin C+\sin^2C=0\Longleftrightarrow(\sin B-\sin C)^2=0$

$\Longleftrightarrow$ sinB=zsinC (iii)

(iii)代入(i)得

$6\sin^2C=2\sin^2A$

又 0＜A＜π，0＜C＜π，所以 sinA，sinC＞0。于是有

$$\sin B=\sin C=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin A$$

根据正弦定理，得

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{3}:1:1$$

令 $a=\sqrt{3}k$，$b=k$，$c=k$，其中 k 为正参数，则由余弦定理，得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{k^2+k^2-3k^2}{2k\cdot k}=-\frac{1}{2}$$

$\Longleftrightarrow$ A=120°

又由 $b=c$ 得 $B=C=\frac{180°-A}{2}=30°$。所以 $a:b:c=\sqrt{3}:1:1$，从而 A=120°，B=30°，C=30°。

习题

3-2-26 已知△ABC 中，$b=4\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30°$，那么解此三角

形可得　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．一解　　　　　B．两解

C．无解　　　　　D．解的个数不能确定

3-2-27　在△ABC 中，∠A，∠B，∠C 所对的边分别为 a，b，c，则下列关系式中一定成立的是　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．a＞bsinA　　　　B．a=bsinA

C．a＜bsinA　　　　D．a≥bsinA

3-2-28　在△ABC 中，若 A=120°，c=5，b=3，则 sinB·sinC=　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$\frac{45}{196}$　B．$\frac{35}{196}$　C．$\frac{25}{196}$　D．$\frac{45}{98}$

3-2-29　△ABC的两边长为2，3，其夹角的余弦为$\frac{1}{3}$，则其外接圆的半径为　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$\frac{9\sqrt{2}}{2}$　B．$\frac{9\sqrt{2}}{4}$　C．$\frac{9\sqrt{2}}{8}$　D．$\frac{2\sqrt{2}}{9}$

3-2-30　已知正十边形的内切圆的半径是 3，那么这个正十边形的面积是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．45sin36°　　　　B．90tg18°

C．45cos36°　　　　D．90ctg18°

3-2-31　锐角三角形ABC中，若$\angle C=2\angle B$，则$\frac{AB}{AC}$的范围是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．(0，2)　　　　B．($\sqrt{2}$，2)

C．($\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$)　　　D．($\sqrt{3}$，2)

3-2-32　直角三角形 ABC 的斜边 AB=2，其内切圆半径为 r，则 r 的最大值是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$\sqrt{2}$　B．1　C．$\sqrt{2}-1$　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

3-2-33　在△ABC中，已知$\sin A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{12}{13}$，则cosC等于　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$-\frac{16}{65}$　B．$\frac{56}{65}$　C．$-\frac{16}{65}$或$\frac{56}{65}$　D．$\frac{56}{65}$或$-\frac{33}{65}$

3-2-34　在△ABC 中，已知 AB=2，BC=5，△ABC 的面积为 4，∠ABC=θ，则 cosθ=__________。

3-2-35　在△ABC 中，其面积 $S=a^2-(b-c)^2$，则 cosA=________。

3-2-36　在△ABC中，若B=45°，C=30°，$c=2\sqrt{2}$，那么△ABC 的面积 S=______。

3-2-37　在△ABC 中,若 $8R^2=a^2+b^2+c^2$(R 为△ABC 的外接圆的半径)，则△ABC 的形状是________。

3-2-38　等腰梯形 ABCD 中，AB=4，CD=2，腰长 BC=3，则对角线 AC=_______。

3-2-39 在△ABC中，若$\frac{\mathrm{tgA}-\mathrm{tgB}}{\mathrm{tgA}+\mathrm{tgB}}=\frac{c-b}{c}$，则$A=$__________。

3-2-40 在△ABC 中，已知 A：B：C=3：4：5，a：b：c=__________。

3-2-41 在△ABC 中，若

$$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin A+\sin B-\sin C)=3\sin A\sin B$$

则 A+B=________。

3-2-42 由下列条件解三角形，并确定解的个数：

(1)a=80，b=100，A=30°

(2)a=50，b=100，A=30°

(3)a=40，b=100，A=30°

3-2-43 在△ABC 中，求证

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$$

3-2-44 在△ABC 中，求证

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$$

3-2-45 在△ABC 中，求证

$$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$$

3-2-46 在△ABC 中，已知 A：B：C=1：2：4，求证

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{c}{2(a+b+c)}$$

3-2-47 在△ABC 中，已知 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$，求证△ABC 是直角三角形。

3-2-48 在△ABC中，已知$\sin A\sin(\frac{A}{2}+B)=\sin B\sin(\frac{B}{2}+A)$，求证：△ABC 是等腰三角形。

3-2-49 在△ABC 中，已知 $b^2\sin^2C+c^2\sin^2B=2bc\cos B\cos C$，试判定此三角形的形状。

3-2-50 设 P，Q 是定线段 BC 上的两定点，且 BP=CQ，A 为 BC 外一动点，当 A 运动到使∠BAP=∠CAQ 时，试判定△ABC 的形状。

3-2-51 在△ABC 中，若角 A，B，C 所对的边 a，b，c 成等差数列。

(1)求证：$2\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$

(2)若 B=60°,试判断此三角形是什么特殊三角形,并证明你的结论。

3-2-52 已知△ABC 的三内角 A，B，C 的大小成等差数列，且$\mathrm{tgAtgC}=2+\sqrt{3}$。求角A，B，C的大小。又知顶点C的对边c上的高等于$4\sqrt{3}$，求三角形各边 a，b，c 的长。

3-2-53 一轮船于 A 点测得两灯塔 P，Q 分别位于北偏东α和北偏东β(α＞β)，船向正北航行了 a 千米到达 B 点后，发现船与两灯塔位于一直线上，方位是北偏东γ。试求两灯塔的距离。

3-2-54 在△ABC 中，已知 2A+3B=180°，求证：

$$1<\frac{a+b}{c}\le\frac{5}{4}$$

第四部分　反三角函数和简单的三角方程

(一)反三角函数的概念

提要

从三角函数图象可知，在定义域内自变量值与函数值不是一对一的，因此在整个定义域内三角函数没有反函数。但可分别选一些特定区间，在每一个这种特定的区间内它们都有反函数。

选择这些特定区间的原则是：三角函数在该区间内是单值的；能取得全部函数值；图象是连续的；区间取在原点 0 附近。根据这几条原则，古代数学家已为我们选好，$y=\sin x$的区间选为$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$。$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg}x$，$y=\operatorname{ctg}x$分别选为$[0,\ \pi]$，$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，$(0,\ \pi)$。由此得出 y=arcsinx，y=arccosx，y=arctgx，y=arcctgx 的定义域分别为[-1，1]，[-1，

1]，$(-\infty,\ +\infty)$，$(-\infty,\ +\infty)$。它们的值域分别为$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$[0,\ \pi]$，$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，$(0,\ \pi)$。

这个知识点的题型是：求定义域，求值域，求值，求反函数，证明等式等。

例题

例4-1-1 求$\operatorname{arctg}\sqrt{3}-2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{1}{2}$的值。

解 令$\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{3}$，则$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$，又$\alpha\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，故$\alpha=\frac{\pi}{3}$。

令$\beta=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$；又$\beta\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，故$\beta=\frac{\pi}{4}$。

再令$\gamma=\arccos\frac{1}{2}$，则$\cos\gamma=\frac{1}{2}$；又$\gamma\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，故$\gamma=\frac{\pi}{3}$。

所以$\operatorname{arctg}\sqrt{3}-2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$。

注 (i)求反三角函数值，先用一个字母表示这个反三角函数，再写出它的原三角函数，并确定所在角的象限。然后利用已知三角函数值查表求出角来，或者利用特殊角的三角函数值求出角来。

(ii)如果一个式子中有多个反三角函数值，一般分别用一个字母表示，按上述步骤分别进行。

例4-1-2 设$y=\log_2[\arcsin(x^2+2x+\frac{1}{2})]$的定义域为D，值域为M，那么 D= ______，M=______。

解 先求D。令$u=x^2+2x+\frac{1}{2}$，则$u=(x+1)^2-\frac{1}{2}$，故$u\geq-\frac{1}{2}$。

再由$|u|\leq1$，知$-\frac{1}{2}\leq u\leq1$。

由对数函数的性质知，D 由下面不等式组解确定

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\leq u\leq 1\\ \arcsin u>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow 0<u\leq 1\Leftrightarrow 0<(x+1)^2-\frac{1}{2}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}<(x+1)^2\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|x+1|\leq\frac{\sqrt{6}}{2}\\ |x+1|>\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\sqrt{6}+2}{2},\ -\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2},\ \frac{\sqrt{6}-2}{2}\right]$$

再求值域M。**对于任意**$x\in D$**有**$u\in(0,1]$，**即**$\arcsin u\in(0,\frac{\pi}{2}]$，**从而**

$$y=\log_2[\arcsin(x^2+2x+\frac{1}{2})]\in(-\infty,\ \log_2\pi-1)$$

所以 $M=(-\infty,\log_2\pi-1)$。

注　求复合函数的定义域，可由里向外(或由外向里)，一层一层得出有关不等式组。求出这不等式组的解，即为所求的定义域。

例4-1-3　设$y=\arccos(3x+2)$**的值域为**$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$。

(1)求它的定义域 D；

(2)求它的反函数，并求反函数的值域与定义域。

解　(1)$\frac{\pi}{4}\leq\arccos(3x+2)\leq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{2}\leq 3x+2\leq\cos\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow 0\leq 3x+2\leq\frac{\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{\sqrt{2}-4}{6}$$

所以$D=[-\frac{2}{3},\ \frac{\sqrt{2}-4}{6}]$

$$(2)y=\arccos(3x+2)\Leftrightarrow\cos y=3x+2\Leftrightarrow x=\frac{\cos y-2}{3}$$

因此$y=\arccos(3x+2)$**的反函数为**$y=\frac{\cos x-2}{3}$。**此反函数的定义域为**$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$，**值域为**$[-\frac{2}{3},\ \frac{\sqrt{2}-4}{6}]$。

注　(i)反三角函数都是单调函数。故已知值域求定义域时，只须求出值域两端点的反三角函数值即可。

(ii)原函数的定义域为反函数的值域，原函数的值域为反函数的定义域。

例4-1-4　设$y=\sin x$，$x\in[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$，**求它的反函数。**

解　$\frac{3\pi}{2}\leq x\leq\frac{5\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\leq x-2\pi\leq\frac{\pi}{2}$

所以　$y=\sin x=\sin(x-2\pi)\Longleftrightarrow x-2\pi=\arcsin y$

从而得到$y=\sin x$，$x\in[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$**的反函数为**

$y=\arcsin x+2\pi$

注　求三角函数的反函数时，必须先利用诱导公式，把自变量的取值范围变到此三角函数的主值区间上，再利用反三角函数表出。

例 4-1-5　求 $y=\mathrm{arctg}(9-8\cos x-2\sin^2 x)$的定义域与值域。

解　由于 $z=\mathrm{arctg}u$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,又因为 $y=\cos x$ 与 $y=\sin x$ 的定义域也都是$(-\infty，+\infty)$，从而所求函数定义域也是$(-\infty，+\infty)$。

再求值域。令 $u=9-8\cos x-2\sin^2 x$，则

$u=2(\cos x-2)^2-1$

当 $\cos x=-1$ 时，$u_{max}=17$，从而 $y_{max}=\mathrm{arctg}17$；

当$\cos x=1$时，$u_{min}=1$从而$y_{max}=\frac{\pi}{4}$。

因此所求函数的值域是$[\frac{\pi}{4}，\mathrm{arctg}17]$。

注　当复合函数的“外”函数是反三角函数时，求此复合函数的值域的步骤是：先求出“内”函数的最大值 a 与最小值 b；令此复合函数为 $y=f(x)$；再求出 $f(a)$，$f(b)$。那么值域为$[f(a)，f(b)]$(当“外”函数为增函数时)或$[f(b)，f(a)]$(当“外”函数为减函数时)。

习题

4-1-1　下列各等式中正确的一个是　　　　[　　]

A．$\cos[\arcsin(-\frac{1}{5})]=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$\mathrm{tg}[\arccos(-\frac{1}{5})]=2\sqrt{6}$

C．$\mathrm{ctg}[\arccos(-\frac{1}{5})]=-\frac{\sqrt{6}}{12}$　　D．$\sin[\arcsin(-\frac{1}{5})]=\frac{1}{5}$

4-1-2　函数$y=\arccos(-\sqrt{2-3x})$的定义域是

[　　]

A．$(-\infty，\frac{2}{3})$　　B．$(\frac{1}{3}，+\infty)$

C．$(\frac{1}{3}，\frac{2}{3})$　　D．$[\frac{1}{3}，\frac{2}{3}]$

4-1-3　已知α，β是二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，其中$\alpha=\mathrm{arctg}1$，

$\beta=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$。

(1)求 p，q；

(2)求 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta$。

4-1-4　解方程 $\log_a(x^2-x-2+\pi^2)=2$，其中 $a=\arccos(\mathrm{tg}135°)$。

4-1-5　$\mathrm{tg}\{\arccos[\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))]\}=$＿＿＿＿＿＿＿。

4-1-6　设$\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$，那么$\arcsin(-\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)=$

[　　]

A. $-\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $-\frac{2\pi}{3}$

4-1-7 求$y=\frac{1}{4}|\arcsin(ax+5)|$**的定义域与值域，其中**$a\neq 0$**。**

4-1-8　设 $y=(\arccos x)^2+2\arccos-1$。

(1)当 x 为何值时，y 有最大值，并求最大值；

(2)当 x 为何值时，y 有最小值，并求最小值。

4-1-9　求下列函数的定义域与值域：

(1)$y=\frac{\arcsin 2^x}{4}$　　(2)$y=\frac{1}{2}\sqrt{\arcsin(\log_2 x+1)}$

(3)$y=\frac{1}{2}\arccos(\sin 2x)$　　(4)$y=\arcsin\sqrt{x^2-x+1}$

4-1-10　证明下列等式

(1)$\operatorname{arctg}x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　$(x\geq 0)$

(2)$2\arccos x=\arccos(2x^2-1)$　$(0\leq x\leq 1)$

(二)反三角函数的图角与性质

提要

反正弦函数与反正切函数在它们的定义域内都是递增的奇函数；反余弦函数与反余切函数在它们的定义域内都是递减的非奇非偶函数。我们有

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x，x\in[-1，1]$$
$$\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}x，x\in R$$
$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x，x\in[-1，1]$$
$$\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}x，x\in R$$

反三角函数与同名的三角函数复合，还有下面的式子成立：

$$\begin{cases}\sin(\arcsin x)=x，x\in[-1，1]\\ \arcsin(\sin x)=x，x\in[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\arccos x)=x，x\in[-1，1]\\ \arccos(\cos x)=x，x\in[0，\pi]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x，x\in R\\ \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)=x，x\in(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x)=x，x\in R\\ \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x)=x，x\in(0，\pi)\end{cases}$$

这个知识点的题型是：求值，比较大小，作简图，判断单调性，证明等式，证明不等式等。

比较反三角函数值的大小，常用方法有 4 种：

(i)反三角函数的单调性；

(ii)不同名的反三角函数化成同名的反三角函数，再利用单调性；

(iii)不同名的反三角函数，取同名三角函数，再利用单调性；

(iv)中间值法，即利用沟通两者之间的中间值加以比较。

例题

例 4-2-1　比较下列各对数的大小：

(1)$\mathrm{arctg}(-1.5)$与$-\mathrm{arctg}\sqrt{2}$；

(2)$\arcsin\frac{1}{3}$与$\arccos\frac{1}{3}$；

(3)$\mathrm{arctg}\frac{16}{63}$与$\arccos\frac{64}{65}$。

解　(1)y=arctgx 在 R 内是增函数，所以

$$\mathrm{arctg}(-1.5)<\mathrm{arctg}(-\sqrt{2})=-\mathrm{arctg}\sqrt{2}$$

(2)取中间值$\frac{\sqrt{2}}{2}$，那么

$$\arcsin\frac{1}{3}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}<\arccos\frac{1}{3}$$

(3) 令 $\alpha=\text{arctg}\dfrac{16}{63}$，则 $\text{tg}\alpha=\dfrac{16}{63}$，且 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，故 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}=\dfrac{63}{65}$。于是

$$\text{arctg}\frac{16}{63}=\alpha=\arccos\frac{63}{65}>\arccos\frac{64}{65}$$

注　(i)本例之(2)的证法就是用中间值法。

(ii)本例之(3)的证法是将不同名的反三角函数，化成同名的反三角函数，再利用 arccosx 是减函数作出比较。

例4-2-2 $\arccos(\cos\dfrac{4\pi}{3})=$　　　　[　　]

A. $\dfrac{4\pi}{3}$　　B. $-\dfrac{2\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

解　C

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\arccos(\cos\frac{4\pi}{3})=\arccos(\cos\frac{2\pi}{3})=\frac{2\pi}{3}$$

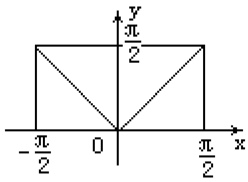
注　(i)等式 arccos(cosx)=x 成立，必须 x∈[0，π]。

(ii)解此类问题，必须先用诱导公式，把任意角转化为使公式成立的的角，再求值。

例4-2-3　画出 $y=\arccos(\cos x)$，$x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 的图象。

解　令 f(x)=arccos(cosx)，则 f(x)=f(-x)。即 f(x)是偶函数，图象关于 y 轴对称。

当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$y=\text{arc}\cos(\cos x)=x$，因此图象如下图所示。



例 4-2-4　下列函数在定义域内不具有单调性的是　　[　　]

A. y=ctg(arc cosx)　　B. y=tg(arc sinx)

C. y=sin(arc tgx)　　D. y=cos(arc tgx)

解　D

由 arc cosx 在[-1，1]内是减函数知，ctg(arc cosx)在 x∈[-1，1]内是增函数，故不选 A。

y=tg(arc sinx)在[-1，1]内也是增函数，故不选 B。

对任实数都有 $\text{arc tg}x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，故 $y=\sin(\text{arc tg}x)$ 在 R 内是增函数，故不选 C。

注　设 y=f(g(x))为复合函数，令内函数为 u=g(x)，外函数为 v=f(x)。在定义域内单调性如下：

u=g(x)，v=f(x)都是增(或减)函数，则 y=f(g(x))是增(或减)函数；

u=g(x)是增(或减)函数，而 v=f(x)对应是减(或增)函数，那么 y=f(g(x))总是减函数。

例 4-2-5　设

　　A={x|arc sin(sinx)=x}，B={x|arc cos(cosx)=x}

　　C={x|sin(arc sinx)=x}

那么，

(1)A∪B=________，A∩B=________

(2)(A∩B)∪C=_______，(A∪B)∩C=_______

解　易知$A=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，$B=[0,\pi]$，$C=[-1,1]$，于是易求得

(1)$[-\frac{\pi}{2},\pi]$；$[0,\frac{\pi}{2}]$　　(2)$[-1,\frac{\pi}{2}]$；$[-1,1]$

例 4-2-6　证明：

(1)$2\operatorname{arc\,ctg}\frac{5}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{40}{9}$

(2)设$\theta\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$，那么$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\{2\operatorname{tg}[\theta+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}^3\theta)]\}<\frac{\pi}{4}$。

解　(1)令$\alpha=\operatorname{arc\,ctg}\frac{5}{4}$，则$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{4}$，且$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，故

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{9}{40}\Leftrightarrow 2\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{40}{9}$$

即　$$2\operatorname{arc\,ctg}\frac{5}{4}=2\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{40}{9}$$

(2)令$\alpha=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}^3\theta)$，则$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}^3\theta$，故

$$\operatorname{tg}(\theta+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}^3\theta}{1-\operatorname{tg}^4\theta}=\frac{\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}$$

于是　$$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\{2\operatorname{tg}[\theta+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}^3\theta)]\}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}[2\operatorname{tg}(\theta+\alpha)]$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta})$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}2\theta)=\theta<\frac{\pi}{4}$$　(注意，$2\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)

注　证明反三角函数的等式(或不等式)的步骤是：先用字母表示最里层的反三角函数表示的角；再写出三角函数式；然后利用三角公式逐步演算。

习题

4-2-1　(1)$\operatorname{arc\,cos}[\cos(-\frac{7\pi}{6})]=$__________

(2)$\operatorname{arc\,ctg}[\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{5})]=$__________

(3)$\operatorname{tg}\{\operatorname{arc\,sin}[\sin(\operatorname{arc\,cos}(-\frac{\sqrt{3}}{2}))]\}=$__________

(4)设$\alpha\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，$\operatorname{arc\,sin}[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha+\cos\alpha)]=$__________

4-2-2　比较$\operatorname{arc\,cos}\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4}}{12}$，$\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{8}$三个数的大小。

4-2-3　arc cos(-x)大于arc cos的充要条件是　　　[　　]

A. x∈(0，1]　　　　B. x∈(-1，0)

C. x∈(0，1)　　　　D. x∈[0，1]

4-2-4　若arc sinx＞1，则x的取值范围是__________。

4-2-5 如果$\alpha = \mathrm{arc\ sin}(\sin\sqrt{3})$，$\beta = \mathrm{arc\ ctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$为二次方程$x^2 + (\sqrt{3}-p)x+q=0$的两个根，求p，q。

4-2-6　设x∈(-π，0)，比较ctg(arc tgx)与arc tg(tgx)的大小。

4-2-7 求$\dfrac{\mathrm{arc\ sin}[\sin(-\frac{5\pi}{4})]}{\mathrm{arc\ cos}(\cos\frac{4\pi}{3})}$的值。

4-2-8　设M={(x，y)||xy|=1，x＞0}，N={(x，y)|arc tgx+arc ctgy=π}，证明：N⊂M。

4-2-9　求函数y=arc cos(x^2-2x)的单调区间。

4-2-10　函数f(x)满足

$$5f(\mathrm{arc\ tg}x) + 3f(-\mathrm{arc\ tg}x) = \mathrm{arc\ ctg}x - \frac{\pi}{2}$$

求$f(\frac{\sqrt{2}}{3})$。

(三)反三角函数的运算

提要

反三角函数的运算是指下面三种运算：反三角函数的四则运算；反三角函数的三角运算；三角函数的反三角运算。

解这类问题的方法是用字母表示反三角函数，转化为三角函数的求值问题。但必须注意反三角函数的定义域与值域。有时还须用到三角函数的许多公式。

例题

例 4-3-1　求值：

$$(1)\cos(\operatorname{arc}\cos\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{3}{4})$$

$$(2)\sin[\operatorname{arc}\cos(-\frac{3}{5})-\operatorname{arc}\sin\frac{3}{4}]$$

解　(1)**令**$\alpha=\operatorname{arc}\cos\frac{3}{5}$，**则**$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，**且**$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，**故**$\sin\alpha=\frac{4}{5}$。

再令$\beta=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{3}{4}$，**则**$\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{4}$，**且**$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，**由此可求得**

$$\cos\frac{\beta}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10},\quad \sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

于是，

$$\cos(\operatorname{arc}\cos\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{3}{4})=\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})$$

$$=\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}=\frac{13\sqrt{10}}{50}$$

(2)**令**$\alpha=\operatorname{arc}\cos(-\frac{3}{5})$，**则**$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，**且**$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，**故**$\sin\alpha=\frac{4}{5}$。

再令$\beta=\operatorname{arc}\sin\frac{3}{4}$，**则**$\sin\beta=\frac{3}{4}$，**且**$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，**故**$\cos\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$。

于是，

$$\sin[\operatorname{arc}\cos(-\frac{3}{5})-\operatorname{arc}\sin\frac{3}{4}]=\sin(\alpha-\beta)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$$

注　此例是先作反三角函数的四则运算，再进行三角运算。解这类问题的步骤是：

(i)令α，β表示式中反三角函数，再写成三角函数值形式；

(ii)运用三角公式求出α，β的与本题有关的其他三角函数值；

(iii)再运用三角公式求出反三角函数式的三角函数值。

例4-3-2　设x_1，x_2**是二次方程**$x^2-(\sin\frac{\pi}{7})x+\cos\frac{6\pi}{7}=0$**的两根，求** $\operatorname{arc}\operatorname{tg}x_1+\operatorname{arc}\operatorname{tg}x_2$ **的值。**

解 $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x_1+\operatorname{arc\,tg}x_2)=\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x_1)+\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x_2)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x_1)\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x_2)}$

$$=\frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{1-\cos\frac{6\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{14} \qquad \text{(i)}$$

由于$x_1+x_2=\sin\frac{\pi}{7}>0$，$x_1x_2=\cos\frac{6\pi}{7}<0$。**因此两根异号，且正根大于负根的绝对值。又 y=arc tgx 是增函数，所以**

$$\operatorname{arc\,tg}x_1+\operatorname{arc\,tg}x_2\in(0,\ \frac{\pi}{2})$$

从而由(i)式可得

$$\operatorname{arc\,tg}x_1+\operatorname{arc\,tg}x_2=\frac{\pi}{14}$$

注　这里综合利用了反三角函数的性质，半角公式及韦达定理等。

例 4-3-3　求下列各式的值：

$(1)\sin(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3})+\cos(\operatorname{arc\,tg}2\sqrt{3})$

$(2)\operatorname{tg}\frac{1}{2}[\arcsin(-\frac{3}{5})-\arccos\frac{63}{65}]$

$(3)\lg\cos(\arcsin\frac{1}{2})+\lg\cos[\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6}))]-\lg\frac{3}{40}$

解 (1)**令**$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$，**则**$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$，**且**$\alpha\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，**故**

$$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{3}{5}$$

再令$\beta=\operatorname{arctg}2\sqrt{3}$，**则**$\operatorname{tg}\beta=2\sqrt{3}$，**且**$\beta\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，**故**

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$$

从而　原式$=\sin 2\alpha+\cos\beta=\dfrac{39+5\sqrt{13}}{65}$

(2)**令**$\alpha=\arcsin(-\frac{3}{5})$，**则**$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，**且**$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\ 0)$，**故**$\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

再令$\beta=\arccos\frac{63}{65}$，**则**$\cos\beta=\frac{63}{65}$，**且**$\beta\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，**故**$\sin\beta=\frac{16}{65}$.

再据

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{\pi}{2}<\alpha<0\\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-\frac{\pi}{2}<\alpha<0\\ -\frac{\pi}{2}<-\beta<0\end{array}\right\}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha-\beta}{2}<0$$

知　　原式$=\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=-\frac{11}{23}$

(3)因为

$$\lg\cos(\arcsin\frac{1}{2})=\lg\cos\frac{\pi}{6}=\lg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lg\cos[\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6}))]=\lg\cos\frac{\pi}{6}=\lg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以　　原式$=\lg\frac{\sqrt{3}}{2}+\lg\frac{\sqrt{3}}{2}-\lg\frac{3}{40}=\lg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{40}{3}\right)=1$

例 4-3-4　设 a，b，c 为△ABC 的三边，其中 $c^2=a^2+b^2$，求

$$\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}+\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}$$

的值.

解　由 $c^2=a^2+b^2$ 知△ABC 为直角三角形，c 为斜边.

令$\alpha=\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}$，则$\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}=\frac{c+a}{b}$，故$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{c+a}$.

类似地，令$\beta=\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}$，可得$\operatorname{tg}\beta=\frac{a}{c+b}$.

于是，

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{b}{c+a}+\frac{a}{c+b}}{1-\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}=1 \qquad \text{(i)}$$

因α，β∈$(0,\frac{\pi}{2})$，故$\alpha+\beta\in(0,\pi)$. 于是由(i)式得$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，从而

$$\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}+\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}=\frac{\pi}{4}$$

例4-3-5　动点P（x，y）满足方程$\arccos x-\arccos y=\frac{\pi}{2}$，试作出P点的轨迹图形.

解　由反余弦函数的定义知$-1\le x\le 1$,$-1\le y\le 1$,先证 $y\in[0,1]$.若 $y<0$，那么

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}+\arccos y>\pi$$

这与 $\arccos x\in[0,\pi]$予盾.

由 $y\in[0,1]$易知 $x\in[-1,0]$.

将已知等式变为$\arccos x=\frac{\pi}{2}+\arccos y$，再两边取余弦得

$$\cos(\arccos x)=\cos(\frac{\pi}{2}+\arccos y)\Rightarrow x=-\sin(\arccos y)$$

令$\beta=\arccos y$，则$\cos\beta=y$，且$\beta\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$，故$\sin\beta=\sqrt{1-y^2}$，从而，

$$x=-\sin\beta=-\sqrt{1-y^2}\Rightarrow x^2+y^2=1\quad x\in[-1,\ 0],\ y\in[0,\ 1]$$

因此 P 点轨迹如右上图所示，它是单位圆在第二象限的部分.

注　必须注意反三角函数的定义域与值域.

例 4-3-6　证明

(1)$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，$|x|\le 1$

(2)$\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{2}+\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{8}+\cdots+\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{2n^2}=\mathrm{arc\ tg}\frac{n}{n+1}$

解　(1)令$\alpha=\arcsin x$，则$\sin\alpha=x$，且$\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$，故

$$\frac{\pi}{2}-\alpha\in[0,\ \pi],\ x=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\Rightarrow\frac{\pi}{2}-\alpha=\arccos x$$

$$\Rightarrow\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

(2)对自然数k有

$$\mathrm{tg}\left(\mathrm{arc\ tg}\frac{k}{k+1}-\mathrm{arc\ tg}\frac{k-1}{k}\right)=\frac{\frac{k}{k+1}-\frac{k-1}{k}}{1+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k-1}{k}}=\frac{1}{2k^2}\qquad\text{(i)}$$

$\mathrm{arc\ tg}x$是增函数，$\frac{k}{k+1}>\frac{k-1}{k}\ge 0$，所以

$$0<\mathrm{arc\ tg}\frac{k}{k+1}-\mathrm{arc\ tg}\frac{k-1}{k}<\frac{\pi}{2}$$

由(i)式有

$$\mathrm{arc\ tg}\frac{k}{k+1}-\mathrm{arc\ tg}\frac{k-1}{k}=\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{2k^2}\qquad\text{(ii)}$$

由(ii)式有

$$\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{2}-\mathrm{arc\ tg}0=\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{arc\ tg}\frac{2}{3}-\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{2}=\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{8}$$

……………

$$\mathrm{arc\ tg}\frac{n}{n+1}-\mathrm{arc\ tg}\frac{n-1}{n}=\mathrm{arc\ tg}\frac{1}{2n^2}$$

将这些式子统统相加得证所要式子.

习题

4-3-1　求值：

$(1)\cos[\arcsin x+\arccos x+\arcsin(-\frac{\pi}{7})]$，$|x|\leq 1$

$(2)\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}$

$(3)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b})+\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b})$

4-3-2　已知(a+1)(b+1)=2，那么arc tga+arc tgb=　[　　].

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

4－3－3　证明：$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

4－3－4　证明：$\sin\{\arccos[\operatorname{tg}(\arcsin x)]\}=\sqrt{\frac{1-2x^2}{1-x^2}}$

4－3－5　在$\triangle ABC$**中，**$B=\operatorname{arc\,tg}3$，$C=\operatorname{arc\,tg}2$，$b=60\sqrt{5}$，**则**$a=$__________.

4－3－6　设$\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\cos\alpha}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\cos\alpha}=x$，**证明：**$\sin x=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

4－3－7　如果$\arccos\frac{7}{25}=\arcsin(3x-1)-\operatorname{arc\,tg}(2y+3)$，**那么**$xy=$__________.

4－3－8　设直角三角形的斜边为c**，两直角边为**a**与**b**，且**$\arcsin\frac{1}{a}+\arcsin\frac{1}{b}=\frac{\pi}{2}$**，求**$\lg c-\lg a-\lg b$**的值．**

4－3－9　函数$y=\frac{3}{\arccos x}+\frac{\arccos x}{3}$**有**　[　　].

A．**最小值为**2**，无最大值**　　B．**最小值为**2**，最大值为**3

C．**最小值**$\frac{3}{\pi}+\frac{\pi}{3}$　　D．**无最大值，也无最小值**

4－3－10　已知$\arcsin(\sin\alpha+\sin\beta)+\arcsin(\sin\alpha-\sin\beta)=\frac{\pi}{2}$，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta$**的值．**

(四)简单的三角方程

提要

(1)最简单的三角方程的解

①设方程 $\sin x=\alpha$ 的解集为 M_1，那么

当 $|a|>1$ 时，$M_1=\varnothing$.

当 $|a|<1$ 时，$M_1=\{x|x=k\pi+(-1)^k\arcsin a,k\in Z\}$.

当 $a=1$ 时，$M_1=\left\{x|x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$.

当 $a=-1$ 时，$M_1=\left\{x|x=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$.

②设方程 $\cos x=a$ 的解集为 M_2，那么

当 $|a|>1$ 时，$M_2=\varnothing$.

当 $|a|<1$ 时，

$M_2=\{x|x=2k\pi+\arccos a,k\in Z\}\cup\{x|x=2k\pi-\arccos a,k\in Z\}$.

当 $a=1$ 时，$M_2=\{x|x=2k\pi,k\in Z\}$.

当 $a=-1$ 时，$M_2=\{x|x=(2k+1)\pi,k\in Z\}$.

③设方程 $\mathrm{tg}x=a$ 的解集为 M_3，那么

$M_3=\{x|x=k\pi+\mathrm{arc\ tg}a,k\in Z\}$.

④设方程 $\mathrm{ctg}x=a$ 的解集为 M_4，那么

$M_4=\{x|x=k\pi+\mathrm{arc\ ctg}a,k\in Z\}$.

(2)同名三角方程的解

①设方程 $\sin x=\sin a$ 的解集为 M_5，那么

$M_5=\{x|x=k\pi+(-1)^k a,k\in Z\}$.

②设方程 $\cos x=\cos a$ 的解集为 M_6，那么

$M_6=\{x|x=2k\pi+a,k\in Z\}\cup\{x|x=2k\pi-a,k\in Z\}$.

③设方程 $\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}a$ 的解集为 M_7，那么

$M_7=\{x|x=k\pi+a,k\in Z\}$.

(3)设方程 $a\sin x=b\cos x=c(ab\neq 0)$ 的解集为 M_8，那么

①当 $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|>1$ 时，$M_8=\varnothing$.

②当 $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$ 时，原方程可变为

$$\sin(x+\theta)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\left(\theta=\mathrm{arc\ tg}\frac{b}{a}\right)$$

从而转化为上面最简单的三角方程.

(4)解简单三角方程应熟记上述解的公式．此外，经常会用到下面一些方法：因式分解法；换元法；两边乘方；两边同时乘除某一因式等．通

过这些方法可将原三角方程转化为最简单三角方程，从而得出解．两边平方或两边同时乘(除)以某一因式，一定要验根，以防增根或失根．

例题

例 4-4-1　解下列方程

$(1)3-8\sin^2 x+6\cos x=0$　　$(2)\sin x-\cos x=\sqrt{2}$

$(3)8\sin^2\frac{x}{2}+3\sin x-4=0$　　$(4)\sin 3x=2\sin x\cos x$

解　(1)原方程 $\Leftrightarrow 8\cos^2 x+6\cos x-5=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(4\cos x+5)=0 \Leftrightarrow 2\cos x-1=0$ 或 $4\cos x+5=0$(舍去)

$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

原方程解集为 $\left\{x|x=2k\pi+\frac{\pi}{3}，k\in Z\right\}\cup\left\{x|x=2k\pi-\frac{\pi}{3}，k\in Z\right\}$．

(2)原方程 $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})=1$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

原方程解集为 $\left\{x|x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}，k\in Z\right\}$．

(3)因为 $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$，原方程可变为

$$3\sin x-4\cos x=0 \qquad (i)$$

易知 $\cos x\neq 0$，否则 $\cos x=0$，由方程(i)得 $\sin x=0$，但这样的 x 不存在，所以可将(i)两边同除以 $\cos x$ 得同解方程

$$\operatorname{tg}x=\frac{4}{3}$$

因此原方程解集为

$$\left\{x|x=k\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}，k\in Z\right\}$$

(4)　原方程 $\Leftrightarrow \sin 3x=\sin 2x \Leftrightarrow 3x=k\pi+(-1)^k 2x$

$\Leftrightarrow 3x=2k\pi+2x$ 或 $3x=(2k+1)\pi-2x$

原方程解集为 $\left\{x|x=2k\pi \text{ 或 } x=\frac{2k+1}{5}\pi，k\in Z\right\}$

注　解(1)时用因式分解法把原三角方程化为两个最简单三角方程求解．解(3)时先用半角公式，再两边同除 cosx，并讨论了 cosx 是否可能为 0 的情况，以免失根．解(4)时，化为同名三角方程．解(2)时，是化为 asinx+bcosx=c 来求解．

例 4-4-2　解方程

$(1)\dfrac{\cos 2x}{\cos x\cos 3x}+\dfrac{1}{2\cos^2 x}=0$

$(2) 2\sin 2x \cdot \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}-\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=2\sin 2x-1$

$(3) \sin^6 x+\mathrm{cox}^6 x=2\sin x\cos x$

解　(1)去分母原方程变为

$2\cos^2 2x+\cos x\cos 3x=0$

由于$\cos x\cos 3x=\dfrac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)=\dfrac{1}{2}[(2\cos^2 2x-1)+\cos 2x]$**，原方程**

$(1)\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right]$

$(2)\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})](|x|<1)$

$6\cos^2 2x+\cos 2x-1=0\Leftrightarrow(3\cos 2x-1)(2\mathrm{cox}2x+1)=0$

$\Leftrightarrow\cos 2x=\dfrac{1}{3}$**或**$\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$

经检验知原方程解集为$\left\{x|x=k\pi\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}\text{或}x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}，k\in Z\right\}$**.**

(2)**移项，再因式分解原方程可变为**

$(2\sin 2x-1)(\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}-1)=0\Leftrightarrow\sin 2x=\dfrac{1}{2}$**或**$\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=1$

原方程解集为$\left\{x|x=\dfrac{k\pi}{2}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}\text{或}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}，k\in Z\right\}$**.**

(3)**因为**$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x$

所以　原方程$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+4\sin 2x-4=0$

$\Leftrightarrow\sin 2x=\dfrac{2}{3}$**或**$\sin 2x=-2$(**舍去**)

原方程解集为$\left\{x|x=k\pi+(-1)^k\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2}{3}，k\in Z\right\}$**.**

例4－4－3　解方程：

$(1)\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$

$(2)\mathrm{tg}x+ab\mathrm{ctg}x=a+b$

解　(1)**令**$t=\sin x+\cos x$**，可得**$\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}(t^2-1)$**．于是**

原方程$\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow t=1$**或**$t=-3$(**舍去**)

由$t=\cos x+\sin x=1$**得**

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}$$

原方程解集为$\left\{x|x=2k\pi\text{或}x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}，k\in Z\right\}$.

(2)令$u=tgx$，则

原方程$\Leftrightarrow u^2-(a+b)u+ab=0\Leftrightarrow u=a$或$u=b$

原方程解集为 {x|x=kπ+arc tga 或 x=kπ+arc tgb，k∈Z} .

注　本例用换元法先把三角方程化为代数方程求解.再得出最简单三角方程，并求解.

例 4-4-4　解方程：

$(1)\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}=\cos x$　　　$(2)\arccos x-\arcsin x=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解　(1)两边平方并整理可得

$$2\cos^2x-\cos x-1=0\Leftrightarrow(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$$

$\Leftrightarrow 2\cos x+1=0$或$\cos x=1$

因$\cos x=-\dfrac{1}{2}$不合原方程，舍去.所以原方程的解集为

{x|x=2kπ，k∈Z} .

(2)两边取余弦，原方程变为

$$\cos(\arccos x-\arcsin x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

令$\alpha=\arccos x(0\leq\alpha\leq\pi)$，则$\cos\alpha=x$，故$\sin\alpha=\sqrt{1-x^2}$.

再令$\beta=\arcsin x(|\beta|\leq\dfrac{\pi}{2})$，则$\sin\beta=x$，故$\cos\beta=\sqrt{1-x^2}$.

于是，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=2x\sqrt{1-x^2}$$

两边平方，并整理得

$$x^4-x^2+\frac{3}{16}=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\text{或}x^2=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\text{或}x=-\frac{1}{2}(\text{舍去})\text{或}x=\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{舍去})\text{或}x=-\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{舍去})$$

原方程解集为$\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

注　本例由于两边平方，因此必须注意验根，以防增根.

例 4-4-5　当 a 为何值时,方程 $\sin^2x+\cos x+a=0$ 一定有解？若 a=1,解此方程.

解　原方程$\Leftrightarrow\cos^2x-\cos x-(a+1)=0$

设$\cos x=t$，方程(i)变为

$$t^2-t-(a+1)=0\qquad\text{(i)}$$

令$f(t)=t^2-t-(a+1)$，则

$f(t)=(t-\frac{1}{2})^2-(a+\frac{5}{4})$

把(i)看作t的二次方程，其有解的必要条件是其判别式非负，即

$\Delta=1+4(a+1)\geq 0\Leftrightarrow a\geq -\frac{5}{4}$

但$|t|\leq 1$，抛物线$f(t)$关于$t=\frac{1}{2}$是对称的，且开口向上，因此如果$f(-1)<0$，那么

$f(t)<0\quad (|t|\leq 1)$

这时方程(i)无解，从而原方程无解，因此 $f(-1)\geq 0$，即

$(-1)^2-(-1)-(a+1)\geq 0\Leftrightarrow a\leq 1$

又已证$a\geq -\frac{5}{4}$，从而知，当$a\in[-\frac{5}{4}，1]$时，原方程无解．

当 a=1 时，

原方程 $\Leftrightarrow \cos^2 x-\cos x-2=0\Rightarrow(\cos x+1)(\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow \cos x=-1$或$\cos x=2$(舍去)

此时原方程解集为 $\{x|x=(2k+1)\pi，k\in Z\}$．

例 4-4-6　已知 $\sin^2(n+1)x=\sin^2 nx+\sin^2(n-1)x$，其中$(n+1)x$，$nx$，$(n-1)x$ 是三角形的三个内角，求 n 的整数值及三内角．

解　由假设有

$$(n+1)x+(n-1)x+nx=\pi\Leftrightarrow nx=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3n}\qquad\text{(i)}$$

于是　$\sin^2(n+1)x=\sin^2 nx+\sin^2(n-1)x$

$\Leftrightarrow \sin^2(n+1)x-\sin^2(n-1)x=\sin^2 nx$

$\Leftrightarrow \sin 2nx\sin 2x=\sin^2 nx\Leftrightarrow \sin 2x\sin\frac{2\pi}{3}=\sin^2\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow 2x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$

$$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}\qquad\text{(ii)}$$

由(i)，(ii)得

$$\frac{\pi}{3n}=\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow n=\frac{2}{3k+(-1)^k}\qquad\text{(iii)}$$

因为 n 为大于 1 的整数，而 k 为整数，由(iii)易知

$3k+(-1)^k=1\Leftrightarrow k=0$

从而$n=2$．这时，三角形三内角分别为$\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}$．

习题

4-4-1　解方程：

(1)$\cos 2x+\sin x=0$

(2)$\mathrm{tg}ax\cdot\mathrm{tg}bx=1$

(3)$3\sin x-4\cos x=1$

(4) $\sin^3x-\sin^2x\cos x-3\sin x\cos^2x+3\cos^3x=0$

4-4-2　解方程：

(1) $\log_2\sin x\cos x=-1$

(2) $7\cos^2x+3\sin^2x=13\cos x$

(3) $\sin^3x+\cos^3x=\cos x$

项a_n的关系时，由公式$a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$求出该数列的通项．如果所

4－4－5　求函数$y=\dfrac{\sin^2x-3\sin x+3}{2-\sin x}$的最值．

4－4－6　在$\triangle ABC$中，$A=30°$，$a=4$，$b=4\sqrt{3}$，解此三角形．

4－4－7　方程$\dfrac{1+\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x+\cos 2x}=\dfrac{7}{2}$的解集为　　　　[　　]．

A．$\varnothing$　　　　B．$\{x|x=2k\pi+\mathrm{arc\,tg}\dfrac{7}{2}\}$

C．$\{x|x=k\pi+\mathrm{arc\,tg}\dfrac{7}{2}\}$　　D．$\{x|x=k\pi+(-1)^k\mathrm{arc\,tg}\dfrac{7}{2}\}$

4－4－8　设a是实数，若方程$2\sin 2x-3\cos^2x=a$有实数解，求a的取值范围，并求解．

4-4-9　求 $x\in(0，2\pi)$，满足方程

(1) $\mathrm{tg}(\dfrac{\pi}{4}-x)+\mathrm{ctg}(\dfrac{\pi}{4}-x)=4$　　(2) $\cos 2x=\cos x+\sin x$

4-4-10　若a是实数，证明：不存在满足方程$\sin x=a+\dfrac{1}{a}$的x的值．

4-4-11　解方程 $\cos^nx-\sin^nx=1$，其中 n 为自然数．

第五部分　不等式

(一)不等式和它的性质

提要

不等式是在实数集里研究联系顺序与运算的比较关系．不等式理论的基础是不等式的性质，其中最基本的性质是：

(1)不等的对逆性：$a>b \Leftrightarrow b<a$

(2)不等的传递性：$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$

(3)不等的比差性质：$a>b \Leftrightarrow a-b>0$，$a<b \Leftrightarrow a-b<0$

(4)加法单调性：$a>b \Rightarrow a+c>b+c$

(5)乘法单调性：

$a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$

$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$

(6)含绝对值的不等式的性质：

$|a|<b \Rightarrow -b<a<b(b>0)$

$|a|>b \Rightarrow a<-b$或$a>b(b>0)$

不等式的其他性质，都可以由这些性质推导出来，直接应用不等式性质解答的问题主要有:概念辨析、命题判断、大小比较、性质引申等．在解决这些问题时，应注意借鉴解方程和证恒等式的方法，同时更应看到其差别，还应知道相等关系是不等关系的特定状态，不等关系是相等关系的发展，因而要注意思想方法的开拓和思维层次的提高．

例题

例 5-1-1　下列判断是否正确，为什么？

(1)a≥b 就是 a>b 或 a=b；

(2)已知不等式组：

①a>b 与 b<a；②a>b 与 c>d；③a>b 与 b≥c；④a<b 与 b<c．它们都是同向不等式．

(3)两个同向不等式两边分别相乘，所得不等式与原不等式同向．

(4)由乘法单调性

$a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$

施行条件和结论的等数交换可以得到两个真命题：

$ac>bc$，$c>0 \Rightarrow a>b$

$ac>bc$，$a>b \Rightarrow c>0$

解　(1)正确．a≥b 是 a<b 的否定．根据三分律，a<b 的否定即为 a>b 或 a=b．

(2)不正确．只有②，④是同向不等式；①是异向不等式；③既不是同向的也不是异向的不等式．

(3)不正确．例如-2>-5 与 4>-1，两边分别相乘得-8<5，它与原不等式方向相反．

(4)正确．事实上，

$$\left.\begin{array}{l} ac > bc \\ c > 0 \Rightarrow \frac{1}{c} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (ac)\frac{1}{c} > (bc)\frac{1}{c}\text{(乘法单调法)}$$

$$\Rightarrow a(c \cdot \frac{1}{c}) > b(c \cdot \frac{1}{c})\text{(乘法结合律)}$$

$$\Rightarrow a \cdot 1 > b \cdot 1 \Leftrightarrow a > b$$

$$\left.\begin{array}{l} ac > bc \Rightarrow ac - bc > 0 \Rightarrow (a-b)c > 0 \\ a > b \Rightarrow a - b > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c > 0$$

注　三分律是；对于任意 a，b∈R，a>b，a=b，a<b 三者有且仅有一种成立.

例 5-1-2　判断下面各命题的真假，并说明理由：

(1)$a > b$，$c > d \Rightarrow a + c > b + d$

(2)$a > b$，$c < d \Rightarrow a - c > b - d$

(3)$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(4)$a > b \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$($n \in N$**且**$n > 1$)

解　(1)**真．因为**

$a > b \Rightarrow a + c > b + c$(**加法单调性**)

$c > d \Rightarrow b + c > b + d$(**加法单调性、交换律**)

所以　a+c>b+d(不等式的传递性)

注　这个命题给出了不等式相加法则.

(2)真．事实上，

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ c < d \Rightarrow -c > -d \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a + (-c) > b + (-d)\text{(不等式相加法则)}$$

$$\Rightarrow a - c > b - d$$

注　这个命题给出了不等式相减法则．注意：两同向不等式不能依项相减.

(3)真．事实上，

$$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 0 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

注　这个性质叫做不等式取倒数法则.

(4)**假。例如，当**$b < 0$**且**n**为偶数时，**$\sqrt[n]{b}$**无意义。**

注　在(4)中，如果加强条件，便可得到一个真命题：

$a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$($n \in N$**且**$n > 1$)

就是说，在非负数范围内，不等式两边取同次算术根的运算保持不等号方向不变.

例 5-1-3　比较大小：

(1)$\frac{1}{1+a}$与$1-a$，其中$a\neq 0$；

(2)$\frac{b-c}{a}$与$\frac{a-c}{b}$，其中$a>b>c>0$；

(3)$\frac{b}{a}$与$\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}$，其中$a>b>0$；

(4)a^4-b^4与$2(a^3b-ab^3)$，其中$a>b>0$.

解　(1)根据不等的比差性质，作差比较：

因$\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}$，而$a\neq 0$，故当$1+a>0$时，即$a>-1$时，$\frac{a^2}{1+a}>0$，从而$\frac{1}{1+a}>1-a$；当$1+a<0$，即$a<-1$时，$\frac{a^2}{1+a}<0$，从而$\frac{1}{1+a}<1-a$.

(2)[法一]作差比较：

$$\because \frac{b-c}{a}-\frac{a-c}{b}=\frac{b(b-c)-a(a-c)}{ab}=\frac{(b-a)(a+b-c)}{ab}<0$$

$$\therefore \frac{b-c}{a}<\frac{a-c}{b}$$

[法二]

$$\left.\begin{array}{l} a>b>c>0\Rightarrow a-c>b-c>0 \\ \frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a-c}{b}>\frac{b-c}{a}$$

(3)作平方差比较：因 a＞b＞0，故

$$\left(\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{(a-b)(a+b)}{a^2(1+a^2)}>0$$

所以$\left(\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}\right)^2>\left(\frac{b}{a}\right)^2$，从而$\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}>\frac{b}{a}$.

(4)比较两数(式)的大小，还可根据以下性质作商比较：

$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$，$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b(a，b\in R^+)$

因为$a>b>0$，已知的两式为正，故可作商比较：

$$\because \frac{a^4-b^4}{2(a^3b-ab^3)}=\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{2ab(a^2-b^2)}=\frac{a^2+b^2}{2ab}>1$$

$$\therefore a^4-b^4>2(a^3b-ab^3)$$

注　(i)对于(1)，要注意分类讨论，防止默认 1+a＞0 而导致错误结论；

(ii)(2)的法二推导用到同向不等式相乘法则；

(iii)(3)中间接应用比差性质，先作平方差确定正负，再通过命题$x^2>y^2\Leftrightarrow x>y(x，y\geq 0)$得出结果．注意这个命题只有在非负实数集合里才能使用；

(iv)作商比较法只能在正实数范围内进行.

例5-1-4　不等式$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$成立，当且仅当　　　　[　　].

A. a＞b＞0，a≠b　　　　B. a＜0，b＜0，a≠b

C. ab＞0，a≠b　　　　D. ab≠0，a≠b

解　C　事实上，

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2=\frac{(a-b)^2}{ab}>0\Leftrightarrow ab>0,\ a\neq b$$

注　这个不等式应用频繁，要注意使其成立的条件．如果去掉条件a≠b，会得到更一般的不等式

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2(ab>0)$$

例5-1-5　已知a，b，c，d为正数，且$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.

(1)比较$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，$\frac{a+c}{b+d}$三者的大小；

(2)当$b>d$时，确定$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$中哪个更接近于$\frac{a+c}{b+d}$.

解　(1)由题设易知 ad-bc＜0，于是，

$$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{ad-bc}{b(b+d)}<0,\quad \frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{bc-ad}{d(b+d)}>0$$

所以　$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

(2)只需要比较$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$分别与$\frac{a+c}{b+d}$的差的绝对值之大小．又由(1)知，只需比较|b(b+d)|与|d(b+d)|，即 b(b+d)与 d(b+d)的大小．因 b＞d，故

b(b+d)-d(b+d)=(b-d)(b+d)＞0

故 b(b+d)＞d(b+d)，注意到 ad-bc＜0，于是，

$$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}<\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}$$

即$\frac{a}{b}$更接近于$\frac{a+c}{b+d}$.

注　对于(2)，读者可进一步分析 b=d 及 b＜d 的情形.

例5-1-6　设$a>0$，$b>0$．若用x表示a和$\frac{b}{a^2+b^2}$中的较小者(a与$\frac{b}{a^2+b^2}$相等时，$x=a$)．试问：x是否存在最大值？如果存在，求出其最大值及存在最大值的条件.

解　由$a^2+b^2\geq 2ab$及$ab>0$根据取倒数法则及乘法单调性可推得$\frac{ab}{a^2+b^2}\leq\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，于是，

当$a \geq \frac{b}{a^2+b^2}$时，取$x=\frac{b}{a^2+b^2}$，则

$$x^2 \leq \frac{ab}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

当且仅当$a=b$且$a=\frac{b}{a^2+b^2}$，即$a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，上式中的等号同时成立．

当$\frac{b}{a^2+b^2} > a$时，取$x=a$，则

$$x^2 < \frac{ab}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

由上面的讨论可知，当且仅当$a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，x有最大值$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

习题

5-1-1　回答下列问题：

(1)在复数集内可以研究不等式吗？为什么？

(2)在非负实数集内，对不等式两边取同次算术根，不等号方向不变吗？在负实数集内，对不等式两边开相同奇次方呢？

5-1-2　判断下列各命题的真假，并说明理由．

(1)若 $a>b$，$c=d$，则 $ac>bd$；

(2)若 $ac\geq bc$，则 $a\geq b$；

(3)若 $ac^2<bc^2$，则 $a<b$；

(4)若$\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$，则$a<b$．

5－1－3　若$a<b<0$，能不能断定：

(1)$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$?如果条件改为$a<1<b$呢？

(2)$a<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

(3)$a^n<b^n(n\in N)$，如果n为奇数呢？

(4)$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}>\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$　　(n为奇数)

5－1－4　比较大小(用不等号填空)：

(1)$\frac{a^2+b^2}{2}$______$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，其中$a\neq b$；

(2)$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$______$a+b$，其中$a>0$，$b>0$，$a\neq b$；

(3)a^3-b^3______a^2b-ab^2，其中$a>b$；

(4)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$______$\frac{4}{a+b}$，其中$a>0$，$b>0$．

5-1-5　判断下列各命题的真假，并说明理由．

(1)若 $a>0$，$b>0$，则 $(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)\geq 8a^3b^3$；

(2)若 a，b，$c\in R$，则 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>abc(a+b+c)$；

(3)若 $a\neq 1$，则 $a^2-a+1>a$；

(4)若 a，b，c∈R，则 $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$．

5-1-6　指出以下两个命题中的推导错在哪里？

(1)若 ac＜ab，bc＜ab，c＞0，则 a＜b；

证　由 ac＜ab，bc＜ab 依项相减，得

$ac-bc<ab-ab \Leftrightarrow (a-b)c<0$

又 c＞0，故 a-b＜0 即 a＜b．

(2)若 a，b，c，d∈R^+，且 a＞b，a＞c，则 b＜c．

证　由 $a>b$，$a>c$ 分别相除，得 $\frac{a}{a}>\frac{b}{c}$，即 $\frac{b}{c}<1$，从而 $b<c$．

5-1-7　判断下列各命题的真假，并说明理由．

(1) $a>b$，$c>d$，$a>0$，$d>0 \Rightarrow ac>bd$

(2) $a>b$，$c>d$，$a<0$，$d<0 \Rightarrow ac<bd$

(3) $a>b$，$c<b$，$a>0$，$c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

(4) $a>b$，$c<d$，$a<0$，$d<0 \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

5-1-8　在给定条件下，比较两式的大小(用不等号填空)：

(1)已知 $1<x<2$，则 $\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}$____$\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$；

(2)已知 $x>1$，则 x^2-x+1____$x^{-\ln x}$；

(3)已知 $a>b>0$，$0<x<\frac{\pi}{4}$，则 $a\lg\sin x$____$b\lg\cos x$；

(4)已知 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，$a>b>0$，则 $f(a)$____$f(b)$．

5-1-9　已知 $a=\sin^2\alpha-\sqrt{1-\sin\alpha}$，$b=\sqrt{1-\cos\alpha}-\cos^2\alpha$，则 a 与 b 的关系是　　　　[　　]．

A．a＞b+1　　　　B．a≥b+1

C．a＜b+1　　　　D．a≤b+1

5-1-10　若 x＞1，$f(x)=\lg x+\log_x 10$，$g(x)=-x^2+x+2$，则　　　　[　　]．

A．f(x)＞g(x)　　　　B．f(x)≥g(x)

C．f(x)＜g(x)　　　　D．f(x)与 g(x)的大小关系不确定

5-1-11　若 m，n∈N，则 m+n＞mn 成立当且仅当　　　　[　　]．

A．m=1 且 n=1　　　　B．m=1 或 n=1

C．m≠n 或 m=n=1　　　　D．m≠2，n≠2，或 m=n=1

5-1-12　若 $-\pi<\alpha<\beta<\pi$，则下列各式中恒成立的是　　　　[　　]．

A．$-2\pi<\alpha-\beta<0$　　　　B．$-2\pi<\alpha-\beta<-\pi$

C．$-\pi<\alpha-\beta<\pi$　　　　D．$-\pi<\alpha-\beta<0$

5-1-13　比较大小(用不等号填空)：

(1) $\left(\frac{b}{\sqrt{a}}+a\right)^3-\left(\frac{b}{\sqrt{a}}-a\right)^3$ ______ $2a^3+5b^2$，其中$b\neq 0$；

(2) $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ______ $\sqrt{2}$，其中$a>0$，$b>0$．

5-1-14　已知 a，b 是方程 $4x^2+4px+(m+n)^2=0$ 的两个正根，c，d 是方程$x^2+px+mn=0(m，n>0，m\neq n)$的两个正根．试比较$\sqrt{a}+\sqrt{b}$与$\sqrt{c}+\sqrt{d}$的大小．

5-1-15　设α，β是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个实根，且|α|<1，|β|<1，q>-1．试比较-(1+q)，p，1+q 的大小．

5–1–16　已知$f(x)\frac{1}{x}-\sqrt{x}$，a，b∈R^+，试比较

$$A=f\left(\frac{a+b}{2}\right)，B=f\left(\sqrt{ab}\right)，C=f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

的大小．

5-1-17　求使$n<\frac{1}{\log_3\sqrt[5]{10}}+\frac{1}{\log_5\sqrt[3]{10}}<n+1$成立的自然数n．

5-1-18　求使

$$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$$

成立的实数，a，b，c 应具备的条件．

5-1-19　已知a，b，c是一个三角形的三边，试问：$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$是否构成一个三角形的三边．

5-1-20　设 a，b∈R^+，集合 A={x||a-b|<x<a+b}，集合 B={x|$\sqrt{|a^2-b^2|}<x<\sqrt{a^2+b^2}$}．试判断A与B的关系(包含、相交、相离)．

(二)不等式的证明

提要

不等式的证明，一般是指根据不等式的性质，证明给定的不等式对于式中字母的一切容许值都成立．由于不等式的形式以及在证明中所采用的方法都是多种多样的，所以不可能建立证明不等式的一般方法，我们只能结合中学教学实际，通过具有代表性的例子，来说明一切基本方法和常用技巧．

(1)比较法　比较法通常是指作差比较法和作商比较法．作差比较法的步骤是作差、变形、判断正负；其变形过程往往要用到因式分解和配方等手段．作商比较法只适用于不等式两边的代数式均为正值的情形；其步骤是作商、变形、判断商大于 1 或小于 1，此法往往要用到函数的单调性．

(2)分析法与综合法　分析法的特点是从要证明的结论出发，逐步寻找使结论成立的充分条件，如果最后得到题设条件，或已知其成立的命题，那么就可以断定所要证明的命题是成立的．综合法与分析法相反，是从题设条件出发，直接应用已知性质或已知其成立的命题，逐步推导出要证明的结论．在问题的研究过程中，分析法与综合法常常是交互使用的．分析顺乎思考，综合便于表述，二者相辅相成．

(3)反证法　反证法的特点是从否定结论出发，经过逻辑推理，导出矛盾，证实结论的否定是错误的，从而肯定原结论是正确的．

(4)数学归纳法　与自然数有关的不等式，如果不易找到简捷直接的证明方法，可考虑数学归纳法证明．有关数学归纳法的论述和应用，将在本书第六部分中介绍．

(5)变量代换法　变量代换是指对结构较为复杂、变量间关系不甚明了的命题，通过适当引入新变量，代替原题中的部分式子，简化原有结构，使其化为便于研究的形式．变量代换法是不等式证明中的常用技巧，如三角代换、对称代换、比值代换、增量代换等．

(6)放缩法　放缩法也是不等式证明的常用方法或技巧．其特点是：欲证 $A\geq B$，，可通过适当放大 B 或缩小 A，先证明一个更强的不等式．其实质是依次证明 $B\leq B_1$，$B_1\leq B_2$，…，$B_i\leq A$，或 $A\geq A_1$，$A_1\geq A_2$，…，$A_i\geq B$，从而利用传递性，达到欲证目的．运用此法的关键是放缩适度，放得过大或缩得过小，都不能达到目的．

1．不等式证明的基本依据(性质、比较、重要不等式)

例题

例 5-2-1　求证：

(1)若 $x\neq 1$，则 $x^4+6x^2+1>4x(x^2+1)$；

(2)若 $a\neq 1$，$b\neq 1$，则 $a^2+b^2+ab+3>3(a+b)$；

(3)若 $a<b\leq 0$，则 $a^3-b^3<ab^2-a^2b$．

解　(1)采用比差法：

$(x^4+6x^2+1)-4x(x^2+1)$　　　　(作差)

$=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$　　　　(变形)

$=(x-1)^4>0$　　　　　　　　　　（判断正负）

所以　$x^4+6x^2+1>4x(x^2+1)$

(2) $(a^2+b^2+ab+3)-3(a+b)$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2ab-6a-6b+6)$$

$$=\frac{1}{2}[(a-1)^2+(b-1)^2+(a+b-2)^2]>0$$

所以　$a^2+b^2+ab+3>3(a+b)$

(3) $(a^3-b^3)-(ab^2-a^2b)=(a^3-ab^2)+(a^2b-b^3)$

$=a(a^2-b^2)+b(a^2-b^2)=(a+b)^2(a-b)$

而 $a<b\leq 0$，所以 $a-b<0$，$(a+b)^2>0$，所以

$$(a^3-b^3)-(ab^2-a^2b)<0\Leftrightarrow a^3-b^3<ab^2-a^2b$$

注　用比差法时，常把差变形为一个偶次方或几个偶次方的和的形式；有时把它变形为几个因式的积的形式，以便于判断其正负．

例 5-2-2　若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，求证：

(1) $a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geq a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$；

(2) $a^ab^bc^c\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$．

解　(1)由对称性，不妨设 $a\geq b\geq c$，那么，由指数函数的性质，有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\geq 1，\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\geq 1，\left(\frac{c}{a}\right)^{c-a}\geq 1$$

三式分边相乘，得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^{c-a}\geq 1$$

于是，

$$\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}=\left(\frac{a^a}{b^a}\cdot\frac{b^b}{a^b}\right)\left(\frac{b^b}{c^b}\cdot\frac{c^c}{b^c}\right)\left(\frac{a^a}{c^a}\cdot\frac{c^c}{a^c}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^{c-a}\geq 1$$

所以　$a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geq a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$

(2)不妨设 $a\geq b\geq c\geq 0$，那么由指数函数的性质，有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\geq 1，\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\geq 1，\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{c-a}{3}}\geq 1$$

所以　$$\frac{a^ab^bc^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=a^{\frac{a-b}{3}+\frac{a-c}{3}}b^{\frac{b-c}{3}+\frac{b-a}{3}}c^{\frac{c-a}{3}+\frac{c-b}{3}}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{c-a}{3}}\geq 1$$

注　不能随意使用“不妨设”。本例(1)、(2)中采用“不妨设”的合理性在于 a，b，c 的地位是平等的，即它们具有对称轮换性。

例 5-2-3　求证：

(1)若$d>c>a>1$，且$\frac{b}{a}\geq\frac{d}{c}$，则$\log_a b>\log_c d$；

(2)若$1<x<10$，则$\lg x^2>(\lg x)^2>\lg(\lg x)$；

(3)若$1<x<10$，则$\log_2(\lg x)<\lg x<\log_2(x+\frac{1}{x})$。

解 (1)因$a>b$，且$\frac{b}{a}\geq\frac{d}{c}$，故

$\log_a\frac{b}{a}\geq\log_a\frac{d}{c}$　　(对数函数的性质)

又$c>a>1$，$\frac{d}{c}>1$，故

$\log_a\frac{d}{c}>\log_c\frac{d}{c}$　　(对数函数的性质)

所以 $\log_a\frac{b}{a}>\log_c\frac{d}{c}$　　(不等的传递性)

$\Rightarrow\log_a b-1>\log_c d-1$　　(对数的运算性质)

$\Rightarrow\log_a b>\log_c d$　　(加法单调性)

(2)因 $1<x<10$，$0<\lg x<1$。于是

$\log x^2-(\lg x)^2=\lg x(2-\lg x)>0$

$\Rightarrow\lg x^2>(\lg x)^2>0$

又由 $0<\lg x<1$，知 $\lg(\lg x)<0$，所以

$\lg x^2>(\lg x)^2>\lg(\lg x)$

(3)因 $1<x<10$，故 $0<\lg x<1$，从而 $\log_2(\lg x)<0$。又因为 $x+\frac{1}{x}>2$，故$\log_2(x+\frac{1}{x})>1$。所以

$\log_2(\lg x)<\lg x<\log_2(x+\frac{1}{x})$

注 (1)中引入$\log_c\frac{d}{c}$参予比较，实质上是在利用不等式的传递性。(2)、(3)中引入 0 和 1 参予比较。这是不等式证明中的常用手段。

例 5-2-4 设 a，b∈R，证明：

(1)若$|a|\neq|b|$，则$\frac{|a|-|b|}{|a-b|}\leq\frac{|a|+|b|}{|a+b|}$；

(2)若$|a|<1$，$|b|<1$，则$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$。

解 (1)对于 a，b∈R，我们有不等式

$|a|-|b|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

依题设$|a|\neq|b|$，$|a-b|\neq0$，$|a+b|\neq0$，从而由上式可得

$\frac{|a|-|b|}{|a-b|}\leq1$，$\frac{|a|+|b|}{|a+b|}\geq1$

所以 $\frac{|a|-|b|}{|a-b|}\leq\frac{|a|+|b|}{|a+b|}$

注　证含绝对值的不等工，关键在于合理地利用绝对值的概念及其和、差、积、商的性质。

(2)原不等式等价于

$$-1<\frac{a+b}{1+ab}<1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{1+ab}+1>0\text{且}\frac{a+b}{1+ab}-1<0 \qquad (\text{加法单调性})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{1+ab}+1\right)\left(\frac{a+b}{1+ab}-1\right)<0 \qquad (\text{乘法单调性})$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+a)(1+b)(a-1)(1-b)}{(1+ab)^2}<0$$

因为|a|<1，|b|<1，所以

1+a>0，1+b>0，a-1<0，1-b>0

又|ab|=|a|·|b|<1，故 1+ab>0。于是，最后不等式成立，从而原不等式成立。

例 5-2-5　证明：

(1)若 a>0，m，n∈N，且 m>n，则

$$\left(1+\frac{a}{m}\right)^m>\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

(2)若 a>0，b>0，n∈N，且 n≠1，则

$$\frac{a^n+b^n}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

当且仅当 a=b 时取“=”；

(3)对于 n∈N，若 α>-1，则 $(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha$。

解　(1)原不等式可等价地变为

$$m+a>m\sqrt[m]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n}$$

因为 $m+a=n\left(1+\frac{a}{n}\right)+(m-n)\times 1$，且 $1+\frac{a}{n}\neq 1$，所以

$$m+a=\underbrace{\left(1+\frac{a}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{a}{n}\right)}_{n\text{个}}+\underbrace{1+\cdots+1}_{m-n\text{个}}$$

$$>m\sqrt[m]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\times 1^{m-n}}=m\sqrt[m]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n}$$

所以 $\left(1+\frac{a}{n}\right)^m>\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

$$(2)a^n+\frac{a^n+b^n}{2}\cdot(n-1)\geq n\sqrt[n]{\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{n-1}}\cdot a$$

$$b^n+\frac{a^n+b^n}{2}\cdot(n-1)\geq n\sqrt[n]{\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{n-1}}\cdot b$$

二式分边相加，得

$$n(a^n+b^n)\geq n\sqrt[n]{\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{n-1}}\cdot(a+b)$$

即 $\frac{a^n+b^n}{2}\geq\sqrt[n]{\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{n-1}}\cdot\frac{a+b}{2}$

两边 n 次乘方并化简，即得

$$\frac{a^n+b^n}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

当且仅当$a^n=\frac{a^n+b^n}{2}=b^n$，即$a=b$时取等号。

注　用均值不等式证题，常常需要按均值不等式的结构把所要证明的不等式适当变形，如拆项、凑项或补凑因子等。(1)中是直接拆项兼凑项，特殊角色“1”起了重要作用。(2)中采用的是局部入手，整体结合的手法。这里扮演重要角色的结合点是a，b的幂平均值$\frac{a^n+b^n}{2}$。此不等式是二元的一般幂平均不等式，应用较为广泛。

(3)先引进一个简单不等式：设 f(n)为定义在自然数集 N 上的函数。易知，若 $f(n)-f(n-1)\geq 0$(或≤ 0)对任意大于 1 的自然数 n 都成立，则有 $f(n)\geq f(1)$(或 $f(n)\leq f(1)$)。

现在令$f(n)=\frac{1+n\alpha}{(1+\alpha)^n}$，则

$$f(n)-f(n-1)=\frac{1+n\alpha}{(1+\alpha)^n}-\frac{1+(n-1)\alpha}{(1+\alpha)^{n-1}}$$

$$=-\frac{(n-1)\alpha^2}{(1+\alpha)^n}\leq 0(n>1)。$$

所以$f(n)\leq f(1)=1$，即$\frac{1+n\alpha}{(1+\alpha)^n}\leq 1(n>1)$。

又当 n=1 时，原不等式成为等式，故对一切 $n\in N$，都有

$(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha$

注　(3)中的不等式一般是利用二项式定理或数学归纳法证明。这里引进一个简单不等式给出的简捷证法，别有风味。读者不妨仿此证明(2)中的不等式。

例 5-2-6　已知 a>0，b>0，求证：对任意 r，$s\in R^+$，若 r>s，则

$a^r+b^r\geq a^{r-s}b^s+a^sb^{r-s}$

当且仅当 a=b 时取等号。

解　因为 a，b，r，s∈R^+，且 r-s＞0，所以由幂函数的单调性可知，a^s-b^s 与 $a^{r-s}-b^{r-s}$ 当 a＞b 时同为正数；当 a＜b 时同为负数；当 a=b 时同为零。故总有$(a^s-b^s)(a^{r-s}-b^{r-s})\geq 0$。于是

$(a^r+b^r)-(a^{r-s}b^s+a^sb^{r-s})$

$=(a^r-a^{r-s}b^s)-(a^sb^{r-s}-b^r)$

$=a^{r-s}(a^s-b^s)-b^{r-s}(a^s-b^s)$

$=(a^s-b^s)(a^{r-s}-b^{r-s})\geq 0$

所以　$a^r+b^r\geq a^{r-s}b^s+a^sb^{r-s}$

当且仅当 a=b 时取等号。

注　本例给出的不等式概括了很多不等式，应用较为广泛。例如不等式$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$都是它的特例。为引用方便，以后我们姑且称它为幂分拆不等式。

习题

5-2-1　若 a＜0，-1＜b＜0，则　[　]

A．$a>ab>ab^2$

B．$ab>ab^2>a$

C．$ab>a>ab^2$

D．$ab^2>ab>a$

5-2-2　若 a，b，c，d 满足条件：(i)a+d＜b+c，(ii)c＜d，(iii)a+b=c+d，则　[　]

A．a＜c＜b＜d

B．b＜c＜d＜a

C．c＜a＜b＜d

D．a＜c＜d＜b

5-2-3　求证：

(1)若$x>0$，$y>0$，$x\neq y$，则$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}>\sqrt{x}+\sqrt{y}$；

(2)若$-1<x<0$，则$\frac{1}{1+x}>1+x^2$。

5-2-4　已知$a>0$，$b>0$，求证：$a^bb^a\leq(a)b^{\frac{a+b}{2}}\leq a^ab^b$。

5-2-5　已知$a>b>0$，求证：$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$。

5-2-6　求证：

(1)若 a＞0，b＞0，且 a+b=1，则

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$$

(2)若$a>c>0$，$b>c$，则

$$\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}\leq 2$$

5-2-7　已知 a＞0，b＞0，c＞0。求证：

$(1)\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

$(2)(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\right)\geq 16$

5-2-8　求证：

(1)若 $a>b$，$a^3-b^3>3(a^2b-ab^2)$；

(2)**若**$a>0$，$b>0$，**则**$a^3+b^3+a^2b+ab^2\geq 4(ab)^{\frac{3}{2}}$。

5-2-9　求证：

(1)$a^2+b^2+c^2+6\geq 2(a-b+2c)$

(2)$a^2+b^2+c^2\geq ab-bc+ca$

5-2-10　已知 a，b，$c\in R^+$，求证：

$a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{2}[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]$

5-2-11　设 a，b，c 是正数，证明不等式：

$2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\leq 3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)$

并说明等号在什么条件下成立。

5-2-12　已知 $a>0$，$b>0$，$a\neq b$，求证：

$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}>\frac{1}{2}(a+b)^2$

5-2-13　已知 a_1，a_2，…，$a_n\in R^+$，且 $a_1a_2\cdots a_n=1$。求证：

$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geq 3^n$

5-2-14　设 $n\in N$，试证：$\cos^{2n}\theta+\sin^{2n}\theta\geq 2^{1-n}$。

5-2-15　已知 a，$b\in R$，且 $a+b=1$，求证：对任意实数 x，y，都有

$(a+x)^2+(b+y)^2\geq\frac{(1+x+y)^2}{2}$

当且仅当$a=\frac{1-x+y}{2}$，$b=\frac{1+x-y}{2}$**时取等号。**

5-2-16　求证：

(1)若 a，b，c 是不都等 1 的正数，且 abc=1，则

$(a^2b+ab+c)(bc+c+1)>9$

(2)若 a，b，c，$d\in R$，则

$a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2\geq 2ac(b^2+d^2)$

当且仅当 b=d=0，或 a=c 时取等号。

5-2-17　已知 $a>b>0$，求证：

$\frac{a-b}{a+b}<\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}<\frac{a+b}{a-b}$

5-2-18 已知a，$b\in R^+$，**且**$a+2b=4\sqrt{2}$，**求证：**

$\log_2 a+\log_2 b\leq 4+\log_2\frac{1}{a}+\log_2\frac{1}{b}$

当且仅当$a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$**时取等号。**

5-2-19　设 $a>0$，且 $a\neq 1$。求证：

(1)若$-1<x<0$，则$|\log^a(1-x)|<|\log_a(1+x)|$；

(2)若$0<x<1$，则$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$。

5-2-20　设$f(x)=x^2+ax+b$，证明：

$$pf(x)+qf(y)>f(px+qy)$$

其中，$x\neq y$，$p>0$，$q>0$，$p+q=1$。

2．不等式证明的基本方法(综合、分析、反证)

例题

例 5-2-7　已知 a，b，c∈R^+，证明不等式：

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

当且仅当 a=b=c 时取等号。

解　用综合法。因 a＞0，b＞0，c＞0，故有

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时取等号；

$b+c \geq 2\sqrt{bc}$，当且仅当$b=c$时取等号；

$c+a \geq 2\sqrt{ca}$，当且仅当$c=a$时取等号。

三式分边相加，得

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

当且仅当 a=b=c 时取等号。

例 5-2-8　设 t＞0。证明：对任意自然数 n，不等式

$t^n-nt+(n-1) \geq 0$

都成立，并说明在什么条件下等号成立。

解　当 n=1 时，不等式显然成立，且取等号。

当 n≥2 时，由幂分拆不等式，可得以下 n-1 个不等式：

$t^2+1 \geq t+t$，$t^3+1 \geq t^2+t$，…，

$t^{n-1}+1 \geq t^{n-2}+t$，$t^n+1 \geq t^{n-1}+t$

以上各式当且仅当 t=1 时取等号。把它们分边相加，得

$$t^n+(n-1) \geq nt \Leftrightarrow t^n-nt+(n-1) \geq 0$$

故对任意 n∈N，不等式获证。等号成立的条件是 n=1，或 t=1。

注　①在以上不等中令 t=1+x(x＞-1)，即得著名的贝努利不等式 $(1+x)^n \geq 1+nx$

②令$t=-\frac{a}{b}$，可得$a^n+(n-1)b^n \geq nab^{n-1}$。

例 5-2-9　设 a，b，c 都是正数，证明不等式

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$$

当且仅当 a=b=c 时取等号。

分析　本例有多种精彩证法。根据对称性，可从左边一项、两项入手，当然也可根据平均值不等式或幂分拆不等式从整体入手。

解　[法一]　从一项入手，适当配凑后由平均值不等式知

$$\frac{a^2}{b+c}=\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\right)-\frac{b+c}{4} \geq a-\frac{b+c}{4}$$

$$\frac{b^2}{c+a}=\left(\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\right)-\frac{c+a}{4} \geq b-\frac{c+a}{4}$$

$$\frac{c^2}{a+b}=\left(\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\right)-\frac{a+b}{4} \geq c-\frac{a+b}{4}$$

三式分边相加，即得

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$$

当且仅当$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}$，$\frac{b^2}{c+a}=\frac{c+a}{4}$，$\frac{c^2}{a+b}=\frac{a+b}{4}$**同时成立，即**$a=b=c$**时，上式取等号。**

[法二]　从两入手，利用幂分拆不等式，有

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}=\frac{a^2c+b^2c+a^3+b^3}{(b+c)(c+a)}$$

$$\geq\frac{a^2c+b^2c+a^2b+ab^2}{(b+c)(c+a)}=\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{b+c}$$

所以　$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}\geq\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{b+c}$　(**当且仅当**$a=b$**时取等号**)

同理有

$\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{c+a}$　(**当且仅当**$a=b$**时取等号**)

$\frac{c^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}\geq\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{a+b}$　(**当且仅当**$a=b$**时取等号**)

三式分边相加，得

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+c^2}{a+c}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)$$

$$\geq\frac{1}{2}[\frac{(a+c)^2}{2(a+c)}+\frac{(b+c)^2}{2(b+c)}+\frac{(a+b)^2}{2(a+b)}]$$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)$　　　　(**当且仅当**$a=b=c$**时取等号**)

[法三]　从整理入手，原不等式等价于

$$\left(\frac{a^2}{b+c}+a\right)+\left(\frac{b^2}{c+a}+b\right)+\left(\frac{c^2}{a+b}+c\right)\geq\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

进一步证明参考习题 5-2-7(1)解答。

[法四]　由平均值不等式 $x^2+(\lambda y)^2\geq 2\lambda xy(x，y，\in R^+)$**的变式**

$\frac{x^2}{y}\geq 2\lambda x-\lambda^2 y$(**当且仅当**$x=\lambda y$**时取等号**)**入手，有**

$$\frac{a^2}{b+c}\geq 2\lambda a-\lambda^2(b+c)$$

$$\frac{b^2}{c+a}\geq 2\lambda b-\lambda^2(c+a)$$

$$\frac{c^2}{a+b}\geq 2\lambda c-\lambda^2(a+b)$$

三式分边相加，得

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq 2(\lambda-\lambda^2)(a+b+c)$$

因此，欲使原不等式成立，只须存在λ，使$2(\lambda-\lambda^2)=\frac{1}{2}$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$。

所以

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{1}{2}(a+b+c)$$

当且仅当$a=\frac{1}{2}(b+c)$，$b=\frac{1}{2}(c+a)$，$c=\frac{1}{2}(a+b)$即$a=b=c$时取等号。

注　从证法4我们看到，利用平均值不等式$x^2+(\lambda y)^2\geq 2\lambda xy(x, y\in R^+)$的变式$\frac{x^2}{y}\geq 2\lambda x-\lambda^2 y$(当且仅当$x=\lambda y$时取等号)证明某些分式不等式，思路自然，简捷明快，颇具特色。

例5-2-10　已知关于x的实系数方程$x^2+px+q=0$有两个实数根α，β。证明：若$|\alpha|<2$，$|\beta|<2$，则$|q|<4$，且$2|p|>4+q$。

解　先证$|q|<4$，由韦达定理知

$|q|=|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|<2\times 2=4$

再证$2|p|>4+q$。

欲证不等式即$0\leq 2|\alpha+\beta|<4+\alpha\beta$。故只须证

$4(\alpha+\beta)^2<(4+\alpha\beta)^2$

即　$4\alpha+8\alpha\beta+4\beta^2<16+8\alpha\beta+\alpha^2\beta^2$

从而只须证

$16-4\alpha^2-4\beta^2+\alpha^2\beta^2>0$

即　$(4-\alpha^2)(4-\beta^2)>0$

由$|\alpha|<2$，$|\beta|<2$，知$\alpha^2<4$，$\beta^2<4$，故最后不等式成立，从而原不等式得证。

例5-2-11　证明：若a，b，c是三角形的三边，则

$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$

当且仅当三角形为正三角形时，左边取等号。

解　左边不等式等价于

$3(ab+bc+ca)\leq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

欲证此不等式成立，只须证

$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$

即证

$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\geq 0$

左边配方即为

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$

此不等式显然成立，当且仅当$a=b=c$，即三角形为正三角形时取等号。故左边不等式获证。

欲证右边不等式，仿上只须证

$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$

从而只须证

$(ab+ac-a^2)+(ab+bc-b^2)+(bc+ca-c^2)>0$

即证

$a(b+c-a)+b(a+c-b)+c(b+a-c)>0$

由于 a，b，c 是三角形的三边，此不等式显然成立，故右边不等式获证。

综上所述，原不等式得证。

例 5-2-12　设 $f(x)=x^2+px+q(p，q\in R)$，证明：

(1)$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$；

(2)若$|p|+|q|<1$，则 $f(x)=0$ 的两个根的绝对值都小于 1。

解　用反证法

(1)假设$|f(1)|$，$|f(2)|$，$|f(3)|$都小于$\frac{1}{2}$，则有

$$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|<\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2 \qquad \text{(i)}$$

但是，

$$|f(1)|+2|f(2)|+|f(3)|\geq f(1)-2f(2)+f(3)$$

$$=(1+p+q)-2\times(4+2p+q)+(9+3p+q)=2 \qquad \text{(ii)}$$

(i)与(ii)矛盾，故假设不成立，即原命题成立。

(2)假设 $f(x)=0$ 的两根 x_1,x_2 的绝对值不都小于 1，不妨设$|x_1|\geq 1$，那么由韦达定理，有

$$|p|=|-(x_1+x_2)|=|x_1+x_2|\geq|x_1|-|x_2|\geq 1-|x_2|$$

$$|q|=|x_1x_2|=|x_1|\cdot|x_2|\geq|x_2|$$

两式分边相加，得

$$|p|+|q|\geq 1$$

这与题设矛盾，故假设不成立，即原命题得证。

注　反证法的逻辑程序是：否定结论→推出矛盾→肯定结论。反证法常用于直接证明难于入手的命题，或结论中含“不存在”、“都是”、“都不是”、“至少”、“至多”、之类的存在性命题。

习题

5-2-21　已知 $a>0$，$a\neq 1$，$t>0$，$t\neq 1$，$n\in N$，求证：

(1)若$0<a<1$，则$\log_a\frac{t+n}{1+n}<\frac{1}{n+1}\log_a t$；

(2)若$a>1$，则$\log_a\frac{t+n}{1+n}>\frac{1}{n+1}\log_a t$。

5-2-22　分别用综合法和分析法证明：若 $a，b\in R^+$，则

$$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}\geq\lg a+\lg b+\lg c$$

5-2-23　已知$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$，$a>0$，求证：

$$\frac{\cos x+a^x}{\sin x+a^x}>\mathrm{ctg}x$$

5-2-24　已知 $a>b>c>0$，求证：

(1)$\sqrt{a}+\sqrt{b}<\sqrt{a-c}-\sqrt{b-c}$

(2)$\sqrt{a+c}-\sqrt{a}<\sqrt{b+c}-\sqrt{b}$

5-2-25　已知 $a_i \in R^+ (i=1, 2, 3)$，且 $a_1+a_2+a_3=1$，求证：

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)\left(a_3+\frac{1}{a_3}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3$$

5-2-26 已知 $a_i > -\frac{2}{3}(i=1，2，3)$，且 $a_1+a_2+a_3=-1$，求证：

$$\sqrt{3a_1+2}+\sqrt{3a_2+2}+\sqrt{3a_3+2} \leq 3$$

并说明在什么条件下等号成立。

5-2-27　已知 a，b，c 是不全相等的正数，证明不等式

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{a+b+c}$$

5-2-28　已知 a，b，c∈R^+，证明不等式

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$$

5-2-29 已知 $a>0$，$b>0$，且 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=10$，求证：$a-2b \leq 200$。

5-2-30　已知 a＞0，b＞0，且 2c＞a+b，求证：

$$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$$

5-2-31　已知 a，b∈R，且 ab＞0，求证：

$$a^3b^3 \leq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}$$

5-2-32　用综合法证明：

(1) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$

(2) 若 $a>0$，$b>0$，$a \neq b$，且，$a^3-b^3=a^2-b^2$，则 $1<a<\frac{4}{3}$。

5-2-33　用分析与综合相结合的方法证明：若 x，y，z∈R^+，则

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{x^8+y^8+z^8}{x^3y^3z^3}$$

5-2-34　已知 a＞0，b＞0，c＞0，求证：

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c$$

当且仅当 a=b=c 时取等号。

5-2-35　设 a，b，c 是不全相等的正数，求证：

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}>\frac{1}{2}(a+b+c)$$

5-2-36　设 a，b，c∈R^+，且 abc=1，试证：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

并说明在什么条件下等号成立。

5-2-37　已知 a，b，c∈R^+，且 ab+bc+ca=1，求证：

$$a+b+c \geq \sqrt{3}$$

5-2-38　已知 a，b，c，d∈R^+，且 $a^2+b^2=1$，$c^{2+}d^2=1$，求证：

$|ac+bd| \leq 1$

5-2-39 已知 $|a|<1$，$|b|<1$，求证：$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$。

5-2-40　已知 $0<a_i<1(i=1, 2, 3, 4)$，证明：四个数

$a_1(1-a_2)$，$a_2(1-a_3)$，$a_3(1-a_4)$，$a_4(1-a_1)$

中至少有一个不大于$\frac{1}{4}$。

3．不等式证明的常用技巧(代换、放缩、构造、转化)

例题

例 5-2-13 求证：

(1)若$x+y+z=1$，则$x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$；

(2)若 a＞b＞c＞0，d＞c，ac＞bd，则 a+c＞b+d。

解 (1)因 x+y+z=1，故可设

$x=\frac{1}{3}+t_1$，$y=\frac{1}{3}+t_2$，$z=\frac{1}{3}+t_3$

其中 $t_1+t_2+t_3=0$，于是

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{3}+t_1\right)^2+\left(\frac{1}{3}+t_2\right)^2+\left(\frac{1}{3}+t_3\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(t_1+t_2+t_3)+t_1^2+t_2^2+t_3^2$$

$$=\frac{1}{3}+t_1^2+t_2^2+t_3^2$$

$\because t_1^2\geq 0$，$t_2^2\geq 0$，$t_3^2\geq 0$

$\therefore x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$

(2)因 a＞b，d＞c，故可设 $a=b+t_1$，$d=c+t_2$，其中 $t_1>0$，$t_2>0$。于是$ac>bd\Rightarrow(b+t_1)(d-t_2)>bd\Rightarrow bd-bt_2+ct_1>bd$

$$\left.\begin{aligned}\Rightarrow ct_1>bt_2\\ bt_2>ct_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow ct_1>ct_2\Rightarrow t_1>t_2$$

$\therefore(a+c)-(b+d)=(a-b)-(d-c)=t_1-t_2>0$

$\therefore a+c>b+d$

注 ①用 n 个数的平均数与适当参数来表示这 n 个数的代换通常称为均值代换，如(1)中施行的代换。这种代换的特点是利用对称性可使运算简化。但要注意代换的可行性。如有的资料中设$x=\frac{1}{3}-t$，$y=\frac{1}{3}-2t$，$z=\frac{1}{3}+3t$，尽管这样的代换能满足条件$x+y+z=1$，但满足此条件的每一数组，不能保证由上述代换而得到。如 x=y=0，z=1 就不存在对应的 t 值。

②当 a＞b 时，令 a=b+t(t＞0)，其中 t 是 a 用 b 表示时引进的增量。这种代换通常称为增量代换。它的特点是把条件中的不等关系转化为相等系，使得变形过程简化。

例 5-2-14 求证：

(1)若$a>0$，$b>0$，且$a+2b=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 3+2\sqrt{2}$；

(2)若$a>b>0$，$n\in N$，且$n\geq 2$，则$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}<\sqrt[n]{a-b}$。

解 (1)由 a＞0，b＞0，a+2b=1，可设

$$a=\cos^2\theta,\ b=\frac{1}{2}\sin^2\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{2}{\sin^2\theta}\\&=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{2\sin^2\theta+2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\\&=3+\mathrm{tg}^2\theta+2\mathrm{ctg}^2\theta\\&\geq 3+2\sqrt{2\mathrm{tg}^2\theta\cdot\mathrm{ctg}^2\theta}=3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

当且仅当 $\mathrm{tg}^2\theta=2\mathrm{ctg}^2\theta$，即 $\mathrm{tg}^4\theta=2$，也就是 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，从而 $a=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$，

$b=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号。

(2)因 $a>b>0$，且 $(a-b)+b=a$，故可设

$$a-b=a\cos^2\theta,\ b=\sin^2\theta\ \ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

这时，原不等式等价于

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a\sin^2\theta}<\sqrt[n]{a\cos^2\theta}$$

故只须证明

$$\cos^{\frac{2}{n}}\theta+\sin^{\frac{2}{n}}\theta>1(0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

这个不等式显然成立。事实上，因为 $0<\cos\theta<1$，$0<\sin\theta<1$ 又有 $\frac{2}{n}<2$，故由指数函数的单调性可知

$$\cos^{\frac{2}{n}}\theta>\cos^2\theta,\ \sin^{\frac{2}{n}}\theta>\sin^2\theta$$

所以 $\cos^{\frac{2}{n}}\theta+\sin^{\frac{2}{n}}\theta>\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

故原不等式得证。

注　代数问题三角化，往往可充分利用三角函数的特有性质，使较为复杂的问题得以简化，从而获得简捷解法。

例 5-2-15　求证：

(1)$|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，则 $abc+2>a+b+c$；

(2)a_i，$b_i\in R(i=1,2,3)$，且 $a_i\neq 0$，则

$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2+)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

当且仅当 $b_i=\lambda a_i$ 时取等号。

解　(1)原不等式等价于

$(bc-1)a+(2-b-c)>0$

构造一次函数

$f(x)=(bc-1)x+(2-b-c)\quad(-1<x<1)$

则　$f(-1)=(1-bc)+(1-b)+(1-c)>0$

$f(1)=bc-1+2-b-c=(1-b)(1-c)>0$

于是，根据一次函数的单调性，$f(x)$在区间$[-1,1]$上恒大于0。而$a\in(-1,1)$，故$f(a)>0$，即$(bc-1)a-b-c+2>0$。所以

$$abc+2>a+b+c$$

(2)构造二次函数

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+(a_3x+b_3)^2$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)x+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

显然，对任意$x\in R$，$f(x)\geq 0$，又$a_1^2+a_2^2+a_3^2>0$，故

$$\Delta=4(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2-4(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\leq 0$$

(当且仅当$b_i=\lambda a_i$，$\lambda\in R$时取等号)

所以

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

注　函数思想是解决数学问题的重要思想，应用广泛。在不等式证明中，若能要据其结构特征，构造相应的函数，则可充分利用函数的性质，使问题简明。

(2)中不等式及其证明可推广到一般情形：若a_i，$b_i\in R(i\in 1,2,\cdots n)$，且$a_i\neq 0$，则

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

这就是著名的柯西不等式。柯西不等式不仅应用广泛，而且它的证明方法，即构造二次函数并通过其判别式证明不等式的方法，堪称构造法的典范。

例5-2-16　若$x，y\in R^+$，且$x+y=1$，证明：$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$。

解　[法一]　由$x+y=1$，可令

$$x=\cos^2\theta，y=\sin^2\theta\ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

则原不等式

$$左边=\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=\left(2+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\left(2+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$=5+2(tg^2\theta+ctg^2\theta)\geq 5+2\times 2=9$$

[法二] 设$A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$，则$A>1$，且$xy=\frac{2}{A-1}$。

又$x+y=1$，根据韦达定理，x，y是关于t的二次方程

$$t^2-t+\frac{2}{A-1}=0$$

的实根。因x，y为实数，故

$$\Delta=1-\frac{8}{A-1}\geq 0\Leftrightarrow A\geq 9$$

所以 $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

注　方法2通过构造方程证明不等式，足以表明方程与不等式的密切联系。此法也不失为一种巧妙方法。

例 5-2-17　设 n∈N，求证：

$$(1)\sqrt{n+1}-1<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}$$

$$(2)\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

解　(1)采取逐项放缩的方法。由于

$$\frac{2}{2\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

$$\frac{2}{2\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

令 1，2，…，n，则有

$$\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}<1$$

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}<\frac{1}{2\sqrt{2}}<\sqrt{2}-1$$

$$\sqrt{4}-\sqrt{3}<\frac{1}{2\sqrt{3}}<\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

……………………

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

依项相加，即得

$$\sqrt{n+1}-1<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}$$

(2)设

$$M=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}$$

并引进辅助式

$$N=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{2n}{2n+1}$$

比较两式的对应因式可知

$$M<N\Leftrightarrow M^2<MN\quad(M>0)$$

$$\because MN=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore M^2<\frac{1}{2n+1}，\therefore M<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

又　$M\cdot(2n+1)=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-2}\times\frac{2n+1}{2n}>1$

所以　$M>\frac{1}{2n+1}$

注　用放缩法证不等式，常通过拆项、分组、加强命题等方式进行。此法没有固定模式，关键在于放缩要适度。放得过宽或缩得太小，都会导致方法失效。

例 5-2-18　已知 a＞0，b＞0，且 a+b=1，求证：

$1+\sqrt{5}<\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}\leq 2\sqrt{3}$

当且仅当 a=b 时右边取等号。

解　先证右边不等式。

[法一] 用均值代换。令$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}=2k$，并设

$\sqrt{4a+1}=k+t$，$\sqrt{4b+1}=k-t(k>0$，$t\in R)$

则　$4a+1=(k+t)^2$，$4b+1=(k-t)^2$

所以$(4a+1)+(4b+1)=(k+t)^2+(k-t)^2\geq 2k^2$

当且仅当$t=0$，即$a=b=\frac{1}{2}$时取等号。

又$a+b=1$，故$6\geq 2k^2$，即$k\leq\sqrt{3}$。所以

$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}=2k\leq 2\sqrt{3}$

[法二]　用三角代换。因$(4a+1)(4b+1)=6$，故可设

$4a+1=6\cos^2\theta$，$4b+1=6\sin^2\theta\,(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

于是$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}=\sqrt{6}(\cos\theta+\sin\theta)$

$=2\sqrt{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leq 2\sqrt{3}$

当且仅当$\theta=\frac{\pi}{4}$，即$a=b=\frac{1}{2}$时取等号。

现在证明左边不等式。可考虑用放缩法。

为了将 4a+1 或 4b+1 通过放缩配成完全平方式，我们引进正数 k，令系数$4=k^2+2k$，解得$k=\sqrt{5}-1$。

因为 $0<a<1$，所以 $a^2<a$，于是

$\sqrt{4a+1}=\sqrt{(k^2+2k)a+1}=\sqrt{k^2a+2ka+1}$

$>\sqrt{k^2a^2+2ka+1}=ka+1=(\sqrt{5}-1)a+1$

同理，$\sqrt{4b+1}>(\sqrt{5}-1)b+1$，所以，

$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}>(\sqrt{5}-1)a+1+(\sqrt{5}-1)b+1$

$=1+\sqrt{5}$

习题

5-2-41　已知 $a，b\in R，a^2+b^2=1$，求证：

$\sqrt{2a^2+1}+\sqrt{2b^2+1}\leq 2\sqrt{2}$

5-2-42　已知 $a\geq b\geq 0，n\in N$，且 $n>1$，则

$\sqrt[n]{a+b}+\sqrt[n]{a-b}\leq 2\sqrt[n]{a}$

5-2-43 已知a_i，$b_i\in R^+(i=1，2，\cdots，n)$，且$\frac{a_i}{b_i}<\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}(i=1，2，\cdots，n-1)$，求证：

$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}$

5-2-44 已知$|a|<1$，$|b|<1$，求证：$|ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1+b^2)}|\leq 1$。

5-2-45　已知 a＞0，b＞0，求证：

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

5-2-46 已知a，b，$c \in R$，且$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1$，求证：$|abc| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当$|a|=|b|=|c|=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号。

5-2-47 已知$x^2-2xy+5y^2-2=0$，求证：$|x+y| \leq 2$，当且仅当$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，或$x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$时取等号。

5-2-48　设 a＞0，x≥a，y≥a，求证：

$$\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)} \leq \sqrt{xy}$$

当且仅当$\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=1$时取等号。

5-2-49 设$x \in R$，证明：$-\sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$。

5-2-50　已知 a，b∈R，且 $a^2+b^2<1$，求证：

$$|a^2+2ab-b^2| < \sqrt{2}$$

5-2-51　已知 $a_i \in R$(i=1，2，…，n)，求证：

$$(1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

(2)若 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，则

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}$$

5-2-52　已知 x，y，z∈R^+，且 x+y+z=1，证明：

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z} \geq 36$$

5-2-53　已知 a＞0，b＞0，且 a+b=1，求证：

$$2-\sqrt{2} < \sqrt{1-2a^2}+\sqrt{1-2b^2} \leq \sqrt{2}$$

5-2-54　已知 b＞a＞0，n＞m≥0，求证：

$$\frac{a+m}{b+m} < \frac{a+n}{b+n}$$

5-2-55 已知$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，$m>n$，求证：

$$\frac{\sin\alpha+2^m}{\cos\alpha+2^m} > \frac{\sin\alpha+2^n}{\cos\alpha+2^n}$$

5-2-56 设$n \in N$，证明：$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4}$。

5-2-57　已知 x∈R，求证：

$$-2\leq\frac{2x^2-2x-1}{x^2-x+1}<2$$

5-2-58　设 n∈N，求证：

$$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$$

5-2-59 设$f(x)=\lg\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa}{n}$**，其中**$a$**为实数，**$n\in N$**，且 n＞2。如果 a∈(0，1]，证明：2f(x)＜f(2x)当 x≠0 时成立。**

5-2-60　已知 a，b∈R，证明：

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

(三)不等式的解法

提要

不等式的解与解不等式：使不等式中所有式子都有意义的未知数的集合叫做该不等式的允许值集。在允许值集中，使不等式成立的未知数的全体，叫做不等式的解集。求不等式的解集的过程叫做解不等式。

几个不等式可以组成不等式组。组成不等式组的各个不等式的解的交集就是这个不等式组的解集。

同解不等式与同解变形：如果两个不等式的解集相等，那么这两个不等式就叫做同解不等式。把一个不等式变形为另一个不等式时，如果所得不等式与原不等式是同解不等式，那么这种变形就叫做不等式的同解变形。如果一个不等式与一个不等式组的解集相等，我们也说它们是同解的。因此，不等式也可同解变形为不等式组。

以下是几类重要的不等式同解变形：

(1)分式不等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\neq 0\\ f(x)g(x)\geq 0\end{cases}$$ (**式中“≥”可同时换为“≤”。**)

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geq a\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\neq 0\\ g(x)[f(x)-ag(x)]\geq 0\end{cases}$$ (**“≥”可同时换为“≤”。**)

(2)根式不等式

$$\sqrt{f(x)}\geq g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)\geq [g(x)]^2\end{cases}\text{或}\begin{cases}g(x)<0\\ f(x)\geq 0\end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0\\ 0\leq f(x)<[g(x)]^2\end{cases}$$

(3)指数不等式

$$a^{f(x)}\geq a^{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq g(x)\quad (a>1)\\ f(x)\leq g(x)\quad (0<a<1)\end{cases}$$

(4)对数不等式

$$\log_a f(x)\geq\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq g(x)>0\quad (a>1)\\ g(x)\geq f(x)>0\quad (0<a<1)\end{cases}$$

(5)含绝对值的不等式

$$|f(x)|\leq g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\ -g(x)\leq f(x)\leq g(x)\end{cases}$$

$|f(x)|>g(x)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)<0\\ x\in f(x)\text{的定义域}\end{cases}\text{或}\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)<-g(x)\end{cases}\text{或}\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$$

以上各类同解变形表明，不等式解法的基本思想是：化分式不等式为整式不等式；化无理不等式为有理不等式；化超越不等式为代数不等式；化含绝对值符号的不等式为不含绝对值符号的不等式。

解不等式时应注意：

(1)根据不等式的解集的含义，解不等式时应首先考虑它的允许值集。

(2)由于不等式的解集通常有无穷多个元素，无法逐个检验，因此解题时务必保证每步变形都为同解变形。上述各类同解变形是最基本的通法。对于某些特殊的或较为复杂的不等式，也可采用特殊技巧或换元法、三角代换法、数形结合法等简化求解过程。

(3)当涉及到函数的定义域、参变量的取值范围或脱去绝对值符号时，往往需要分类讨论。讨论要有明确依据，必须层次分明，严密完整，防止重复或遗漏。

1．代数不等式的解法

例题

例 5-3-1　解不等式 $16x+x^4-x^5<16$。

解　原不等式可同解变形为

$$x^5-x^4-16x+16>0。$$

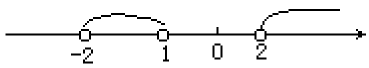
左边分解因式，得同解不等式

$$x^4(x-1)-16(x-1)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4-16)>0$$

$$\Longleftrightarrow (x-1)(x^2+4)(x-2)(x+2)>0$$

用数轴标根法，得不等式的解集为$\{x|-2<x<1 或 x>2\}$。

注　解实系数一元高次不等式，可先把最高次项的系数化为正数，并使右边为 0，再通过因式分解，将左边变形，最后用数轴标根法求解集。



例 5-3-2　(1)已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty)$。求 $ax^2+bx+c>$的解集，并说明 b 的取值范围 a，c 的关系；

(2)若 $a<0$，解不等式$(a-1)x^2+b(2-a)x-b^2>0$。

解　(1)由题设知，$a<0$。所以，

$$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$$

$$\Longleftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)<0$$

由此可知，当$\alpha\neq\beta$时，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\{x|\alpha<x<\beta\}$；当$\alpha=\beta$时，不等式无解。

又由题设 $a<0$，且 $b^2-4ac\geq 0$，即 $b^2\geq 4ac$。因此，当 $c\geq 0$ 时，有 $4ac\leq 0$，这时 b 可取任意实数；当 $c<0$ 时，则 $4ac>0$，这时 $b<-2\sqrt{ac}$或$b>2\sqrt{ac}$。

(2)由于 $a<0$，从而 $a-1<0$，故所给不等式同解于

$$(1-\frac{b}{1-a})(x-b)<0$$

若 $b=0$，此不等式即为 $x^2<0$。这时无解；

若$b>0$，因为$a<0$，所以$1-a>1$，从而$\frac{b}{1-a}<b$，这时不等式的解集为

$$\{x|\frac{b}{1-a}<x<b\}$$

若$b<0$，则由$1-a>1$知$\frac{b}{1-a}>b$，这时不等式的解集为

$$\{x|b<x<\frac{b}{1-a}\}$$

注　解一元二次不等式时，应充分利用二次函数的图象，通过形数结合，提高解题的速度。

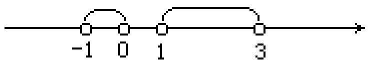
例5-3-3 解不等式$\frac{2x^3-2x^2-3x-1}{x^3-1}<1$。

解　[法一]　移项、化简，原不等式同解于

$$\frac{x^3-2x^2-3x}{x^3-1}<0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-1)(x^2+x+1)}<0$$

$\Longleftrightarrow (x+1)x(x-1)(x-3)<0$

由下图可知，原不等式的解集是



$$\{x|-1<x<0 \text{ 或 } 1<x<3\}$$

[法二]　原不等式同解于不等式组

$$(Ⅰ)\begin{cases} x^3-1>0 \\ x^3-2x^2-3x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x(x+1)(x-3)<0 \end{cases}$$

或 $$(Ⅱ)\begin{cases} x^3-1<0 \\ x^3-2x^2-3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1<0 \\ x(x+1)(x-3)>0 \end{cases}$$

故(Ⅰ)的解集为$\{x|1<x<3\}$；(Ⅱ)的解集为$x|-1<x<0$。从而所求解集为

$$\{x|1<x<3\}\cup\{x|-1<x<0\}=\{x|1<x<3 \text{ 或 } -1<x<0\}$$

注　将不等式同解变形为不等式组时，要注意区分解集的“交”、“并”关系。

例 5-3-4　解下列不等式：

(1)$\sqrt{1-x^2}>1-x$

(2)$\sqrt{3-x^2+x}+\sqrt{1-x^2+x}>2$

解　(1)原不等式同解于不等式组

$$(Ⅰ)\begin{cases} 1-x\geq 0 \\ 1-x^2>(1-x^2) \end{cases} \text{或} (Ⅱ)\begin{cases} 1-x<0 \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases}$$

解不等式组(Ⅰ)，得$0<x<1$，(Ⅱ)无解。故原不等式的解集是

$$\{x|0<x<1\}$$

(2)令$t=x^2-x$，则原不等式化为

$$\sqrt{3-t}+\sqrt{1-t}>2 \qquad \text{(i)}$$

此不等式的允许值集确定于不等式组

$$\begin{cases} 3-t\geq 0 \\ 1-t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t\leq 1$$

另一方面，不等式(i)可化为

$$\sqrt{3-t}>2-\sqrt{1-t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{1-t}<0 \\ 3-t\geq 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 2-\sqrt{1-t}\geq 0 \\ 3-t>(2-\sqrt{1-t})^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-t}>2 \\ t\leq 3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \sqrt{1-t}\leq 2 \\ \sqrt{1-t}>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t<-3 \\ t\leq 3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} -3\leq t\leq 1 \\ t<\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t<-3 \text{或} -3\leq t<\frac{3}{4}$$

故$t<\frac{3}{4}$，即$x^2-x<\frac{3}{4}$，解得$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$。

所以，原不等式的解集是$\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\}$。

注　解含根式的不等式，关键在于去掉根号，使之化为有理不等式。去掉二次根号的常用方法是平方法，有时也采用变量代换的方法或配成完全平方的方法。无论采用哪种方法，都要注意转化的同解性。

例 5-3-5　解下列不等式：

(1)$\sqrt{x^4-4x^2+4}<2x+1$

(2)$\sqrt[3]{2(x-4)}+\sqrt{x-3}>1$

解　(1)原不等式可化为

$$\sqrt{(x^2-2)^2}<2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2\geq 0 \\ x^2-2<2x+1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x^2-2<0 \\ 2-x^2<2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\leq x<3 \text{ 或 } -1+\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$$

故原不等式的解集是$\{x|\sqrt{2}\leq x<3\text{或}-1+\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}$。

(2)原不等式的允许值集为{x|x≥3}。原不等式可化为

$$\sqrt[3]{2(x-4)}>1-\sqrt{x-3}$$

两边立方，得

$$2(x-4)>1-3\sqrt{x-3}+3(x-3)-(x-3)\sqrt{x-3}$$

化简并整理后即为

$$x(\sqrt{x-3}-1)>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \sqrt{x-3}-1>0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x<0 \\ \sqrt{x-3}-1<0 \end{cases}$$

解前一不等式组得 x＞4；后一不等式组无解。故原不等式的解集为{x|x＞4}。

例 5-3-6　解关于 x 的不等式：

$$\frac{2x^2}{(a-\sqrt{a^2+2x})^2}<x+a$$

解 令$t=\sqrt{a^2+2x}$，则$t\geq 0$，且$x=\dfrac{t^2-a^2}{2}$。原不等式化为

$$\frac{(t^2-a^2)^2}{(a-t)^2}<t^2-a^2+2a\Leftrightarrow\begin{cases}t\neq a\\ at<a(1-a)\end{cases}\qquad \text{(i)}$$

当 $a<0$ 时，由(i)得 $t>1-a>0$，即

$$\sqrt{a^2+2x}>1-a>0\Leftrightarrow x>\frac{1-2a}{2};$$

当 $a=0$ 时，(i)无解；

当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，由(i)得$t<1-a$，且$t\neq a$。这时，$\dfrac{-a^2}{2}<0<\dfrac{1-2a}{2}$。于是，

$$\begin{cases}0\leq\sqrt{a^2+2x}<1-a\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}\leq x<0\text{或}0<x<\frac{1-2a}{2}$$

当$\dfrac{1}{2}\leq a<1$时，$t<1-a$且$t\neq a$。这时，$-\dfrac{a^2}{2}<\dfrac{1-2a}{2}\leq 0$。于是

$$\begin{cases}0\leq\sqrt{a^2+2x}<1-a\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}\leq x<\frac{1-2a}{2}$$

当 $a\geq 1$ 时，(i)无解。

综上所述，当 $a<0$ 时，原不等式的解集为

$$\{x|x>\frac{1-2a}{2}\}$$

当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，原不等式的解集为

$$\{x|-\frac{a^2}{2}\leq x<0\text{或}0<x<\frac{1-2a}{2}\}$$

当$\dfrac{1}{2}\leq a<1$时，原不等式的解集为

$$\{x|-\frac{a^2}{2}\leq x<\frac{1-2a}{2}\}$$

当 $a=0$ 或 $a\geq 1$ 时，原不等式无解。

注 本例既涉及变量代换，又涉及参数的讨论，综合性较强，但并不需要高超的技巧，按常规方法即可解决。关键是变量代换，难点是严密的分类讨论。在讨论过程中，为什么要以0，$\dfrac{1}{2}$，1为界限点划分区间，要认真领会。

习题

5-3-1 下列各不等式或不等式组中，与$\dfrac{x-1}{2-x}\geq 0$同解的是

[ ]

A. $(x-2)(2-x)\geq 0$

B. $(x-1)(x-2)\geq 0$

C. $\begin{cases} x-2\neq 0 \\ (x-1)(x-2)\leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2-x\neq 0 \\ (x-1)(x-2)\geq 0 \end{cases}$

5-3-2　下列各组不等式中，同解的一组是　　　　　[　　]

A. $\sqrt[3]{f(x)}<g(x)$与$f(x)<[g(x)]^3$

B. $\sqrt{f(x)}>g(x)$与$f(x)>[g(x)]^2$

C. $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$与$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

D. $\dfrac{f(x)}{g(x)}>1$与$f(x)-g(x)>0$

5-3-3　设$a<b<c$，则不等式$\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}\leq 0$的解集是

[　　]

A. (a，b)∪(c，+∞)

B. (-∞，a)∪(b，c)

C. (-∞，a)∪(b，c)

D. (-∞，a)∪(b，c)

5-3-4　已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是(-∞，α)∪(β，+∞)(α<β)，则 $ax^2-bx+c>0$ 的解集是__________。

5-3-5　不等式$\dfrac{x-2}{x-1}-\dfrac{x+1}{x-3}>1$的解集是__________。

5-3-6　解不等式：

(1) $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-1}<1$

(2) $1<\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-2x-2}<2$

5-3-7　解不等式$\sqrt{2x^2+2x-4}\geq x+2$。

5-3-8　解不等式$\sqrt{\dfrac{x^2+x-6}{x-2}}<x+1$。

5-3-9　解不等式$\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-2x+1}<0$。

5-3-10　解不等式$\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2x-3}<1$。

5-3-11　解不等式$\sqrt[3]{x-8}+\sqrt{x-3}>1$。

5-3-12　解不等式$\dfrac{x+1}{x-3}\cdot\sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}\leq 0$。

5-3-13　解关于x的不等式$ax^2-3(a+1)x+9>0$。

5-3-14　解关于x的不等式$\dfrac{ax^2+(a+1)x+1}{x+1}>x-a$。

5-3-15　解关于x的不等式$\sqrt{x^2-2a^2}>x+a$。

5-3-16 解关于x的不等式$\sqrt{a-2x}>x-1$。

5-3-17 解关于x的不等式$\sqrt{2+x-x^2}>a-x$，其中$a\leq -1$。

5-3-18 解关于x的不等式$\sqrt{a^2-x^2}>a-x$。

5-3-19 解关于x的不等式$\sqrt{x-a}-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}>0$。

5-3-20 解关于x的不等式$\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}-\sqrt{a-1}>0$。

2．指数不等式、对数不等式的解法

例题

例 5-3-7　解不等式：

$(1)(0.2)^{x^2-2x-1}>0.04$

$(2)2^{\sqrt{1-x^2}-1}-(\frac{1}{2})^{\sqrt{2x-x^2}}>0$

解　(1)原不等式可化为

$$(0.2)^{x^2-2x-1}>0.2^2$$

$\Longleftrightarrow x^2-2x-1<2$(指数函数的单调性)

$\Longleftrightarrow x^2-2x-3<0 \Longleftrightarrow (x+1)(x-3)<0$

所以原不等式的解为$-1<x<3$。

(2)原不等式可化为

$$2^{\sqrt{1-x^2}-1}>2^{-\sqrt{2x-x^2}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}-1>-\sqrt{2x-x^2}$　(**指数函数的单调性**)

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}>1-\sqrt{1-x^2}(\geq 0)$

$\Leftrightarrow 2x-x^2>(1-\sqrt{1-x^2})^2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}>1-x$

$\Leftrightarrow 1-x^2>(1-x)^2 \Leftrightarrow 0<x<1$

注　函数的单调性是解指数不等式、对数不等式的重要依据。

例 5-3-8　解不等式 $\log_{x+1}(x^2-x-2)>1$。

解　[法一]　原不等式同解于

$$\log_{x+1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}>0 \Leftrightarrow \log_{x+1}(x-2)>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0<x+1<1\\x-2>0\\x-2<1\end{cases} \text{或} \begin{cases}x+1>1\\x-2>0\\x-2>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<0\\x>2\\x<3\end{cases} \text{或} \begin{cases}x>0\\x>2\\x>3\end{cases}$$

所以原不等式的解为 $x>3$。

[法二]　原不等式同解于

$$\log_{x+1}(x^2-x-2)>\log_{x+1}(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+1<1\\x^2-x-2>0\\x^2-x-2<x+1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+1>1\\x^2-x-2>0\\x^2-x-2>x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<0\\x<-1\text{或}x>2\\-1<x<3\end{cases}\text{或}\begin{cases}x>0\\x<-1\text{或}x>2\\x<-1\text{或}x>3\end{cases}$$

所以原不等式的解为 $x>3$。

注　解这类对数不等式，要注意真数为正数，并须对底数的分类讨论。

例5-3-9 解不等式$2^{2x-1}-6\times(\frac{1}{2})^{1-x}<8$。

解　原不等式可化为

$$2^{2x}-6\times2^x-16<0$$

令 $2^x=t(t>0)$，则得

$$t^2-6t-16<0\Longleftrightarrow(t+2)(t-8)<0\Longleftrightarrow-2<t<8$$

又 $t>0$，故 $0<t<8$ 即 $0<2^x<8$，解得 $x<3$。

注　解这类指数不等式，常常需要通过变量代换把它变为整式不等式来解。

例5-3-10 解不等式$\log_{x-1}\frac{1}{4}-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>1$。

解　原不等式可化为

$$\frac{2}{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}-\frac{[\log_{\frac{1}{2}}(x-1)]^2}{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}-1>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{[\log_{\frac{1}{2}}(x-1)]^2+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-2}{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}<0$$

令$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=t$，则得

$$\frac{t^2+t-2}{t}<0\Leftrightarrow t(t+2)(t-1)<0$$

解得 $t<-2$ 或 $0<t<1$，即

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<-2\text{或}0<\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<1$$

所以，$x-1>(\frac{1}{2})^{-2}$或$\frac{1}{2}<x-1<1$，即原不等式的解为

$$x>5\text{或}\frac{3}{2}<x<2$$

注　解不同底的对数不等式，应先化为同底对数的不等式，再利用对数函数的单调性将它转化为整式不等式求解。这时也常常用到换元法。

例 5-3-11　设 $a>0$ 且 $a\neq1$，解不等式

$$a^{4-(\log_a x)^2}-(\frac{1}{a})^{\log_a x^2-1}>0$$

解　原不等式可化为

$$a^{4-(\log_a x)^2}-a^{1-2\log_a x}$$

令 $\log_a x=t$，则得

$$a^{4-t^2}>a^{1-2t}$$

当 0＜a＜1 时，由指数函数的单调性，有

$4-t^2<1-2t \Longleftrightarrow t^2-2t-3>0 \Longleftrightarrow (t+1)(t-3)>0$

$\Longleftrightarrow t<-1$，或 $t>3$

从而 $\log_a x<-1$或$\log_a x>3 \Leftrightarrow x>\frac{1}{a}$，或$x<a^3$

当 a＞1 时，则有

$4-t^2>1-2t \Longleftrightarrow t^2-2t-3<0 \Longleftrightarrow (t+1)(t-3)<0 \Longleftrightarrow -1<t<3$

从而 $-1<\log_a x<3 \Leftrightarrow \frac{1}{a}<x<a^3$

注　解既含指数又含对数的不等式的基本思想是“化同底,求单一”，即把不同底的指数或对数化为同底的，再通过函数的单调性将复合情形转化为只含指数或对数的单一情形求解。

例 5-3-12　设 f(x)是定义在实数集 R 内的函数，对任意 x，y∈R，有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$；并且当 x＞0 时，f(x)＞1，f(1)=a。解关于 x 的不等式 $f(x^2+x-4)>a^2$。

分析　由题设条件容易联想到 f(x)是指数型函数，又 $a^2=f(1)\cdot f(1)=f(2)$，故原不等式同解于 $f(x^2+x-4)>f(2)$。于是，问题归结为先确定 f(x)的单调性，再解一个二次不等式。

解 首先$f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=[f(\frac{x}{2})]^2\geq 0$。又因为不存在$x_0\in R$，使$f(x_0)$=0，否则，对任意 x∈R，有

$f(x)=f((x-x_0)+x_0)=f(x-x_0)f(x_0)=0$

与已知矛盾，所以对任意 x∈R，有 f(x)＞0。

现设 x，y∈R，且 y=x+δ(δ＞0)。则

$f(y)-f(x)=f(x+\delta)-f(x)=f(x)f(\delta)-f(x)$

$=f(x)[f(\delta)-1]>0(\because \delta>0，\therefore f(\delta)>1)$。

故 f(x)在 R 内是增函数。于是原不等式同解于

$x^2+x-4>2 \Longleftrightarrow x^2+x-6>0 \Longleftrightarrow x<-3$ 或 $x>2$

注　本题的关键是确定函数 f(x)的单调性，而不必求出它的具体表达式。

习题

5-3-21 若$0<a<1$，则与不等式$a^{x^2-3x-2}-(\frac{1}{a})^{x-1}>0$同解的不等式是

[　　]

A．$x^2-2x-3>0$

B．$x^2-2x-3<0$

C．$x^2-4x-1>0$

D．$x^2-4x-1<0$

5-3-22 不等式$\log_x(x-1)-\log_{x^2}x\le 0$的解集是

[　　]

A．$(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2})$

B．$[\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$

C．$(0,\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$

D．$(1,\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$

5-3-23 不等式$1.2^{x^2-4x-7}-(\frac{5}{6})^{x+3}>0$的解集是_______。

5-3-24　不等式$6^{2x+4}-2^{x+8}\cdot 3^{3x}<0$的解集是______。

5-3-25　已知a>0且a≠1，解关于x的不等式

$a^{x+2}+a^{x-2}-a^{2x}>1$

5-3-26　解不等式

$\log_{0.5}(x^2-2x-15)>\log_{0.5}(x+13)$

5-3-27 已知a>0且a≠1，解关于x的不等式$\log_a(1-\frac{a}{x})>1$。

5-3-28　已知a>0，解关于x的不等式

$\log_{0.5}\frac{1+(x+1)^2}{1+2a(x+1)}>0$

5-3-29　已知a>0且a≠1，解关于x的不等式

$a^{x^4-a^2x^2}<(\frac{1}{a})^{a^2-x^2}$

5-3-30　已知a>0，b>0，解关于x的不等式

$\log_3[a^{2x}+(ab)^x-6b^{2x}+1]>0$

5-3-31　已知a>0，b>0且a≠b，解关于x的不等式

$\log_2[\frac{a^{2x}+(ab)^x}{4b^{2x}}-\frac{1}{2}]<0$

5-3-32　已知0<a<1，解关于x的不等式

$\sqrt{\log_a x+1}>1-\log_a x$

5-3-33　已知a>1，解关于x的不等式

$\log_a(x^2+2ax+a^2)+\sqrt{\log_a(x^2+2ax+a^2)}<2$

5-3-34　已知a>1，解关于x的不等式

$\log_{ax}x+\log_x(ax)^2>0$

5-3-35 解不等式$\log_2(2^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x-1}-\frac{1}{2})+2\ge 0$。

5-3-36　解关于x的不等式

$$1+\frac{\log_2(a-x)}{\log_2 x}>2\log_x\frac{a}{2}$$

5-3-37　已知 a>1，解关于 x 的不等式

$$(\log_x a)\log_a(2^x-\frac{3}{4})-2\log_x 2^{x-1}<0$$

5-3-38　已知 a>0 且 a≠1，解关于 x 的不等式

$$a^{2(2+\log_{\sqrt{2}}x)}-(\frac{1}{a})^{1-(\log_2 x)^2}>0$$

5-3-39　已知 f(x)是定义在非零实数集内的奇函数，并且当 x>0 时，

$f(x)=\frac{x}{1-\lg(10+x)}$**，解不等式**$f(x)<-x$。

5-3-40　解关于 x 的不等式

$$\log_a(4^{x-\frac{3}{2}}+1)+\log_a\frac{4}{3}>\log_a 2^x$$

3．含绝对值的不等式的解法

例题

例 5-3-13　解下列不等式：

(1)|2-3x|-1<2

(2)|3x+5|+1>6

解　(1)原不等式同解于

$$|2-3x|<3\Leftrightarrow -3<2-3x<3\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}$$

故原不等式的解集为$\{x|-\frac{1}{3}<x<5\}$。

(2)原不等式可化为

|3x+5|>5⟺3x+5>5 或 3x+5<-5

$\Leftrightarrow x>0$**或**$x<-\frac{10}{3}$

故解集为$\{x|x>0\}\cup\{x|x<-\frac{10}{3}\}$。

注　解含绝对值的不等式，关键在于正确地根据绝对值的定义去掉绝对值符号。

解 5-3-14　解不等式 $4<|x^2-5x|\leq 6$。

解　原不等式同解于不等式组

$$\begin{cases}|x^2-5x|>4 & \text{(i)}\\ |x^2-5x|\leq 6 & \text{(ii)}\end{cases}$$

不等式(i)同解于

$x^2-5x<-4$ 或 $x^2-5x>4$

$\Leftrightarrow 1<x<4$**或**$x<\frac{5-\sqrt{41}}{2}$**或**$x>\frac{5+\sqrt{41}}{2}$

不等式(ii)同解于

$-6\leq x^2-5x\leq 6$

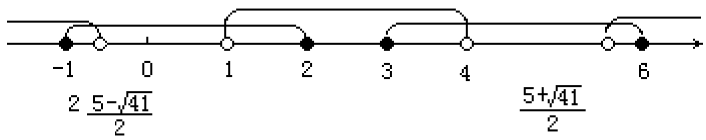
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x+6\geq 0\\x^2-5x-6\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\text{或}x\geq 3\\-1\leq x\leq 6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1\leq x\leq 2\text{或}3\leq x\leq 6$$

取不等式(i)，(ii)的解的交集，即得原不等式的解集

$$[-1,\ \frac{5-\sqrt{41}}{2})\cup(1,\ 2]\cup[3,\ 4)\cup(\frac{5+\sqrt{41}}{2},\ 6]$$

其解集可用数轴标根法表示如下：



注　本例的难点是正确区别解集的交、并关系。“数轴标根法”是确定解集并防止出错的有效辅助方法。

例 5-3-15　解不等式|x+2|-|x-1|≥0。

解　原不等式同解于

$$|x+2|\geq|x-1|\Longleftrightarrow(x+2)^2\geq(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4\geq x^2-2x+1\Leftrightarrow 6x\geq -3\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$$

故原不等式的解集为$\{x|\,x\geq -\frac{1}{2}\}$。

注　解形如|ax+b|-|cx+d|≥0 的不等式，适合于用移项后两边平方脱去绝对值符号的方法。但对其他含多项绝对值的情形，采用此法一般较繁，不可取。

例 5-3-16　解下列不等式：

$$(1)\left|\frac{x^2-2x+3}{x-2}\right|<1$$

$$(2)\left|\frac{x^2+x+1}{x-2}\right|>2x+1$$

解　(1)原不等式同解于不等式组

$$-1<\frac{x^2-2x+3}{x+1}<1$$

左边不等式同解于

$$\frac{x^2-2x+3}{x+1}+1>0\Leftrightarrow\frac{x^2-x+4}{x+1}>0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+4>0\\x+1>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x^2-2x+4<0\\x+1<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in R\\x>-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\in\varnothing\\x<-1\end{cases}\Leftrightarrow x>-1\qquad\text{(i)}$$

右边不等式同解于

$$\frac{x^2-2x+3}{x+1}-1<0\Leftrightarrow\frac{x^2-3x+2}{x+1}<0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+2>0\\x+1<0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x^2-3x+2<0\\x+1>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\text{或}x>2\\x<-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}1<x<2\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x<-1\text{或}1<x<2\quad\text{(ii)}$$

取(i)，(ii)的交集，得原不等式的解集为{x|1<x<2}

(2)原不等式同解于

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}2x+1<0\\x-2\neq 0\end{cases}\text{或}(\text{Ⅱ})\begin{cases}2x+1\geq 0\\\dfrac{x^2+x+1}{x-2}>2x+1\end{cases}\text{或}$$

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases}2x+1\geq 0\\\dfrac{x^2+x+1}{x-2}<-(2x+1)\end{cases}$$

$$(\text{Ⅰ})\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}\text{；}$$

$$(\text{Ⅱ})\Leftrightarrow\begin{cases}x>2x\\x^2-4x-3<0\end{cases}\Leftrightarrow 2<x<2+\sqrt{7}$$

$$(\text{Ⅲ})\Leftrightarrow\begin{cases}-1/2\leq x<2\\3x^2-2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1/2\leq x<2\\x<-1/3\text{或}x>1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq x<-\frac{1}{3}\text{或}1<x<2$$

取(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)的并集，得原不等式的解集为

$$(-\infty,\ -\frac{1}{3})\cup(1,\ 2)\cup(2,\ 2+\sqrt{7})$$

例 5-3-17　解不等式||x+1|-|x-1||<x+2。

分 析　要使不等式有解，必须 x+2>0 即 x>-2。又|x+1|，|x-1|的零点分别为-1，1，故可在区间(-2，-1)，[-1，1]，[1，+∞)内分别求解。

解　原不等式同解于

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}-2<x<-1\\|-(x+1)-(1-x)|<x+2\text{或}\end{cases}$$

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}-1\leq x<1\\|(x+1)-(1-x)|<x+2\text{或}\end{cases}$$

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases}x\geq 1\\|(x+1)-(x-1)|<x+2\end{cases}$$

$$(\text{Ⅰ})\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<-1\\2<x+2\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing(\text{无解})$$

$$(\text{Ⅱ})\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq x<1\\|2x|<x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq x<1\\-(x+2)<2x<x+2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<x<1$

$(\text{III}) \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ |2|<x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$

取(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)的并集，得原不等式的解集为$\{x|x>-\frac{2}{3}\}$。

注　解含多个绝对值项的不等式，常采用分段脱号法。其步骤是：找出零点，确定分段区间；分段求解，确定各段解集；综合取并，确定所求解集。

例 5-3-18　已知 a>0，b>0，解不等式|ax-b|<x。

解　显然 x>0，故原不等式同解于

$\begin{cases} ax-b<x \\ ax-b>-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x<b \\ (a+1)x>b \end{cases}$

当$0<a<1$时，则得$\begin{cases} x>\frac{b}{a-1} \\ x>\frac{b}{a+1} \end{cases}$。因为$\frac{b}{a-1}<\frac{b}{a+1}$，所以$x>\frac{b}{a+1}$；

当$a=1$时，则得$\begin{cases} x\in R \\ x>\frac{b}{2} \end{cases}$。所以$x>\frac{b}{2}$；

当$a>1$时，则得$\begin{cases} x<\frac{b}{a-1} \\ x>\frac{b}{a+1} \end{cases}$。因为$\frac{b}{a-1}>\frac{b}{a+1}$，所以$\frac{b}{a+1}<x<\frac{b}{a-1}$。

综上所述，当$0<a\leq 1$时，原不等式的解集为$\{x|x>\frac{b}{a+1}\}$；当$a>1$时，其解集为$\{x|\frac{b}{a+1}<x<\frac{b}{a-1}\}$。

注　含绝对值的不等式中，若含有参数，则先去掉绝对值符号并化简，再根据具体情况对参数进行分类讨论。

习题

5-3-41　不等式|3x+1|>2 的解集是　　　　　　　[　　]

A．$\{x|-1<x<\frac{1}{3}\}$

B．$\{x|x>\frac{1}{3}\}$

C．$\{x|x<-1\}\cup\{x|x>\frac{1}{3}\}$

D．{x|x∈R}

5-3-42　设 M={x||2x-3|≤1}，N={x||2x+1|-|x-2|≥0}。则 M，N

的关系是 [ ]

A．M=N

B．$M\supset N$

C．$M\subset N$

D．$M\cap N=\varnothing$

5-3-43 不等式$|3^x-2|>1$的解集是 [ ]

A．$x>1$

B．$x<0$

C．$0<x<1$

D．$x<0$或$x>1$

5-3-44 若$a>0$，则在下列各不等式中与$\frac{|x|+a}{3}<\frac{a-|x|}{2}$同解的不等式是 [ ]

A．$x<-\frac{a}{5}$

B．$x>\frac{a}{5}$

C．$|x|<\frac{a}{5}$

D．$|x|>\frac{a}{5}$

5-3-45 在下列各不等式(组)中，与不等式$|\frac{f(x)}{g(x)}|<1$同解的不等式或不等式组是 [ ]

A．$\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}<0$

B．$\begin{cases}[f(x)+g(x)]g(x)>0\\ [f(x)-g(x)]g(x)<0\end{cases}$

C．$\frac{f(x)+g(x)}{g(x)}>0$

D．$\frac{f(x)}{g(x)}<-1$或$\frac{f(x)}{g(x)}>1$

5-3-46 不等式$|x^2-3x|<4$的解集是________。

5-3-47 不等式$|\frac{3x}{x^2-4}|\leq 1$的解集是________。

5-3-48 不等式$(|x|+1)(3|x|-2)<0$的解集是________。

5-3-49 不等式$\log_2|x|>2\log_2|x+2|$的解集是________。

5-3-50 不等式$\sqrt{|2^{-x}-1|-2}>1$的解集是________。

5-3-51 解下列不等式：

(1) $|\sqrt{2x-3}-2|>1$

(2) $|\frac{x^2-x-6}{x+1}|\leq 1$

5-3-52　解不等式$|x+3|-|2x-1|>0$。

5-3-53 解不等式$\sqrt{x^2-2x-3}-|x+1|<0$。

5-3-54　解不等式$|x^2-2x-3|>x+1$。

5-3-55　解不等式$|x^2-1|+|x+1|>x+4$。

5-3-56 解不等式$|x+3|-|2x-1|<\frac{x}{2}+1$。

5-3-57　解不等式$|2x+1|+|3x-2|<2x+5$。

5-3-58　解不等式$|x^2-4x+3|>x^2-4|x|+3$。

5-3-59　解不等式$|2^x-2|+4^x-4<0$。

5-3-60　解不等式 $3<|x+1|+|x|+|x-1|<6$。

(四)不等式的应用

提要

不等式既是中学数学的基础知识，也是解决许多数学问题的重要工具，应用非常广泛。这里涉及如下几种重要问题。

(1)求函数的定义域和值域。用不等式求函数的定义域往往归结为解不等式组；求值域则较多利用判别式、配方法或互反函数的性质等。

(2)求参变量的取值范围。这类问题内容丰富，形式多样，联系面广，综合性强。常以情境新颖而又似曾相识、解法常规但又富于思考而引人入胜。用不等式求参数的取值范围较多涉及函数的定义和性质、待定系数法、判别式、配方、变量代换以及分类讨论思想等。

(3)求函数的最值及解决有关应用问题。最值问题是函数性质的重要应用，不等式是用初等方法解决这类问题的重要工具。其解法一般较灵活，往往反映出某种重要的数学思想，常涉及一次函数或二次函数的单调性、函数的有界性、函数的定义域、代数方程的重根、平均值不等式、判别式的性质以及配方法等。

(4)解方程或方程组。解不等式往往离不开解方程，许多不等式的解集都确定于方程或方程组。有趣的是，有些方程或方程组的求解问题也可利用不等式获得简捷的解法。

例题

例 5-4-1　求下列函数的定义域：

$$(1)y=\sqrt{12+x-x^2}+\lg\frac{x+1}{x-1}$$

$$(2)y=\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{|x|-1}}+\log_2(20-x-x^2)$$

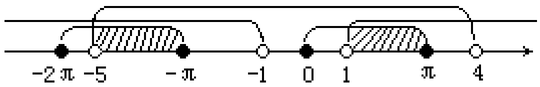
解　(1)所求定义域是下列不等式组的解：

$$\begin{cases}12+x-x^2\geq 0\\ \dfrac{x+1}{x-1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+3)(x-4)\leq 0\\ (x+1)(x-1)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -3\leq x\leq -1\text{或}1<x\leq 4$$

(2)所求定义域确定于不等式组：

$$\begin{cases}\sin x\geq 0\\ |x|-1>0\\ 20-x-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k\pi\leq x\leq(2k+1)\pi\ (k\in Z)\\ x<-1\text{或}x>1\\ -5<x<4\end{cases}$$



由上图可知，当且仅当 k=0，1 时，不等式组有解，其解集为(-5，-π)∪(1，π]，此即所给函数的定义域。

例 5-4-2　求下列函数的值域：

$(1)x=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+1}$

$(2)y=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$

解　(1)原式两边乘以 x^2+1，再移项、整理，得

$(y-1)x^2-2x+(y+1)=0$

当 $y\neq1$ 时，因 $x\in R$，故上式作为 x 的二次方程，其判别式非负，即

$\triangle=4-4(y-1)(y+1)\geq0\Leftrightarrow-\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}$

所以 $-\sqrt{2}\leq y<1$(当 $x=1-\sqrt{2}$ 时等号成立)，或 $1<y\leq\sqrt{2}$(当 $x=1+\sqrt{2}$ 时等号成立)。

当 y=1 时，相应地有 x=1，故 y=1 也属于定义域。

故所给函数的定义域是 $[-\sqrt{2}，\sqrt{2}]$。

(2)令 $\sqrt{x^2+1}=t(t\geq1)$。则 $x^2+2=t^2+1$，故所给函数化为

$y=t+\dfrac{1}{t}(t\geq1)$

易知，此函数在区间 $[1，+\infty)$ 上是增函数，故 $y_{min}=1+\dfrac{1}{1}=2$，于是，所给函数的值域为[2，+∞)。

也可利用判别式求解。读者不妨试试。

注　利用判别式求值域要注意两点：

(i)二次项的系数不得为零。如果有可能为零，则对于使系数为零的 y 值，应检验它是否属于函数值域，即是否存在相应的 x 值与之对应。如果不存在，则函数的值域不包括此 y 值。

(ii)不等式“△≥0”中的等号是否可取，可取则此法有效，不可取则会导致错误。例如，把(2)中的函数改为 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$，令 $\sqrt{x^2+4}=t$ $(t\geq2)$，得 $y=t+\dfrac{1}{t}$。仿(1)的解法，由函数的单调性求得值域为 $[\dfrac{5}{2}，+\infty)$，而用判别式法，则由 $\triangle=y^2-4\geq0(y>0)$ 得[2，+∞))，值域扩大了。其原因是，当 $y=2$ 时，$t=1$，即 $\sqrt{x^2+4}=1$，这是不可能的。

例 5-4-3　求下列函数的值域：

$(1)y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

$(2)y=x-\sqrt{1-x}$

解　(1)　[法一]　原式两边平方并整理，得

$y^2-1=2\sqrt{x(1-x)}\quad(0\leq x\leq1)$

所以 $y^2\geq1$；又 $y\geq0$，所以 $y\geq1$(当 x=0，1 时取等号)。

另一方面，两边再次平方并整理，得

$4x^2-4x+(y^2-1)^2=0$

因为 $x\in R$，所以 $\triangle=16-16(y^2-1)^2\geq0$。解得 $y\leq\sqrt{2}$(当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时取等号)。故所给函数的值域为 $[1，\sqrt{2}]$。

[法二] 函数的定义域为 $0\le x\le 1$。由幂平均不等式，有

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le 2\sqrt{\frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{1-x})^2}{2}}=\sqrt{2}$$

(当$x=\frac{1}{2}$时取等号。)

又由$0\le x\le 1$有$0\le\sqrt{x}\le 1$，$0\le\sqrt{1-x}\le 1$，于是

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\ge(\sqrt{x})^2+(\sqrt{1-x})^2=1\text{(当}x=0\text{，}1\text{时取等号。)}$$

故所给函数的值域为$[1,\sqrt{2}]$。

[法三] 两边平方并整理，得

$$y^2=1+2\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}\qquad(y\ge 0)$$

因为$0\le x\le 1$，所以有$1\le y^2\le 2$，从而$1\le y\le\sqrt{2}$。

[法四] 因为$0\le x\le 1$，所以可令$x=\sin^2\theta$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，于是，$1-x=\cos^2\theta$，所给函数可化为 $y=\sin\theta+\cos\theta$，即

$$y=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$$

又由$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$有$\frac{\pi}{4}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，所以$1\le y\le\sqrt{2}$。

(2)所给函数可表示为

$$y=-(1-x)-\sqrt{1-x}+1$$

令$\sqrt{1-x}=t(t\ge 0)$，则有$y=-t^2-t+1$，即

$$y=-(t+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$$

此函数在$[0,+\infty)$内递减，故有 $y\le 1$。

注 对于(2)，采用平方法易导至错误结果：

$$x^2-(2y-1)x+(y^2-1)=0$$

因为$x\in R$，所以$\triangle=(2y-1)^2-4(y^2-1)\ge 0$，解得$y\le\frac{5}{4}$。

其原因是忽视了隐含条件$y\le x\le 1$，即不可能有$y=\frac{5}{4}$。

例5-4-4 设$f(x)=\lg\frac{1+2^{x+1}a-4^x}{a^2}$，若$f(x)$当$x\le -1$时有意义，试求 a 的取值范围。

解 [法一] $f(x)$有意义等价于 $a\ne 0$，且 $1+2^{x+1}a-4^x>0(x\le -1)$。

令$2^x=t(x\le -1)$，则$0<t\le\frac{1}{2}$，且得不等式组

$$\begin{cases}a\ne 0\\ t^2-2at-1<0\end{cases}$$

二次方程 $t^2-2at-1=0$ 的判别式$\Delta=4a^2+4>0$，因此它有两个相异的实根$a-\sqrt{a^2+1}$和$a+\sqrt{a^2+1}$.

依题意，对于$0<t\leq\frac{1}{2}$，不等式$t^2-2at-1<0$成立，故有

$$\begin{cases}a-\sqrt{a^2+1}\leq 0\\ a+\sqrt{a^2+1}>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow a>-\frac{3}{4}$$

但$a\neq 0$，故a的取值范围为$\left(-\frac{3}{4}，0\right)\cup(0，+\infty)$．

[法二] 由 $1+2^{x+1}a-4^x>0$ 得

$$a>\frac{4^x-1}{2^{x+1}}=2^{x-1}-2^{-x-1}$$

易知$\varphi(x)=2^{x-1}-2^{-x-1}$是增函数，从而$\varphi(x)$在区间$(-\infty，-1]$内的最大值为$\varphi(-1)=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$．故$a>-\frac{3}{4}$．

注 对于方法1，要认真领会$\left(0，\frac{1}{2}\right]\subset(a-\sqrt{a^2+1}，a+\sqrt{a^2+1})$的含义，这是容易出错的疑难点．

例5-4-5 设$f(x)=ax^2+bx+c$．若$f(1)=\frac{7}{2}$，问：是否存在$a，b，c\in R$，使得不等式

$$x^2+\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 2x^2+2x+\frac{3}{2}$$

对一切实数 x 都成立？证明你的结论．

解 假定存在．由$f(1)=\frac{7}{2}$，有

$$a+b+c=\frac{7}{2}\qquad\text{(i)}$$

令$x^2+\frac{1}{2}=2x^2+2x+\frac{3}{2}$，得$x^2+2x+1=0$，解得$x=-1$．于是，$f(-1)\geq\frac{3}{2}$且$f(-1)\leq\frac{3}{2}$，即$f(-1)=\frac{3}{2}$，从而

$$a-b+c=\frac{3}{2}\qquad\text{(ii)}$$

由(i)，(ii)得

$$a+c=\frac{5}{2}\qquad\text{(iii)}$$

由(i)，(iii)得

$$b=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=1\qquad\text{(iv)}$$

所以 $f(x)=ax^2+x+\left(\frac{5}{2}-a\right)$

又$f(x)-(x^2+\frac{1}{2})\geq 0$，即$(a-1)x^2+x+(2-a)\geq 0$对一切$x\in R$都成立，故 $a\neq 1$，且

$$\Delta=1^2-4(a-1)(2-a)=4\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0$$

但$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$，故$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2=0$，因此$a=\frac{3}{2}$，从而$c=1$，所以

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+x+1$$

容易验证，这时 f(x)的确使得

$$x^2+\frac{1}{2}\leq f(x)\leq 2x^2+2x+\frac{3}{2}$$

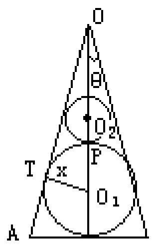
对一切 $x\in R$ 都成立，故命题得证.

注　以上证明中两次用到命题“若 $x\geq a$ 且 $x\leq a$，则 $x=a$.”这种由双向不等式得出等式的方法，是数学的基本证题技巧之一.

例 5-4-6　已知圆锥的高为 h，母线与轴的夹解为θ. 在此圆锥内作一个内切球 O_1，再作一个与圆锥侧面相切并与球 O_1 外切的小球 O_2. 若θ使球 O_2 的体积最大，求出这时的 sinθ.

分析　欲得球的体积最大，须使其半径最大.

解　圆锥的轴截面如图所示. 设球 O_1 的半径为 x，球 O_1 与母线 OA 切于 T，则 $O_1T=x$，$OO_1=h-x$. 因$\angle O_1OA=\theta$，故



$$\frac{O_1T}{O_1O}=\frac{x}{h-x}=\sin\theta$$

所以　$x=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdot h$

设球 O_2 的半径为 y，球 O_2 与球 O_1 相切于 P. 类似地，有

$$y=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdot OP$$

而$OP=h-2x=h-\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdot h=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdot h$，所以

$$y=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdot h=\frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)^2}\cdot h$$

设$\sin\theta=t$，则因$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，故$0<\sin\theta<1$，即$0<t<1$，且

$$y=\frac{t(1-t)}{(1+t)^2}h$$

令$z=\frac{t(1-t)}{(1+t)^2}$，则y取最大值无异于z取最大值. 将此式整理为关于 t 的方程，得

$(z+1)t^2+(2z-1)t+z=0$

易知$z+1\neq 0$(否则$t=-\frac{1}{3}$)，且此二次方程有实根，故，

$\Delta=(2z-1)^2-4(z+1)z\geq 0$

解得$z\leq\frac{1}{8}$，等号当且仅当上述二次方程有相等实根时成立．此时，

$$t=\frac{-(2z-1)}{2(z+1)}=\frac{1-2\times\frac{1}{8}}{2\times\left(\frac{1}{8}+1\right)}=\frac{1}{3}$$

所以 $\sin\theta=\frac{1}{3}$

例 5-4-7 设 x，y，z∈R．在实数集内解下列方程和方程组：

(1) $(x^2+1)(y^2+2)(z^2+8)=32xyz$

(2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx\\2x^2-y+z-4=0\end{cases}$

解 (1)由平均值不等式知

$(x^2+1)(y^2+2)(z^2+8)\geq 2|x|\cdot 2\sqrt{2}|y|\cdot 4\sqrt{2}|z|=32|xyz|\geq 32xyz$

两处“≥”中等号同时成立的条件是 $x^2=1$，$y^2=2$，$z^2=8$，且 x，y，z 或者三者都为正，或者两负一正．故原方程有 4 解

$\begin{cases}x_1=1\\y_1=\sqrt{2}\\z_1=2\sqrt{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1\\y_2=-\sqrt{2}\\z_2=-2\sqrt{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-1\\y_3=-\sqrt{2}\\z_3=2\sqrt{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-1\\y_4=\sqrt{5}\\z_4=-2\sqrt{2}\end{cases}$

(2)由 $x^2+y^2\geq 2|xy|$，$y^2+z^2\geq 2|yz|$，$z^2+x^2\geq 2|zx|$可得

$x^2+y^2+z^2\geq|xy|+|yz|+|zx|\geq xy+yz+zx$

两处等号同时成立的条件是：$|x|=|y|=|z|$，且 x，y，z 三者或同时为零，或同时为正数，或同时为负数．在此条件下，第二个方程化为 $2x^2-4=0$，解得$x=\pm\sqrt{2}$，故原不等式组有两解$x_1=y_1=z_1=\sqrt{2}$，$x_2=y_2=z_2=-\sqrt{2}$．

注 以上利用不等式中等号成立的条件解方程或方程组，具有出奇制胜的效果．

例 5-4-8 民用住宅设计，规定窗户面积必须小于地面面积．但按采光标准，窗户面积与地面面积的比值应不小于 1：10，比值越大，采光条件越好．如果同时增加相等的窗户面积和地面面积，问采光条件会变好还是变坏？说明理由．

解 设窗户面积为 a，地面面积为 b，增加的面积为 m，则有 $0<a<b$，且$\frac{a}{b}\geq\frac{1}{10}$．又$m>0$，于是由习题5－2－54知

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}\geq\frac{1}{10}$$

故采光条件会变好．

习题

5-4-1 函数$y=\log_{x^2}\frac{2-x-x^2}{x^2+2x+1}$的定义域是 [ ]

A．(-2，1)

B．(-∞，-2)∪(1，+∞)

C．(-2，-1)∪(-1，1)

D．(-2，-1)∪(-1，0)∪(0，1)

5-4-2 若函数$f(x)=\sqrt{x^2-2x+6}(x\leq -1)$的反函数为$f^{-1}(x)$，则$f^{-1}(x)$的定义域是 [ ]

A．[5，+∞)

B．(3，+∞]

C．[3，+∞)

D．$[\sqrt{5}，+\infty)$

5-4-3 已知 $y=\log_a^2(2-x)$是 x 的增函数，则 a 的取值范围是 [ ]

A．(0，1)

B．(1，+∞)

C．(-1，1)

D．(-1，0)∪(0，1)

5-4-4 设集合 $M=\{x|x^2-2ax+a^2-1\geq 0\}$，$N=\{x|x^2-5x+6\leq 0\}$若 $N\subset M$，则a的取值范围是 [ ]

A．(-∞，1]

B．[4，+∞)

C．[2，3]

D．(-∞，1)∪[4，+∞)

5-4-5 函数$y=\log_{(2x-1)}\sqrt{5x-3}$的定义域是____．

5－4－6 函数$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$的值域是____．

5-4-7 若函数 $y=\lg[x^2+(a+1)x+1]$的定义域为 R，则实数 a 的取值范围是______．

5-4-8 已知函数 $y=\log_{0.5}(32-x^2)$的定义域为 M，值域为 N，则 $M\cap N$=______．

5-4-9 设 a＜b，b＞1，M=[a，b]，函数

$f(x)=x^2-2ax+a^2+1(x\in M)$

(1)求 f(x)的值域为 N；

(2)求使$[1-a，b-a+1]\subseteq N$的a的取值范围以及b由a表示的取值范围．

5-4-10 已知函数f(x)的值域是$[\frac{1}{2}，4]$，求函数$y=f(x)+\frac{1}{f(x)}$的值域．

5-4-11 已知关于 x 的不等式 $x^2-2ax+(a+6)\leq 0$ 有实数解，且解区间

的长不超过$2\sqrt{6}$个单位长．求a的取值范围．

5-4-12　已知关于 x 的方程 $\cos^2x-3\sin x+(a-4)=0$，求使它有实数解的实数 a 的取值范围．

5-4-13　已知关于 x 的方程 $x^2-(a+1)x+(a+4)=0$ 的两根都大于 2，求实数 a 的取值范围．

5-4-14　求使关于 x 的方程

$2\sin^2x+(1-a)\sin x-a-1=0$

在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上有惟一解的参数a的取值范围．

5-4-15　已知 $y=\log_a(2x^2-3ax+a^2)$是区间(1，2)内的减函数，求实数 a 的取值范围．

5-4-16　(1)试求满足不等式$(\log_{0.5}x)^2+4\log_{0.5}x+3\leq 0$ 的 x 的范围；

(2)当x在(1)中求得的范围内变动时，求$f(x)=\left(\log_2\frac{x}{2}\right)\left(\log_2\frac{x}{4}\right)$的最大值和最小值．

5-4-17　已知函数

$y=(\log_2x-1)\log_ab^2-(\log_ab)^2\log_2x+1$

对一切 $x\in[1, 2]$，都有 $y>0$，求 b 的取值范围．

5-4-18　已知关于 x 的三个方程

$x^2+(m+1)x+(m+4)=0$

$x^2+(m-1)x+(m+2)=0$

$\frac{1}{2}x^2+(m+2)x+\left(m^2+\frac{7}{2}\right)=0$

中至少有一个存在实数根，求 m 的取值范围．

5-4-19 已知两函数$f(x)=-x^2+x+a$和$g(x)=\frac{a+4x}{2a-4x}$．

(1)求使不等式$1\leq f(\sin t)\leq\frac{17}{4}$对一切t都成立的a的取值范围；

(2)当 a 取(1)中求得的最大值，且 $0\leq t<2\pi$时，求使不等式 $1\leq g(\sin t)\leq\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$成立的t的取值范围．

5-4-20 对适合$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$的任何θ，$\cos^2\theta+2m\sin\theta-2m-2<0$恒成立，试求 m 值的范围．

5-4-21　已知函数 $f(x)=x^2+px+q$ 对于任意 $\theta\in R$，有 $f(\sin\theta)\leq 0$，且 $f(\sin\theta+2)\geq 0$．

(1)求 p，q 之间的关系式；

(2)求 p 的取值范围；

(3)如果 $f(\sin\theta+2)$的最大值是 14，求 p 的值，并求这时 $f(\sin\theta)$的最小值．

5-4-22　某商品滞销，商店决定减价销售．据分析，商品成本 A(万元)与商品数量x(件)之间有函数关系$A=0.6x-0.1\sqrt{x}$，原销售价为每

件 0.71 万元．如果每件减价 100 元，问至少要销售多少件商品，商店的盈利才不少于 3 万元？

第六部分　数列、极限、数学归纳法

(一)数列

提要

(1)数列的定义：数列是指按照某种规律排列起来的一列数．它具有两个基本特征．一是它的函数特征，数列可以看作是一个定义域为自然数集 N(或它的有限子集{1，2，…，n})的函数，当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值．另一特征是它的有序性．两组完全相同的数，如果排列顺序不一样，就构成不同的数列．数列的这两个特征，是研究数列的基本出发点．

(2)给出数列的方法：有四种常用方法：①描述或列举；②给出前几项；③给出通项；④给出递推式．

(3)寻求数列规律的方法：作为中学教学内容的数列，重点是等差数列和等比数列，或与之有关的数列．因此，寻求数列的规律，首先应着眼于取相邻两项的差或取相邻两项的比加以观察，看逐次得到的差或比是否为常数．不然，再通过其他方式探索是否可用某种公式给出．

(4)求数列的通项：常采用下列方法：

①观察、归纳、猜想　对只给出前几项的数列，观察各项与所在的项数之间的关系，从中找出规律．

②利用有关通项的公式　当已知数列的前 n 项和 S_n 的公式或 S_n 与通项 a_n 的关系时，由公式 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$ 求出该数列的通项．如果所给数列是等差或等比数列，或者可以归结为等差或等比的数列，则可由有关参数(公差、公比、项数)确定通项．

③待定系数法　如果已知数列的类型，则可通过解方程或方程组求出待定系数，从而确定其通项公式．

④直接迭代法　已知数列的递推关系时，可通过迭代确定数列的通项．

(5)求数列的和　常采用下列方法：

①直接求和　对于等差或等比数列，可直接利用公式求和．

②裂项求和　将通项分为两项之差，形成正、负抵消之势．

③集项求和　将数列的项适当分解与组合，转化为利用公式和已有结论、性质求和．

④错位相减　以适当常数项乘前 n 项和并与之作差，使之能通过提公因式转化为基本数列来处理．

⑤反序相加　将数列的前 n 项与其反序排列的 n 项对应相加，使之能利用基本数列来处理．

⑥递推求和　构造递推关系，通过累加求和．

1．数列及其性质

例题

例 6-1-1　下列判断是否正确，为什么？

(1)数列 0，1，0，-1 与数列-1，0，1，0 是相同的数列．

(2)数列$\{a_n\}$中不能有相等的项．

(3)数列 2，4，6，8，…可表示为{2，4，6，8，…}．

(4)数列 1，3，5，…，2n-1，…可表示为{2n-1}．

(5)数列 1，2，3，…不一定是无穷递增数列．

解　(1)不正确．因为数列是有序的，尽管这两数列由相同的数组成，但它们的排列次序却不一样．

(2)不正确．数列不同于集合，它可以有相同的项．

(3)不正确．因为{2，4，6，8，…}表示一个集合，不必考虑元素的顺序．如果把 $a_n=2n$ 作为该项数列的一个通项公式，则可把它表示为{2n}．

(4)正确．因为 $a_n=2n-1$ 是数列 1，3，5，…，2n-1，…的通项公式．

(5)正确．因为，虽然数列 1，2，3，…是一个无穷数列，但它只给出了前 3 项，后面的项并未确定．例如可以把它看作是自然数列，也可以看作是数列 1，2，3，1，2，3，…等等．所以不一定是递增的。

例 6-1-2　说明下面各数列可由怎样的规律组成，并根据其规律填空：

(1)1，4，7，10，______，______

(2)1，-2，4，-8，______，______

(3)-1，1，______，1，______，1

(4)2，$2\frac{1}{4}$，_____，_____，$5\frac{1}{25}$，$6\frac{1}{36}$

(5)1，$\sqrt{2}$，_____，2，_____，$\sqrt{6}$

解　(1)因相邻两项的差都是 3，故有规律：首项为 1，并逐次加上 3．依次填 13，16．

(2)因相邻两项的比都是-2，故有规律：首项为 1，并逐次乘以-2．依次填 16，-32．

(3)开始两项的差是 2，其比是-1．再就第 4 项、第 6 项检验，就会知道“相邻两项的比都是-1”，故有规律：首项为-1，并逐次乘以-1．依次填-1，-1．

(4)观察开始两项和末尾两项就会知道按差或比来考虑都不行．注意到$2=1+\frac{1}{1^2}$，即可发行每已知项都可表为$n+\frac{1}{n^2}$，故有规律：整数部分的首项是1，并逐次加1；分数部分是相应整数部分的平方的倒数．因此，可依次填$3\frac{1}{9}$，$4\frac{1}{16}$．

(5)按差或比考虑都不行．注意到$1=\sqrt{1}$，$2=\sqrt{4}$，故有规律：数列可由自然数的平方根由1开始顺次排列而成．故依次填$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$．

例 6-1-3　回答下列问题：

(1)已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=n^2-2n$.问 1 和 24 是不是$\{a_n\}$中的项？如果是，那么是第几项？

(2)$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$和$b_n=\sin\frac{(n-1)\pi}{2}$是否都可以作为数列0，1，0，1，…的通项公式？

(3)是否存在正数M，m(M＞m)，使得数列$\left\{\frac{n^2+2n+1}{n^2+n}\right\}$的每一项都不小于 m，且不超过 M？

(4)数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2-9n+22$，此数列是否存在最大的项或最小的项？数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$呢？

解　(1)分别令 $a_n=1$，$a_n=24$．由 $n^2-2n=1$，即 $n^2-2n-1=0$ 无正整数解知 1 不是$\{a_n\}$中的项；由 $n^2-2n-24=0$ 有整数解 $n=6$ 知 24 是$\{a_n\}$的一项，它是第 6 项．

(2)在$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$中令$n=1$，2，3，4，分别得$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=0$，$a_4=1$．故$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$是数列0，1，0，1，…的一个通项公式；在$b_n=\sin\frac{(n-1)\pi}{2}$中令$n=1$，2，3，4，分别得$b_1=0$，$b_2=1$，$b_3=0$，$b_4=-1$，故它不能作为数列0，1，0，1，…的通项公式．

注　这里，数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$具有相同的前 3 项，这表明仅仅给出数列的前几项，其通项公式未必是惟一的．

(3)因$a_n=\frac{n^2+2n+1}{n^2+n}=\frac{(n+1)^2}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$，故对一切$n\in N$，都有$1<a_n\leq 2$，故满足题意的 M，m 都存在，只须取 m=1 或小于 1 的任一正数，同时取 M=2 或大于 2 的任一正数即可．

注　一个数列$\{a_n\}$，如果存在两个常数 m 和 M，使不等式 $m\leq a_n\leq M$ 对一切 $n\in N$ 都成立，则这样的数列叫做有界数列．

(4)因$a_n=\left(n-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$，而$n\in N$，故当$n=4$或$n=5$时，$a_n$取最小值．故$\{a_n\}$有最小的项，其值为 2，分别为第 4 项和第 5 项．但$\{a_n\}$无最大值项．于是，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的第4项和第4项是其最大值项，其值为$\frac{1}{2}$．但$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是无最小值项．

注　因$a_n>0$恒成立，故$\frac{1}{a_n}$对一切$n\in N$有意义．$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是一个无界数列．

例 6-1-4　从 3 开始，顺次取自然数的奇数作成数列 3，5，7，…，4m+27(m∈N)．

(1)求这个数列的通项，并说明它有多少项？

(2)判断 4m+25，4m+26，4m+29 是不是这个数列中的项；如果是，那么它是第几项？

(3)证明：$s_{2m+9}=3+5+7+\cdots+(4m+19)$

解　(1)因首项是 3，以后逐次加 2，故有

$a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

由末项 4m+27=2n+1，解得 n=2m+13．

故这个数列的通项为

$a_n=2n+1(n=1，2，3，\cdots，2m+13)$

它共有 2m+13 项．

(2)令 2n+1=4m+25，解得 n=2m+12＜2m+13，故 4m+25 是所给数列的项，它是第$(2m+12)$项；令$2n+1=4m+26$，得$n=2m+\frac{25}{2}$，此与n是正整数相悖，故 4m+26 不是该数列的项；令 2n+1=4m+29，得 n=2m+14＞2m+13，故 4m+29 也不是所给数列的项．

(3)令 2m+9=n，则 2n+1=4m+19．于是，

$S_{2m+9}=S_n=3+5+7+\cdots+(2n+1)=3+5+7+\cdots+(4m+19)$

注　有穷数列的末项与数列的通项是两个不同的概念，不可混为一谈．如本例所给的数列，若把 4m+27 看作通项那就错了．另外，如果因末项中含有参数 m(可取任何自然数)，就认为它是无穷数列也是错误的．无穷数列可以只写出它的前几项或中间带有“…”的有限个项，如a_1，a_2，a_3，…或a_1，a_2，…，a_n，…，但在后面必须写出“…”．

例 6-1-5　求下面各数列的一个通项：

$(1)-\frac{1}{2\times4}$，$\frac{4}{5\times7}$，$-\frac{9}{8\times10}$，$\frac{16}{11\times13}$，…；

(2)数列的前 n 项和 $S_n=2n^2+n+1$；

(3)$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+1$．

解　(1)先观察分母，它依次为两个数列 2，5，8，11，…和 4，7，10,13,…的对应项的乘积.前者的首项为 2,并逐次加 3,故通项为 2+(n-1)×3=3n-1；同理可知后者的通项为 3n+1(也可由两因子相差 2 推出)．故通项的分母为(3n-1)(3n+1)．再看分子，易知顺次为自然数的平方．又项的符号是“-”，“+”相间，且奇负偶正．故

$$a_n=(-1)^n\frac{n^2}{(3n-1)(3n+1)}$$

可作为所给数列的一个通项．

(2)当 n=1 时，$a_1=S_1=4$；当 n≥2 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+n+1)-[2(n-1)^2+(n-1)+1]=4n-1$

注意到 a_1 不适合 $a_n=4n-1$，故所给数列的通项为

$$a_n=\begin{cases}4 & (n=1)\\ 4n-1 & (n\geq2)\end{cases}$$

(3)在递推式中令 $a_n=b_n-1$，得 $b_n-1=2(b_{n-1}-1)+1$，于是 $b_n=2b_{n-1}$．故

数列$\{b_n\}$的构造规律是：首项为 $b_1=a_1+1=2$，并逐次乘以 2．于是，$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$．从而 $a_n=b_n-1=2^n-1$．显然，$a_1=1$ 也适合此式．故所给数列的通项公式为

$a_n=2^n-1$

注　学了等比数列求和公式后，(3)中的 $a_n(n\geq 2)$也可通过迭代求出：

$a_n=2a_{n-1}+1=2(2a_{n-2}+1)=2^2a_{n-2}+1+2$

$=2^3a_{n-3}+1+2+2^2=\cdots=2^{n-1}a_1+1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}$

$$=2^{n-1}+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}+2^{n-1}-1=2^n-1$$

例 6-1-6　求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n：

(1)通项 $a_n=n+a$(a 为常数)；

(2)通项 $a_n=n^2$；

(3)通项 $a_n=(-1)^{n-1}(2n-1)$．

解　(1)采用反序相加法．

$\because S_n=(1+a)+(2+a)+\cdots+(n+a)$

$\therefore S_n-na=1+2+\cdots+(n-1)+n$

又　$S_n-na=n+(n-1)+\cdots+2+1$

$$\because 2(S_n-na)=\underbrace{(1+n)+(1+n)+\cdots+(1+n)+(1+n)}_{n项}=n(1+n)$$

$$\therefore S_n-na=\frac{n(1+n)}{2}\Leftrightarrow S_n=\frac{n(1+n)}{2}+na$$

(2)采用递推法．先构造一个递推关系：

$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$

令 k=1，2，…，n，有

$2^3-1^3=3\times 1^2+3\times 1+1$

$3^3-2^3=3\times 2^2+3\times 2+1$

$4^3-3^3=3\times 3^2+3\times 3+1$

…………………………

$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

将以上 n 个式子相加，得

$(n+1)^3-1^3$

$$=3\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\times(1+2+\cdots+n)+\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n个}$$

$$=3\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

所以 $$S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{2(n+1)^3-2-3n(n+1)-2n}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3)采用集项求和法．分两种情形：

当 $n=2k(k\in N)$时，最后一项为$(-1)^{2k-1}[2(2k)-1]=-(4k-1)$，故

$$S_n = S_{2k} = (1-3)+(5-7)+\cdots+[(4k-3)-(4k-1)]$$
$$= \underbrace{(-2)+(-2)+\cdots+(-2)}_{k\text{项}} = -2k = -n$$

当 n=2k-1(k∈N)时，有

$S_n=S_{2k-1}=S_{2k}-a_{2k}=-2k-[-(4k-1)]=2k-1=n$

综合两种情形，知

$S_n=(-1)^{n+1}n$

注　在学了等差数列求和公式后，也可按下列方式分组计算：

$$S_n = (1+5+9+\cdots)-(3+7+11+\cdots)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{n(n-1)}{2}=n\ (\text{当}n\text{为奇数时}) \\ \dfrac{n(n-1)}{2}-\dfrac{n(n+1)}{2}=-n\ (\text{当}n\text{为偶数时}) \end{cases}$$

习题

6-1-1　判定下面的说法是否正确：

(1)数列$\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$的第k项是$\left\{\dfrac{k+1}{k}\right\}$；

(2)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $a_n=S_n-S_{n-1}$；

(3)数列1，$\dfrac{1}{3}$，…，$\dfrac{1}{2n-1}$，…一定是无穷递减数列；

(4)完全确定的数列，其通项 a_n 也可以用不同的式子表示.

6-1-2　说出下面各数列的一个规律，并按其规律填空：

(1)1，-3，5，-7，______，______

(2)$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{6}$，____，$-\dfrac{1}{10}$，____

(3)2，12，______，56，______，132

(4)2，______，222，______，22222，______

6-1-3　数列 3，7，13，21，…的一个通项公式可能是　[　　]

A．4n-1

B．$5+(-1)^n\cdot 2$

C．n^2+n+1

D．$4n^2-8n+7$

6-1-4　已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=n^2-12n+48$，判断 12，18，21 是不是这个数列中的项？如果是，那么它是第几项？

6-1-5 数列的通项$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，前n项的和为9，那么项数n是　[　　]

A．9

B．99

C．10

D．100

6-1-6 数列的通项是$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，求使$S_n>\frac{2}{3}$的n的最小值．

6-1-7　写出下面各数列的前 4 项：

(1)$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{3-2n}{2n-1}$；

(2)$\{a_n\}$满足：$a_1=a_2-1$，$a_n=3a_{n-1}-1(n\geq 2)$；

(3)把“n 除以 3 的余数”作为第 n 项的数列．

6-1-8　求下面各数列的一个通项公式：

(1)1，0，3，0，5，0，…

(2)$1\frac{1}{2}$，$-2\frac{1}{3}$，$3\frac{1}{4}$，$-4\frac{1}{5}$，…

(3)0.23，0.2323，0.232323，0.23232323，…

(4)9，101，999，10001，…

6-1-9 数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{n(n+1)a_n}{n(n+1)-a_n}$，求通项$a_n$．

6-1-10　数列$\{a_n\}$满足：$S_n=1+2a_n$，求通项 a_n．

6-1-11 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+\frac{1}{2}a_1$，求通项a_n．

6-1-12　已知数列$\{a_n\}$的前 3 项依次是 1，4，11；它的前 n 项和为$S_n=an^2+bn+c$．试确定 a，b，c 的值．

6-1-13 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{n^2-n+1}{n+1}$，求此数列的前3项．

6-1-14 已知数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\frac{n^2}{n^2+1}$．

(1)求此数列的前 4 项的和；

(2)判断此数列的增减性和有界性．

6-1-15 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{n(n+1)}{n^2+2n+1}$，求通项$a_n$．

6-1-16 已知有穷数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\sqrt{100-n^2}$．判断8是不是该数列中的项；并求该数列的首项和末项．

6-1-17　已知数列$\{a_n\}$的前 k 项的和 S_k 满足：$S_k=(k+2)S_k+1$，求通项 a_n．

6-1-18　数列$\{a_n\}$的第 n 项是 3^n 的末位数．试写出它的前 5 项，并求通项公式．

6-1-19 已知数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\frac{59}{99}(10^{2n}-1)$，求它的前n项的和$S_n$．

6-1-20　已知数列$\{a_n\}$的通项 $a_n=n(n+1)(n+2)$，求它的前 n 项的和S_n．

2．等差数列

例题

例 6-1-7　判断下面的说法是否正确：

(1)数列$\{a_n\}$成等差数列的充分必要条件是：对任意 $n\in N$，$a_{n+1}-a_n$是非零常数；

(2)首项为 a，公差为 d 的等差数列用递推式表示，就是

$a_1=a$，$a_{n+1}=a_n+d(n=1，2，3，\cdots)$

(3)等差数列$\{a_n\}$的通项 a_n 必是 n 的一次函数；

(4)b 是 a、c 的等差中项的充分必要条件是 2b=a+c；

(5)若等差数列$\{a_n\}$公差不为零，则对任意 m，n，p，$q\in N$，总有

$a_m+a_n=a_p+a_q\Leftrightarrow m+n=p+q$

解　(1)不正确．等差列数的公差可以是零．

(2)正确．所给递推式可视为等差数列的归纳定义．

(3)不正确．应该说：a_n 是 n 的一次函数或常数．当且仅当公差 $d\neq 0$ 时，a_n 才是 n 的一次函数．

(4)正确．$2b=a+c\Leftrightarrow b-a=c-b$

$\Leftrightarrow a，b，c$成等差数列$\Leftrightarrow b$是$a，c$的等差中项

(5)正确．事实上，当 $d\neq 0$ 时，设 $a_1=a$，则

$a_m+a_n=a_p+a_q$

$\Leftrightarrow[a+(m-1)d]+[a+(n-1)d]=[a+(p-1)d]+[a+(q-1)d]$

$\Leftrightarrow(m+n-2)d=(p+q-2)d\Leftrightarrow m+n-2=p+q-2$

$\Leftrightarrow m+n=p+q$

例 6-1-8　已知等差数列的第 5 项是 3，第 10 项是-12．

(1)求此数列的通项公式；

(2)写出此数列的递推式；

(3)判断数 0 是不是这个数列中的项，并指出这个数列中的头一个负数是第几项；

(4)求此数列的前 10 项和．

分析　关于等差数列的问题，首先应该想到的是通项公式和前 n 项和公式，即$a_n=a_1+(n-1)d$和$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$．这两个公式是彼此独立的，共涉及 5 个参数．因此，只要知道其中任何 3 个，即可求出另外 2 个．

解　(1)设等差数列的首项为 a，公差为 d．因第 5 项为 3，第 10 项为-12，所以由通项公式可得

$a+(5-1)d=3，a+(10-1)d=-12$

联立解得 a=15，d=-3．从而第 n 项为 $a_n=15+(n-1)\cdot(-3)=-3n+18$．

故通项公式为 $a_n=18-3n$．

(2)递推式为：$a_1=15$，$a_{n+1}=a_n-3(n=1，2，3，\cdots)$

(3)令 18-3n=0，解得 n=6．所以 0 是此数列的第 6 项．

令 18-3n＜0，解得 n＞6．因此头一个负数所在的项是第 7 项．

(4)因$a_1=15$，$a_{10}=-12$，故前10项的和为$S_{10}=\frac{10\times(15-12)}{5}=15$.

例 6-1-9　两数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为

$S_n=n(n+4)$和 $S'_n=n(2n-3)$

(1)求两数列的通项 a_n 和 b_n；

(2)依次将两数列的对应项相加作成新数列$\{a_n+b_n\}$.求此数列的通项公式，判断它是不是等差数列.

(3)问：数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是否存在相同的项？如果存在，求依次取这些相同的项作成的新数列的通项公式.

解　(1)对数列$\{a_n\}$：$a_1=S_1=5$；当 $n\geq 2$ 时，有

$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+4)-(n-1)[(n-1)+4]=2n+3$

又 $a_1=5$ 适合上式，故通项为 $a_n=2n+3$.

对数列$\{b_n\}$：$b_1=S'_1=-1$；当 $n\geq 2$ 时，有

$b_n=S'_n-S'_{n-1}=n(2n-3)-(n-1)[2(n-1)-3]=4n-5$

又 $b_1=-1$ 适合上式，故通项为 $b_n=4n-5$.

(2)$c_n=a_n+b_n=(2n+3)+(4n-5)=6n-2$

故$\{a_n+b_n\}$的通项公式为 $c_n=4+(n-1)6$，它是首项为 4 公差为 6 的等差数列.

(3)假定$\{a_n\}$与$\{b_n\}$存在相同的项，设 $a_n=b_m$，则有

$2n+3=4m-5\Leftrightarrow n=2m-4$

故对于 $2m-4>0$，即 $m>2$ 的一切自然数 m，n 都为正整数.故$\{a_n\}$与$\{b_n\}$存在相同的项.这些项依次是$\{b_n\}$的第 3，4，5…项，也就是$\{a_n\}$的第 2，4，6，…项.即所求的新数列为$\{t_n\}$：7，11，15，….其首项为 7，公差为 4(与$\{b_n\}$的公差相同).故新数列的通项公式是：$t_n=7+(n-1)\cdot 4$.

例 6-1-10　在等差数列$\{a_n\}$中，已知

(1)$S_3=15$，$S_7=91$，$a_n=49$，求 n；

(2)$a_3=8$，$S_{10}=155$，求通项公式；

(3)$a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=350$，求 a_2+a_{10}.

解　(1)设首项为 a，公差为 d，则有

$15=3a+\frac{3(3-1)}{2}d$，$91=7a+\frac{7(7-1)}{2}d$

联立二式，解得 a=1，d=4.于是，由 $a_n=49$ 得

$1+(n-1)4=49\Leftrightarrow n=13$

(2)设首项为 a，公差为 d，由题设，有

$a+(3-1)d=8$，$10a+\frac{10\times(10-1)}{2}d=155$

联立二式，解得 a=2，d=3.

故通项公式为 $a_n=2+(n-1)\times 3$，即 $a_n=3n-1$.

(3)等差数列有一个重要性质：构成等差数列的奇数个项的算术平均

值等于其中间项．于是，由题设，有$a_6=\frac{350}{5}=70$，所以$a_2+a_{10}=a_6+a_6=140$．

注　构成等差数列的偶数个项的算术平均值，等于其中间两项的算术平均值．

例 6-1-11　试证：按下列条件给出的数列$\{a_n\}$是等差数列．

(1)$a_1=1$，$a_2=-2$，$a_{n+1}=a_n-3(n\geq 2)$

(2)第 n 项是 n 的一次式 $a_n=pn+q$(p，q 为常数)；

(3)前 n 项的和是 n 的二次式 $S_n=an^2+b_n$(a，b 为常数)；

(4)通项$a_n=\log_2\frac{8}{\sqrt[3]{4^{3n-2}}}$．

解　(1)对于 n=2，3，4，…，都有 $a_{n+1}-a_n=-3$(常数)；又有$a_2-a_1=(-2)-1=-3$．故对一切 $n\in N$，恒有

$a_{n+1}-a_n=-3$(常数)

故$\{a_n\}$是首项为 1，公差为-3 的等差数列．

(2)先利用题设条件把 a_{n+1} 用 n 表示出来，再计算 $a_{n+1}-a_n$，指出这个差对一切自然数 n 恒为常数．

依题设，对一切 $n\in N$，等式

$a_n=pn+q$

成立，从而

$a_{n+1}=p(n+1)+q=pn+(p+q)$

成立．由上两等式得

$a_{n+1}-a_n=p$

这个等式对一切 $n\in N$ 恒成立，即差 $a_{n+1}-a_n$ 与 n 无关，恒等于常数 p．故$\{a_n\}$是首项为 p+q，公差为 p 的等差数列．

(3)$a_1=a+b$．当 $n\geq 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=an^2+bn-[a(n-1)^2+b(n-1)]$

$=2an+(b-a)$

此式也适合于 $a_1=a+b$．这时，

$a_{n+1}-a_n=[2n(n+1)+(b-a)]-[2an+(b-a)]=2a$

对一切 $n\in N$ 都成立，故$\{a_n\}$是首项为 a+b，公差为 2a 的等差数列．

注　由(3)中证明可知，前 n 项和 $S_n=an^2+bn+c(a\neq 0)$的数列，当 $c\neq 0$ 时，它不是等差数列．因为这时 $a_1=a+b+c$，从而

$a_2-a_1=4a+(b-a)-(a+b+c)=2a-c\neq 2a$

$$
\begin{aligned}
(4)a_n&=\log_2\frac{8}{\sqrt[3]{4^{3n-2}}}=\log_2 8-\log_2(4^{n-1}\cdot 4^{\frac{1}{3}})\\
&=3-\log_2 4^{n-1}-\log_2 2^{\frac{2}{3}}=3-2(n-1)-\frac{2}{3}\\
&=\frac{7}{3}+(n-1)(-2)
\end{aligned}
$$

故$\{a_n\}$是首项为$\frac{7}{3}$，公差为-2的等差数列．

注　证明非常数列是等差数列有三种基本方法：

(i)按定义证明$a_{n+1}-a_n=d$(非零常数)；

(ii)第n项是n的一次式：$a_n=pn+q$(p，q为常数，$p\neq 0$)；

(iii)前n项和是n的二次式：$S_n=an^2+bn$(a，b为常数，$a\neq 0$)．

例 6-1-12　求下面各等差数列$\{a_n\}$的前n项的和S_n：

(1)已知前16项的和为80，前28项的和为-196；

(2)已知前10项的和为95，其次的10项的和为245．

解　(1)设首项为a，公差为d．依题设，有

$$16a+\frac{16\times(16-1)}{2}d=80，28a+\frac{28\times(28-1)}{2}d=-196$$

解得d=-2，a=20．所以

$$S_n=20n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+21n$$

(2)设首项为a，公差为d，前n项和为S_n，则有

$$S_{10}=10a+\frac{10\times(10-1)}{2}d=95\Leftrightarrow 2a+9d=19 \qquad \text{(i)}$$

$$S_{20}-S_{10}=\left(20a+\frac{20\times 19}{2}d\right)-\left(10a+\frac{10\times 9}{2}d\right)=245$$

即　$2a+29d=49$　(ii)

由(i)，(ii)解得$d=\frac{3}{2}$，$a=\frac{11}{4}$．

所以所求公式为$S_n=\frac{11}{4}n+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{3}{2}$，即$S_n=\frac{3}{4}n^2+2n$

习题

6-1-21　数列$\{a_n\}$是等差数列的充要条件是　[　]

A．存在常数d，使$S_{n+1}-S_n=S_n-S_{n-1}=d(n\geq 2)$

B．存在常数d，使$S_{n+1}-S_n=S_n-S_{n-1}+d(n\geq 2)$

C．存在常数a，b，c，使$S_n=an^2+bn+c$

D．存在常数a，b，使$Sn=an^2+bn$

6-1-22 在等差数列$\{a_n\}$中，若$S_9=3S_4$，则$\frac{a_1}{d}=$　[　]

A．$\frac{1}{3}$

B．3

C．$\frac{1}{6}$

D．6

6-1-23　已知等差数列的首项是31．若此数列从第16项开始小于1，则此数列的公差d的取值范围是　[　]

A．(-∞，-2)

B．$\left[-\frac{15}{7}，-2\right]$

C．(-2，+∞)

D．$\left(-\frac{15}{7}，-2\right)$

6-1-24　在等差数列$\{a_n\}$中，

$a_1+a_2+\cdots+a_{50}=1125$，$a_{51}+a_{52}+\cdots+a_{100}=3625$

那么，其首项 a_1=______；公差 d=______．

6-1-25　若$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_2+a_5+a_8=30$，$a_2a_5a_8=190$，则此数列的通项 a_n=______．

6-1-26　在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_3=-4$，$a_7=a_5+1$，则此数列的通项 a_n=______；公差 d=______．

6-1-27　已知等差数列$\{a_n\}$的前 30 项的和 $S_{30}=45$，则

a_5+a_{26}=______；若 $a_1=-13$，则公差 d=______．

6-1-28　两个数列 a，a_1，a_2，…，a_n，b 和 a，b_1，b_2，…，b_m，b 各自成等差数列，其公差分别为 d_1，d_2，且 $d_2\neq0$，那么

$\frac{d_1}{d_2}=$______；如果前一数列的和是$(n-48)(a+b)$，且$\frac{d_1}{d_2}=\frac{1}{3}$，则两数列的项数分别是______．

6-1-29　已知$\{a_n\}$是等差数列，$b_n=pa_n+q$(p，q 为常数)．求证$\{b_n\}$也是等差数列．

6-1-30　已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3n^2-2n$．设 $b_n=a_n+a_{n+r}$(r 为常数)．求证$\{b_n\}$是等差数列，并求它的首项和公差．

6-1-31　已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3n^2+2n$，求它的前 2m+1 项的算术平均值．

6-1-32　设两个等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，S'_n．求证

$a_n：b_n=S_{2n-1}：S'_{2n-1}$

6-1-33　在等差数列 1，7，13，…，6n-11，6n-5 的每两项之间插入 2 个数，使得新数列仍为等差数列．问：

(1)原数列的第 15 项是新数列的第几项？

(2)新数列的第 30，31 项是不是原数列的项？如果是，它是原数列的第几项？

6-1-34　已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和

$S_n=(p+1)n^2-(q+1)n+q-p-3$

(1)求此数列的首项和公差；

(2)试证：当 p＞-1 时，此数列单调递增；

(3)试问：当$p=-\frac{1}{4}$时，从第几项开始，此数列的各项都大于零？

6-1-35　已知等差数列的通项 $a_n=2n-1$。如果从它的第 k 项到 28 项的和是 559。试求 k 的值。

6-1-36　在等差数列$\{a_n\}$中，$a_n=\frac{1}{m}$，$a_m=\frac{1}{n}$，其中m，$n\in N$，且$m\neq n$。求S_{mn}。

6-1-37　已知等差数列$\{a_n\}$的首项为 20，公差为整数，且前 7 项为正，从第 8 项开始为负。

(1)求此数列的公差；

(2)求前 n 项和 S_n 的最大值；

(3)求使 $S_n>0$ 的 n 的最大值。

6-1-38　问：是否存在不为常数列的等差数列，使 $S_n:S_{2n}$ 是与 n 无关的常数？证明你的结论。

6-1-39　有 $n(n\geq 3)$个首项为 1 的等差数列，设第 k 个数列的公差为 d_k，第 k 项为 a_k。

(1)用 b_k 表示第 k 个数列的第 $m(m\geq 2)$项。当 b_1，b_2，…，b_k，…，b_n 成等差数列时，试将 d_k 表示成 $f(k)d_1+g(k)d_2$ 的形式，其中 $f(k)$，$g(k)$是 k 的整式；

(2)当 $d_1=1$，$d_2=2$ 时，在(1)的条件下，求数列$\{a_n\}$的通项。

6-1-40　分别求出适合下列条件的三位自然数的和：(1)能被 3 整除；(2)能被 5 整除；(3)能被 3 和 5 整除；(4)能被 3 或 5 整除。

3．等比数列

例题

例 6-1-13　判断下面各数列是不是等比数列？

(1)6，-2，$\frac{2}{3}$，$-\frac{2}{9}$

(2)3，1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，…，$(\frac{1}{3})^{n-2}$，…

(3)$a_1=2$，$a_2=1$，$a_{n+1}=ra_n(n=2，3\cdots)$

(4)前 n 项的和 $S_n=3^n+a$(a 是常数)。

解　(1)是。公比是$-\frac{1}{3}$。

注　如果将原题改写为6，-2，$\frac{2}{3}$，$-\frac{2}{9}$，…，则不能断定它是等比数列。因为从第 5 项起，以后的项没有给出，其变化规律不能确定。

(2)是。公比是$\frac{1}{3}$。

注　此数列的通项不能写成$(\frac{1}{3})^n$或$(\frac{1}{3})^{n-1}(n\in N)$。否则，首项非3。

(3)当$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_2}{a_1}$，即$r=\frac{1}{2}$，且仅当这时才是等比数列。

(4)由题设，$a_1=S_1=3+a$；当 $n\geq 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-3^{n-1}=2\times 3^{n-1}$。

令$n=2$，得$a_2=6$。因此，当$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_2}{a_1}$，即$\frac{2\times 3^n}{2\times 3^{n-1}}=\frac{6}{3+a}$，就是$a=-1$时，且仅当这时，是等比数列。

例 6-1-14　求下面各等比数列的通项公式：

(1)$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{2}$，3，6，…

(2)$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，…，$\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^m$(常数$m\in N$)

(3)$a_1=-3$，$a_{n+1}+2a_n=0$

(4)$a_1=3$，$a_m=48$，$a_{2m-3}=192$

解　(1)尽管只给出有限项，但题设它是等比数列，故通项公式是确定的。因首项为$\frac{3}{4}$，公比为$\frac{3}{2}:\frac{3}{4}=2$，所以

$$a_n=\frac{3}{4}\times 2^{n-1}，即a_n=3\times 2^{n-3}。$$

(2)因首项为$\frac{2}{3}$，公比为$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$，故第n项

$$a_n=\frac{2}{3}\times(\frac{1}{2})^{n-1}$$

当$\frac{2}{3}\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{m}$时，有$(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^{m+1}$，这时，$n=m+2$。故这个数列共有 m+2 项。于是，通项公式为

$$a_n=\frac{2}{3}\times(\frac{1}{2})^{n-1}\text{，即}a_n=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^{n-2}(n\leq m+2)\text{。}$$

注　求有穷数列的通项公式，应指出项数 n 的范围。

(3)因首项为 -3，公比$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-2$，故通项公式为$a_n=(-3)(-2)^{n-1}$，即 $a_n=(-1)^n3\times2^{n-1}$。

(4)设公比为 q，则有 $3q^{m-1}=48$，即 $q^{m-1}=16$。又 $3q^{(2m-3)-1}=192$，即$q^{2m-4}=64$，故$q^{m-2}=\pm8$，于是$\frac{q^{m-1}}{q^{m-2}}=\pm\frac{16}{8}$，即$q=\pm2$。于是，通项公式为

$a_n=3\times2^{n-1}$ 或 $a_n=3\times(-2)^{n-1}$

注　由$(\pm2)^{m-1}=16$ 知 m=5。故 a_m 是第 5 项，a_{2m-3} 是第 7 项。

例 6-1-15　证明下面各数列$\{a_n\}$是等比数列，并求首项和公比：

(1)$a_n=b_{n+1}b_n$，其中$\{b_n\}$是等比数列；

(2)$a_n=b_{n+1}-b_n$，其中 $b_1=0$，$b_2=1$，且 $b_n=2b_{n+2}-b_{n+1}$；

(3)前 n 项的和 $S_n=p(q^n-1)(p\neq0，q\neq0，1)$。

解　(1)因$\{b_n\}$是等比数列，故对一切 n∈N，$b_n\neq0$。于是 $a_n=b_{n+1}b_n\neq0$。设$\frac{b_{n+1}}{b_n}=q$，则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b_{n+2}b_{n+1}}{b_{n+1}b_n}=\frac{b_{n+2}}{b_n}=\frac{b_nq^2}{b_n}=q^2$$

对一切 n∈N 都成立，又 $a_1=b_2b_1=b_1^2q$，故$\{a_n\}$是首项为 b_1^2q，公比为 q^2 的等比数列。

(2)$a_n=b_{n+1}-b_n=b_{n+1}-(2b_{n+2}-b_{n+1})=2(b_{n+1}-b_{n+2})$

由此可知 $a_n\neq0$(否则可推出 $b_1-b_2=0$，与题设矛盾)，且

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b_{n+2}-b_{n+1}}{2(b_{n+1}-b_{n+2})}=-\frac{1}{2}$$

此式对一切 n∈N 都成立。又 $a_1=b_2-b_1=1$，故$\{a_n\}$是首项为 1，公比为-1/2 的等比数列。

(3)因 $S_n=p(q^n-1)$，$S_{n-1}=p(q^{n-1}-1)$，故当 n≥2 时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=p(q^n-q^{n-1})=p(q-1)q^{n-1}$$

所以　$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p(q-1)q^n}{p(q-1)q^{n-1}}=q$

又$a_2=p(q-1)q$，$a_1=S_1=p(q-1)$，故$\frac{a_2}{a_1}=\frac{p(q-1)q}{p(q-1)}=q$。故对所有的$n\in N$，都有$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$。

故数列$\{a_n\}$是首项为 $p(q-1)$，公比为 q 的等比数列。

注　证数列为等比数列的基本方法是按定义证明$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(常数)对一切 $n\in N$ 都成立。另外也可证通项 $a_n=aq^{n-1}(a\neq0，q\neq0)$，或根据本例(3)证前 n 项和 $S_n=p(q^n-1)(p\neq0，q\neq0，1)$。

例 6-1-16　已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=2$，前 n 项的和满足：

$$S_n+S_{n+1}=2a_{n+1}$$

求 a_n 及 S_n。

解　先证$\{S_n\}$是等比数列。

因为 $S_n+S_{n+1}=2a_{n+1}=2(S_{n+1}-S_n)$，所以 $S_{n+1}=3S_n$。此式对一切 $n\in N$ 都成立。又 $S_1=a_1=2$，故数列$\{S_n\}$是首项为 2，公比为 3 的等比数列。所以

$$S_n=2\times3^{n-1}(n\in N)$$

于是，$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times3^{n-1}-2\times3^{n-2}=4\times3^{n-2}(n\geq2)$

从而 $$a_n=\begin{cases}2 & (当n=1时)\\4\times3^{n-2} & (当n\geq2时)\end{cases}$$

注　解一般数列问题,首先应考虑是否可以转化为特殊数列(等差或等比)来处理。以上解法体现了这种转化思想。

例 6-1-17　已知$\{a_n\}$是等比数列，前 n 项的和为 S_n。设

$$P=a_1\cdot a_2\cdots a_n，T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

求证：$P^2=(\frac{S_n}{T})^n$。

证　[法一]　设$\{a_n\}$的公比为q，则当$q=1$时，$P=a_1^n$，$S_n=na_1$，$T=\frac{n}{a_1}$，所以$\frac{S_n}{T}=a_1^2$，从而$(\frac{S_n}{T})^n=(a_1^n)^2=P$。

当 $q\neq1$，则有

$$P=a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2\cdot\cdots\cdot a_1q^{n-1}$$

$$=a_1^nq^{1+2+\cdots+(n-1)}=a_1^nq^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$T=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1q}+\cdots+\frac{1}{a_1q^{n-1}}=\frac{1-q^n}{a_1(1-q)q^{n-1}}$$

而$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，故$\frac{S_n}{T}=a_1^2q^{n-1}$，从而

$$(\frac{S_n}{T})^n=(a_1^2q^{n-1})^n=(a_1^nq^{\frac{(n-1)n}{2}})^2=P^2$$

[法二]　$\because P=a_1^nq^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$$T=\frac{1}{a_1^2q^{n-1}}(a_1q^{n-1}+a_1q^{n-2}+\cdots+a_1q+a_1)=\frac{1}{a_1^2q^{n-1}}S_n$$

$$\therefore \frac{S_n}{T}=a_1^2q^{n-1}\Leftrightarrow(\frac{S_n}{T})^n=P^2$$

注　证法一要利用求和公式，因而对公比是否为 1 的讨论是必要的。证法二直接提示出 S_n 与 T 的关系颇具技巧，它使证明避开了讨论。

例 6-1-18　在数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=1$，$a_2=2$，前 n 项的和 S_n 满足$S_n=\frac{2S_{n-1}+S_{n+1}}{3}(n\geq 2)$

(1)求 a_n 及 S_n；

(2)求使 $S_n>10^5$ 的最小整数 n(取 lg2=0.3010)。

解　(1)由$S_n=\frac{2S_{n-1}+S_{n+1}}{3}$，得$S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})$，即

$a_{n+1}=2a_n(n\geq 2)$

又 $a_2=2a_1$，故$\{a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，从而

$$a_n=2^{n-1}；S_n=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

(2)令 $S_n=2^n-1>10^5$。

因为 10^5+1 是大于 10^5 的最小整数，且 2^n 的末位数字不为 1，故适合 $2^n>10^5$ 的最小整数 n，就是适合 $2^n>10^5+1$，即适合 $2^n-1>10^5$ 的最小整数 n。

对 $2^n>10^5$ 两边取以 2 为底的对数，得

$$n>\log_2 10^5=\frac{5}{\lg 2}=16.61\cdots$$

故所求的最小整数 n=17。

习题

6-1-41　已知$\{a_n\}$是以 q 为公比的等比数列，判断以下各数列是不是等比数列。如果是，则指出其公比：

(1)$\{\frac{1}{a_n}\}$；

(2) $\{a_n^2\}$；

(3) $\{|a_n|\}$；

(4)$\{ca_n\}$(c为常数)；

(5)$\{a_n+a_{n+1}\}$ 。

6-1-42　设两数列的前 n 项的和 S_n 分别具有以下性质，判断它们是不是等比数列：

(1)$\lg(S_n+k)=n$(k为常数)；

(2)$S_n=\frac{a^n-b^n}{a^n}$(a，b为常数，$a\neq 0$)。

6-1-43　下列命题中，正确的一个是　　　　　　　　　　　[　　]

A．数列$\{a^n\}$一定是等比数列

B．若$b^2=ac$，则a，b，c一定是等比数列

C．由$a_n=qa_{n+1}$(q为常数)确定的数列$\{a_n\}$一定是等比数列

D．若$\{a_n\}$是等比数列，则a_n是a_{n-r}与a_{n+r}($r\in N$，$r<n$，$n\geq 2$)的等比中项

6-1-44　若直角三角形的三边的长成等比数列，则它的公比等于　[　　]

A．$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B．$\sqrt{\frac{2+2\sqrt{5}}{2}}$

C．$\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$或$\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{2}$

6-1-45　设数列$\{a_n\}$的前n项的和$S_n=ab^n+b$(a，b为常数)。若$\{a_n\}$成等比数列，则必有　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$a\neq 0$，$b\neq 0$

B．$a\neq 0$，$b\neq 0$，$b\neq 1$

C．$b\neq 0$，$b\neq 1$

D．$b\neq 0$，$b\neq 1$，$a+b=0$

6-1-46　若等比数列的首项为1，公比为2，则前101项的和S_{101}的位数是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．29　　　　　　B．30

C．31　　　　　　D．32

6-1-47　已知等比数列$\{a_n\}$的前3项的和为15，前6项的和为-105，则首项a_1=______；公比q=______。

6-1-48　在等比数列$\{a_n\}$中$a_1+a_4=63$，$a_2+a_3=27$。则公比q=______；相应地，首项a_1=______。

6-1-49　在等比数列$\{a_n\}$中，$a_4+a_8=-\frac{17}{64}$，$a_6=-\frac{1}{16}$，则公比q=______；相应地，首项a_1=______。

6-1-50　在a与b之间插入n个数，组成首项为a，末项为b的等比数列，那么，当n为偶数时，q=______；当n为奇数时，q=______。

6-1-51　已知等比数列$\{a_n\}$的前3项依次是x，$2x+1$，$3x+\frac{3}{2}$。若$a_m=-\frac{729}{32}$，则$m=$______，$a_5=$______。

6-1-52　在等比数列$\{a_n\}$中，当首项a_1和公比q满足什么条件时，此数列是：(1)递增数列？(2)递减数列？(3)不递增也不递减的数列？

6-1-53　设等比数列$\{a_n\}$的前n项的和为S_n。若公比$q\neq -1$，则对一切$m\in N$，S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$成等比数列。

6-1-54　设各项为正数的等比数列$\{a_n\}$共有$2m+2$项，且$S_m=\frac{15}{8}$，

$S_{2m}=\frac{255}{8}$，最大的项为64。求这个有穷数列的和S与项数。

6-1-55　已知首项为正的等比数列的前n项的和为80；其次的n项中最小的项为162，这n项的和为6480。试求此数列的通项公式。

6-1-56　在两数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$中，$a_1=1$，$b_1=0$，当$n\geq 2$时，

$$a_n=\frac{1}{2}(3a_{x-1}+b_{n-1}),\ b_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+3b_{n-1})$$

分别求两数列的通项a_n，b_n及数列$\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$的前n项的和S_n，S_n'。

6-1-57　若数列a，b，c，d，e的前3项成等比数列，且满足：①a=b+c，②b=c+d，③c=d+e。求证：此数列是等比数列。

6-1-58　在数列$\{a_n\}$中，$a_2=3a_1$，且前n项的和S_n满足

$S_{n+1}=4S_n-3S_{n-1}$。

(1)证明此数列是等比数列，并求S_n；

(2)当首项$a_1=1$时，求使$S_n>10^6$的最小项数n。

6-1-59　已知数列$\{P_n\}$的通项$P_n=\underbrace{111\cdots1}_{n个}$；列数$\{Q_n\}$的通项$Q_n=\underbrace{444\cdots4}_{n个}$。试证$P_{2n}+Q_n+1$是某个整数的平方。

6-1-60　已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q>0$，前m项的和为2，其后的2m项的和为12。

(1)求再后的3m项的和；

(2)当m=2时，求a_n。

4．等差数列与等比数列的综合题

例题

例 6-1-19　判断下列说法是否正确：

(1)只有各项都相等且不为零的数列，才能既是等差数列同时又是等比数列。

(2)若$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，则$\{\log_c a_n\}$($c>0$ 且 $c\neq 1$)是公差为 $\log_c q$ 的等差数列。

(3)两个正数a，b的等差中项A，正的等比中项G以及由$H=\dfrac{2ab}{a+b}$定义的调和中项 H 之间的大小关系是：$A\geq G\geq H$。

(4)若$\{a_n\}$是首项为 a，公比为 q 的等比数列；在它的前 2m 项中，其偶数项的积为 $a^m q^{S_m}$，则 S_m 是首项为 1，公差为 2 的等差数列的前 m 项的和。

解　由$\overline{z}=\dfrac{u}{1+i}$知$|z|=|\overline{z}|=\dfrac{|u|}{\sqrt{2}}$．但$1\leq|z|\leq\sqrt{2}$，可知

$\sqrt{2}\leq|u|\leq 2$

再由 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$ 得 $a_{n-1}=a_n=a_{n+1}$。

(2)不正确。当 $a_n\leq 0$ 时，$\log_c a_n$ 无意义。

注　命题对于 $a_n>0(n\in N)$正确。

(3)正确。$A-G=\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$

$$C-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\geq 0$$

(当且仅$a=b$时各等号成立。)

(4)正确。$\{a_n\}$的前 2m 项中，其偶数项的积为

$(ar)(ar^3)(ar^5)\cdots(ar^{2m-1})=a^m q^{1+3+5+\cdots+(2m-1)}$

所以　$S_m=1+3+5+\cdots+(2m-1)$

例 6-1-20　在数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=a$，$a_{n+1}=qa_n+d$(a，q，d 是常数)。求此数列的通项 a_n。试问：在什么条件下，此数列是等差数列？等比数列？既是等差数列也是等比数列？

解　对参数的不同取值进行讨论。

(i)当 q=0 时。$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}a & (\text{当}n=1\text{时})\\ d & (\text{当}n\geq 2\text{时})\end{cases}$$

当且仅当 a=d 时，$\{a_n\}$是首项为 a，公差为 0 的等差数列；当且仅当 $a=d\neq 0$ 时，$\{a_n\}$既是公差数为 0 的等差数列，也是公比为 1 的等比数列。

(ii)当 q=1 时，$\{a_n\}$是首项为 a，公差为 d 的等差数列。这时，通项公式为 $a_n=a+(n-1)d$。

特别地，若 $a\neq0$，但 $d=0$，则这时的$\{a_n\}$既是等差数列，也是等比数列。

(iii)当 $q\neq0$，1 时，由 $a_{n+1}=qa_n+d$ 可知：

若 $d=0$ 且 $a\neq0$，则$\{a_n\}$是首项为 a，公比为 q 的等比数列。

若 $d\neq0$，则$\{a_n\}$成等比数列的必要条件是

$a\neq0$，且 $\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}\Leftrightarrow\frac{q(qa+d)+d}{qa+d}=\frac{qa+d}{a}\Leftrightarrow a=\frac{d}{1-q}\neq0$

这时，$\{a_n\}$的各项都等于$\frac{d}{1-q}$，所以它既是等差数列，也是等比数列。

综上所述，当 $q=1$ 时，$\{a_n\}$是等差数列；当 $q\neq0$，1，且 $a\neq0$，$d=0$时，$\{a_n\}$是等比数列；当$q\neq0$，1，且$a=\frac{d}{1-q}\neq0$，或$q=0$，且$a=d\neq0$，或 $q=1$，且 $a\neq0$，$d=0$ 时，$\{a_n\}$既是等差数列，也是等比数列。

注　本例是涉及等差数列与等比数列的典型综合题。解这类问题，一要根据定义准确用好公式；二要抓准基本元素进行详细分析和层次分明的讨论；三要抓好关键环节的化归或转化以及充分或必要条件的恰当运用。

例 6-1-21　在二实数 a，b($a\neq0$)之间插入实数 x，y 使前三个数 a，x，y 成等比数列，且后三个数 x，y，b 成等差数列。试问：这样的数 x，y 是否存在？如果存在，a，b 应满足什么条件？并分别举出使 x，y 存在或不存在的 a，b 的具体数值的实例。

解　假定满足条件的 x，y 存在，则有

$x^2=ay(ay\neq0)$，且 $2y=x+b$

消去 y，得关于 x 的二次方程

$2x^2-ax-ab=0$

因为 x 为实数，故其判别式非负，即

$\triangle=a^2+8ab\geq0\Leftrightarrow a(a+8b)\geq0$

当$a>0$且$b\geq-\frac{a}{8}$，或$a<0$且$b\leq-\frac{a}{8}$时，上式成立。这时，也只有这时，符合题意的 x，y 存在。

例如，当$a=2$，$b=-\frac{1}{4}$时，$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{8}$满足题目要求；但对于$a=2$，$b=-\frac{1}{2}$，则适合题意的x，y不存在。

例 6-1-22　已知各项都是正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为 S_n，且对于所有的自然数 n 和正常数 c，a_n 与 c 的等差中项等于 S_n 与 c 的等比中项。求 S_n 和 a_n。

解　依题设，有

$$\frac{a_n+c}{2}\sqrt{cS_n}\qquad\text{(i)}$$

以 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 代入(i)，整理后，得

$$(\sqrt{S_n})^2-2\sqrt{c}\sqrt{S_n}+(c-S_{n-1})=0\Leftrightarrow\sqrt{S_n}=\sqrt{c}\pm\sqrt{S_{n-1}}$$

由于$\{a_n\}$是正项数列，不可能有$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=\sqrt{c}$(常数)，故有$\sqrt{S_{n-1}}-\sqrt{S_{n-1}}=\sqrt{c}$。又由(i)可得$\sqrt{S_1}=\sqrt{c}$，故$\{\sqrt{S_n}\}$是首项为$\sqrt{c}$，公差为$\sqrt{c}$的等差数列，于是

$$\sqrt{S_n}=\sqrt{c}+(n-1)\sqrt{c}=n\sqrt{c}\quad(n\in N)$$

所以 $$S_n=cn^2\quad(n\in N)$$

从而 $$a_n=S_n-S_{n-1}=cn^2-c(n-1)^2=c(2n-1)\quad(n\in N)$$

注　本例是数列与方程的综合题。其解法特点是：根据化归思想，先将条件转化为(二次)方程求解，再将解得结果转化为数列的问题进行处理。通过两次转化，使问题顺利获解。

例 6-1-23　设关于 x 的实系数方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有三个互不相等的实数解。这三个解适当排列后可成等比数列，也可成等差数列。求该方程的三个解。

解　依题意，可设三个解为 a，aq，aq^2($a\neq0$，$q\neq0$)。易知 $a\cdot aq\cdot aq^2=-c$，即$(cq)^3=-c$，即

$$aq=\sqrt[3]{c}\qquad\text{(i)}$$

分三种情况考虑：

(i)如果 a 是 aq 和 aq^2 的等差中项，则有

$$aq+aq^2=2a\Leftrightarrow a(q+2)(q-1)=0$$

因$a\neq0$，$q\neq1$，所以$q=-2$。代入(i)得$a=\frac{1}{2}\sqrt[3]{c}$。这时，方程的三个解为$\frac{1}{2}\sqrt[3]{c}$，$-\sqrt[3]{c}$，$2\sqrt[3]{c}$。

(ii)若 aq 是 a 和 aq^2 的等差中项，则有

$$aq^2+a=2aq\Leftrightarrow a(q-1)^2=0$$

因 $a\neq0$，故 q=1，这与三个解互不相等矛盾。

(iii)若 aq^2 是 a 和 aq 的等差中项，则有

$$a+aq=2aq^2\Leftrightarrow a(2q+1)(q-1)=0$$

因$a\neq0$，$q\neq1$，故$q=-\frac{1}{2}$。代入(*)得$a=2\sqrt[3]{c}$。这时，方程的三个解仍为$2\sqrt[3]{c}$，$-\sqrt[3]{c}$，$\frac{1}{2}\sqrt[3]{c}$。

综上所述，三个解为$\frac{1}{2}\sqrt[3]{c}$，$-\sqrt[3]{c}$，$2\sqrt[3]{c}$。它们按此顺序成等比数列，并按$-\sqrt[3]{c}$，$\frac{1}{2}\sqrt[3]{c}$，$2\sqrt[3]{c}$的顺序成等差数列；或按$2\sqrt[3]{c}$，$-\sqrt[3]{c}$，$\frac{1}{2}\sqrt[3]{c}$的顺序成等比数列，而按$2\sqrt[3]{c}$，$\frac{1}{2}\sqrt[3]{c}$，$-\sqrt[3]{c}$的顺序成等差数列。

注　列方程求未知数是常用的数学方法，当数列中某些基本元素未知时，也可采用这种方法。这时要根据数列的特点恰当而有效地设元。

例 6-1-24　已知$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，求证：

(1)若 c 是正的常数，则$\{c^{a_n}\}$是等比数列。当且仅当 $d\neq0$，此数列的公比不为 1；

(2)若 $b_1=a_1\in N$，b_{n+1} 是$\{a_n\}$的第 b_n 项，则当且仅当 $d=a_1$ 时，$\{b_n\}$是等比数列。

解 (1)因为 $a_{n+1}-a_n=d(n\in N)$，所以 $c^{a_{n+1}}/c^{a_n}=c^{a_{n+1}-a_n}=c^d$ 对一切 $n\in N$ 都成立。故$\{c^{a_n}\}$是首项为 c^{a_1}，公比为 c^d 的等比数列。当且仅当 $d\neq 0$ 时，公比 $c^d\neq 1$。

(2)因为$\{a_n\}$的第 n 项为 $a_n=a_1+(n-1)d$，故它的第 b_n 项是 $b_{n+1}=a_1+(b_n-1)d=db_n+(a_1-d)$。

于是，当且仅当$a_1-d=0$，即$d=a_1(a_1\in N)$时，$\frac{b_{n+1}}{b_n}=d$对一切$n\in N$都成立。这时，$\{b_n\}$是首项和公比都为a_1的等比数列，即$b_n=a_1^n$。

注 正项等比数列通过取对数可构造等差数列，等差数列通过取指数可构造等比数列。这是二者的基本转化方式。此外还有一些特殊的转化或构造方式，如本例(2)。

习题

6-1-61 判下列说法是否正确：

(1)等差数列中的任意两项之和仍是这个数列中的项；

(2)等比数列中的任意两项之积仍是这个数列中的项；

(3)对于数列$\{a_n\}$，按它的顺序逐段取 m 项的和，设为

$$c_n=a_{(n-1)m+1}+a_{(n-1)m+2}+\cdots+a_{nm}$$

由此作成数列$\{c_n\}$。

①若$\{a_n\}$是等差数列，则$\{c_n\}$也是等差数列；

②若$\{a_n\}$是等比数列，则$\{c_n\}$也是等比数列；

(4)在数列$\{a_n\}$中，已知 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，那么，

①$\{a_n\}$是等差数列；

②$\{a_n\}$是等比数列；

③$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列。

6-1-62 设x为正的常数。若$x^a=2$，$x^b=3$，$x^c=\frac{9}{2}$，则数列a，b，c [ ]

A．是等差数列但不是等比数列

B．是等比数列但不是等差数列

C．既是等差数列也是等比数列

D．既不是等差数列也不是等比数列

6-1-63 在数列$\{a_n\}$中，若$a_1=a>0$，$a_n=\frac{2a_{n-1}}{a_{n-1}+2}(n\geq 2)$，则数列$\{\frac{1}{a_n}\}$是 [ ]

A．公差为正的等差数列

B．公差为负的等差数列

C．各项都相等的常数列

D．公比不为 1 的等比数列

6-1-64　有一数列 3，9，…，6561，…，那么，它　　[　　]

A．不能成等差数列

B．不能成等比数列

C．能成等差数列，也能成等比数列

D．各项的倒数能成等差数列

6-1-65　已知$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是各项为正数的等比数列。如果 $a_1==b_1$，$a_2=b_2$，那么，当 $n\geq3$，必有　　[　　]

A．$a_n=b_n$　　B．$a_n>b_n$

C．$a_n\geq b_n$　　D．$a_n\neq b_n$

6-1-66　有四个数，前三个数成等比数列，其积为 216；后三个数成等差数列，其和为 36。则此四个数顺次是______。

6-1-67　由七个数组成的数列，其中奇数项成等差数列，偶数项成等比数列，且奇数项的和减去偶数项的积等于-194，首尾两项与中间项的和为 17,则中间项是______。若奇数项的公差为 3,偶数项的公比为 2,则此数列为______。

6-1-68　已知互不相等的实数 a，b，c 按其顺序成等差数列，按 b，c，a 的顺序成等比数列，且 abc=125。则 a，b，c 依次为______。

6-1-69　已知 a，b，c 成等比数列，公比 $q\neq1$。若 $\log_c a$，$\log_b c$，$\log_a b$ 成等差数列，则公差 d=______。

6-1-70　在数列$\{a_n\}$和$\{b_m\}$中，$a_n=2^n$，$b_m=3m+2$。把它们中相同的项按原来的顺序排列成新数列$\{c_n\}$。求此数列的通项 c_n。

6-1-71　已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$的通项分别为 $a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$。求数列$\{a_nb_n\}$的前几项的和 S_n。

6-1-72　在数列 1，a，b，c，49 中，1，a，b 和 b，c，49 分别成等比数列。试求等差数列，a，b，c。

6-1-73　某三个数成等差数列，它们的和是 27。如果各个数分别加上 1，3，21，那么所得三个数又成等比数列。求这三个数。

6-1-74　已知正数 a，b，c，x，y，z 满足关系：$a^x=b^y=c^z$，且 x，y，z 的倒数成等差数列。求证：a，b，c 成等比数列。

6-1-75　已知 a，b，c 成等差数列，正数 x，y，z 成等比数列。求证：

$(b-c)\lg x+(c-a)\lg y+(a-b)\lg z=0$

6-1-76　已知正数 a，b，c 成等差数列，x 是 a 和 b 的等比中项，y 是 b 和 c 的等比中项。求证 x^2，b^2，y^2 成等差数列。

6-1-77　已知数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=\frac{3n-2}{n+3}$。证明这个数列是递增数列，但它既不是等差数列，也不是等比数列。

6-1-78　设无穷数列$\{a_n\}$的前 4 项为 a，b，a，b。

(1)求此数列的一个用 a+b 与 a-b 表示的通项公式；

(2)用(1)的结果写出数列

$\{c_n\}$：c，c，c^2，c^2，c^3，c^3，…的一个通项公式。

6-1-79　在△ABC 中，若 lgsinA，lgsinB，lgsinC 成等差数列，则分别以三边 a，b，c 为轴旋转一周所得的三个旋转体的体积，V_a，V_b，V_c 成等比数列。

6-1-80　某市 1996 年底人口为 100 万，人均住房面积 5.4 平方米。如果该市把人口平均增长率控制在 1%,并计划到 2000 年底人均住房面积达到 6.5 平方米。那么，平均每年需要新建住房面积多少平方米(精确到千位)？

(二)数列的极限

提要

(1)数列极限的定义　对于无穷数列$\{a_n\}$，如果存在一个常数 A，无论预先指定多么小的正数 ε，都能在数列中找到一项 a_N，使得这一项后面的所有项与 A 的差的绝对值都小于 ε(即当 n＞N 时，$|a_{n-A}|$＜ε 恒成立)，

就把常数A叫做数列$\{a_n\}$的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。

这个定义叫做数列极限的“ε-N”定义，它直接给出了判断一个数列有无极限的准则，以及在有极限的情形下，证明某个常数是不是数列极限的推导方法。为了准确理解和熟练运用这个定义，有必要弄清以下几点：

①ε 的任意性　从理论上讲，ε 不是一个常数，而是可以任意指定的无论多么小的正数。但在这个前提下，一经指定以后，它就被看作是一个固定的数，是一个常量，正因为 ε 具有这样的任意性和相对的确定性，所以$|a_n-A|$＜ε 才能成为数列$\{a_n\}$的项无限趋向于 A 的标志，并使得由指定的 ε 确定 n 的范围具有可操作性。

②N 对 ε 的依赖性　如果常数 A 是数列$\{a_n\}$的极限，那么对应着每一个正数 ε，都可以找到一个相应的自然数 N，当 n＞N 时，$|a_n-A|$＜ε 恒成立。一般地，当 ε 减小时，对应的 N 就会增大。但不能认为 N 是 ε 的函数。实际上，对于指定的 ε＞0，相应的正数 N 并不是惟一确

定的。例如数列$\{\frac{n-1}{n}\}$，当 $\varepsilon = 0.1$时，可取$N = 10$，当然N也可以取比10大的任意一个正整数。这就是说，N 有多大无关紧要，关键是足够大的 N 的存在。

③A 的存在性　定义中的常数 A 是给定的，不能直接用定义求出。A 的存在，即数列的极限存在，其几何意义是：如果把数列中的所有的项用数轴上的点来表示，那么当 n 充分大时，a_n 就无限地趋近于一个固定的由 A 表示的所谓“聚点”。趋近的方式可能是 a_n 从小于 A 趋近于 A，也可能由大于 A 趋近于 A，还可能忽大忽小即摆动式地趋近于 A。在特殊情形下还可能重合于 A。$|a_n-A|$＜ε 就是这些趋近方式的概括性的数量描述。

(2)有关数列极限的基本方法

①根据数列极限的定义证明某数是某数列的极限。(中学只讨论一些较简单情况)。证明数列$\{a_n\}$以 A 为极限的关键是找到与 ε 相应的 N。其步骤是：(i)给定一个任意小的正数 ε；(ii)由不等式$|a_n-A|$＜ε 解出 n，从而确定自然数 N；(iii)根据定义条件确认 A 是数列$\{a_n\}$的极限。

②用极限的四则运算法则求极限。这些法则是：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，那么

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$$

特别地，当 $a_n=C$，或 $b_n=C$(C 为常数)时，上述各法则仍然有效，只需将 A 或 B 改为 C。

③通过恒等变形求极限，极限的运算法则是以有关极限存在为前提的。遇到某些不能直接用极限运算法则求极限的情形，如 $\frac{\infty}{\infty}$，$\frac{0}{0}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$等所谓不定型的极限，必须根据表达式的特点，分别通过分子分母同除以 n 的最高次幂、约分、通分、分子或分母有理化等方法将不定式转化为定式后再利用极限运算法则求极限。

④应用无穷递缩等比数列的和的概念、公式求极限以及解决有关实际问题。

需要注意：无穷递缩等比数列的“和”，是无穷多项的和。数列前 n 项的和是有限项的和。这是两个根本不同的概念。任何数列都有前 n 项和，这是通常意义的有限和。但无穷数列不一定有一切项的“和”，这个和是 S_n 当 $n\to\infty$时的极限(如果存在)的形式称呼。

1．数列极限的定义

例题

例 6-2-1　判断下列说法是否正确：

(1)要使$|\frac{n}{n+1}-1|<0.01$恒成立，只须$n>99$；

(2)当$n\to\infty$时，数列$\{\frac{1}{n}\}$的极限为0；

(3)无穷递增数列必无极限；

(4)若无穷数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都有极限，且$a_n<b_n$，则必有

$$\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$$

(5)对于以 a 为极限的数列$\{a_n\}$，当$n\to\infty$时，$a_n\to a$与$a_n=a$的意义是不同的；但对于前者，$a_n=a$有可能成立。

解　(1)正确。因为

$$|\frac{n}{n+1}-1|<0.01\Leftrightarrow|\frac{-1}{n+1}|<0.01\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}<0.01\Leftrightarrow100<n+1\Leftrightarrow n>99$$

(2)不正确。正确说法是：因为当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\to0$，所以$\{\frac{1}{n}\}$的极限是0。

(3)不正确。如无穷递增数列$\{1-\frac{1}{n}\}$的极限是1。

(4)不正确。两个数列的项对一切$n\in N$，都有$a_n<b_n$时，可有到$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。例如$\{1-\frac{1}{n}\}$与$\{1+\frac{1}{n}\}$，显然，$1-\frac{1}{n}<1+\frac{1}{n}$对一切$n\in N$都成立，但

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$$

(5)正确。二者是不同的。当$n\to\infty$时，$a_n\to a$表示a_n的极限为 a，即a_n与 a 的差的绝对值无限趋近于零，它不同于$a_n=a$，但不排斥相等的可能。如数列a_1，a_2，…ak，a，a，…的极限为 a。因此，这种情形也符合当$n\to\infty$时，$a_n\to a$。可是，与此同时，当$n>k$时，总有$a_n=a$。

例6-2-2　已知数列$\frac{3}{1}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{7}{3}$，…，$\frac{2n+1}{n}$，…。

(1)计算$|a_n-2|$；

(2)分别求出使$|a_n-2|<0.01$，$|a_n-2|<0.002$成立的最小自然数 n；

(3)第几项后面的所有项与 2 的差的绝对值都小于任意指定的正数 ε；

(4)确定这个数列的极限。

解　(1)$|a_n-2|=|\frac{2n+1}{n}-2|=|2+\frac{1}{n}-2|=|\frac{1}{n}|=\frac{1}{n}$

(2)要使$|a_n-2|<0.01$即$\frac{1}{n}<0.01$，只须$n>100$。故使$|a_n-2|<$

0.01成立的n的最小值为101。

要使$|a_n-2|<0.002$即$\frac{1}{n}<0.002$，也就是$\frac{1}{n}<\frac{1}{500}$，即$n>500$。故使$|a_n-2|<0.002$成立的最小自然数n为501。

(3)要使$\frac{1}{n}<\varepsilon$，就是要使$n>\frac{1}{\varepsilon}$。设$\frac{1}{\varepsilon}$的整数部分为N，则第N项后面的所有项与2的差的绝对值都小于ε。

(4)根据数列极限的定义，(3)的结果表明这个数列的极限是2。

例 6-2-3　用数列极限的定义证明：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$。

解　(1)取任意小的正数ε，那么

$$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n}<\varepsilon \Leftrightarrow 2^n>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$$

令$N=[\log_2\frac{1}{\varepsilon}]$，则当$n>N$时，$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$恒成立，于是，由极限的定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$。

注　以上证明的关键是根据极限的定义找出充分大的正整数N。这是通过解不等式$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$先确定n的范围，然后再选定一个足够大的正整数而得到的。

(2)因a＞0，根据极限的定义，易知当n充分大时，总有$a_n>0$。于是，

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}<\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}$$

又因$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$故任给$\varepsilon>0(\varepsilon<\sqrt{a})$，对于$\sqrt{a}\varepsilon$来说，存在正整数N，当$n>N$时，总有$|a_n-a|<\sqrt{a}\varepsilon$成立，从而总有$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|<\varepsilon$成立。所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$。

例 6-2-4　如果数列$\{x_n\}$有极限，那么它只有一个极限。试证明之。

解　设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$。根据极限的定义，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在这样的$N_1$和$N_2$，使得

当$n>N_1$时，$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$；当$n>N_2$时，$|x_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$。

取一个同时大于N_1和N_2的正整数N，那么就有

$$|x_N-a|<\frac{\varepsilon}{2}，|x_N-b|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是，

$$|a-b|=|(a-x_N)+(x_N-b)|$$

$$\leq|x_N-a|+|x_N-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这里，非负数|a-b|小于任意正数ε，而满足这个条件的只有零这个数，所以|a-b|=0，因此a=b。

注　无穷数列要么有惟一的极限，要么没有极限。

习题

6-2-1　判断下面各数列$\{a_n\}$是否有极限：

(1)$a_n=q^n(|q|<1)$

(2)$a_n=a+\frac{n-1}{n}b$(a，b为常数)

(3)$a_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$

(4)$a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{n} & (\text{当}n\leq 99)\\ \frac{1}{n} & (\text{当}n\geq 100)\end{cases}$

6-2-1　已知无穷数列$\{\frac{1}{2n+1}\}$。给定$\varepsilon=0.01$。若此数列第N项后面的所有项与0的差的绝对值都小于ε，则N　　[　　]

A．必须取49

B．应当取50

C．只能取49或50

D．可以取不小于49的任何正整数

6-2-3　考查下列说法：

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<q$。则数列$\{x_n\}$几乎所有的项(可能有有限个项除外)都小于q；

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>q$。则数列$\{x_n\}$几乎所有的项(可能有有限个项除外)都大于q；

(3)若数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都没有极限，但数列$\{a_n+b_n\}$和$\{a_nb_n\}$都可能有极限；

(4)若数列$\{a_n\}$有极限,而数列$\{b_n\}$没有极限,则数列$\{a_n+b_n\}$和$\{a_nb_n\}$都不可能有极限；

(5)若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。其中正确说法的个数是　　[　　]

A．2　　　　B．3

C．4　　　　D．5

6－2－4　已知无穷数列$\{\frac{2n^2+1}{n^2}\}$，那么使得$|\frac{2n^2+1}{n^2}-2|<0.01$成立

的最小项数 n=______；对于任意指定的正数ε（ε<1），第______项后面的所有项，使得$|\frac{2n^2+1}{n^2}-2|<\varepsilon$都成立。

6-2-5　给出以下数列：

(1) -1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$，…，$(-1)^n\frac{1}{n}$，…；

(2) $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{27}$，…，$\frac{1}{3^n}$，…；

(3) 2，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，…，$\frac{n+1}{n}$，…；

(4) 2，$-\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，…，$(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$，…，

其中极限是 0 的数列是______。

6-2-6　对于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，采用适当“放大”的方法证明如下：

给定任意小的正数ε，因对一切 n∈N，有 $2^n>n$，于是，由

$|\frac{1}{2^n}-0|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$

可取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则对于任意给定的ε>0，存在$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，使得当$n>N$时，$|\frac{1}{2^n}-0|<\varepsilon$恒成立。所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$。

试问：以上证法是否正确？

6-2-7　已知无穷数列$\{a_n\}$的通项是$a_n=\frac{n+1}{2n}$。

(1)计算$|a_n-\frac{1}{2}|$；

(2)求使$|a_n-\frac{1}{2}|<0.01$成立的最小项数n；

(3)第几项后面的所有项，使得$|a_n-\frac{1}{2}|$都小于预先指定的正数ε？

(4)确定这几个数列的极限。

6-2-8　已知无穷数列$\{a_n\}$的通项是$a_n=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$。试用极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$。

6-2-9　证明：如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$。

6-2-10　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$。

2．数列极限的运算法则

例题

例6-2-5　已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$**，**$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$**，求下列各极限：**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+5b_n)$　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n^2}{b_n^3}-2a_n^3+3b_n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2b_n+a_nb_n^2+1)$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\frac{b_n}{n})$

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+5b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(5b_n)$

$=3\lim\limits_{n\to\infty}a_n+5\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3\times2+5\times3=21$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n^2}{b_n^3}-2a_n^3+3b_n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{b_n^3}-\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n^3)+\lim\limits_{n\to\infty}(3b_n)$

$=\frac{(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^2}{(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)^3}-2(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^3+3\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

$=\frac{2^2}{3^3}-2\times2^3+3\times3=-\frac{185}{27}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2b_n+a_nb_n^2+1)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2b_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n^2)+\lim\limits_{n\to\infty}1$

$=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^2\lim\limits_{n\to\infty}b_n+\lim\limits_{n\to\infty}a_n(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)^2+1$

$=2^2\times3+2\times3^2+1=31$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\frac{b_n}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2+3\times0=2$

注　(4)**中用了**$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}$**的存在性，其根据是**$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$**和**$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$**是存在的。**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}$　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+1}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2n^2}$

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+2})=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=1-0=1$

(2)不能直接用商的运算法则，可先用n^2去除分式的分母和分子，再利用$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$及$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}/(\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2})=\frac{0}{1+0}=0$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$

注　对于这类分式，常用分母中 n 的最高次幂去除分子、分母的各项，然后再求它的极限.

(4)当 n→∞时,分子的项数不定,不能直接用和的极限运算法则.应先对分子进行有限项求和的运算.

$\because 1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

注　如果误用和的极限运算法则，将会导致下列错误：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n^2}=0$$

例 6-2-7　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right]$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2^n})](|x|<1)$

解　(1)原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

(2)由$|x|<1$知$1-x\neq0$．分子、分母同乘以$1-x$，并注意$(1-x^{2^k})\cdot(1+x^{2^k})=(1-x^{2^{k+1}})$，分子化简为$1-x^{2^{n+1}}$，于是，

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}x}=\frac{1-0}{1-x}=\frac{1}{1-x}$

注　因$|x|<1$，故$|x^2|<1$，从而当$n\to\infty$时，$|x^{2^{n+1}}|=|(x^2)^{n+1}|\to0$．

例 6-2-8　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n}-a^{-n}}{a^{n}+a^{-n}}$ $(a>0)$

解　(1) **视** $\sqrt{n-1}-\sqrt{n}$ **为** $\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}}{1}$**，将分子有理化，则**

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}=-\frac{1}{2}$$

(2) **当** $0<a<1$ **时，原式** $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

当 $a>1$ **时，原式** $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{a})^{2n}}{1+(\frac{1}{a})^{2n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$

当 $a=1$ **时，原式** $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-1}{1+1}=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$**.**

例6－2－9　**已知** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+1}{n+1}-(an+b)\right]=0$**，求** a**，**b **的值.**

解　**一方面，有**

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left[\frac{n^2+1}{n+1}-(an+b)\right]\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+1}{n+1}-(an+b)\right]=0$$

另一方面，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{n^2+1}{n+1}-(an+b)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+1}{n+1}-(a+\frac{b}{n})\right]=1-a$$

由上两式得

$$1-a=0\Leftrightarrow a=1$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+1}{n+1}-(an+b)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+1}{n+1}-(n+b)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n}{n+1}-b\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}-b\right]=-1-b$$

从而　$-1-b=0\Leftrightarrow b=-1$

注　**本题引进辅助因式** $\frac{1}{n}$**，目的在于将** $an+b$ **化为** $a+\frac{b}{n}$**，**

例6－2－10　**已知数列** $\{a_n\}$ **的前** n **项的和** $S_n=\frac{n^2}{2}$**.**

(1) **求数列** $\left(\frac{1}{9}\right)^{a_1}$**，**$\left(\frac{1}{9}\right)^{a_2}$**，…，**$\left(\frac{1}{9}\right)^{a_n}$**，…的前** n **项和** P_n**；**

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$．

解　(1) 依题意 $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$，又

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2}{2} - \frac{(n-1)^2}{2} = \frac{2n-1}{2} (n \geq 2)$$

显然 $n = 1$ 时，上式也成立．故对一切 $n \in N$，都有 $a_n = \frac{2n-1}{2}$．于是，数列 $\left\{\left(\frac{1}{9}\right)^{a_n}\right\}$ 的通项为 $b_n = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{2n-1}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$，它构成首项为 $\frac{1}{3}$，公比为 $\frac{1}{9}$ 的等比数列，故它的前 n 项和为 $P_n = \frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{9}}$，即

$$P_n = \frac{3}{8}\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{8}\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right] = \frac{3}{8}$

注　题(2)也可直接利用无穷递缩等比数列的求和公式求解．

习题

6-2-11　判断下列命题是否成立：

(1) 若 $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$；

(2) 若 $a_n = (0.99)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$．

6-2-12　无穷数列的通项 $a_n = \left(-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^{n-1}$，那么这个数列存在极限的条件是　　　　[　　]

A．$x \neq 0$　B．$x > \sqrt{3}$　C．$x \leq -\sqrt{3}$　D．$x > \sqrt{3}$ 或 $x \leq -\sqrt{3}$

6-2-13　若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$a_n = \begin{cases} 0 (n\text{为奇数}) \\ 1 (n\text{为偶数}) \end{cases}$$

则数列 $\{a_n\}$ 的极限　　　　[　　]

A．不存在　　B．为 0　　C．为 1　　D．为 0 或 1

6-2-14　若无穷数列的通项为 $a_n=a^{2n}$，则该数列存在极限的条件是

[　　]

A．$0 < a^2 \leq 1$　　B．$-1 \leq a \leq 1$

C．$0 < a \leq 1$　　D．$0 \leq a \leq 1$

6-2-15　数列 $\{x_n\}$ 的通项

$x_n=\dfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_jn^j}(a_k\neq 0，b_j\neq 0)$则$\{x_n\}$存在极限的条件是　[　　]

A．k=j　B．k＜j　C．k＞j　D．k=j 或 k＜j

6-2-16　无穷数列的第n项$a_n=\dfrac{an^2+bn+c}{pn^2+qn+r}(p\neq 0)$．那么，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______

6-2-17　对于数列$\{a_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}[(2n+1)a_n]=2$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)=$______

6-2-18　已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1，a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}a_n(n\in N)$，那么，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______

6-2-19　若$0<a<b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-b^{n-1}}{a^{n+1}+b^n}=$______．

6-2-20　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{3}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n^2+1}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)\right]$

6-2-21　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$．

6-2-22　对于无穷数列$\{(-1)^{n-1}\}$，试求

(1)前n项的和S_n；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_n)\right]$

6-2-23　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a^n}{1+b^n}(a>1，b>1)$．

6-2-24　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$．

6-2-25　计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{5}+\cdots+\sqrt[n]{2k-1})$(常数$k\in N$)；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$．

6-2-26　举出满足下述条件的无穷数列的实例：

(1) $a_n<0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(2) $a_n>1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$；

(3) $a_n<0<b_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$；

(4) $\{a_n\}$没有极限，但$\{a_n^2\}$的极限为1．

6-2-27　对于由$a_1=\frac{1}{2}$**，**$a_{n+1}=\frac{a_n}{3-2a_n}(n\in N)$**给出的数列**$\{a_n\}$**.**

(1)**用**n**表示**a_n**；**(2)**求**$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$**.**

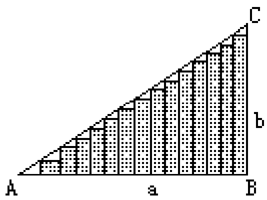
6-2-28　求使$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{an^2}{n+b}-n\right)=2$**成立的常数**a，b**.**

6-2-29　计算：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}[1+(1-x)+(1-x)^2+\cdots+(1-x)^{n-1}]\ (0<x<2)$

6-2-30　直角三角形 ABC 的两条直角边分别为 a，b．将 a 分成 n 个相等的线段，在所得的线段上作如下图所示的内接长方形．求所得的阶梯形面积(图中阴影部分)的数列(S_n)的极限，并说明所得结果的几何意义．



（三）数学归纳法

提要

数学归纳法常和归纳法一起使用，即用归纳法得到某个猜想，再用数学归纳法证明．这里所说的归纳法指的是不完全归纳法．实际上，归纳法包括完全归纳法和不完全归纳法．完全归纳法是在对有限个可能的特殊情况都进行考察的基础上推出一般结论的方法，它是完全可靠的推理方法；不完全归纳法则是在对相当多的情况(但不是所有情况)进行考察的基础上仅仅得出似乎正确的结论的方法．在数学中，不完全归纳法只是用来提出猜想，这个猜想需要接着被证明或者被推翻．

归纳法运用于所有科学，包括数学．数学归纳法则是在数学中证明与自然数 n 有关的命题 P(n)的一种特殊方法．

数学归纳法证明的可靠性的理论根据是下述原理．

数学归纳法原理　如果命题 P(n)($n\in N$)对于 n=1 成立；而且由对于 n=k(k 是任意自然数),可以推出对于下一个自然数 n=k+1 命题也成立.那么命题 P(n)对于任意自然数 n 都成立．

以上原理是自然数的算术公理之一,它在数学中有着广泛的应用.以这个原理为依据的证明方法，就是所谓的数学归纳法．

数学归纳法证明包括两个主要步骤：第一步验证 P(1)成立；第二步在假定命题$P(k)$成立的前提下，证明$P(k+1)$成立，即证明：$P(k)\Rightarrow P(k+1)$．第一步在整个过程中具有奠基的作用，即 P(1)的真实性在于保证第二步“递推”有一个正确的出发点．第二步意味着“递推”可依自然数序列相继进行，从而保证命题的“延续性”．其中 P(k)成立的假定叫做归纳假设.这种假设的可靠背景就是 P(1)成立.验证 P(1)的真谛既是“奠基”，因此，第一步中的 P(1)可用 $P(n_0)$代替，其中 n_0 表示使命题成立的某个开头的自然数．

如果上述两步进行完毕，那么就可根据数学归纳法原理肯定 P(n)对一切自然数 n 都成立．

由于不恰当使用数学归纳法导致的错误常表现在两个方面：其一是步骤不完整，往往是忽视第一步验证的必要性；其二是第二步中不用归纳假设，而代之以其他证法．因此，使用数学归纳法证题，务必牢记：“两步缺一不可，归纳假设必用”这一警语．

例题

例 6-3-1　用数学归纳法证明等式

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$$

时，需要提出哪三个命题？如何处理它们？

解　需要提出下列三个命题：

P(1)：$1=2^1-1$

P(k)：$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$

P(k+1)：$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^{k+1}-1$

对于 P(1)，要验证它成立，这是证明的第一步，可这样叙述：当 n=1 时，原式左边=1(注意 $2^{1-1}=1$)，右边=$2^1-1=1$．故原式左边=右边，即等式对 n=1 成立．

对于 P(k)，则把它作为归纳假设，即把它作为第二步证明的条件使

用.

对于 P(k+1)，则要以归纳假设为条件，给出严格证明．这是证明的第二步，可这样叙述：

假定 n=k 时，等式成立，即有

$$1+2+3+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$$

那么，当 n=k+1 时，则有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k$$

$=(2^k-1)+2^k$　　　　（这里用了归纳假设）

$=2\cdot 2^k-1=2^{k+1}-1$

故等式对于 n=k+1 也成立．

在完成上述两步后，就可以根据数学归纳法原理断言原等式对一切自然数 n 都成立．

注　以上第二步对 P(k+1)的处理是从左边出发，利用归纳假设作代换后再经过恒等变形导至 P(k+1)右边的形式的．要防止在证明中把 P(k)中的 k 直接用 k+1 代换的错误证法．

例 6-3-2　用数学归纳法证明下面的等式：

$$(1)1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n=[1+(-1)^{n+1}(2n+1)]$$

$$(2)1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

解　(1)当$n=1$时，左边$=1$，右边$=\frac{1}{4}[1+(-1)^2(2\times1+1)]=1$，等式成立．

假设当 n=k 时等式成立，即有

$$1-2+3-4+\cdots+(-1)^{k+1}\cdot k=\frac{1}{4}[1+(-1)^{k+1}(2k+1)]$$

于是，当 n=k+1 时，则有

$$1-2+3-4+\cdots+(-1)^{k+1}\cdot k+(-1)^{(k+1)+1}(k+1)$$

$=\frac{1}{4}[1+(-1)^{k+1}(2k+1)]+(-1)^{k+2}(k+1)$　　　（归纳假设）

$$=\frac{1}{4}[1+(-1)^{k+1}(2k+1)+4(-1)^{k+2}(k+1)]$$

$$=\frac{1}{4}[1+(-1)^{k+2}(-2k-1+4k+4)]$$

$$=\frac{1}{4}\{1+(-1)^{(k+1)+1}[2(k+1)+1]\}$$

这就是说，当 n=k+1 时，等式也成立．

综上所述，等式对一切自然数 n 都成立．

(2)当$n=1$时，左边$=1^2=1$，右边$=(-1)^0\frac{1\times(1+1)}{2}=1$．原等式成立．

假定当 n=k 时，等式成立，即有

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$$

那么，当 n=k+1 时，则有

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2$$

$$=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^k\frac{k+1}{2}[-k+2(k+1)]$$
$$=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

此即 $n=k+1$ 时，等式也成立．

综上所述，原等式对一切自然数 n 都成立．

例 6-3-3　已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_1\neq a_2$．证明：当 $n\geq 3$ 时，$a_n<b_n$．

解　在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1\neq a_2$，$a_n>0$，所以 $d=a_2-a_1>0$，$b_2=a_2>a_1=b_1>0$．于是，$q=\frac{b_2}{b_1}>1$．

依题设有

$$a_n=a_{n-1}+d=a_{n-1}+(a_2-a_1)=a_{n-1}+(b_2-b_1)$$
$$b_n=b_{n-1}q=\frac{b_{n-1}b_2}{b_1}$$

当 $n=3$ 时，

$$b_3-a_3=\frac{b_2b_2}{b_1}[a_2+(b_2-b_1)]=\frac{(b_2-b_1)^2}{b_1}>0$$

故 $b_3>a_3$，即当 $n=3$ 时命题成立．

假定当 $n=k(k\geq 3)$ 时，有 $a_k<b_k$ 成立，那么

$$b_{k+1}-a_{k+1}=\frac{b_kb_2}{b_1}-[a_k+(b_2-b_1)]$$
$$=\frac{b_kb_2-a_kb_1}{b_1}-(b_2-b_1)>\frac{a_kb_2-a_kb_1}{b_1}-(b_2-b_1)\quad（归纳假设）$$
$$=(b_2-b_1)(\frac{a_k}{b_1}-1)=(b_2-b_1)(\frac{a_k}{a_1}-1)>0\quad(a_k>a_1>0)$$

所以 $a_{k+1}<b_{k+1}$．此即当 $n=k+1$ 时命题也成立．

综上所述，对一切 $n\geq 3$ 的自然数 n，都有 $a_n<b_n$．

注　本例说明，第一步的验证不一定从 $n=1$ 开始，要根据具体情况选取符合题意的最小自然数 n_0 作为起始值．

例 6-3-4　用数学归纳法证明：$x^{2n-1}+y^{2n-1}$ 能被 $x+y$ 整除($n\in N$)．

解　当 $n=1$ 时，$x^{2n-1}+y^{2n-1}=x+y$，自然能被 $x+y$ 整除．

假定当 $n=k$ 时，命题成立，即 $x^{2k-1}+y^{2k-1}$ 能被 $x+y$ 整除，那么，当 $n=k+1$ 时，由于

$$x^{2(k+1)-1}+y^{2(k+1)-1}=x^2\cdot x^{2k-1}+y^2\cdot y^{2k-1}$$
$$=x^2x^{2k-1}+x^2y^{2k-1}-x^2y^{2k-1}+y^2y^{2k-1}$$
$$=x^2(x^{2k-1}+y^{2k-1})-(x-y)(x+y)y^{2k-1}$$

而据归纳假设，$x^{2k-1}+y^{2k-1}$ 能被 $x+y$ 整除，又 $(x-y)(x+y)y^{2k-1}$ 也能被 $x+y$ 整除，故上式右边从而左边能被 $x+y$ 整除．此即当 $n=k+1$ 时命题也成立．

故命题对一切 $n\in N$ 都成立．

注　本例证明的关键是通过“添项减项”将 $x^{2k+1}+y^{2k+1}$ 转化为便于利用归纳假设的形式．这是利用数学归纳法证明题，特别是证整除问题

的常用技巧．

例 6-3-5　分布在同一平面内的 n 条直线，每两条互不平行，每三条

不交于一点．证明它们将平面划分成$f(x)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$个区域．

解　当 n=1 时，显然一条直线将平面划分为 2 个区域，这时 f(1)=$\frac{1}{2}(1^2+1+2)=2$，故命题成立．

假定当 n=k 时，命题成立，即 k 条直线将平面划分为

$$f(k)=\frac{1}{2}(k^2+k+2)$$

个区域．现在考虑 n=k+1 的情形．从这 k+1 条直线中选出第(k+1)条，那么根据归纳假定，余下的k条直线将平面划分为$f(k)=\frac{1}{2}(k^2+k+2)$个区域．注意第(k+1)条直线与前 k 条直线必交于 k 个点，因此它被这些点分成 k+1 段．因为这 k 个交点与前 k 条直线彼此之间的交点不重合，所以这样的每一线段分已有的一个平面区域为 2 块，于是，除了已有的 f(k)=$\frac{1}{2}(k^2+k+2)$个区域，又增加了$k+1$个．因此得

$$f(k+1)=\frac{1}{2}(k^2+k+2)+(k+1)=\frac{1}{2}[(k+1)^2+(k+1)+2]$$

这就是说，当 n=k+1 时，命题也成立．

综合上面所述，对一切自然数 n 命题成立．

例 6-3-6　数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_n=a_{n-1}\cos x+\cos(n-1)x$，其中 $x\neq k\pi(k\in Z)$，$n\geq 2$．求通项 a_n．

解　依题意，有

$a_1=1$，$a_2=\cos x+\cos x=2\cos x$

$$a_3=2\cos^2x+\cos 2x=3-4\sin^2x=\frac{3\sin x-4\sin^2x}{\sin x}=\frac{\sin 3x}{\sin x}$$

由$a_3=\frac{\sin 3x}{\sin x}$再回顾$a_1$和$a_2$，易知它们有类似的形式结果：$a1=1=\frac{\sin x}{\sin x}$，$a_2=2\cos x=\frac{\sin 2x}{\sin x}$．于是，我们自然猜想

$$a_n=\frac{\sin nx}{\sin x}(n\in N)$$

这个猜想是正确的．现用数学归纳法证明如下：

已知当 n=1 时，命题成立．

假定当$n=k$时命题成立，即有$a_k=\frac{\sin kx}{\sin x}$，那么，当$n=k+1$时，则有

$a_{k+1}=a_k\cos x+\cos[(k+1)-1]x$

$$=\frac{\sin kx}{\sin x}\cos x+\cos kx \qquad (归纳假设)$$

$$=\frac{1}{\sin x}(\sin kx\cos x+\cos kx\sin x)=\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}$$

此即当 n=k+1 时命题也成立.

因此，根据数学归纳法原理，对一切自然数 n，都有

$$an=\frac{\sin nx}{\sin x}$$

习题

6-3-1　判断下列命题的真假，辨析其推理方法是否符合数学归纳法的要求：

(1)若 x 为正整数，则 $f(x)=x^2+x+41$ 的值都是质数.

证　用自然数 1,2,3,4,5 代替二次三项 f(x)中的 x,得到 f(1)=43，f(2)=47，f(3)=53，f(4)=61，f(5)=71．因为所有得到的这些结果都是质数，由此可知，对于变量 x 的任意正整数值，f(x)的值都是质数.

(2)若 n∈N，则有 $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n+1$.

证　假定当 n=k 时，等式成立，即有

$$2+4+6+\cdots+2k=k^2+k+1,$$

那么，当 n=k+1 时，则有

$$2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)$$

$$=(k^2+k+1)+2(k+1) \qquad (归纳假设)$$

$$=k^2+3k+3=(k+1)^2+(k+1)+1$$

此即当 n=k+1 时等式也成立．故对一切 n∈N，原等式成立.

(3)若n∈N，则$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证　当$n=1$时，左边$=1^2=1$，右边$=\frac{1\times(1+1)(2\times1+1)}{6}=1$，所以等式成立.

假定当 n=k 时，等式成立，即有

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

那么，当 n=k+1 时，在上式左边加上一项$(k+1)^2$，并将右边式子中的 k 用 k+1 代替，则得

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

此即当 n=k+1 时等式成立.

因此，对一切 n∈N，原等式成立.

6-3-2　如果命题 P(n)对于 n=1 成立，同时，如果 n=k 成立，那么对于 n=k+2 也成立．这样，下述结论中正确的是　[　]

A．P(n)对于所有的自然数 n 成立

B．P(n)对于所有的正奇数 n 成立

C．P(n)对于所有的正偶数 n 成立

D．P(n)对于所有大于 3 的自然数 n 成立

6-3-3　用数学归纳法证明不等式

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}(n\geq 2)$$

的过程中，当由 n=k 推到 n=k+1 时，不等式左边应增加　　　[　　]

(1)当 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时，$\arg z=$______；

(2)当 $\theta=\frac{5\pi}{12}$ 时，$\arg z=$______；

(3)当 $\theta=\frac{7\pi}{12}$ 时，$\arg z=$______；

6-3-4　用数学归纳法证明

$$1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}(a\neq 1，n\in N)$$

的过程中，第一步验证 n=1 的情形时，左边是　　　[　　]

A．1　B．1+a　C．$1+a+a^2$　D．$1+a+a^2+a^3$

6-3-5　用数学归纳法证明不等式 $2^{n+1}>(n+1)^3$ 时，n 的第一个取值应当是　　　[　　]

A．1　B．9　C．10　D．大于 1 的某个整数

6-3-6　用数学归纳法证明等式

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}(n\in N)$$

的过程中，第一步验证 n=1 的情形，左边=______；第二步由 n=k 推到 n=k+1 的情形，左边应加上的项是______．

6-3-7　用数学归纳法证明不等式

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1\ (n\in N)$$

的过程中，当 n=1 时，左边=______；当 n=k+1 时，左边=______．

6-3-8　若数列 $\{a_n\}$ 由递推公式给出：$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n$，则 $a_n=$______．

6-3-9　若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=(n+1)a_n$，则 $a_n=$______．

6-3-10　用数学归纳法证明：$|\sin n\theta|\leq n|\sin\theta|(n\in N)$．

6-3-11　若 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$，则

$$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}\ (n\in N)$$

6-3-12　用数学归纳法证明：$2^{n-1}(\sin^{2n}\theta+\cos^{2n}\theta)\geq 1(n\in N)$．

6-3-13　证明：$(2n+7)\cdot 3^n+9(n\in N)$ 能被 36 整除．

6-3-14　用数学归纳法证明：当 $n\in N$ 时，$(2+\sqrt{3})^n$ 可用适当的自然数 p，q 表示为 $p+q\sqrt{3}$．

6-3-15　用数学归纳法证明：$x^n+\frac{1}{x^n}$ 是关于 $x+\frac{1}{x}$ 的 n 次式．

6-3-16　证明：分布在同一个平面内的 n 个圆将整个平面划分成不

多于 n^2-n+2 个区域．

6-3-17　设$a_1=4$，$a_{n+1}=\sqrt[3]{a_n}(n\in N)$．

(1)求出 a_n，并用数学归纳法证明；

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)$．

6-3-18　已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$4a_{n+1}-a_na_{n+1}+2a_n=9(n\in N)$．

(1)求 a_1，a_2，a_3，a_4；

(2)由(1)的结果猜想 an 用 n 表示的表达式；

(3)用数学归纳法证明(2)的猜想．

6-3-19　在自然数集上定义函数 f(n)．已知

$$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(k+1)=3f(k)-2f(k-1)$$

猜想 f(n)的表示式，并用数学归纳法证明你的结论．

6-3-20　在凸 $n(n\geq 6)$边形中，以其顶点为顶点，以其对角线为边的

所有三角形的个数记为$f(n)$，则$f(n)=\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)$．

第七部分　复数

(一)复数的概念

提要

(1)i 称为虚数单位，规定 $i^2=-1$.

形如 a+bi 的数称为复数．其中 a，b∈R.

(2)复数的分类(下面的 a，b 均为实数)

$$\text{复数}\ a+bi\begin{cases}\text{实数}\ (b=0)\begin{cases}\text{有理数——循环小数}\\\text{无理数——无限不循环小数}\end{cases}\\\text{虚数}\ (b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\\text{非纯虚数}(a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

(3)复数的相等设复数 $z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$，那么 $z_1=z_2$ 的充要条件是：$a_1=a_2$ 且 $b_1=b_2$.

特别：$z=a+bi\Leftrightarrow a=b=0$.

(4)复数的几何表示复数 z=a+bi 可用平面直角坐标系内点 Z(a，b)来表示.这时称此平面为复平面,x 轴称为实轴,y 轴除去原点称为虚轴.这样，全体复数集 C 与复平面上全体点集是一一对应的.

(5)共轭复数 $a-bi$ 称为复数 $z=a+bi$ 的共轭复数，记为 $\bar{z}$，那么 z 与 $\bar{z}$ 对应复平面上的点关于实轴对称．且

①$z+\bar{z}=2a$，$z-\bar{z}=2bi$，$z\bar{z}=a^2+b^2$

②$z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in R$

(6)复数的模与复数的向量表示　称 $\sqrt{a^2+b^2}$ 为复数 $z=a+bi$ 的模，记为 $|z|$．复数的模是非负实数．特别 $|z|=0\Leftrightarrow z=0$.

复数 z=a+bi．在复平面内还可以用以原点 O 为起点，以点 Z(a，b)为终点的向量 $\vec{Oz}$ 来表示．复数集 C 和复平面内所有以原点为起点的所有向量所成的集合也是一一对应的(例外的是复数 0 对应点 0，看成零向量).

(7)复数与实数不同处

①任意两个实数可以比较大小，而任意两个复数中至少有一个不是实数时就不能比较大小.

②实数对于四则运算是通行无阻的，但不是任何实数都可以开偶次方．但复数对四则运算和开方均通行无阻.

(8)本知识点的题型主要是讨论复数的概念，复数相等，复数的几何表示，计算复数模，共轭复数，解复数方程等.

例题

例 7-1-1　设 $z=(m^2-m-12)+(2t^2+5t-3)i$，其中 m，t∈R.

(1)当 m，t 为何值时，z 为复数？

(2)当 m，t 为何值时，z 为虚数？

(3)当 m，t 为何值时，z 为纯虚数？

(4)当 m，t 为何值时，z=0？

(5)当 m，t 为何值时，$z=\bar{z}$？

(6)当 m，t 为何值时，z 对应复平面上的点在第 2 象限？

(7)当 m，t 为何值时，z=-12-3i？求|z|，并指出 z 在复平面上对应

的点在第几象限？

解　$m^2-m-12=(m-4)(m+3)$，$2t^2+5t-3=(t+3)(2t-1)$

令$M=\{4，-3\}$，$T=\{-3，\frac{1}{2}\}$.

(1)当 m，$t\in R$ 时，Z 为复数；

(2)当$t\notin T$，$m\in R$时，z为虚数；

(3)当$t\notin T$，$m\in M$时，z为纯虚数；

(4)当 $t\in T$ 且 $m\in M$ 时，z=0；

(5)当$t\in T$，$m\in R$时，$z=\overline{z}$.

$$(6)\begin{cases}m^2-m-12<0\\2t^2+5t-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<4\\t>\frac{1}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}-3<m<4\\t<-3\end{cases}$$

在上述条件下复平面上 z 对应的点在第 2 象限.

$$(7)z=-12-3i\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-12=-12\\2t^2+5t-3=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m(m-1)=0\\t(2t+5)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\t=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}m=0\\t=-\frac{5}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}m=1\\t=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}m=1\\t=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

$z=-12-3i$在复平面上对应的点在第三象限.

$$|z|=\sqrt{(-12)^2+(-3)^2}=\sqrt{153}.$$

注　此题较全面涉及到复数的有关概念．对于复数分类的题目，一般利用复数相等的定义，转化为实数方程组求解．讨论复数在复平面上对应点的位置的问题，一般转化为实数不等式组来求解．

例 7-1-2　下列命题中正确的是　　　　　　　　　　　[　　]

A．a+bi 是纯虚数的充要条件是 a=0

B．设$z=\sin(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{3})+i(\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6})$，则$|z|=\frac{\sqrt{22}}{6}$

C．设 $z\in R$，则$|z|=z$

D．点(0，0)在虚轴上

解　B　因为当 a=0 时，bi 不一定是纯虚数，故不选 A．当 z=-2 时|z|=2，故不选 C．坐标原点不在虚轴上，故不选 D．因此选 B．

事实上，令$\alpha=\arccos\frac{1}{2}$，$\beta=\arccos\frac{1}{3}$，则$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{1}{3}$，

α，$\beta\in(0，\frac{\pi}{2})$所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{8}}{3}$，从而

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow|z|^2=\left(\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}\right)^2=\frac{22}{36}$$

$$\Leftrightarrow|z|=\frac{\sqrt{22}}{6}$$

例 7-1-3　求适合方程的实数 x，y

$(1)(x+y)+(x-y)i=-2-4i$　　　$(2)\overline{x+yi}=(6i+7)i$

$(3)|x+yi|^2-i\overline{(3(x+yi))}=\overline{1-3}$

解　(1)原方程$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-2\\x-y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$

(2)　原方程$\Leftrightarrow x-yi=-6+7i\Leftrightarrow x=-6$，$y=-7$

(3)　原方程$\Leftrightarrow(x^2+y^2-3y)-3xi=1+3i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-3y=1\\-3x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{matrix}x=-1\\y=3\end{matrix}$

注　$(i)a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$

这时必须 a，b，c，d 都是实数．

(ii)解复数方程的最基本方法是利用复数相等的定义，转化为解由两个方程组成的实系数方程组．它的解可能是一个或多个，当然也可能无解．

例 7-1-4　下列命题中，正确的是　　　　　　　　　　[　　]

A．3i是正数　　　　B．$\sqrt{2}\,i$是无理数

C．设 sinα+sinβ=1，cosα+cosβ=0，那么 z=cos2α+icos2β在复平面上对应的点在第 1 象限

D．设 z=sinα+icosβ，那|z|=1

解　C　虚数不能比较大小，因此 3i 不是正数，故不选 A．

$\sqrt{2}\,i$不是实数，因此不是无理数．故不选B．

当$\alpha=0$，$\beta=\frac{\pi}{2}$时，$z=0$，故$|z|=0$．故不选D．

C 是正确的．因为

$$\left.\begin{matrix}\sin\alpha+\sin\beta=1\\\cos\alpha+\cos\beta=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\sin\beta=1-\sin\alpha\\\cos\beta=-\cos\alpha\end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow1=\sin^2\beta+\cos^2\beta=2(1-\sin\alpha)$

$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$　　　　(i)

$$\left.\begin{matrix}\sin\alpha+\sin\beta=1\\\sin\alpha=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sin\beta=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos2\beta=\frac{1}{2}\qquad\text{(ii)}$$

由(i)，(ii)知$z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，故z对应复平面上点$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，故在第1象限．

注　对复数 z=x+yi(x，y∈R，xy≠0)可由 x，y 的正负，确定 z 对应点在复平面中的位置．当 x＞0，y＞0 时，对应点在第 1 象限；当 x＜0，y＞0 时，对应点在第 2 象限；当 x＜0，y＜0 时，对应点在第 3 象限；当 x＞0，y＜0 时，对应点在第 4 象限．

例 7-1-5　设 $\log_a x$，$\log_b x$，$\log_c x$ 是等差数列，其中 x≠1，x＞0；而a，b，c是等比数列；$z=(\log_b a)(\log_b c)-i\arcsin(-\frac{1}{2})$．求$|z|$．

解　根据题设条件，有

$$2\log_b x = \log_a x + \log_c x \Leftrightarrow 2\log_b x = \frac{\log_b x}{\log_b a} + \frac{\log_b x}{\log_b c}$$
$$\Rightarrow 2(\log_b a)(\log_b c) = \log_b a + \log_b c = \log_b (ac) = \log_b (b^2) = 2$$
$$\Leftrightarrow (\log_b a)(\log_b c) = 1$$

又 $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$

故 $z = 1 + \frac{\pi}{6}i$，从而$|z| = \frac{\sqrt{36+\pi^2}}{6}$

解7－1－6　设$z = 2\cos x + i\frac{1}{\cos x}$，$x \in R$.

(1)当x为何值时，$|z| = \sqrt{5}$；

(2)当 x 为何值时，|z|有最小值？并求此最小值；

(3)|z|有无最大值？为什么？

解　$|z|^2 = 4\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$

(1)　$|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow 4\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 5 \Leftrightarrow (4\cos^2 x - 1)(\cos^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$或$\cos x = \pm 1$

因此当$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$或$x = k\pi\ (k \in Z)$时，$|z| = \sqrt{5}$.

(2)　$|z|^2 = 4\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 2\cdot\sqrt{4\cos^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} = 4$

当且仅当$4\cos^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$时，有

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}(k \in Z)$$

因此当$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}(k \in Z)$时$|z|_{min} = 2$.

(3)$|z|$无最大值，因为当$x \to \frac{\pi}{2}$时，$\cos^2 x \to 0$，这时$|z|$可以大于任何已知正数.

注　(i)一般，已知 z，求|z|．本例(1)是上面问题的反问题，即已知|z|，求 z．在数学中经常需要讨论一个问题的反问题.

(ii)求模的最值常用方法有以下几种：代数法，三角法利用共轭性质，图象法，用模的性质等．本例(2)是用代数法，即利用代数中的一个著名不等式(算术平均与几何平均不等式)得出．还要用到解三角方程，因此是一个综合应用题.

习题

7-1-1　设复数 z=x+yi 在复平面上的对应点为 A.

(1)A 关于 y 轴对称点所表示的复数为______；

(2)A 关于 x 轴对称点所表示的复数为______；

(3)A 关于原点对称点所表示的复数为______；

(4)A 关于直线 x=1 对称点所表示的复数为______.

7-1-2　设$z+\overline{z}=4+ai$，其中$z\in C$，$a\in R$，$|z|=3$，求z，a．

7-1-3　下列命题中，正确的是　　　　　　　　　　[　　]

A．互为共轭的两复数之积一定大于 0

B．互为共轭的两复数之差一定是纯虚数

C．互为共轭的两复数之和为 0

D．0·i 不是纯虚数

7-1-4　设 C={复数}，Q={有理数}，R={实数}，I={虚数}，H={a+bi|a，b∈Q}．下列命题中错误的是　　　　　　　　　　[　　]

注　在检验$\arg u<\dfrac{\pi}{2}$时，只检验u对应点在哪一象限即可．不

7-1-5　以|1+i|为实部，以 $3i+2i^2$ 的实部为虚部的复数是 [　　]

A．$\sqrt{2}-2i$　B．$\sqrt{2}+2i$　C．$2+\sqrt{2}i$　D．$2-\sqrt{2}i$

7-1-6　设$z=1+\sin\theta-i\cos\theta$，$\overline{z}=1-\sin\theta+i\cos\theta$，其中$\theta\in R$，则$|z|=$ ______．

7-1-7　设 $z=(m^2+3m-10)+i\lg(m-1)$ 对应复平面上点 M，其中 m∈R．

(1)当 m 为何值时，点 M 在实轴上？

(2)当 m 为何值时，点 M 在虚轴上？

(3)当 m 为何值时，点 M 在第 1 象限内？

(4)当 m 为何值时，点 M 在第 3 象限内？

7-1-8　设 $z=(t^2-2t+3)+i(2-\cos t)$，其中 t∈R．下列命题中，正确的是　　　　　　　　　　[　　]

A．z 在复平面上对应点在第 2 象限

B．z 是纯虚数

C．z 是虚数

D．存在 t∈R，使 z=0

7-1-9　设

$$z_1=\sin(\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}))+i\sin\frac{\pi}{6}，z_2=\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})+i$$

比较$|z_1|$与$|z_2|$的大小．

7-1-10　在数列$\{a_n\}$中，已知$S_n=2n^2+n$，$z=a_8+a_1 i$，求$\overline{z}$．

7-1-11　解不等式$|\lg x+i|>\sqrt{5}$，其中$x\in R^+$．

7-1-12　设$\{a_n\}$是等差数列，$s_2=4$，$s_4=16$，公差为 d．再设$\{b_n\}$是等比数列，$b_1=3$，$b_8=384$，公比为q．令$z=d+qi$，则$|\overline{z}|+|z|=$ ______．

7-1-13　设 $z=(\cos\theta-1)+i(\sin\theta-\cos\theta)$，其中 θ∈R，

(1) θ 为何值时，$z=\overline{z}$？

(2) θ 为何值时，z 为虚数？

(3) θ 为何值时，z 为纯虚数？

(4) θ 为何值时，z 在复平面上对应点位于左半平面？

7-1-14　设 z=(x-1)+i(2x+3)，其中 x∈R．求当 x∈[0，2]时，|z|的最大值．

7-1-15　用 R(z)表示复数 z 的实部，I(z)表示 z 的虚部．在复平面上分别画出满足下列条件的复数所对应点的图形．

(1)$0<|z|\leq 1$　(2)$|z|\geq 2$　(3)$R(z)\leq 1$

(4)$I(z)>-1$　(5)$z=2$　(6)$2I(z)+3R(z)=6$

7-1-16　设 $a=tg5xtgx$，$x\in R$．在复平面上点 A 的坐标为 $(a,-1)$．设向量 $\overrightarrow{OA}$ 表示的复数为 z，问 z 对应点在第 1，3 象限角平分线上的条件是什么？

7-1-17　设 A，B，C 为三角形的三个内角，且

$z_1=\sqrt{\sin A}+i\sqrt{\sin B}$，$z_2=i\sqrt{\sin C}$

那么　[　]

A．$|z_1|=|z_2|$　B．$|z_1|<|z_2|$　C．$|z_1|>|z_2|$　D．$|z_1|=|z_2|+1$

7-1-18　设 $z_1=\sqrt{2}+i$，$z_2=1-\sqrt{2}i$，$z_3=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_4=\sqrt{3}i$，那么，在复平面上这 4 个复数对应点　[　]

A．在同一直线上　B．共圆

C．组成平行四边形　D．位于两平行线上

(二)复数的四则运算

提要

(1) $i^n=\begin{cases}1 & \text{当}n=4m\text{时}\\ i & \text{当}n=4m+1\text{时}\\ -1 & \text{当}n=4m+2\text{时}\\ -i & \text{当}n=4m+3\text{时}\end{cases}$，其中$m\in Z$

(2) $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$，其中$c+di\neq 0$

(3)复数的加法，乘法都满足结合律与交换律，乘法对加法满足分配律，复数还满足乘方法则，即

$z^n\cdot z^m=z^{n+m}$，$(z^n)^m=z^{nm}$(n，$m\in N$)

复数乘法还满足消去律，即

$z_1z_2=0$，$z_1\neq 0\Rightarrow z_2=0$

(4)本知识点题型是：求复数的四则运算，乘方，求级数和，解复数方程，求复数运算的模，证明等式与不等式等．

例题

例 7-2-1　计算：(1) $(1+i)^2=$______　$(1+i)^{1998}=$______

(2) $(1-i)^2=$______　$(1-i)^{1998}=$______

(3) $(1+i)(1-i)=$______　$[(1+i)(1-i)]^{1998}=$______

$[(a+bi)(a-bi)]^{1998}=$______

(4) $\frac{1}{i}=$______　$(\frac{1}{i})^{1998}=$______

(5) $\frac{1+i}{1-i}=$______　$\frac{1-i}{1+i}=$______　$(\frac{1+i}{1-i})^{1998}=$______

解　(1) $2i$；$-2^{999}i$　因为$(1+i)^2=2i$，因此

$(1+i)^{1998}=[(1+i)^2]^{999}=2^{999}\times i^{999}$

$=2^{999}\times i^{4\times 249}\times i^3=-2^{999}i$

(2) $-2i$；$2^{999}i$

(3) 2；2^{1998}；$(a^2+b^2)^{1998}$

(4) $-i$；$-i$　因为$1=-i^2$，故$\frac{1}{i}=-i$，所以

$(\frac{1}{i})^{1998}=i^{1998}=i^{4\times 499}\cdot i^2=-1$

(5) i；$-i$；i

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$，$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i$

$(\frac{1+i}{1-i})^{1998}=i^{1998}=-1$

注　(i)求i^n时，用4除n得余数r，其中$0\leq r\leq 3$，那么$i^n=i^r$．

(ii)求$(1\pm i)^n$时，用2除n得商q和余数$r(0\leq r\leq 1)$，那么

$(1\pm i)^n=(\pm 2i)^q(1\pm i)^r$

(iii)求$\frac{c+di}{a+bi}$时，一般分子分母同乘以分母的共轭复数，将分母变成实数，再行计算.

例7-2-2　(1)设$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，那么

$\omega^2=$______，$\overline{\omega}=$______

$1+\omega+\omega^2=$______，$\omega^3=$______，$\omega^{1998}=$______

$(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)=$______；$|\omega|=$______

(2)设$\varepsilon=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，那么

$\varepsilon^2=$______，$\overline{\varepsilon}=$______

$-1+\varepsilon+\overline{\varepsilon}=$______，$\varepsilon^3=$______，$\varepsilon^{1998}=$______

$(x+1)(x-\varepsilon)(x-\overline{\varepsilon})=$______；$|\varepsilon|=$______

解　(1)$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$；$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$；0；1；1；x^3-1；1

因为$\omega^2=\frac{(-1+\sqrt{3}i)^2}{4}=\frac{1-3-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}$，所以

$$1+\omega+\omega^2=1+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=0$$

$$\omega^3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

$\omega^{1998}=\omega^{3\times 666}=1$

由韦达定理知

$(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)$

$=x^3-(1+\omega+\omega^2)x^2+(1\cdot\omega+\omega^3+1\cdot\omega^2)x-1\cdot\omega\cdot\omega^2$

$=x^3-1$

$$|\omega|=1=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

(2)$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$；$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$；0；-1；1；x^3+1；1

$$\varepsilon^2=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{4}=\frac{1-3+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$-1+\varepsilon+\overline{\varepsilon}=-1+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=0$$

$$\varepsilon^3=\varepsilon^2\cdot\varepsilon=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=-1$$

$\varepsilon^{1998}=\varepsilon^{3\times 666}=1$

由韦达定理知

$(x+1)(x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})$

$=(x-(-1))(x-\varepsilon)(x-\bar{\varepsilon})$

$=x^3-(-1+\varepsilon+\bar{\varepsilon})x^2+[(-1)\varepsilon+\varepsilon\bar{\varepsilon}+(-1)\cdot\bar{\varepsilon}]x-(-1)\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}$

$=x^3+1$

$|\varepsilon|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

注　(i)在本部分中，ω和ε均为特指的上面两个复数，不再声明．

(ii)牢记以下公式是十分有益的：

$\omega^3=1$，$\varepsilon^3=-1$，$1+\omega+\omega^2=0$

(iii)计算ω^n时，用3除n得余数$r(0\leq r\leq 2)$，那么$\omega^n=\omega^r$．

(iv)计算ε^n时，用3除n得商q和余数r，其中$0\leq r\leq 2$，那么$\varepsilon^n=(-1)^q\varepsilon^r$．

(v)ω，ε都在单位圆|z|=1上，而且两者之间关系是$\varepsilon^2=\omega$．

(vi)方程$x^3-1=0$的三个根为1，ω，ω^2．

(vii)方程$x^3+1=0$的三个根为-1，ε，$\bar{\varepsilon}$．

例7-2-3　已知$z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$z_2=\cos\beta+i\sin\beta$，且

$z_1+z_2=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

(1)求$\sin(\alpha+\beta)$和$\cos(\alpha+\beta)$；

(2)证明：$z_1^2+z_2^2+z_1z_2=0$．

解　$(1)z_1+z_2=(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\cos\alpha+\cos\beta=\frac{4}{5}\\ \sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{5}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{4}{5}\\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3}{5}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}$$

$$(2)z_1+z_2=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\Rightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$$

$$\Rightarrow z_1^2+z_2^2+z_1z_2=\left(\frac{7}{25}+\frac{4}{25}i\right)-z_1z_2$$

$$=(\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i)-(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$

$$=(\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i)-(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))=0$$

例7-2-4　$(a-b)^2+(b-c)^2=0$是复数a=b=c的　　　　　[　　]．

A．充分非必要条件

B．必要非充分条件

C．充要条件

D．无关条件

解　B 因为若 a=b=c，则$(a-b)^2+(b-c)^2=0$；但由$(a-b)^2+(b-c)^2=0$不能推出 a=b=c．比如 a=1，b=0，c=i．

例7-2-5　设$f(z)=\frac{1+z^2}{1-z}+\frac{1-z^2}{1-\bar{z}}$，求模$\left|f(1+i)+\left(\frac{3+4i}{4-3i}\right)^{10}\right|$．

解　$\left.\begin{aligned} f(1+i)&=\frac{1+(1+i)^2}{1-(1+i)}+\frac{1-(1+i)^2}{1-(1-i)}=-4\\ \left(\frac{3+4i}{4-3i}\right)^{10}&=[\frac{3+4i}{(-i)(3+4i)}]^{10}=\frac{1}{(-i)^{10}}=-1\end{aligned}\right\}$

$\Rightarrow\left|f(1+i)+\left(\frac{3+4i}{4-3i}\right)^{10}\right|=5$

注　(i)在复数中 f(z)也是 z 的函数，求函数值的方法与在实数集中完全一样．

(ii)在计算$\left(\frac{3+4i}{4-3i}\right)^{10}$时，要善于提出公因式，以便化简．如果分子分母直接算 10 次方，可能麻烦多了．

例 7-2-6　计算下列级数和：

(1)$S_1=1-3i+5i^2-7i^3+\cdots-99i^{49}$

(2)$S_2=1+2i+3i^2+\cdots+(4n+1)i^{4n}$

(3)$S_3=1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{1998}$，其中$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$．

解　(1)$iS_1=i-3i^2\cdots+97i^{49})-99i^{50}$

上式与原式相加得

$(1+i)S_1=1-2(i-i^2+\cdots+i^{49})-99i^{50}$

$=1-2\frac{i[1-(-i)^{49}]}{1+i}+99=100-2i$

故 $S_1=\frac{100-2i}{1+i}=49-51i$

(2)$iS_2=i+2i^2+\cdots+4ni^{4n}+(4n+1)i^{4n+1}$

原式减去上式得

$(1-i)S_2=1+(i+i^2+\cdots+i^{4n})-(4n+1)i^{4n+1}$

但 $i+i^2+\cdots+i^{4n}=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i^{4n-3}+i4^{n-2}+i^{4n-1}+i^{4n})=0$，故

$(1-i)S_2=1-(4n+1)i\Rightarrow S_2=\frac{1-(4n+1)i}{1-i}=(2n+1)-2ni$

(3)因为 $1+\omega+\omega^2=0$，$\omega^3+\omega^4+\omega^5=\omega^3(1+\omega+\omega^2)=0$，…，所以

$S_3=(1+\omega+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4+\omega^5)+\cdots$

$+(\omega^{1992}+\omega^{1993}+\omega^{1994})+(\omega^{1995}+\omega^{1996}+\omega^{1997})+\omega^{1998}=1$

注　在复数中等差数列与等比数列的一些公式仍然成立．比如求 S_3 可用等比数列求和公式，它的首项为 1，公式为ω，n=1999，所以

$$S_3=\frac{1\cdot\left(1-\omega^{1999}\right)}{1-\omega}=\frac{1\cdot\left(1-\omega\right)}{1-\omega}=1$$

例 7-2-7　设 a，b∈R^+，解方程

$z|z|+az+bi=0$

解　已知 a＞0，故|z|≠-a，因此原方程可变为同解方程

$$z=-\frac{b}{|z|+a}i$$

由此知 z 是纯虚数，且虚部小于 0．故可设 z=ci，其中 c∈R^-．代入原方程得

$ci(-c)+aci+bi=0\Leftrightarrow c^2-ac-b=0$

$$\Leftrightarrow c=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}(\text{舍去})，c=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

所以 $z=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}i$

注　(i)解复数方程常可设 z=x+yi(x，y∈R)，或设 z=r(cosθ+isinθ)(r≥0)变为实数方程求解．但本题若用上述方法，就会麻烦一些．本题是根据题目假设的特殊性，采用了更简便的转化为实数方程的方法．

(ii)和解实数方程一样，解复数方程时若有非同解变形步骤，必须检验，舍去增根，补回失根．

例 7-2-8　设 $z_1=(1-\cos\beta)+i\sin\beta$，$z_2=a^2+ai$，其中 a∈R．且 z_1z_2 是纯虚数，证明：不存在β∈(0，2π)，使 $(z_1-z_2)^2\in R^+$．

解　用反证法，若存在β∈(0，2π)使 $(z_1-z_2)^2\in R^+$．由题设知

$z_1z_2=[a^2(1-\cos\beta)-a\sin\beta]+[a^2\sin\beta+a(1-\cos\beta)]i$

又 z_1z_2 是纯虚数，因此

$$\begin{cases}a^2(1-\cos\beta)-a\sin\beta=0 & \text{(i)}\\ a^2\sin\beta+a(1-\cos\beta)\neq 0 & \text{(ii)}\end{cases}$$

由(ii)知 a≠0．由于 $(z_1-z_2)^2\in R^+$，因此 z_1-z_2 为非零实数，而

$z_1-z_2=(1-\cos\beta-a^2)+(\sin\beta-a)i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-\cos\beta-a^2\neq 0 & \text{(iii)}\\ \sin\beta-a=0 & \text{(iv)}\end{cases}$$

由(iii)和 a≠0 知 1-cosβ≠0．由(iv)知 a=sinβ．代入(i)得

$a^2(1-\cos\beta)-a^2=0\Leftrightarrow 1-\cos\beta=1\Leftrightarrow\cos\beta=0$，β∈(0，2π)

$$\Leftrightarrow\beta=\frac{\pi}{2}\text{或}\beta=\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\sin\beta=1\text{或}\sin\beta=-1\qquad\text{(v)}$$

由(iv)和(v)得 a=1 或 a=-1，这都与(iii)式矛盾．本题得证．

注　(i)证明不存在的问题，一般是用反证法．

(ii)本例证明中，用到若 $(z_1-z_2)^2\in R^+$，则 z_1-z_2 为非零实数．这也可用反证法得出(或用后面的复数三角式乘方证明)，请读者自己完成．

例7-2-9　设复数列$\{x_n\}$的前n项和$S_n=a(c^n-1)$，其中$c=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$，$a\neq 0$；且$x_{11}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}i$．求$S_{100}$．

解　当 $n=1$ 时，$x_1=s_1=a(c-1)$．

当 $n>1$ 时，

$$x_n=S_n-S_{n-1}=a(c^n-1)-a(c^{n-1}-1)=a(c-1)c^{n-1}=x_1c^{n-1} \qquad (i)$$

因此原复数列是等比数列，公比为 c．由题设及(i)式可得

$$a=\frac{1}{c^{10}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}(1+i)^{10}}=\frac{1}{\frac{1}{2^5}(2i)^5}=-i$$

所以$c^{100}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}(1+i)^{100}=\frac{1}{2^{50}}(2i)^{50}=i^{50}=-1$，所以

$S_{100}=(-i)(c^{100}-1)=2i$

注　若用复数的三角式更容易算出$(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^n(n\in Z)$的值．

习题

7-2-1　计算

(1) $\frac{(1-i)^{101}}{(1+i)^{106}}$　　(2) $\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i}\right)^7-\left(\frac{2-2i}{1+\sqrt{3}i}\right)^7$

(3) $\frac{a+bi}{b-ai}+\frac{a-bi}{b+ai}$　　(4) $1+i^n+i^{2n}+i^{3n}(n\in N)$

7-2-2　(1) $\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i}+\left(2+i^{13}\right)-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{22}=$______

(2) $(1+\sqrt{3}i)^{100}+\left(1-\sqrt{3}i\right)^{100}=$______

(3) $(1-i)(1+i)^2-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)+\frac{1+2i}{1-2i}-4i=$______

(4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\cdots\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1998}=$______

7-2-3　满足$\frac{1}{z}=\frac{1+i}{1+3i}+\frac{1}{1+2i}$的复数$z=$　　[　]

A．$\frac{5+5i}{6}$　B．$\frac{5-5i}{6}$　C．$\frac{3-3i}{5}$　D．$\frac{3+3i}{5}$

7-2-4　设 $z\neq 1$，且

$f(z)=(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\cdots(1+z^{64})$

则 $f(1-i)=$______．

7-2-5　设 z_1，z_2，$\in C$，那么 $z_1=z_2=0$ 是 ${z^2}_1+{z^2}_2=0$ 的

[　]

A．必要不充分条件

B．充要条件

C．充分不必要条件

D．无关条件

7-2-6　证明：$|z|^2=z^2$的充要条件是 $z\in R$．

7-2-7　如果复数 z 满足 $z+|z|=2+8i$，则$|z|^2=$　　　　　[　　]

A．68　　　　　　　　　B．100

C．169　　　　　　　　　D．289

7-2-8　已知$z^2=5-12i$，求$f(z)=z-\dfrac{1}{z}$

7-2-9　设

$$z_1=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)+3i，z_2=1-i\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n}\right)$$

(1)求z_1-z_2与$\dfrac{z_1}{z_2}$；　　(2)比较$|z_1|$与$|z_2|$的大小．

7-2-10　设 a，b，c∈R，证明：

$$[(2a-b-c)+(b-c)\sqrt{3}i]^3=\left[(2b-c-a)+(c-a)\sqrt{3}i\right]^3$$

7-2-11　在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_3=0$，$a_2=2i$，求 a_{1997}和 S_{1997}．

7-2-12　设 a_1，$a_2\cdots$，a_n是互不相等的实数，证明：方程

$$\frac{1}{z+a_1}+\frac{1}{z+a_2}+\cdots+\frac{1}{z+a_n}=0$$

设有虚数根．

7-2-13　试找出最小的自然数n，使$z=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^n$是纯虚数，并求这个纯虚数．

7-2-14　设 $z_1=-2+i$，$z_2=3+i$，在复平面上 z 在 z_1，z_2两点的连线上，且$|z-z_1|=|z-z_2|=7:2$，则 z=______．

7-2-15　设复数 z 满足方程

$2|z-3-3i|=|z|$

(1)问 z 的轨迹是什么曲线？

(2)求|z|的最大值与最小值．

7-2-16　解方程

$$z+|z|=\left[\lg^2 8+\left(\lg 1.25\right)\left(\lg 80\right)\right]+i\frac{\lg^3 2+\lg^3 5-1}{\lg^2 2+\lg^2 5-1}$$

7-2-17　设

$z_1=\sin 20°\sin 40°\sin 80°+bi$

$$z_2=\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)i$$

且 $z_1+z_2=(3-a)+\frac{\sqrt{3}}{8}i$，$z_3=(3-a)-\left(b+\frac{1}{2}\right)i$

(1)求 $a+b$；　　(2)求 $\left(\frac{z_1+z_2}{z_3}\right)^{1997}$.

7-2-18　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=ia_{n-1}+3$，$a_5=1-2i$，求 a_{1998}.

7-2-19　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{i}{2}$，且 $a_n=\frac{1}{(-1)^n 2i-a_{n-1}}\ (n>1)$.

(1)求 a_n 的通项公式；　(2)求前 n 项之积.

7－2－20　设 $\frac{13(z^2+10)}{6(3+2i)}=\frac{6iz(1-z)+9z^2+4z}{3z+2i}$，其中 $3z+2i\neq 0$，求 z.

(三)复数的三角形式

提要

(1)任何复数 $z=a+bi$ 都可以表成三角形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$，$\cos=\frac{a}{r}$，$\sin\theta=\frac{b}{r}$．r称为z的模，θ称为z的辐角，其始边为x的正半轴，终边是$\overrightarrow{OZ}$所在射线．同一个复数其模的值是惟一的，而辐角有无穷多个它们相互之间相差 $2k\pi(k\in Z)$．即若

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\Leftrightarrow\theta_1=\theta+2k\pi(k\in Z)$

但 0 的辐角可任意取值．

(2)设 $z=a+bi$ 的三角形式为 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$．如果 $\theta\in[0,2\pi)$，称θ为 z 的辐角主值，记为 argz，这是惟一的．0 无辐角主值，即 arg0 无意义．对 $z=a+bi\neq 0$，argz 定法如下：设 A 的坐标为(a，b)

A 在正实轴上，则 argz=0；A 在负实轴上，则 $\arg z=\pi$；

A在正虚轴上，则$\arg z=\frac{\pi}{2}$；A在负虚轴上，则$\arg z=\frac{3\pi}{2}$；

A在第1象限，则$\arg z=\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$；

A在第2，3象限，则$\arg z=\pi+\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$；

A在第4象限，则$\arg z=2\pi+\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$．

(3)设 z_1，$z_2\in C$，那么

$z_1=z_2\Leftrightarrow|z_1|=|z_2|$ 且 $\arg z_1=\arg z_2$

(4)模等于 1 的复数的三角形式为

$z=\cos\theta+i\sin\theta(\theta\in R)$ (i)

满足(i)式的复数，在复平面上它们对应点都在单位圆上．

(5)设 z_1，z_2 的三角形式为

$z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$z_2=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$

则①$z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]$

②$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)](z_2\neq 0)$

③$z_1^n=r_1^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)(n\in N)$

④z_1 的 n 次方根有 n 个，它们等于

$$\sqrt[n]{r_1}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)(k=0，1，\cdots，n-1，n\in N)$$

至于三角形式的加减法，可以化为代数形式进行．

(6)复数的模有以下性质

①$|z_1\cdots z_m|=|z_1|\cdots|z_m|$，$|z^n|=|z|^n(n\in N)$

② $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \neq 0)$　　　　③ $|z| = |\bar{z}|$

④ $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(7)本知识点的题型为：求复数的模与辐角主值，复数的运算，求模的最值，求辐角的范围与最值，证明模的等式与不等式，解复数方程等．

例题

例 7-3-1　下列等式中正确的是　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$\arg(\sqrt{3} - i) = \frac{\pi}{6}$

B．$\arg(|\cos\theta| + i|\sin\theta|) = \theta$，其中 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

C．$\arg\left[(-2)\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$

D．$\arg\left[\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{3}$

解　D　$z = \sqrt{3} - i$ **在复平面上对应点在第**4**象限**，$\arg z \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

故不选 A．类似可证不选 B，C．故选 D．事实上，

$z = \cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow |z| = \cos\frac{\pi}{5}$，$\arg z = \frac{\pi}{3}$

例 7-3-2　求下列复数的模与辐角主值：

(1) $z_1 = 3 - 4i$　　(2) $z_2 = i\cos\alpha$，$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

(3) $z_3 = \frac{1}{(1+\sqrt{3}i)^2}$　　(4) $z_4 = 2[\cos(-40°) + i\sin(-40°)]$

(5) $z_5 = \frac{(\sqrt{3}+i)^{50}}{(1-i)^{100}}$　　(6) $z_6 = (1-\sqrt{3}i)^5$

解　(1) $z_1 = 5\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)$

$\Leftrightarrow |z_1| = 5$，$\arg z_1 = 2\pi + \mathrm{arctg}\frac{-4}{3} = 2\pi - \mathrm{arctg}\frac{4}{3}$

(2) $|z_2| = |\cos\alpha|$，由于 $\cos\alpha < 0$，因此 z_2 对应点在虚轴的负半轴，所

以 $\arg z_2 = \frac{3\pi}{2}$．

$T_{k+1} = C_6^k (3x)^k$　$(k = 0，1，2，\cdots，6)$

$\arg z_3=-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3}$

(4)将40°化为$\frac{2\pi}{9}$，由于z_4的一个辐角为$-\frac{2\pi}{9}$．所以

$\arg z_4=2\pi-\frac{2\pi}{9}=\frac{16\pi}{9}$，$|z_4|=2$

$$(5)z_5=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{50}}{(-2i)^{50}}=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{50}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{50}$$

$$=\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

所以$\arg z_5=\frac{4\pi}{3}$，$|z_5|=1$

(6)令$z=1-\sqrt{3}i$，z对应点在第4象限，所以

$|z|=2$，$\arg\alpha=2\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)$

所以$\arg\alpha=2\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{5\pi}{3}$

设θ为z_6的一个辐角，则$\theta=5\arg z=\frac{25\pi}{3}$，故$\arg z_6=\frac{\pi}{3}$，$|z_6|=|z_5|^5=32$．

注　求复数的辐角主值的常用方法有：(i)图象法．即首先考虑复数对应点的象限，再用$\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$表示出来(见上面解法提要)(ii)特殊角法．将给定复数 z 表示为特殊角作为辐角的复数的代表式，再求 argz(比如$\arg z_3$，$\arg z_5$)(iii)利用已知 z 的一个辐角，求 argz(比如$\arg z_4$)．(iv)利用诱导公式求 argz．

例 7-3-3　求下列复数的模与辐角主值：

(1)$z=\sin\theta+i\cos\theta$，其中$\theta\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$；

(2)$z=1-\cos\theta+i\sin\theta$，其中$\theta\in(-\pi,\pi)$；

(3)$z=\frac{(1+i)^2-3(1+i)+6}{(1+i)+1}$

解　(1)z 并不是三角形式，利用诱导公式，知

$$z=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

故$|z|=1$，$\frac{\pi}{2}-\theta$为z的一个辐角，但$\frac{\pi}{2}-\theta<0$，不是主值，主值为

$$\arg z=2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{5\pi}{2}-\theta$$

$$(2)z=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

当θ∈(0，π)时，

$$z=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

其模及辐角主值为$|z|=2\sin\frac{\theta}{2}$**，** $\arg z=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$**.**

当θ∈(-π，0)时，

$$z=-2\sin\frac{\theta}{2}\left[\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]$$

其模及辐角主值为$|z|=-2\sin\frac{\theta}{2}$**，** $\arg z=\frac{3\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$**.**

当θ=0时，z=0，则|z|=0，辐角可任意取值，无主值.

$(3)z=\frac{2i-3(1+i)+6}{2+i}=\frac{3-i}{2+i}=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$**，故**$|z|$

$=\sqrt{2}$**，** $\arg z=\frac{7\pi}{4}$**.**

例7－3－4 $(1)\frac{[2(\cos120°+i\sin120°)]^2}{\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)^4}=$______

(2)(sin100°+icos80°)[3·(cos70°-isin70°)]=______

$(3)\frac{(\cos\alpha-i\sin\alpha)^8(1+i\mathrm{tg}\alpha)^6}{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2(\mathrm{tg}\alpha+i)^5}=$______

(4)**设**$z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$**，那么**$z+z^2+z^3+z^4+z^5=$______

(5)i的平方根是______

解 (1)4 **原式** $=4\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2}{\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)^4}$

$$=4\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{22\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{22\pi}{3}\right)\right]=4$$

$(2)\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$**原式**$=3(\cos10°+i\sin10°)[\cos(-70°)+i\sin(-70°)]$

$$=3(\cos 60° - i\sin 60°)=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

(3) $\operatorname{tg}\alpha - i$ **原式** $=\dfrac{[\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)]^8 \cdot \dfrac{1}{\cos^6\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^6}{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2 \cdot \dfrac{1}{\cos^5\alpha}(\sin\alpha + i\cos\alpha)^5}$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\cos(-4\alpha)+i\sin(-4\alpha)}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]^5}$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\left[\cos\left(-4\alpha-\frac{5\pi}{2}+5\alpha\right)+i\sin\left(-4\alpha-\frac{5\pi}{2}+5\alpha\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\operatorname{tg}\alpha - i$$

(4) 0 **原式** $=\dfrac{z(1-z^5)}{1-z}=\dfrac{z\left[1-\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5\right]}{1-z}$

$$=\frac{z[1-(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)]}{1-z}=0$$

(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$**和** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$**因为**$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$**，因此**$i$**的平方根是**

$$\varepsilon_1=\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$\varepsilon_2=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

注　求复数的乘方，或两个复数相除时，一般采用三角表示法．复数开方也是先化为三角式，再进行．

例 7-3-5　求最小的自然数 m 和 n，使

$$(\sqrt{3}+i)^m=(1+i)^n \qquad \text{(i)}$$

成立．

解　$(\sqrt{3}+i)^m=2^m\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^m=2^m\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^m$

$$=2^m\left(\cos\frac{m\pi}{6}+i\sin\frac{m\pi}{6}\right)$$

$$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

由(i)得

$$\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^m}{(1+i)^n}=1\Leftrightarrow 2^{m-\frac{n}{2}}\left[\cos\left(\frac{m\pi}{6}-\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{m\pi}{6}-\frac{n\pi}{4}\right)\right]=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-\dfrac{n}{2}=0\\ \dfrac{m\pi}{6}-\dfrac{n\pi}{4}=2k\pi\ (k\in Z)\end{cases}\Leftrightarrow m=-6k$$

由 m=-6k 知当 k=-1 时，自然数 m 最小，这时 m=6，n=2m=12.

例 7-3-6　设 z∈C，解方程

$$z\bar{z}-3i\bar{z}=1+3i$$

解　原方程 $\Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{|z|^2-1-3}{3i}=-1-\left(\dfrac{|z|^2-1}{3}\right)i$

$$\Leftrightarrow z=-1+\frac{|z|^2-1}{3}i$$

$$\Rightarrow |z|=\sqrt{1+\left(\frac{|z|^2-1}{3}\right)^2}\qquad\text{(i)}$$

两边平方并整理可得

$|z|^4-11|z|^2+10=0\Leftrightarrow|z|^2=1$ 或 $|z|^2=10$

代入(i)得

z=-1 或 z=-1+3i

例7-3-7　设 $z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0<\theta<\pi)$，$u=\dfrac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$，且 $|u|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\arg u<\dfrac{\pi}{2}$，求θ.

解　$u=\dfrac{1-(\cos\theta-i\sin\theta)^4}{1+(\cos\theta+i\sin\theta)^4}=\dfrac{1-[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^4}{1+(\cos4\theta+i\sin4\theta)}$

$$=\frac{1-(\cos4\theta-i\sin4\theta)}{1+(\cos4\theta-i\sin4\theta)}=\frac{[(1-\cos4\theta)+i\sin4\theta][(1+\cos4\theta)-i\sin4\theta]}{[(1+\cos4\theta)+i\sin4\theta][(1+\cos4\theta)-i\sin4\theta]}$$

$$=\frac{\sin4\theta}{1+\cos4\theta}(\sin4\theta+i\cos4\theta)$$

$$=tg2\theta(\sin4\theta+i\cos4\theta)\qquad\text{(i)}$$

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}=|u|=|tg2\theta|$　　(ii)

当θ∈(0，π)中满足(ii)式的有　$2\theta\in\left\{\dfrac{\pi}{6},\ \pi-\dfrac{\pi}{6},\ \pi+\dfrac{\pi}{6},\ 2\pi-\dfrac{\pi}{6}\right\}$，即

$\theta=\frac{\pi}{12}$或$\theta=\frac{5\pi}{12}$或$\theta=\frac{7\pi}{12}$或$\theta=\frac{11\pi}{12}$

将$\theta=\frac{\pi}{12}$代入(i)得$u=\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$，由于$|u|=\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，u对应点在第1象限，$\arg u<\frac{\pi}{2}$．因此$\theta=\frac{\pi}{12}$为所求之一．

将$\theta=\frac{5\pi}{12}$代入(i)得

$$u=\mathrm{tg}\frac{5\pi}{6}\left(\sin\frac{5\pi}{3}+i\cos\frac{5\pi}{3}\right)=\left(-\mathrm{tg}\frac{5\pi}{6}\right)\left[-\sin\frac{5\pi}{3}+i\left(-\cos\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

u对应点在第4象限，$\arg u\in\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)$，故$\theta=\frac{5\pi}{12}$不合要求．

类似可证$\theta=\frac{7\pi}{12}$合要求，$\theta=\frac{11\pi}{12}$不合要求．

因此所求$\theta=\frac{\pi}{12}$或$\theta=\frac{7\pi}{12}$．

注　在检验$\arg u<\frac{\pi}{2}$时，只检验u对应点在哪一象限即可．不必精确计算出 argu．要计算出来是很麻烦的．请见下面例题．

例 7-3-8　设 z=tg2θ(sin4θ+icos4θ)．

(1)当$\theta=\frac{\pi}{12}$时，$\arg z=$_______；

(2)当$\theta=\frac{5\pi}{12}$时，$\arg z=$_______；

(3)当$\theta=\frac{7\pi}{12}$时，$\arg z=$_______；

(4)当$\theta=\frac{11\pi}{12}$时，$\arg z=$_______；

解　(1)$\frac{\pi}{6}$因为当$\theta=\frac{\pi}{12}$时，$\mathrm{tg}2\theta=\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以

$$z=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

所以$\arg z=\frac{\pi}{6}$.

(2)$\frac{23\pi}{12}$ 当$\theta=\frac{5\pi}{12}$时，$tg2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$z=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\sin\frac{5\pi}{3}-i\cos\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}(-i)\left(\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

所以z的一个辐角为$-\frac{5\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}=-\frac{\pi}{12}$，而主值$\arg z=-\frac{\pi}{12}+2\pi=\frac{23\pi}{12}$

(3)$\frac{\pi}{6}$ 当$\theta=\frac{7\pi}{12}$时，$tg2\theta=tg\frac{7\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以

$$z=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sin\frac{7\pi}{3}+i\cos\frac{7\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{3}\right)\right]$$

所以z的一个辐角为$\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{3}=-\frac{11\pi}{6}$，而主值$\arg z=-\frac{11\pi}{6}+2\pi$
$=\frac{\pi}{6}$.

(4)$\frac{11\pi}{6}$ 当$\theta=\frac{11\pi}{12}$时，$tg2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\sin\frac{11\pi}{3}-i\cos\frac{11\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}(-i)\left(\cos\frac{11\pi}{3}-i\sin\frac{11\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

所以z的一个辐角为$-\frac{11\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}=-\frac{13\pi}{6}$，而主值$\arg z=-\frac{13\pi}{6}+$
$4\pi=\frac{11\pi}{6}$.

习题

7-3-1　下列命题中正确的是　[　　]

A．若$z=\sin\frac{\pi}{7}+i\cos\frac{\pi}{7}$，则$\arg z=\frac{\pi}{7}$

B．若$z=3\left(\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}\right)$，则$\arg z=\frac{\pi}{11}$

C．若$z=5(\cos\theta+i\sin\theta)$，则$\arg z=\theta$

D．若$z=tg\frac{6\pi}{7}(\sin\theta+i\cos\theta)$，则$|z|=-tg\frac{6\pi}{7}$

7-3-2　在△ABC中，A，B，C为三内角，令

$z=\dfrac{(\cos A+i\sin A)(\cos C+i\sin C)}{\cos B+i\sin B}$

且$z=\bar{z}$，则△ABC是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．直角三角形

B．钝角三角形

C．锐角(但非等边)三角形

D．等边三角形

7-3-3　求下列复数 z 及|z|与 argz．

(1)设$u=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，$z=u^{100}+u^{50}+1$

(2)$z=\dfrac{8(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^5(1+\sqrt{3}i)^7}{(8\sqrt{3}+8i)^3}$

(3)设$u=\cos\theta+i\sin\theta\ (0<\theta<2\pi)$，$z=\dfrac{1-u^3}{1-u}$．

(4)$u_k=k+ki(k=1,2,\cdots,n)$，且

$z=\dfrac{1}{u_1u_2}+\dfrac{1}{u_2u_3}+\cdots+\dfrac{1}{u_{n-1}u_n}$

7－3－4　设$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\varepsilon=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，且

$z_1=\varepsilon^{100}$，$z_2=\left(\omega-\dfrac{1}{\omega}\right)^2+\left(\omega^2-\dfrac{1}{\omega^2}\right)^2+\cdots+\left(\omega^{100}-\dfrac{1}{\omega^{100}}\right)^2$

求$|z_1|$，$|z_2|$，$\arg z_1$，$\arg z_2$．

7－3－5　(1)设$u=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$，那么$u+u^2+\cdots+u^5=$ ______；

(2)设z的辐角为$\dfrac{5\pi}{6}$，实部为$-2\sqrt{3}$，则$z=$ ______；

(3)设$|z|=1$，$z^5+z=1$，则$z=$ ______；

(4)设$z=\mathrm{tg}\alpha+i\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$，则z的三角形式为______；

(5)设 arg(-2+i)=α，arg(-1-3i)=β，则α+β=______．

7-3-6　设 a≥0，解复数方程

$x^2+2|z|-a=0$

7-3-7　方程 $z^2+|z|=0$ 的根的个数是　　　　　　　　　　　[　　]

A．3　　　　　　　　　　B．2

C．1　　　　　　　　　　D．0

7-3-8 设$|z-1|=1$，$\arg(z-1)=\dfrac{2\pi}{3}$，求$|z+2z^2+\cdots+12z^{12}|$．

7-3-9　-7+24i 的平方根是______．

7-3-10 (1)设$f(z)=|1+z|-\bar{z}$，$f(-z)=10-3i$，则$\arg z=$______；

(2)$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{60}+\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{60}-\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{50}}{(1-i)^{100}}=$______

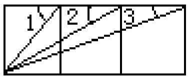
(3)$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n}=$______$(n\in N)$

7-3-11　求和：

$$A=\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}\pi$$

$$B=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2n}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

7-3-12　如右图．已知平面内三个正方形及∠1，∠2，∠3．求证：∠1+∠2+∠3=90°．



7-3-13　设数列$\{z_n\}$中

$z_1=-1+\sqrt{3}i$，$5z_n=-z_{n-1}+\sqrt{3}z_{n-1}i\,(n\geq 2)$

且$\arg z_n=\theta_n\,(n\in N)$

(1)**证明：**$z_n=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}z_1^n\,(n\in N)$；

(2)**求**$\lim\limits_{n\to\infty}(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|)$；

(3)求$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{10}$．

7-3-14　(1)**设**$\cos\dfrac{\pi}{15}+i\sin\dfrac{\pi}{15}$**是方程**$z^5+a=0$**的根，则**$a=$______；

(2)**已知**$|z_1|=3$，$|z_2|=2$，$|z_1-z_2|=4$，**则**$\dfrac{z_1}{z_2}$______．

7-3-15　(1)**设**$|z|=1$，**求**$|z^5+\dfrac{1}{z^3}|$**的最大值与最小值；**

(2)**设**$|z|^2+(3+\sqrt{3}i)z+(3-\sqrt{3}i)\bar{z}+9=0$，**求**$|2z-2\sqrt{3}i|$**的最大值与最小值．**

7-3-16　设复数z_1，z_2，z_3的辐角分别为α，β，γ，且$|z_1|=1$，$|z_2|=k$，$|z_3|=2-k$，$z_1+z_2+z_3=0$，问

(1)k为何值时cos(β-γ)可取最大值？并求最大值．

(2)k为何值时cos(γ-β)可取最小值？并求最小值．

7-3-17　设

$$z=\frac{1-\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

(1)求$|z|$与$\arg z$；

(2)**当**$\theta=\dfrac{\pi}{13}$**时，求最小的自然数**n，**使**$z^n\in R$．

(四)复数与方程

提要

(1)设 $ax^2+bx+c=0$，则

$$x_1=\frac{-b+d_1}{2a}，x_2=\frac{-b+d_2}{2a}$$

其中 d_1，d_2 为△$=b^2+4ac$ 的两个平方根.

(2)二项方程 $x^n=b$ 的解法

①先将 b 写成三角式，即 $b=r(\cos\theta+i\sin\theta)$；

②二项方程有 n 个根，为

$$Y_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0，1，\cdots，n-1)$$

这n个根均匀分布在以原点为圆心，以$\sqrt[n]{r}$为半径的圆周上(即这n个点将此圆 n 等分).

(3)本知识点主要是解复系数的方程，方法有：公式法，因式分解法，配方法，换元法，化方程组法等.

例题

例 7-4-1　解方程：

$(1)z\bar{z}-3i\bar{z}=1+3i$

(2)$(1+i)z^2-(1-i)z-(2+6i)=0$

(3)$z^4+3iz^3-3z^2+3iz-4=0$

解　(1)令 $z=x+yi(x，y\in R)$，原方程变为

$$\left(x^2+y^2-3y\right)-(3x)i=1+3i\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-3y=1\\-3x=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$$

原方程有两个根 $z_1=-1$，$z_2=-1+3i$.

(2)△$=(-1+i)^2+4(1+i)(2+6i)=-16+30i=(3+5i)^2$，因此

$$z=\frac{(1-i)\pm(3+5i)}{2(1+i)}\Leftrightarrow z_1=2，z_2=-2-i$$

(3)原方程$\Leftrightarrow(z^2+1)(z^2+3iz-4)=0$

$\Leftrightarrow(z+i)(z-i)(z^2+3iz-4)=0$

$$\Leftrightarrow z_1=i，z_2=-i，z_{3，4}=\frac{-3i\pm\sqrt{-9+16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_1=i，z_2=-i，z_3=\frac{\sqrt{7}-3i}{2}，z_4=\frac{-\sqrt{7}-3i}{2}.$$

注　在复数范围内 n 次方程一定有 n 个根.

例 7-4-2　(1)实系数方程 $x^2+(k+3)x+13=0$ 有一根为 $2-3i$，那么它的另一根为______，k=______；

(2)在 C 中，$x^2-2x\cos\theta+1$ 分解因式=______，其中 $\theta\in R$；

(3)设$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，方程$\dfrac{z^2}{(1+\omega-\omega^2)^6}=1+i$的两个根是______；

(4)设$k\in R$，方程$x^2+(k+2i)x+2+ki=0$至少有一个实根，则$k=$______．

解 (1)2+3i；7 因为实系数方程虚根以共轭虚数对出现，因此另一根
为 2+3i．再由韦达定理知

$$-(k+3)=(2+3i)+(2-3i)\Leftrightarrow k=-7$$

(2)$(x-\cos\theta+i\sin\theta)(x-\cos\theta-i\sin\theta)$

(3)$8\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$，$8\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{8}+i\sin\dfrac{9\pi}{8}\right)$

因为 $1+\omega+\omega^2=0$，$\omega^3=1$，故 $1+\omega=-\omega^2$，所以

$$(1+\omega-\omega^2)^6=(-2\omega^2)^6=2^6$$

原方程$\Leftrightarrow z^2=64+64i\Leftrightarrow z^2=64\cdot\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow z_1=8\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_2=8\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$$

(4)$\pm2\sqrt{2}$设a是原方程一个实根，那么

$$a^2+(k+2i)a+2+ki=0\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+ka+2=0\\2a+k=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k^2=8\Leftrightarrow k=\pm2\sqrt{2}$$

注 (i)韦达定理对复系数方程仍然成立．

(ii)n 次复系数多项式都能分解为 n 个(复系数)一次式之积．

例 7-4-3 解方程：

(1)$x^6=7$ (2)$x^3=-\dfrac{3}{2}i$

(3)$x^3-3x^2+3x-5-3i=0$

解 (1)7 的三角式是 $7=7(\cos0+i\sin0)$，所以原方程的根为

$$x_k=\sqrt[6]{7}\left(\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}\right)(k=0，1，\cdots，5)$$

(2)$-\dfrac{3}{2}i$的三角式为$-\dfrac{3}{2}i=\dfrac{3}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$，所以原方程的根为

$$x_k=\frac{\sqrt[3]{12}}{2}\left[\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right](k=0，1，2)$$

(3)变原方程为

$$(x-1)^3=4+3i$$

化 4+3i 为三角式

$$4+3i=5(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$，其中$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

于是 $x_k-1=\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{3}\right)(k=0，1，2)$

故原方程的根为

$$x_k=1+\sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{3}\right)(k=0，1，2)$$

注　解二项方程关键是将复数b化为三角式，然后求出n次方程有n个根.

例7-4-4　已知z是虚数，$\frac{z}{1+z^2}$和$\frac{z^2}{1+z}$都是实数，求z.　，

解　令z=x+yi(x，y∈R)，则

$$\frac{z}{1+z^2}=\frac{x(x^2+y^2+1)+(y(1-x^2-y^2)i}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$$

$$\frac{z^2}{1+z}=\frac{(x^2+x^3+xy^2-y^2)+[y(x^2+2x+y^2)]i}{(1+x)^2+y^2}$$

由题设有

$$\begin{cases}y=(1-x^2-y^2)=0\\y(x^2+2x+y^2)=0\\y\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2+2x+y^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

所以所求z为

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\text{或}z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

注　本例好像不是解方程，实质上由$\frac{z}{1+z^2}$和$\frac{z^2}{1+z}$是实数，给出两个方程即

$$\frac{z}{1+z^2}=\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}，\frac{z^2}{1+z}=\frac{\overline{z}^2}{1+\overline{z}}$$

例7-4-5　已知方程$x^2+2(p-q)x+2(p^2+q^2)=0$，其中p，q∈R，并且p=q≠0.

(1)证明：方程有虚根，并求虚根α，β；

(2)求$\alpha^2+\beta^3$；

(3)当$\alpha^3\in R$时，求$\frac{p}{q}$.

解　(1)方程的系数为实数，其判别式

$$\triangle=4(p-q)^2-8(p^2+q^2)=-4(p+q)^2<0$$

因此原方程有虚根，用求根公式易求得

$\alpha=-(p-q)+(p+q)i$，$\beta=-(p+q)-(p+q)i$

(2)由韦达定理得

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=[-2(p+q)]^2-2[2(p^2+q^2)]=-8pq$

(3) $\alpha^3=[-(p+q)\pm(p+q)i]^3$

$=(p-q)[3(p+q)^2-(p-q)^2]\pm(p+q)[3(p-q)^2-(p+q)^2]i$

依题设 $p+q\neq0$，故由 $a^3\in R$ 有

$$3(p-q)^2-(p+q)^2=0\Leftrightarrow p^2-4pq+q^2=0 \qquad (i)$$

若$q=0$，则$p=0$，这与$p+q\neq0$矛盾，故$\Rightarrow q\neq0$，于是(i)得

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2-4\left(\frac{p}{q}\right)+1=0\Leftrightarrow\frac{p}{q}=2\pm\sqrt{3}$$

例 7-4-6　设 a，b，c，d，e 都是实数，且 $a\neq0$．求方程

$$ax^2+(b+ci)x+(d+ei)=0$$

有实根的条件．

解　设方程有实根 r，那么

$$ar^2+(b+ci)r+(d+ei)=0\Leftrightarrow\begin{cases}ar^2+br+d=0 & \text{(i)}\\ cr+e=0 & \text{(ii)}\end{cases}$$

当 c=0 时，e=0，且(i)有实根 r，故 $b^2-4ad\geq0$．

当$c\neq0$时，$r=-\frac{e}{c}$，代入(i)得

$$a\left(-\frac{e}{c}\right)^2+b\left(-\frac{e}{c}\right)+d=0\Leftrightarrow ae^2-bce+dc^2=0$$

因此原方程有实根的条件是

$$\begin{cases}c=e=0\\ b^2-4ad\geq0\end{cases}\text{或}\begin{cases}c\neq0\\ ae^2-bce+dc^2=0\end{cases}$$

注　(i)复系数二次方程有无实根，不能再由△的正负来判定，比如方程 $x^2-2ix-1=0$，$\triangle=(-2i)^2+4=0$，但它仍有虚数根．因

$$x^2-2ix-1=x^2+2ix+i^2=(x-i)^2\Leftrightarrow x_1=x_2=i$$

(ii)本例只给出首项系数是实数时，二次方程有实根的条件．但这也够用了，因为

$$(a+bi)x^2+(c+di)x+(e+fi)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+(c_1+d_1i)x+(e_1+f_1i)=0$$

其中$b\neq0$，$c_1+d_1i=\frac{c+di}{a+bi}$，$e_1+f_1i=\frac{e+fi}{a+bi}$．再用判别题设方程有无实根的条件来判别即可．

(iii)本例得出的条件也完全适用于实系数二次方程．

习题

7-4-1　解方程：

$$(1)(1+i)z+(z+i)i^6=z(1-i)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$$

$$(2)5x^2-3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3x+4=0$$

$$(3)\left|\frac{(1-i^7)^6}{8(3+\sqrt{7}i)}\right|z=(1+i)^2(1-i)$$

(4)$(2z^2-5z+2)+(z^2-3z+2)i=0$

7-4-2　一元二次方程 $x^2-2ix-5=0$　　　　　　　　[　　].

A．有两个不等实根

B．有一实根一虚根

C．有两虚根

D．有两个共轭复数根

7-4-3　设α，β是实系数方程 $x^2+ax+2=0$ 的两个根，并且 $a^2<8$，求|α|+|β|.

7-4-4　设|z|=1，解方程 $|z-2i|^2-|z-1|^2=5$.

7-4-5　(1)设 $a<0$，那么 $-3a+3\sqrt{3}ai$ 的5次方根是____；

(2)8+6i 的平方根是______；

(3)方程 $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1997}z^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1997}z+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1998}=0$ 的根是____.

7-4-6　已知 a＞b＞c＞0，并且β是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，求证：|β|＜1.

7-4-7　设 a∈R，β是方程 $(a^2-a)x^2+3ax+2=0$ 的根，|β|=1，求 a.

7-4-8　设 $|z|=\sqrt{2}$，解方程

$$z\bar{z}+(1-i)z+(1+i)\bar{z}=2$$

7-4-9　设实系数方程 $x^3-3x^2+ax+b=0$ 有一虚根为 1+i，求 a，b 及方程的另外两个根.

7－4－10　已知 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_2}{z_3}=\frac{z_3}{z_4}=\frac{z_4}{z_1}$，求 $\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{z_1+z_2+z_3-z_4}$ 之值.

7-4-11　已知实系数方程 $z^2+z+m=0$ 有两虚根，α，β，且|α-β|=3，则 m=　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$\frac{5}{2}$　B．1

C．-1　D．$-\frac{5}{2}$

7-4-12　设复数 z_1，z_2 满足

$$\begin{cases} z_1z_2+2i(z_1-z_2)+1=0 & \text{(i)} \\ \bar{z}_1-z_2=2i & \text{(ii)} \end{cases}$$

(1)求 z_1，z_2；(2)证明：$R(z_1)=R(z_2)$；

(3)求 z_1+z_2 的立方根.

7-4-13　设 n∈N，求证：方程 $z^{n+1}-z^n-1=0$ 有模为 1 的根的充要条

件是 6 可以整除 $n+2$．

7-4-14　已知方程 $z^2-5z+6=(2-z)i$．

(1)求方程在实数集中的根；

(2)求方程在复数集中的根．

7-4-15　设 $z\in C$，关于 x 的一元二次方程 $x^2-zx+4+3i=0$ 有实根，求使$|z|$取最小值的 z．

7-4-16　设 $n\in N$，解方程$(z+i)^n+(z-i)^n=0$．

（五）复数运算的几何意义

提要

(1) **复数**$z=a+bi$**可用复平面上点**$A(a，b)$**表示，也可用向量**$\overrightarrow{OA}$**表示.**

(2)设复数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 分别对应复平面上点 A(a，b)，B(c，d).

$(3)z_1+z_2$**对应向量**$\overrightarrow{OC}$**，其中**$\overrightarrow{OC}$**为以**$\overrightarrow{OA}$**与**$\overrightarrow{OB}$**为两边所构成平行四边形的对角线所表示的向量.**

①z_1-z_2**对应向量为**$\overrightarrow{BA}$**.**

②$z_1\cdot z_2$**对应向量**$\overrightarrow{OD}$**，其中**$|\overrightarrow{OD}|=r_1r_2$**，**$\overrightarrow{OD}$**的辐角为**$\overrightarrow{OA}$**的辐角再逆时针方向旋转 z_2 的辐角所得的角.**

③$\frac{z_1}{z_2}(z_2\neq 0)$**对应向量**$\overrightarrow{OE}$**，其中**$|\overrightarrow{OE}|=\frac{r_1}{r_2}$**，**$\overrightarrow{OE}$**的辐角为**$\overrightarrow{OA}$**的辐角再顺时针方向旋转**$z_2$**的辐角所得的角.**

(4)两点 z_1，z_2 的距离为$|z_1-z_2|$.

(5)两端点为 z_1，z_2 的线段的中垂线方程为：$|z-z_1|=|z-z_2|$.

(6)本知识点题型是：求几何变换后的新向量，求三角形边长、面积，求向量夹角，求中垂线方程，求三角形重心等.

例题

例 7-5-1　设 z=2-3i.

(1)**把**z**对应向量分别按逆时针方向旋转**$\frac{\pi}{3}$**和顺时针方向旋转**$\frac{2\pi}{3}$**，求所得向量对应的复数**z_1**和**z_2**；**

(2)**把**z**对应向量按顺时针方向旋转**$\frac{\pi}{3}$**，再将向量长度缩短**$\frac{1}{3}$**倍，求所得的向量对应的复数**z_3**.**

解　(1)由于$|z_1|=|z_2|=|z|$，因此

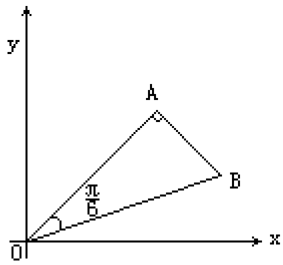
$$z_1=(2-3i)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)i$$

$$z_2=(2-3i)\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\left(-1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)i$$

$$(2)z_3=\frac{1}{3}(2-3i)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$$



例7-5-2 设$z_1=1+i$，$\arg\frac{z_1}{z_2}=\frac{\pi}{6}$．在复平面上$z_1$，$z_2$表示的点分别是A，B，且∠OAB=90°(见图)，求z_2及$S_{\triangle OAB}$．

解　因为$\arg z_1=\frac{\pi}{4}$，而

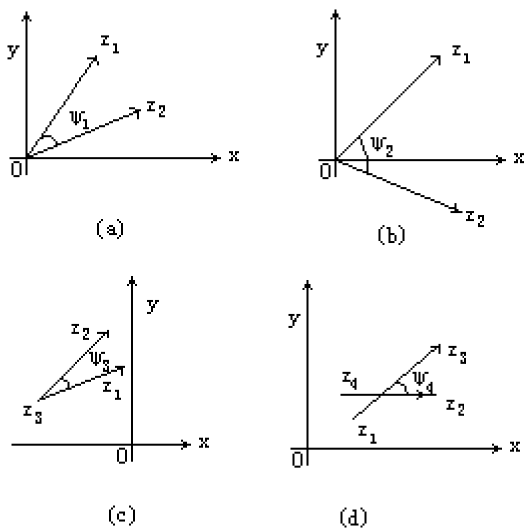
$$\frac{\pi}{6}=\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$$

所以$\arg z_2=\frac{\pi}{12}$．又

$$|z_2|=|\overrightarrow{OB}|=\frac{|\overrightarrow{OA}|}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

所以　$z_2=\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\bullet|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|z_1|\bullet\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\bullet|z_1|=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



例 7-5-3 用$\arg z_k$或$\arg(z_k-z_j)$(k，j=1，2，3，4)表示下列各图中的ψ_1，ψ_2，ψ_3，ψ_4．

解　$\psi_1=\arg z_1-\arg z_2$，$\psi_2=2\pi-(\arg z_2-\arg z_1)$

$\psi_3=\arg(z_2-z_3)-\arg(z_1-z_3)$，$\psi_4=\arg(z_3-z_1)-\arg(z_2-z_4)$

例 7-5-4 设△ABC 的两个内角 A，B 所对的边分别为 a，b．若复数 z_1 的模为 a，辐角为 B；复数 z_2 的模为 b，辐角为-A．

(1)求证：z_1+z_2是实数；(2)当$C=60°$时，求$\frac{z_1}{z_2}$．

解 (1)$z_1=a(\cos B+i\sin B)$，$z_2=b(\cos A-i\sin A)$，所以

$$z_1+z_2=(a\cos B+b\cos A)+(a\sin B-b\sin A)i$$

根据正弦定理易知 $a\sin B-b\sin A=0$，故

$$z_1+z_2=a\cos B+b\cos A\in R$$

$$(2)\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{a}{b}[\cos(B+A)+i\sin(B+A)]$$

$$=\frac{a}{b}(-\cos C+i\sin C)=\frac{a}{b}(-\cos 60°+i\sin 60°)$$

$$=\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-a+\sqrt{3}ai}{2b}$$

例 7-5-5 设非零复数 z_1，z_2 在复平面上对应的点为 A，B，证明：

$$(1)\ OA\perp OB\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=0$$

$$(2)\ |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

解 (1)设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$$

$$=r_1r_2\{[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]+[\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)]\}$$

$$=2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

因此 $OA\perp OB\Leftrightarrow\theta_1-\theta_2=k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\cos(\theta_1-\theta_2)=0\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=0$

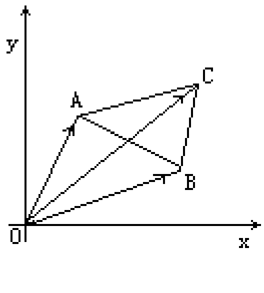
(2)由平面几何知

$$|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2=2(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2)\qquad(*)$$

而 $|\overrightarrow{OC}|^2=|z_1+z_2|^2$，$|\overrightarrow{AB}|^2=|z_1-z_2|^2$

$|\overrightarrow{OA}|=|z_1|^2$，$|\overrightarrow{OB}|^2=|z_2|^2$

将它们代入(*)即可．



习题

7-5-1 设$z_1=3-2i$与$z_2=-1+4i$在复平面上对应点为A，B．把$\overrightarrow{AB}$按顺时针方向绕A点旋转90°后得到向量$\overrightarrow{AC}$，那么$\overrightarrow{AC}$对应的复数是

______.

7-5-2 设$|z-1|=1$，$\arg(z-1)=\frac{2\pi}{3}$，

(1)求 $u=z+2z^2+\cdots+12z^{12}$；

(2)求 $v=z^2+2z^4+\cdots+12z^{24}$；

(3)在复平面上 u，v 对应点为 A，B 求|AB|，并写出 AB 的中垂线方程．

7-5-3 向量$\overrightarrow{OA}$对应的复数为$1+2i$，将$\overrightarrow{OA}$向左平移2个单位，再向上平移2个单位，得到向量$\overrightarrow{BC}$．

(1)写出$\overrightarrow{BC}$对应的复数z_1；

(2)分别写出 B，C 两点对应的复数 z_2，z_3；

(3)写出$\overrightarrow{CB}$绕C点按顺时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$所得向量$\overrightarrow{CD}$对应的点数z_4．

7-5-4 如果 z_1，z_2，z_3 是△ABC 三个顶点对应的复数，那么满足方程$|z-z_1|=|z-z_2|=|z-z_3|$的 z 所对应的点是△ABC 的 [ ]

A．内心 B．外心

C．垂心 D．旁心

7-5-5 设复数 z_1，z_2 在复平面上对应点为 A，B，且$|z_1|=3$，$|z_2|=5$，$|z_1-z_2|=7$，求(1)∠AOB；(2)$\frac{z_1}{z_2}$．

7-5-6 设$z_1=1+i$，$z_2=\frac{3}{2}+2i$，z_3在复平面上对应点分别为A，B，C，且△ABC 为等边三角形．求 z_3．

7-5-7 已知复平面内一个正方形两个相邻顶点分别表示复数 10-3i 与 8+4i，求另外两个顶点对应的复数．

$T_{k+1}=C_6^k(3x)^k$ (k＝0，1，2，…，6)

复平面上 z_1，z_2，的对应点．

(1)证晨：△AOB 为等腰直角三角形；

(2)当$|z_1+z_2|=10$ 时，求 $S_{\triangle AOB}$．

7-5-9 设$\arg z_1=\frac{\pi}{6}$，$\arg z_2=\frac{11\pi}{6}$，在复平面上z_1，z_2对应的点为A，B．若$S_{\triangle AOB}=\sqrt{3}$，△AOB的重心G对应的复数为z，求$|z|_{\min}$．

7-5-10 (1)设复数 z_1，z_2 在复平面上分别对应点 A，B，复数 z 对应点为C．若点C分使$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\lambda$($\lambda$为不等于-1的实数)，则$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$；

(2)设 z_1，z_2，z_3 在复平面上对应点分别为 A，B，C，则 A，B，C 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1，λ_2，λ_3，使

$$\begin{cases}\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0 & \text{(i)} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \text{(ii)}\end{cases}$$

(3)z_1=1+2i，z_2=2+i，z_3=3，问 z_1，z_2，z_2 在复平面上对应的点是否共线？

(六)复数与几何图形

提要

(1)射线方程：argz=a，其中 $a\in[0，2\pi)$

(2)直线方程：

①过原点的直线方程：argz=±a，$a\in[0，2\pi)$

②过已知两点 A(a，b)，B(c，d)的直线方程

$$\lambda_1 z-(\lambda_1+\lambda_2)z_1+\lambda_2\lambda_2=0\quad(\lambda_1\neq 0，\lambda_1，\lambda 2\in R)$$

其中 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$.

(3)圆方程：$|z-z_1|=r$，$(z_1\in C，r\in R^+)$

(4)椭圆方程：$|z-z_1|+|z-z_2|=2a\quad(a\in R^+，2a>|z_2-z_1|)$

(5)双曲线方程：$|z-z_1|+|z-z_2||=2a\quad(a\in R^+，2a<|z_2-z_1|)$

(6)本知识点题型是：求方程的几何图形，求轨迹方程，求几何图形的面积，求 argz 的范围和最值等.

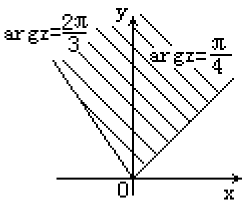
例题

例 7-6-1　在复平面上绘出下列图形：

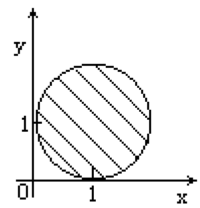
$(1)\dfrac{\pi}{4}\leq \arg z\leq\dfrac{2\pi}{3}\qquad(2)|z-1-i|\leq 1$

$(3)|z-i|\geq|z+2-i|\qquad(4)|z-i|+|z+i|=2\sqrt{2}$

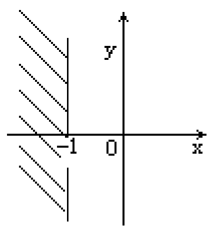
解



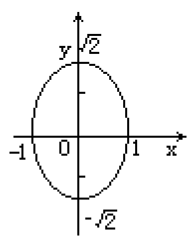
(1)



(2)



(3)



(4)

例 7-6-2　下列命题中正确的是　　　　　　　　　　[　　]

A．方程 $|z+5|^2-|z-5i|^2=8$ 的图形是双曲线

B．方程 $|z+5|^2=8$ 的图形是双曲线

C．方程 $|z+5i|-|z-5i|=8$ 的图形是双曲线的两支

D．方程 $|z+5i|-|z-5i|=8$ 的图形是双曲线靠近焦点 F(0，5)的一支

解　D　A的图形是直线,B的图形是圆,C是图形是双曲线的一去.故选 D．$||z+5i|-|z-5i||=8$ 才是双曲线的两支.

例7-6-3　方程$z\bar{z}+(2-i)\bar{z}+(2+i)z=2$的图形是　[　]

A．圆　B．椭圆

C．双曲线　D．直线

解　A　原方程即$|z-(2+i)|^2=7$．故选A．

例7-6-4　已知z是虚数，$z+\frac{4}{z}$是实数．

(1)求z对应复平面内动点A的轨迹；

(2)设u=3iz+1，求u对应复平面内动点B的轨迹；

(3)设$v=\frac{1}{z}+z$，求v对应复平面内动点C的轨迹．

解　$(1)z+\frac{4}{z}\in R \Leftrightarrow z+\frac{4}{z}=\overline{z+\frac{4}{z}} \Leftrightarrow \frac{(z-\bar{z})(z\bar{z}-4)}{|z|^2}=0$

因为z是虚数，所以$z-\bar{z}\neq 0$，于是$|z|^2=4$，即$|z|=2$，且$z\neq \pm 2$．

因此动点A轨迹是中心在原点，半径等于2的圆，但去掉两个点(2，0)与(-2，0)．

(2)由u=3iz+1得u-1=3iz．由(1)及题设知|z|=2，z≠±2，所以|u-1|=6，且u-1≠±6i

因此动点B的轨迹是圆，中心在(1，0)，半径等于6，但去掉两点(1，6)与(1，-6)．

(3)设z=2(cosθ+isinθ)，(θ≠0，π)则

$$v=2(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{2(\cos\theta+i\sin\theta)} \Leftrightarrow v=\frac{5}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}i\sin\theta$$

再令v=x+yi(x，y∈R)，则

$$\begin{cases} x=\frac{5}{2}\cos\theta \\ y=\frac{3}{2}\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4x^2}{25}+\frac{4y^2}{9}=1$$，其中$x\in\left(-\frac{5}{2}，\frac{5}{2}\right)$因此动点C的轨迹是

一个椭圆，中心在原点，长半轴在x轴，$a=\frac{5}{2}$，短半轴在y轴，$b=\frac{3}{2}$．

但去掉两点$\left(\frac{5}{2}，0\right)$与$\left(-\frac{5}{2}，0\right)$．

例7-6-5　设A，B，C三点对应的复数分别为z_1，z_2，z_3满足

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 & \text{(i)} \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=1 & \text{(ii)} \end{cases}$$

(1)证明：△ABC是内接于单位圆的正三角形；

(2)求$S_{\triangle ABC}$；

(3)当$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$时，求$z_2$，$z_3$，并求△ABC的内切圆方程．

解　(1)由(ii)知A，B，C三点都在单位圆上．再结合(i)得$z_1=-(z_2+z_3)$

$$\Leftrightarrow 1=z_1\bar{z}_1=(z_2+z_3)(\bar{z}_2+\bar{z}_3)=|z_2|^2+|z_3|^2+\bar{z}_2z_3+\bar{z}_3z_2$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_2z_3+\bar{z}_3z_2=-1$$

$\Leftrightarrow|z_2-z_3|^2=(z_2-z_3)(\overline{z}_2-\overline{z}_3)=|z_2|^2+|z_3|^2-(z_3\overline{z}_2+z_2\overline{z}_3)=3$

$\Leftrightarrow|z_2-z_3|=\sqrt{3}$

类似可证$|z_1-z_2|=|z_1-z_3|=\sqrt{3}$**，从而**$\triangle ABC$**为正三角形．**

$(2)S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\sin A$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$(3)z_2(\cos120°+i\sin120°)\cdot z_1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

$z_3=[\cos(-120°)+i\sin(-120°)]z_1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

设 BC 中点为 D，它对应复数为 z_4，那么

$z_4=\frac{z_2+z_3}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i\Rightarrow|z_4|=\frac{1}{2}$

由于正三角形的外接圆与内切圆的圆心合一，因此△ABC 的内切圆圆心也在坐标原点，半径为$|z_4|$**．因此内切圆方程为**$|z|=\frac{1}{2}$**．**

例7-6-6　若$1\leq|z|\leq\sqrt{2}$**，求**$u=\overline{z}(1+i)$**所对应点**A**的集合表示什么图形，并求其面积．**

解　由$\overline{z}=\frac{u}{1+i}$**知**$|z|=|\overline{z}|=\frac{|u|}{\sqrt{2}}$**．但**$1\leq|z|\leq\sqrt{2}$**，可知**

$\sqrt{2}\leq|u|\leq2$

因此动点 A 的图形是一个圆环．设此圆环面积为 S，那么

$S=\pi[2^2-(\sqrt{2})^2]=2\pi$

习题

7-6-1　指出满足下列关系式的 z 在复平面上对应点表示的曲线或区域：

$(1)\arg z=\frac{\pi}{4}$　$(2)(z+i)(\overline{z}-i)=2$　$(3)z=\frac{3+2i}{3-i}$

(4)|z-1|+|z+1|=4　(5)|z+1|²+|z-1|²=4

$(6)|2z-4i|=|z-\overline{z}+4i|$　$(7)\log_{\frac{1}{2}}|z+1+i|>\log_{\frac{1}{2}}|z-1-i|$

(8)z=(m²-8m+15)-(m²-8m+15)i　(m∈R)

7-6-2　设 A，B，C 三点在复平面上，它们对应的复数分别为 z_1，z_2**，**z_3**，**$\triangle ABC$**的重心**G**，对应的复数为**z**，证明：**$z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$**．**

7-6-3　设方程 $z^2+2kz+k=0$ 有虚根 a+bi(b＞0)，当实数 k 变化时，点(a，b)画出怎样的图形？

7-6-4 设复数z_1**，**z_2**满足**$2z_1-z_2+2+\sqrt{2}i=0$**，**z_1**，**z_2**在复平面上**

对应点 A，B．若点 A 在圆 $|z|=1$ 上运动，求点 B 的轨迹．

7-6-5 设 z 满足 $|z-i|=1$，且 $z\neq 0$，$z\neq 2i$．复数 u 使 $\frac{u}{u-2i}\cdot\frac{z-2i}{z}$ 为实数．求 u 在复平面上对应点的轨迹．

7-6-6 在复平面上，设 $|z|=a(a>0)$，$u=\frac{1}{2}\left(z+\frac{a^2}{z}\right)$，求 u 对应点的轨迹．

7-6-7 设 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i(x_1，y_1，x_2，y_2\in R)$，且 $z_2=z_1+\frac{36}{z_1}$．当 z_1 对应的点在圆 $|z|=7$ 上运动时，问 z_2 对应的点构成什么图形？

7-6-8 已知复平面上两个点集

$$M_1=\left\{z\,\middle|\,|z|^2+2i(z-\overline{z})+\frac{35}{9}=0，z\in C\right\}$$

$$M_2=\left\{z\,\middle|\,|z+\sqrt{3}|+|z-\sqrt{3}|=4，z\in C\right\}$$

(1) M_1，M_2 各表示什么曲线？

(2) 任取 $z_1\in M_1$，$z_2\in M_2$，令 $d=|z_1-z_2|$，求 d 的最大值与最小值．

7-6-9 若复数 z 满足 $|z+\sqrt{2}+\sqrt{2}i|\leq 1$．

(1) 求 $|z|$ 的最大值与最小值；

(2) 求 $\arg z$ 的取值范围；

(3) 求 $\arg z$ 的最小值时的复数 z．

7-6-10 设四个不同的复数 z_1，z_2，z_3，z_4 在复平面上对应点分别为 A，B，C，D，证明：A，B，C，D 四点共圆或共线的充要条件是

$$\left(\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\right):\left(\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\right)=\lambda \quad (\lambda\in R)$$

7-6-11 设任意△ABC 和平面上一点 P，过 P 作 C 的对称点 P_1，过 P_1 作 B 的对称点 P_2，过 P_2 作 A 的对称点 P_3，这样依 C，B，A 不断作不去，得 P_1，P_2，P_3，P_4…如果 $|PA|=10$，求 $|PP_{1997}|$．

第八部分　排列、组合、二项式定理

(一)两个原理

提要

(1)加法原理　做一件事，完成它有 n 类方法，第一类有 m_1 种不同方法，…，第 n 类有 m_n 种不同方法，则完成这件事共有 $m_1+\cdots+m_n$ 种不同方法.

(2)乘法原理　做一件事，完成它需分 n 个步聚，做第一步有 m_1 种不同方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同方法，那么完成这件事共有 $m_1m_2\cdots m_n$ 种不同方法.

(3)加法原理与乘法原理是两个最基本的计数原理，它自始至终贯穿排列组合的整个内容．应用这两个原理最关键是区分“分类”与“分步”，善于将已知问题设想一种分类或分步．分类必须完备，各类相互独立，不重复，不遗漏，每类中的方法数还要便于计算；分步必须过完整，互相衔接，每步也要便于计数.

(4)本知识点题型主要是：加法原理的应用与乘法原理的应用.

例题

例 8-1-1　虚数 $a+bi(a,b\in R)$ 可以从-3，-2，-1，0，1，2，3 这七个数中取两个不同的数分别作为实部和虚部，那么辐角主值在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ 内的不同虚数的个数为____.

解　21　因为根据题意，必须 $a\leq 0$ 且 $b\neq 0$．因此分两类.

(i)$a=0$，那么 b 可从剩下 6 个数中任取一个，共 6 种取法；

(ii)$a<0$，那么 a 有 3 种不同取法，由于 $b\neq 0$，因此 b 有 5 种不同取法，由乘法原理有 $3\times 5=15$ 种不同取法，

再由加法原理，所求个数为 $6+15=21$.

注　(i)此例是加法原理与乘法原理的综合应用.整个问题是用加法原理计数，其中第二类计数中，又用到乘法原理.

(ii)解题时，一般需自己去设想分类或分步.

例 8-1-2　用 0，1，2，3，4，5 这六个数字，

(1)可以组成多少个数字不重复的三位数？

(2)可以组成多少个数字允许重复的三位数？

(3)可以组成多少个数字不允许重复的三位数的奇数？

(4)可以组成多少个数字不重复的小于 1000 的自然数？

(5)可以组成多少个大于 3000，小于 5421 的四位数？

解　(1)分三步：(i)先选百位数字．由于 0 不能作百位数，因此有 5 种选法；(ii)十位数字有 5 种选法；(iii)个位数字有 4 种选法．由乘法原理知所求不同三位数共有 $5\times 5\times 4=100$ 个.

(2)分三步：(1)百位数字有 5 种选法；(ii)十位数字有 6 位选法；(iii)个位数字有 6 种选法．所求三位数共有 $5\times 6\times 6=180$ 个.

(3)分三步：(i)先选个位数字，有 3 种选法；(ii)再选百位数字，有 4 种选法；(iii)选十位数字也是 4 种选法．所求三位奇数共有 $3\times 4\times 4=48$ 个.

(4)分三类：(i)一位数，共有 5 个；(ii)两位数，共有 $5\times 5=25$ 个；

(iii)三位数共有 $5\times5\times4=100$ 个．因此比 1000 小的自然数共有 $5+25+100=130$ 个．

(5)分 4 类：(i)千位数字为 3，4 之一时，共有 $2\times5\times4\times3=120$ 个；(ii)千位数字为 5，百位数字为 0，1，2，3 之一时，共有 $4\times4\times3=48$ 个；(iii)千位数字是 5，百位数字是 4，十位数字为 0，1 之一时，共有 $2\times3=6$ 个；(iv)还有 5420 也是满条件的 1 个．故所求自然数共 $120+48+6+1=175$ 个．

注　排数字问题是最常见的排列组合问题，要特别注意首位不能排 0．

例 8-1-3　求下列集合的元素个数．

(1)$M=\{(x,y)|x,y\in N,x+y\le6\}$

(2)$H=\{x,y\}|x,y\in N,1\le x\le4,1\le y\le5\}$

解　(1)分 5 类：(i)$x=1$，y 有 5 种取法；(ii)$x=2$，y 有 4 种取法；(iii)$x=3$，y 有 3 种取法；(iv)$x=4$，y 有 2 种取法；(v)$x=5$，y 只有一种取法．因此 M 共有 $5+4+3+2+1=15$ 个元素．

(2)分两步：(i)先选 x，有 4 种可能；(ii)再选 y 有 5 种可能．由乘法原理，H 共有 $4\times5=20$ 个元素．

例 8-1-4　(1)设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，$B(x,y,z)$，从 A 到 B 共有多少个不同映射？

(2)6 个人分到 3 个车间，共有多少种分法？

(3)6 个人分工栽 3 棵树，每人只栽 1 棵，共有多少种不同方案？

解　(1)分 6 步：先选 a 的象，有 3 种可能，再选 b 的象也是 3 种可能，…，选 f 象也有 3 种可能．由乘法原理知，共有 $3^6=429$ 种不同映射．

(2)把 6 个人构成的集合，看成上面(1)中之 A，3 个车间构成的集合，看成上面的 B．因此所求问题转化为映射问题，如上题所述，共有 729 种方案．

(3)安排第一棵树有 6 种可能，即 6 人中任一人都可．再安排第二棵树有 5 种可能，最后安排第三棵树有 4 种可能．还剩下 3 人可以参加栽 3 棵树的任何一棵，因此有 3^3 种可能．所求总数为 $6\times5\times4\times3^3=3240$．

注　(i)由此例看出有许多问题可转化为映射问题．

(ii)设集合 A 的元素为 n 个，集合 B 的元素为 m 个，那么 A 到 B 的映射有 m^n 种．

例 8-1-5　(1)200 的正因数共有______个；

(2)个位数字是 3，不超过 200 的自然数个数为______；

(3)不超过 200，个位数字不是 3 的自然数的个数是______．

解　(1)12　因为 $200=2^3\cdot5^2$，因此 200 关于 2 的方幂为 2^0，2^1，2^2，2^3 共 4 种，200 关于 5 的方幂共有 5^0，5^1，5^2 三种．由乘法原理共 12 种．

(2)20　分三类：第一类是一位数，只有 1 个，即 3；第二类，二位自然数，个位数字必须是 3，十位数字有 9 种选法；第三类是三位数，个位数字还是 3，百位数字必须是 1，十位数字共有 10 种选法．故所求个数为 $1+9+10=20$．

(3)180　因为不超过 200 的自然数共有 200 个，除上面(2)的 20 种外．其余还有 $200-20=180$ 个．

注　若自然数 $N=p^nq^mr^k$，其中 p，q，r 都是素数，且 $p<q<r$，那

么N的正因数共有(n+1)(m+1)(k+1)个．请读者自己证明．

例 8-1-6　从1到9这九个自然中，任取三个数作数组(a，b，c)，且a＞b＞c，则不同数组共有　　　　[　　]

A．21个　　　　B．28个

C．84个　　　　D．343个

解 C 分两步：①从9个数中任取3个不同数，取法共有$C_9^3=84$种；②取出的这3个数只能构成1个数组，满足a＞b＞c．故所求总数为84×1=84个．

习题

8-1-1　设A={1，2，3}，B={x，y，z}．

(1)A到B的映射共有多少个？

(2)A到B的一一对应有多少个？

(3)规定1必须对应y，这种从A到B的映射又有多少个？

8-1-2　设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数互不相等，各系数均在-4，-3，-2，-1，0，1，2，3中取值．

(1)共可组成多少条抛物线？

(2)开口向上的抛物线共有多少条？

(3)过原点的抛物线有多少条？

8-1-3　用6张一角纸币，4张一元纸币，3张五元纸币，共能组成币值总数为　　　　[　　]

A．140　　　　B．139

C．72　　　　D．13

8-1-4　书架上层放有6本不同语文书，中层放有5本不同数学书，下层放有4本不同外语书．

(1)从中任取一本书，不同取法总数为______；

(2)从中任取一本数学书，不同取法总数是______；

(3)从中取一本数学书与一本外语书，不同取法总数是______；

(4)从中两层各取一本书，不同取法的总数是______；

8-1-5　从0，1，2，3，4，5中选4个不同数字构成四位整数．

(1)以1为首的四位整数有多少种？

(2)如果将所有四位整数由小到大排列，第73个整数是多少？

8-1-6　$(x_1+x_2)(x+b+c)(y_1+y_2+y_3+y_4)$展开式共有项数为　　[　　]

A．9　　　　B．10

C．24　　　　D．12

8-1-7 $a\in\{1,\pi,0,\frac{1}{2},\sqrt{2}\}$，$b\in\{0,1,-1,9,\frac{1}{4}\}$使得

(1)使 $\log_a b$ 有意义的a，b值共有多少种？

(2)在有意义的记号中，共有多少个正数？共有多少个负数？

8-1-8　用1，2，3，5四个数作加数，可以得到多少个不同的和？

8-1-9　将A，B，C，D四名同学按一定顺序排成一行，要求自左向右，A不排在第一，B不排在第二，C不排在第三，D不排在第四，问共有多少种不同排法？

8-1-10　两条垂直的直径把圆4等分，用4种颜色去涂染，使任意

两相邻部分颜色不同，那么不同涂色的方法有多少种？

8-1-11　设有 m 个集合 $M_k(k=1，2，\cdots，m)$，M_k 中有 $r_k(k=1，2，\cdots，m)$ 个元素．

(1)从中任取一个元素，其不同选法总数为______；

(2)从两个不同集合中，各选一个元素，其不同选法总数为______；

(3)从每一个集合中各选一个元素，其不同选法总数为______．

(二)排列与组合的概念与计算

提要

(1)从 n 个不同元素中，取出 m(m≤n)个不同元素，按照一定的顺序排成一列，其中不同排法总数是P_n^m.

(2)从 n 个不同元素中，取出 m(m≤n)个不同元素，并成一组，其不同取法总数为C_n^m.

(3)$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$，$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$，$P_n^m=C_n^m\cdot m!$

(4)排列与组合尽管都是从 n 个元素中取 m 个出来，但它们有不同之处：排列与顺序有关，即将取出的 m 个元素顺序作一变化，就是不同排列；而组合与顺序无关，即将取出的 m 个元素的顺序作一变化，仍认为是同一组合．从另一角度而言，组合是把 n 个元素分成两组，一组是取出来的 m 个，另一组是留下的 n-m 个．

(5)本知识点主要题型为识别排列与组合，与排列数或组合数有关的计算．

例题

例 8-2-1　下列命题中，正确的是　　　　　　　　[　　]

A．从集合{1，2，5，8}中，任取两个不同数求积，那么共有P_4^2个不同的积

B．从集合{1，2，5，8}中，任取两个不同数作数列，那么可得C_4^2个不同数列

C．从四件不同工具中任取两件分给甲、乙二人，那么不同的分法为P_4^2种

D．4个球队进行单循环赛，需进行P_4^2场

解　C　区别排列与组合关键看是否与顺序有关，比如 A 中取两个数 1，2 作积，由于 1×2 与 2×1 无区别，因此与顺序无关，应是组合问题．正确答案应是C_4^2，故不选A．

再看 B，选作 1，2 作数列有：1，2 和 2，1 它们是不同的数列，因此与顺序有关．正确答案应是P_4^2，故不选B．

D中涉及的是两队球赛，也与顺序无关，正确答案应是C_4^2.

例 8-2-2　(1)某信号兵用红、黄、蓝 3 面旗从上到下挂在竖直的旗杆上表示信号，每次可以挂 1 面，2 面或 3 面，并且不同的顺序，也表示不同的信号，一共可发出多少种不同信号？

(2)用 1，2，3，4…，9 个数字，可以组成多少个没有重复数字的自然数？

(3)用 1，2，3，4 四个数字，可以组成多少个允许有重复数字的三位数？

解　(1)分三类：①挂一面旗，有P_3^1种信号；②挂两面旗，有P_3^2种信号；③挂3面旗，有P_3^3种信号．

因此共有$P_3^1+P_3^2+P_3^3=15$种不同信号．

(2)类似上面(1)，共可组成自然数$P_9^1+P_9^2+\cdots+P_9^3$个．

(3)此即从 111 到 444 的自然数共 334 个．

注　解排列组合问题，除注意识别排列与组合外，还常须同时与乘法原理、加法原理并用．

例 8-2-3　在 52 件产品中，有 50 件合格品，2 件次品，从中任取 5 件进行检查．

(1)全是合格品的抽法有多少种？

(2)次品全被抽出的抽法有多少种？

(3)恰有一件次品被抽出的抽法有多少种？

(4)至少有一件次品被抽出的抽法有多少种？

解　(1)C_{50}^{5}　(2)$C_{50}^{3}C_{2}^{3}$　(3)$C_{50}^{4}C_{2}^{1}$

(4)$C_{52}^{5}-C_{50}^{5}$　因为C_{52}^{5}表示一切抽法的总数，减去抽出全是合格品的抽法总数，就等于至少抽出 1 件次品的抽法总数．

注　(i)一般设总产品为 N 件，其中 n 件 A 品，m 件 B 品，n+m=N．从中任取M件产品(M≤N)，其中恰含有A品n_1件的抽法总数为$C_n^{n}1\bullet C_m^{M-n}1$．

如果M≤n，那么取出M件全是A品的不同取法总数为C_n^M．

(ii)计算排列组合数的方法一般有两种：一种叫做直接法，即根据题目要求，直接计算出排列数或组合数；另一种叫做间接法，把一切可能的总数 a 分成两部分，一部分是所求的总数 x，另一部分是非所求的总数 b．而 a，b 都容易算出，那么 x=a-b．本例之(4)就是用间接法，一般“至少有一件是 A 品”与“全部不是 A 品”这两种抽法的和等于全部抽法总数．因此这三个数中已知两个可求出另外一个．

例 8-2-4　有 25 名学生，站成 5 行 5 列的一个方队，共有多少种站法？若从中选出 3 人，要求这 3 人不在同一行，也不在同一列，其不同选法有多少种？

解　虽然分成 5 行 5 列，仍可看成是 25 个人的全排列．因此共有 5！=120 种不同站法．

对第二问，分三步：①先选行，共有C_5^3种选法；②再选列也有C_5^3种选法；③在确定的3行3列上共有9个人，从中选3人位于不同行不同列，共有P_3^3种选法．由乘法原理，不同选法为$C_5^3C_5^3P_3^3$种．

例 8-2-5　(1)3 个人去借 10 本不同的书，每人借 1 本，不同借法有多少种？

(2)n 个不同的小球，放入 m 个有编号的小盒中，要求每盒不超过 1 个，问有几种放法？

解　(1)第 1 个人有 10 种借法，第 2 个人有 9 种借法，第 3 个人有 8 种借法，共有 10×9×8=720 种借法．

(2)按 m，n 的大小关系加以讨论．

(i)当 n＜m 时，这时 n 个球可全部放进去．把 m 个有编号的小盒，看成 m 个不同元素，于是 n 个不同小球放入 m 个有编号的小盒，相当于从m个元素取n个元素作排列，故共有P_m^n种放法．

(ii)当$n=m$时，同上有$P_m^n=m!$种放法．

(iii)当 n＞m 时，这时 n 个小球不能全放进去，因为每盒最多只能放 1 个球，因此只能放入 m 个球．相当于将 n 个球看成 n 个不同元素，

取m个元素作排列，因此不同放法为P_n^m种．

注　本例是排列问题的一个基本模式，它不仅在物理学、概率论中应用，而且排列组合中有些问题可以看成这种模式的一个具体应用，比如本例(1)就是(2)的具体应用．

例 8-2-6　(有序分组问题)有 6 本不同的书，分给甲乙丙三人．

(1)每人得 2 本，有多少种不同分法？

(2)甲得 1 本，乙得 2 本，丙得 3 本，有多少种不同分法？

解 (1)分三步：①先给甲2本，共有C_6^2种取法；②再给乙2本，有C_4^2种取法；③最后给丙，有C_2^2种取法．由乘法定理知，不同分法有$C_6^2C_4^2C_2^2=90$种．

(2)类似地有$C_6^1C_5^2C_3^3=60$种．

注　(i)本例是所谓有序分组问题的一具体例。这里把 6 本书分成了三组。之所以称为有序，是因为三个人是不同的，看成是有序的。由于本例之(1)，每组个数一样，又称为有序均匀分组问题；本例之(2)称为有序不均匀分组问题。

(ii)有序分组的一般数学模型是：有 n 个不同东西，分给 k 个人，第 1 人得 r_1 个，第 2 人得 r_2 个，…，第 k 人得 r_k 个，其中 $r_1+r_2+\cdots+r_k=n$。那么不同分法的总数为

$$C_n^{r_1}C_{n-r_1}^{r_2}\cdots C_{n-r_1-\cdots-r_{k-1}}^{r_k}=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!} \qquad \text{(i)}$$

(iii)利用(i)式，本例之(1)为$\frac{6!}{2!2!2!}=90$；本例之(2)为$\frac{6!}{1!2!3!}=60$。

例 8-2-7　(无序分组问题或分堆问题)6 本不同的书，

(1)分成 6 堆，每堆一本，共有多少种不同分法？

(2)分成 2 堆，每堆 3 本，共有多少种不同分法？

(3)分成 2 堆，其中一堆 2 本，另一堆 4 本，共有多少种不同分法？

(4)分成 3 堆，每堆 2 本，有多少种不同分法？

解　(1)因为堆与堆之间无顺序问题，因此 6 本书分成 6 堆，每堆 1 本，只有 1 种分法。

(2)先把两堆看成有序的，比如编号为甲、乙两堆，那么由上例所述有序分组问题知，共有 $C_6^3C_3^3=20$ 种不同分法。但对于分堆来说这里计算有重复，比如甲得 1，2，3，乙得 4，5，6 与甲得 4，5，6，乙得1，2，3，对于分堆来说是一回事。因此所求分堆总数$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{3!}=10$。

(3)$C_6^2C_4^4=15$

(4)若把堆编号，比如甲、乙、丙，由例 8-2-6 知，共有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ 种分法。按本题题意，应去掉编号，而编号方法共 P_3^3(=3！)种，故所求为$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{3!}=15$种。

注　把 n 个不同元素平均分成 m 堆，每堆 k 个，其中 n=mk，那么不同分法种数为$\frac{C_n^kC_{n-k}^k\cdots C_k^k}{m!}$。

习题

8-2-1　从5名男生，4名女生中，选3男2女依次登台演讲，则不同排法总数为　[　　]。

A．$C_5^3C_4^2$　　B．$C_5^3+C_4^2$

C．$(C_5^3+C_4^2)P_5^5$　　D．$C_5^3C_4^2\cdot 5!$

8-2-2　若m∈｛2，5，8，9｝，n∈　｛1，3，5，7｝，方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$表示中心在原点，焦点在x轴上的不同椭圆。这样的椭圆有　[　　]。

A．11个　　B．10个

C．8个　　D．6个

8-2-3　设α，β为两个平行平面，在α内有4个定点，β内有6个定点。且各平面内任意3点都不共线。

(1)每经3个点作一平面，最多可作多少个平面？

(2)以这些点为顶点，最多可作多少个三棱锥？

8-2-4　有4名男生，5名女生。

(1)从中选5名代表，要求男生2名，女生3名，且某女生必须在内，共有多少种选法？

(2)选5名代表，要求男生不少于2名，共有多少种不同选法？

(3)分成甲，乙，丙3组，每组3人有多少种不同分法？

8-2-5　用0，1，2，3，4这五个数字，可以组成多少个没有重复数字的四位数？其中有多少个奇数？有多少个大于2430的四位数？

8-2-6　(1)由1，2，3，4，5五个数字组成的没有重复数字的五位数共有_____个；

(2)把上述所有五位数由小到大排序，那么43251是第_____个；

(3)上述排序中第93个数是______。

8-2-7　用1，2，3，4这四个数字可以组成多少个没有重复数字的自然数？这些自然数的和等于多少？

8-2-8　四张卡片，正反面分别写有0与1，2与3，4与5，6与7。将其中三张卡片排在一起，可组成多少个不同的三位数？

8-2-9　有同样大小的4个红球，6个白球。

(1)从中任取4个，有多少种取法？

(2)从中任取4个，使白球比红球多，有多少种取法？

(3)从中任取4个，至少有一个是红球，有多少种取法？

(4)假设取1个红球得2分，取1个白球得1分。从中取4个球，使总分不小于5分的取法有多少种？

8-2-10　(1)把n+1个不同小球全部放到n个有编号的小盒中去，每小盒至少有1个小球，共有多少种放法？

(2)把n+1相同的小球，全部放到n个有编号的小盒中去，每盒至少有1个小球，又有多少种放法？

(3)把n+1个不同小球，全部放到n个有编号的小盒中去，如果每小盒放进的球数不限，问有多少种放法？

8-2-11　五条线段长分别为3，4，6，7，9。从中选三条线段组成

三角形，共可组成三角形的个数为　　　　　　　　　　　　　　　[　　]。

A．5　　　　　　　　　　　　B．7

C．8　　　　　　　　　　　　D．10

8-2-12　有 20 人分成两排，每排 10 人；其中有 4 人必须在前排，有 3 人必须在后排，问一共有多少种排法？

8-2-13　10 人站一排，甲、乙之间必须有 4 人，共有多少种不同排法？

8-2-14　一学生要从 8 门功课中选学 2 门。根据下面要求，各有多少种选法？

(1)有两门课至少选学 1 门；

(2)有两门课至多选学 1 门；

(3)有两门课必须而且只能选 1 门；

(4)有两门课一门都不选。

8-2-15　从 6 双不同手套中，任取 4 只，

(1)恰有 1 双配对的取法是多少？

(2)没有 1 双配对的取法是多少？

(3)至少有 1 双配对的取法是多少？

8-2-16　某教师一个上午有三节课，每班一节。如果上午只能排四节课，并且此教师不能连上三节，那么这位教师上午的课表有多少种不同排法？

8-2-17　由 0，1，2，3，4，5 组成数字不重复且能被 3 整除的三位数有多少个？其中有多少个为偶数？

8-2-18　中日围棋擂台赛，双方各出 7 个队员，按各队事先排好的顺序出场比赛。双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方 2 号队员比赛，…，直到有一方的队员全被淘汰为止，另一方就获得胜利，这样形成一种比赛过程。试求所有可能的比赛过程的种数。

(三)排列数与组合数的等式、方程与不等式

提要

(1)$P_n^n=n!$，$P_m^n=\dfrac{m!}{(m-n)!}$，$C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$，$P_n^m=C_n^m P_m^m$。

(2)$C_n^m=C_n^{n-m}$，$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$

(3)$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$，$C_n^0-C_n^1+C_n^2+\cdots+(-1)^n C_n^n=0$

(4)当 $n=2m$ 时，二项式系数中，以 C_n^m 为最大。

当 $n=2m+1$ 时，二项式系数中，$C_n^m=C_n^{m+1}$，且以这两个系数最大。

(5)本知识点主要题型为排列数与组合数的计算，解关于排列数与组合数的方程和不等式，证明有关排列数与组合数的等式和不等式等。

例题

例 8-3-1 当 $n\geq 1$ 时，证明：

$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$

解 设 $S_1=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots$，$S_2=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots$。由于

$S_1+S_2=2n$ (i)

$S_1-S_2=0$ (ii)

由(i)+(ii)可得 $S_1=2^{n-1}$。再代入(ii)，又得 $S_2=2^{n-1}$。所以 $S_1=S_2$。

例 8-3-2 证明：

(1)$P_n^m+mP_n^{m-1}=P_{n+1}^m$

(2)$2C_n^2+9C_n^3+12C_n^4+5C_n^5=nC_{n+2}^4$

解 (1) $P_n^m+mP_n^{m-1}=\dfrac{n!}{(n-m)!}+m\times\dfrac{n!}{(n-m+1)!}$

$$=n!\left[\frac{(n-m+1)+m}{(n-m+1)!}\right]=\frac{(n+1)!}{(n+1-m)!}=P_{n+1}^m$$

(2) 左端 $=2(C_n^2+C_n^3)+7(C_n^3+C_n^4)+5(C_n^4+C_n^5)$

$$=2C_{n+1}^3+7C_{n+1}^4+5C_{n+1}^5=2(C_{n+1}^3+C_{n+1}^4)+5(C_{n+1}^4+C_{n+1}^5)$$

$$=2C_{n+2}^4+5C_{n+2}^5=2C_{n+2}^4+5\left[\frac{(n+2)}{5!(n-3)}\right]$$

$$=2C_{n+2}^4+(n-2)\left[\frac{(n+2)!}{4!(n-2)!}\right]=2C_{n+2}^4+(n-2)C_{n+2}^4=nC_{n+2}^4$$

例 8-3-3 设 $C_{18}^n=C_{18}^{n+2}$，$2C_m^2=C_{m+1}^2$。令 $z=(-1+\sqrt{m}i)^n$，求 $|z|$ 与 $\arg z$。

解 由于 18 是偶数，根据二项式系数的性质，若 $C_{18}^k=C_{18}^m$，只有 $k=m$ 或 $k=18-m$ 这两种可能。结合本题：由 $C_{18}^m=C_{18}^{m+2}$ 得 $n+2=18-n$，即 $n=8$。

又由 $2C_m^2=C_{m+1}^2$ 得

$$2\left[\frac{m!}{2!(m-2)!}\right]=\frac{(m+1)!}{2!(m-1)!}\Leftrightarrow m=3$$

于是，

$$z=(-1+\sqrt{m}i)^n=(-1+\sqrt{3}i)^8=2^8\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^8$$

$$=2^8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^8=2^8\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

所以$|z|=2^8$，$\arg z=\frac{4\pi}{3}$.

例 8-3-4　解不等式

(1)$C_{x-1}^{2}-x<7$

(2)$C_{4n}^{n+5}<C_{2n+7}^{4n}$

解　(1)由组合概念知 x-1≥2，即 x≥3。则

$$C_{x-1}^{2}-x<7\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x-2)}{2}-x<7$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x-12<0\Leftrightarrow\frac{5-\sqrt{73}}{2}<x<\frac{5+\sqrt{73}}{2}$$

考虑到 x 为不小于 3 的正整数，可知原不等式的解集为{3，4，5，6}。

$$(2)\begin{cases}4n\geq n+5\\2n+7\geq 4n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\geq 5/3\\x\leq 7/2\end{cases}\Leftrightarrow n=2\text{或}n=3$$

经验算此不等式解集为{2，3}。

例 8-3-5　证明：$C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+C_m^2C_n^{k-2}+\cdots+C_m^kC_n^0=C_{n+m}^k$。

证　构造一个数学模型。

设袋中有 n+m 个球，其中红球 n 个，白球 m 个。现从中任取 k 个(k≤min{m，n})，那么共有 C_{n+m}^k 种不同取法。

另一方面，用分类的方法考虑这个问题。可分成 k+1 类：第 1 类，k 个红球；第 2 类，k-1 个红球，1 个白球；第 3 类，k-2 个红球，2 个白球；…;第 k+1 类,0 个红球,k 个白球。于是取法总数为 $C_n^kC_m^0+C_n^{k-1}C_m^1+\cdots+C_n^0C_m^k$。

但这两种算法结果应是相等的，因此等式成立。

习题

8-3-1　解不等式：

(1)$C_{10}^x>C_{100}^1$

(2)$C_{n+1}^{n-4}>C_n^6+C_n^5$

8-3-2　证明：$m!+\frac{(m+1)!}{1!}+\frac{(m+2)!}{2!}+\cdots+\frac{(m+n)!}{n!}=\frac{(m+n+1)!}{(m+1)\cdot n!}$

8-3-3　已知 $C_x^{y-1}:(C_{x-2}^y+C_{x-2}^{y-2}+2C_{x-2}^{y-1}):C_x^{y+1}=3:5:5$，求 x，y。

8-3-4　解方程：

$(1)C_{x+2}^{x-2}+C_{x+2}^{x-3}=\frac{1}{10}P_{x+3}^{3}$

$(2)\frac{1}{C_5^n}-\frac{1}{C_6^n}=\frac{7}{10C_7^n}$

8-3-5　设 $5C_{x+2}^{y}=3C_{x+2}^{y+1}=3C_{x+2}^{y+2}$，求 C_x^y。

8-3-6　证明：

$(1)C_m^n=\frac{n+1}{m+1}C_{m+1}^{n+1}$

$(2)C_m^0+C_{m+1}^1+C_{m+2}^2+\cdots+C_{m+k-1}^{k-1}=C_{m+k}^{k-1}$

8-3-7 (1)**计算：**$\frac{P_{10}^{10}-9P_9^9-8P_8^8}{P_8^8}$；(2)**证明：**$P_8-8P_7+7P_6=P_7$。

8-3-8 化简：$\frac{1}{C_2^2}+\frac{1}{C_3^2}+\cdots+\frac{1}{C_n^2}$。

8-3-9　某学习小组有 8 位同学。从男生中选 2 人，女生中选 1 人参加数，理，化三种竞赛，要求每人只参加一种，已知共有 180 种不同选法，问此小组男，女各多少人？

8-3-10 证明：$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}>P_n\quad(n\geq 3)$。

8-3-11 求$f(x)=\frac{(-1)^{2x+9}\frac{1}{6}P_{x+2}^{5}}{1+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{x-1}^2}$**的最值。**

8-3-12　设 M={1，2…，n}，且 1≤r≤n。

(1)从 M 中任取 r 个不同元素，可构成多少个含 r 个元素的子集？

(2)含 1 的 r 个元素的子集又有多少个？

(3)最小数为 k 的 r 个元素的子集有多少个(1≤k≤n-r+1)？

(4)设 F(n，r)表示一切 r 个元素的子集中的最小数的平均数，证明：

$F(n，r)=\frac{n+1}{r+1}$

(四)有附加条件的排列与组合及其应用

提要

(1)附加条件是指对某些元素(有时称它们为特殊元素)的位置附加了限制条件。有附加条件的排列组合题，涉及面广，通常有以下几类：①某些元素不能排或者必须排在某些位置；②某些元素不选进或必须选进；③某些元素必须相邻或必须相间隔离；④限定顺序排列；⑤分组问题；⑥分堆问题等。

(2)解有附加条件的排列组合题的方法主要有两种：①直接法。优先处理这些特殊元素，再处理其他元素。从而直接计算出所要求的排列组合数；②间接法。先算出无条件的排列组合数，再剔除去不符合题意的排列组合数，从而间接地得出有附加条件的排列组合数。

(3)解排列组合题应用题的方法常见有以下几种：①直接分步法；②直接分类法；③特殊元素法；④特殊位置法等。

(4)本知识点题型主要有：有附加条件的排列组合数的计算；排列组合应用题等。

例题

例 8-4-1　有 4 名男生，5 名女生。

(1)全体排成一行有多少种不同排法？

(2)选其中 5 名排成一行有多少种不同排法？

(3)全体排成一行，其中甲不能排在两头，也不能排在中间，有多少种不同排法？

(4)全体排成一行，甲只能排在两头，有多少种不同排法？

(5)全体排成一行，甲不在最左边，乙不在最右边，有多少种不同排法？

(6)全体排成一行，男女相间有多少种不同排法？

(7)全体排成一行，男生，女生各在一起，有多少种不同排法？

解　(1)P_9^9　(2)P_9^5

(3)共 9 个位置，先排甲的位置。由于甲不能在两头，又不能在中间。因此只能从剩下的 6 个位置中选一个，有 C_9^6 种选法，剩下 8 个人有 P_8^8 种排法，故所求排法总数为 $C_9^6P_8^8$。

(4)先排甲。甲的位置有 C_2^1 种选法，其他人有 P_8^8 种排法。故共有 $C_2^1P_8^8$ 种排法。

(5)分两类：①乙排在最左，共有 P_8^8 种；②甲，乙都不在最左，且乙不在最右，那么乙先从中间 7 个位置选一个，甲再从除最左以外的其余 7 个位置选一个，再将其余 7 个元素作全排列，共有 $C_7^1C_7^1P_7^7$ 种排法。因此所求总数为

$P_8^8+C_7^1C_7^1P_7^7$

(6)先排女生，共有 P_5^5 种排法。5 个女生之间有 4 个空隙，插入男生共有 P_4^4 种排法。因此所求总数为 $P_5^5P_4^4$。

(7)先把男生连在一起看成一个元素，女生也连在一起看成一个元素，这两元素共有 P_2^2 种排法。男生内部有 P_5^5 种排法，女生内部也有 P_4^4

种排法。因此所求总数为 $P_2^2P_5^5P_4^4$。

例 8-4-2 (1)有 n 个男生与 n 个女生排成一行，男女相间，共有多少种排法？

(2)有 n 个相同红球，n 个相同白球，红白相间排成一行，共有多少种不同排法？

(3)有 n+1 个男生与 n 个女生排成一行，男女相间，共有多少种不同排法？

(4)有 n+1 个相同红球与 n 个相同白球排成一排，红白相间，共有多少种排法？

(5)有 n+m 个男生(m≥1)，有 n 个女生，排成一排，其中没有两个女生相邻的排法共有多少种？

(6)有 n+m 个相同红球(m≥1)，n 个相同白球，排成一排，其中没有两个白球相邻的排法共有多少种？

解 (1)设想有 2n 个位置，分成两类：①男生站奇号位，女生站偶号位，不同排法总数为 $P_n^nP_n^n$；②女生站奇号位，男生站偶号位，排法也有 $P_n^nP_n^n$ 种。

故所求总数为 $2P_n^nP_n^n$。

(2)类似上述，由于红球无区别，白球也无区别，因此上述每类只有一种排法。故所求总数为 2。

(3)设想有 2n+1 个位置，要形成男女相间，只有男生站奇号位，女生站偶号位。故所求总数为 $P_{n+1}^{n+1}P_n^n$。

(4)按(3)的设想，所求总数为 1。

(5)先排男生共有 P_{n+m}^{n+m} 种不同排法。男生之间的间隔总数为 n+m+1 个(把排列整排列的左、右均视作一个“间隔”，即看作“空男空男…空男空”)，那么女生共有 P_{n+m+1}^n 种排法。

故所求总数为 $P_{n+m}^{n+m}P_{n+m+1}^n$。

(6)先排红球，只有 1 种排法，白球共有 C_{n+m+1}^n 种插入法。故所求总数为 C_{n+m+1}^n 种。

注 (i)本例是排列中的一个数学模型，有许多应用，不要把它作为一个一般的例题看待。

(ii)解法中“插空”的思维方法也有许多应用。

例 8-4-3 用 0，1，2，3，4，5 可以组成多少个没有重复数字的：

(1)五位数；(2)六位偶数；(3)四位奇数；

(4)小于 50 万又不是 5 的倍数的六位数；

(5)能被 6 整除的四位数。

解 (1)由于 0 不能排首位，因此首位数有 C_5^1 种排法。剩下 5 个数字排 4 个位置有 P_5^4 种排法。故所求总数为 $C_5^1P_5^4=600$。

(2)分两类：①个位数为 0，其他数字有 P_5^5 种排法；②个位数为 2 或 4，有 C_2^1 种选法。由于 0 不在首位，0 有 C_4^1 种排法。其他 4 个数字有 P_4^4 种排法。因此这类排法总数为 $C_2^1C_4^1P_4^4$。

故所求总数为 $P_5^5+C_2^1C_4^1P_4^4=312$。

(3)分三步：①先放奇数在个位，有 C_3^1 种选法；②再放千位数字，由于 0 不能被选，剩下 4 个数字都可，有 C_4^1 种选法；③剩下 4 个数字排在其他两个位置有 P_4^2 种排法。

故所求总数为 $C_3^1C_4^1P_4^2=144$。

(4)分三步：①先排首位数，只能排 1，2，3，4 之一，共有 C_4^1 种排法；②末位数是从 1，2，3，4 剩下 3 个中选一个，有 C_3^1 种选法；③其他数字有 P_4^4 种排法。

故所求总数为 $C_4^1C_3^1P_4^4=288$。

(5)能被 6 整除的一定是偶数，且数字和能被 3 整除。

分三类：①0 在个位上。这时四个数字和能被 3 整除的组合有：{0，1，2，3}，{0，1，3，5}，{0，2，3，4}，{0，3，4，5}。由于 0 排在个位上，因此这一类总排法数为 $4P_3^3=24$ 个；

②2 在个位上。有如下几种组合：{0，2，3，4}，{0，2，3，4}，{1，2，4，5}。总排法数为 $2C_2^1P_2^2+P_3^3=14$；

③4 在个位上。有如下几种组合；{0，2，3，4}，{0，3，4，5}，{1，2，4，5}。总排法数也是 14 种。

故所求总数为 24+14+14=52。

注　①关于数字排列的问题通常有：排出具有某种附加条件的几位数；排出小于(或大于)多少的多位数，或者排出介于某两数之间的多位数等。

②具有附加条件的数字排列问题，其附加条件多数与首位或个位数字有关，因此通常是先考虑这两个位置的数字的选(排)方法，可以由位置选元素；也可由元素选位置，比如本例之(1)就是由元素选位置，本例之(4)就是由位置选元素。

例 8-4-4　(1)从 1，2，3，…，12 中任选 4 个数相加，其和为奇数的共有多少种？

(2)从 9 所中学选派 12 名教师组成代表团，每校至少 1 人参加，问有多少种不同选派方法？

(3)由 12 人组成文娱小组，其中 5 人只会唱歌，5 人只会跳舞，2 人又会唱歌又会跳舞。现从这 12 人中选派 4 人会唱歌 4 人会跳舞的去排练节目，共有多少种选法？

解　(1)分两类：①3 个奇数，1 个偶数，共有 $C_6^3C_6^1$ 种选法。②1 奇，3 偶，不同选法也是 $C_6^1C_6^3$ 种。

故所求总数为 $2C_6^1C_6^3$ 种。

(2)每校选 1 人已定，只剩 3 个名额尚须选派。分三类：①3 名全从同一个学校选，共有 C_9^1 种选法；②从两个学校选派 3 人，可以是甲 2 乙 1 或甲 1 乙 2，故不同选法总数为 $2C_9^2$；③从 3 个不同学校各选 1 人，有 C_9^3 种选法。

故所求总数为 $C_9^1+2C_9^2+C_9^3$。

(3)关键在于 2 个既会唱歌又会跳舞的人是否被选，并且选中后，他们表演什么节目(唱歌还是跳舞)。分 6 类：①这 2 人被选为唱歌人选，

其他 6 人选法有 $C_5^2C_5^4$ 种；②2 人被选为跳舞人选，也有 $C_5^2C_5^4$ 种选法；③2 人被选，其中一人唱歌一人跳舞，共有 $2C_5^3C_5^3$ 种选法；④2 人中只选 1 人唱歌，有 $C_2^1C_5^3C_5^4$ 种选法；⑤2 人中只选 1 人跳舞，也有 $C_2^1C_5^3C_5^4$ 种选法；③这 2 人都没选上，那么有 $C_5^4C_5^4$ 种选法。

故所求总数为 $2C_5^2C_5^4+2C_2^1C_5^3C_5^4+2C_5^3C_5^3+C_5^4C_5^4=525$。

例 8-4-5　由-1，0，1，2，3 这五个数中选三个不同数组成二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数。

(1)开口向上的抛物线有多少条？

(2)开口向下的抛物线有多少条？

(3)开口向上且不过原点的抛物线有多少条？

(4)与 x 轴正负轴各有一个交点的抛物线有多少条？

(5)与 x 输负半轴至少有一个交点的抛物线有多少条？

解　(1)依题意 $a>0$，因此 a 有 C_3^1 种选法；b，c 有 P_4^2 种选法。故所求抛物线共有 $C_3^1P_4^2$ 条。

(2)依题意 $a<0$，因此 a 只有一种选法，即 $a=-1$；b，c 有 P_4^2 种选法。故所求抛物线条数为 P_4^2。

(3)开口向上即 $a>0$，不过原点即 $c\neq 0$，因此 a 有 C_3^1 种选法；a 选定后，c 也有 C_3^1 种选法；最后选 b，有 C_3^1 种选法。故所求抛物线条数为 $C_3^1C_3^1C_3^1=27$。

(4)设抛物线与 x 轴的两个交点为 x_1，x_2。由于 x_1，x_2 异号，因此 $\frac{c}{a}=x_1x_2<0$。于是可分两类：①$a>0$，$c<0$。这时 $c=-1$，a 有 C_3^1 种选法；再选 b，有 C_3^1 种选法。共有 $C_3^1C_3^1=9$ 种选法(此时 $a>0$，$c<0$，所以判别式 $\triangle=b^2-4ac>0$)。②$a<0$，$c>0$。也有 9 种选法。

故所求抛物线的条数为 18。

(5)分三类：①与 x 轴正负向各有一个交点，其总数为 18 条；②过原点与 x 轴负半轴有一个交点，这时 $c=0$，$ab>0$。有 P_3^2 种选法；③与 x 轴负半轴有两个交点，这时必须满足

$$\begin{cases}\triangle\geq 0\\ \frac{b}{a}>\\ \frac{c}{a}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\triangle\geq 0\\ a，b，c\text{同号}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3\\ a，c\in\{1，2\}\end{cases}$$

这样的抛物线共有 P_2^2 条。

故所求总数为 18+6+2=26 条。

例 8-4-6　(1)5 个相同的球，放入 3 个不同房间中，每个房间放球个数不限，共有多少种不同放法？

(2)n 个相同的球，放入 m 个不同房间中，每个房间放球个数不限，共有多少种放法？

(3)不定方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=8$ 的非负整数解共有多少个？

解　(1)我们用图直观地表示第 1 房有 2 球，第 2 房有 1 球，第 3 房有 2 球；其余类推。把 5 个球与 2 个隔墙看成 7 个元素。其全排列的个数为 7！个。但 5 个球是相同的、两面墙也是相同的，它们各自的 5！及 2！排列分别只能算作 1 种(参考例 8-2-7)。

因此所求排法总数为 $\frac{7!}{5!2!}=C_{5+3-1}^{5}$。　　○○|○|○○

(2)类似可得 C_{n+m-1}^{n}。

(3)与(1)类比，设想 x_i 分别表示第 i 个房中球的个数。据(1)中的分析，可知所求不定方程的非负整数解有 $C_{8+5-1}^{8}=C_{12}^{8}=C_{12}^{4}$ 个。

例 8-4-7　某球队与另 10 个球队各比赛 1 场，共 10 场比赛，问五胜三负二平的一切可能情况为多少种。

解　作如下设想：“胜”表示“红球”，“平”表示“黄球”，“负”表示“白球”，于是原题转换成：5 个红球、2 个黄球、3 个白球排成一排，有多少种排法。

先把 10 个球看成不同的，共有 10！种排法。当黄球和白球的位置固定后，5 个红球有 P_5^5 种排法，但它们实质上是同一排列，故应将 10！除以 5！。对白球和黄球可作类似的分析。

故所求排法总数为 $\frac{10!}{5!3!2!}=2520$种。

注　一般，若有 r_1 个相同的第 1 种球，r_2 个相同的第 2 种球，…，r_s 个相同的第 s 种球，其中 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$，那么这 n 个球的不同排列总数

为 $\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_s!}$。

习题

8-4-1　(1)8 名学生排成一行，甲既不站在排头，又不站在排尾，共有总法总数为______。

(2)10 人站成一排，某 3 人必须站在一起，不同站法总数为______；

(3)n 个人站成一排，其中 m 个(m<n)人必须站在一起，不同站法总数为______；

(4)n 个人站成一排，其中 m 个(m<n)人必须站在一起，另外 n-m 个人也要站在一起，不同站法总数为______；

(5)10 名男生，5 名女生站在一排，使女生互不相邻。其不同站法总数为______。

8-4-2　(1)3 个相同的小红球，2 个不同的小白球排成一排，共有多少种不同排法？

(2)3 个相同的小红球，2 个相同的小白球，排成一排，共有多少种排法？

(3)n 个相同的小红球，m 个不同的小白球，排成一排，共有多少种不同排法？

(4)n 个相同的小红球，m 个相同的小白球，排成一排，共有多少种不同排法？

(5)把 n 个不同的小红球，m 个不同的小白球放入 k+l 个有编号的小

盒内，使其中 k 个是小红球，l 个是小白球($k\leq n$，$l\leq m$)。问有多少种放法？

8-4-3　(1)停车场有 10 个车位，今有 8 辆车需停放，要使两个空位连在一起，有多少种不同停放方法？

(2)有 10 本不同的数学书，9 本不同的外语书，8 本不同的语文书。如果不使同类书分开，共有多少种不同排列方法？

(3)书架的一格上原有 6 本书，现再放 3 本书上去，但要求保持原有书的相对顺序不变，共有多少种放法？

8-4-4　24 支足球队分成 6 个组进行预赛。采取单循环赛。每组取前 2 名，共 12 名抽签分成 3 个组进行复赛，也是单循环赛，各组取第 1 名。最后 3 个组第 1 名进行单循环赛决出冠军。共需进行多少场比赛？

8-4-5　在 3000 与 8000 之间，

(1)有多少个没有重复数字的四位数？

(2)有多少个没有重复数字的四位奇数？

(3)有多少个允许有重复数字的偶数？

8-4-6　某 10 台产品中，有 6 台一等品，4 台二等品。现一一进行测试，直至区分出所有二等品为止。若所有二等品恰好在第 6 次被全部发现，问这样的测试共有多少种可能？

8-4-7　在同一平面内，一组 19 条平行线与另一组 19 条平行线垂直，且相邻两条平行线间的距离都相等。

(1)能组成多少个位置不同的矩形？

(2)能组成多少个位置不同的正方形？

(3)能组成多少种面积大小不同的正方形？

8-4-8　(1)有 10 个不同的负数与 10 个不同的正数。从中任取若干个数相乘，其积为正数的取法共有多少种？

(2)有 m 个不同的负数与 n 个不同的正数，从中任取若干个相乘，其积为正数的取法共有多少种？

8-4-9　6 名男医生，4 名女医生。

(1)选 3 名男医生，2 名女医生，让这 5 名医生到 5 个不同地区去巡回医疗，共有多少种分派方法？

(2)把 10 名医生分成两组，每组 5 人且每组要有女医生，共有多少种不同分法？若将这两组医生分派到两地去，又有多少种分派方案？

8-4-10　高三某班星期一要上 7 节课，上午 4 节，下午 3 节；其中 2 节语文，2 节数学，2 节物理，1 节体育。同科目两节必须连排，且不能跨上下午，则不同排法总数是　[　]。

A．$P_7^7-P_4^1P_3^3$　　B．$P_3^2P_2^2$

C．$P_3^2C_3^1$　　D．$P_4^4-C_2^1$

8-4-11　在 x 轴正半轴 x^+上取 10 个点，再在 y 轴正半轴 y^+上取 5 个点。将 x^+上所取各点与 y^+上所取各点相连得 50 条线段，这 50 条线段在第 1 象限的交点最多为　[　].

A．450　　B．500

C．1250　　D．250

8-4-12　把 4 名男生和 4 名女生分成 4 个小组到 4 列火车上去参加义务劳动，

(1)每组必须 1 男 1 女，有几种不同分法？

(2)男生与女生分别分组，每组 2 人，有多少种分法？

(3)每组 2 人(男女不限)，又有多少种分法？

8-4-13　学生有 10 个节目，只演出 7 个；教师有 5 个节目，只演出 3 个。教师节目不排头，也不排尾，也不连排。问共有多少种安排顺序法。

8-4-14　数 1447，1005，1231 有两个共同点：(i)每个数的首位数为 1 的四位数，(ii)每个数中恰有两个数字相同。问具有上述性质的数共有多少个？

8-4-15　在 xy 平面上顶点的坐标(x，y)满足 $1\le x\le 4$，$1\le y\le 4$，且 x，y 是整数的三角形有多少个？

8-4-16　(1)将 12 本书分给 A，B，C，D 四名学生，使得每人得 3 本，有多少种分法？

(2)将 12 本书分成四堆，每堆 3 本，有多少种分法？

(3)将 12 本书分给 A，B，C，D 四名学生，使得有两个学生各得 4 本，两个学生各得 2 本。问有多少种分法。

(4)将 12 本书分成四堆，有两堆各 4 本，有两堆各 2 本。问有多少种分法。

(5)将 12 本书分给 A，B，C，D 四个学生，使得 1 人得 5 本，1 人得 4 本，1 人得 2 本，1 人得 1 本。问有多少种分法。

(6)将 12 本书分成四堆，使得 1 堆 5 本，1 堆 4 本，1 堆 2 本，1 堆 1 本，问有多少种分法？

(五)二项式定理

提要

(1)二项式定理：

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n(n\in N)$$

其中 C_n^r(r=0，1…，n)是二项式系数，$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$ 是二项式展开式的第 r+1 项。

(2)二项式展开式系数满足：

①$C_n^k=C_n^{n-k}$；

②当 n=2m 时，

$C_n^0<C_n^1<\cdots C_n^{m-1}<C_n^m$，$C_n^m>C_n^{m+1}>\cdots>C_n^n$

当 n=2m+1 时

$C_n^0<C_n^1<\cdots C_n^{m-1}<C_n^m=C_n^{m+1}$，$C_n^m=C_n^{m+1}>C_n^{m+2}>\cdots>C_n^n$

③$C_n^0+C_n^1+\cdots C_n^n=2^n$，$C_n^0-C_n^1+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$

特别 $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots$

(3)本知识点主要题型是：求展开式的某一项，求某一项的系数，求二项式系数中最大值，证明有关组合数的等式或不等式等。

例题

例 8-5-1　(1+x)^n 的展开式中，二项式系数最大的项所在的项数是 [　]

A．$\frac{n}{2}+1$

B．$\frac{n}{2}+1$(当n为偶数)或$\frac{n+1}{2}$和$\frac{n+1}{2}+1$(当n为奇数)

C．$\frac{n}{2}$(当n为偶数)或$\frac{n-1}{2}$和$\frac{n+1}{2}$(当n为奇数)

D．$\frac{n+1}{2}$

解　B

例 8-5-2　在$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$展开式中，

(1)含 x^2 的项的系数为______；

(2)有理项的项数为______。

解　(1) 405　$T_{r+1}=C_{10}^r(\sqrt[3]{x})^{10-r}\left(\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=C_{10}^r(-3)^rx^{\frac{10-2r}{3}}$　(i)

令$\frac{10-2r}{3}=2$得$r=2$，所求系数为$C_{10}^2(-3)^2=405$。

(2)3　由(i)式及题意，得

$$\begin{cases}\dfrac{10-2r}{3}\in Z \\ 0\leq r\leq 10 \\ r\in Z\end{cases}\Leftrightarrow r=2，5，8$$

从而知第 3 项，第 6 项与第 9 项为有理项。

注　解这类问题，一般都先写出通项，再按题意列方程组(不等式组)求解。

例8-5-3 设$\left(2\sqrt{x}-\dfrac{3}{x}\right)^n$展开式中第2项的系数与第4项的系数的比为4：45，试求 x^2 项的系数。

解 $T_2=C_n^1(2\sqrt{x})^{n-1}\left(\dfrac{-3}{x}\right)=C_n^1(-3)\cdot 2^{n-1}x^{\frac{n-3}{2}}$

$T_4=C_n^3(2\sqrt{x})^{n-3}\left(\dfrac{-3}{x}\right)^3=C_n^3(-3)^3 2^{n-3}x^{\frac{n-9}{2}}$

由题意得

$$\frac{C_n^1(-3)2^{n-1}}{C_n^3(-3)^3 2^{n-3}}=\frac{4}{45}\Leftrightarrow\frac{8}{3(n-1)(n-2)}=\frac{4}{45}\Leftrightarrow n^2-3n-28=0$$

$\Leftrightarrow n=-4$(舍去)，$n=7$

当 n=7 时，

$$T_{r+1}=C_7^r(2\sqrt{x})^{7-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r=C_7^r(-3)^r 2^{7-r}x^{\frac{7-3r}{2}}$$

令$\dfrac{7-3r}{2}=2$，得$r=1$。

因此含x^2的系数为$C_7^1(-3)\cdot 2^6=-1344$。

例 8-5-4　求$(1+2x-3x^2)^6$展开式里 x^5 的系数为______。

解　-168　$(1+2x-3x^2)^6=[(1+3x)(1-x)]^6=(1+3x)^6(1-x)^6$ 设$(1+3x)^6$的通项公式为

$T_{k+1}=C_6^k(3x)^k$　$(k=0，1，2，\cdots，6)$

又$(1-x)^6$的通项公式为

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\in\alpha，A\in\gamma\\ \alpha\cap\gamma=c\end{array}\right\}\Rightarrow A\in c\\ \left.\begin{array}{l}A\in\beta，A\in\gamma\\ \beta\cap\gamma=b\end{array}\right\}\Rightarrow A\in b\end{array}\right\}\Rightarrow b\cap c=A$$

那么$(1+2x-3x^2)^6$的通项公式为

$C_6^k C_6^r 3^k(-1)^r x^{k+r}$

令 k+r=5，则

$$\begin{cases}k=5\\r=0\end{cases}或\begin{cases}k=4\\r=1\end{cases}或\begin{cases}k=3\\r=2\end{cases}或\begin{cases}k=2\\r=3\end{cases}或\begin{cases}k=1\\r=4\end{cases}或\begin{cases}k=0\\r=5\end{cases}$$

所求 x^5 的系数为

$$C_6^5C_6^0 3^5-C_6^4C_6^1 3^4+C_6^3C_6^2 3^3-C_6^2C_6^3 3^2+C_6^1C_6^4\cdot 3-C_6^0C_6^5=-168$$

例 8-5-5　求 $(3-2x)^9$ 展开式中系数绝对值最大的项。

解 $(3-2x)^9=3^9\left(1-\frac{2}{3}x\right)^9$

设 $\left(1-\frac{2}{3}x\right)^9$ 展开式的通项为

$$T_{r+1}=C_9^r\left(-\frac{2}{3}\right)^r x^r$$

其系数为

$$a_{r+1}=C_9^r\left(-\frac{2}{3}\right)^r \qquad (r=0，1，2，\cdots，9)$$

设 a_k 绝对值最大项为第 k+1 项，那么

$$1\leq\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{C_9^k\left(\frac{2}{3}\right)^k}{C_9^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}=\frac{20-2k}{3k}\Leftrightarrow k\leq 4$$

且 $$1\leq\frac{|a_{k+1}|}{|a_{k+2}|}=\frac{3(k+1)}{2(9-k)}\Leftrightarrow k\geq 3$$

因此 k=3 或 k=4。实际上 a_4=-489888，a_5=489888 即

$|a_4|=|a_5|=\max\{|a_1|，\cdots，|a_{10}|\}$

注　求系数最大项的方法是先写出通项公式，再设最大项为第 k 项，由它大于等于左右两个系数，得出两个不等式的不等式组，解此不等式求出 k 的值。

例 8-5-6　在 55 和 555 之间插入 n 个等差内项，其中最末一个等差内项等于 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{15}$ 展开式中 x^3 的系数。求这 n 个内项及 $i^n(1-i)^n$ 的值。

解 $T_{r+1}=C_{15}^r(\sqrt{x})^{15-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_{15}^r x^{\frac{15-3r}{2}}$

令 $\frac{15-3r}{2}=3$ 得 $r=3$，所以最末一个等差内项为 $C_{15}^3=455$。

设公差为 d，则 d=555-455=100。

因此在 55 与 555 之间应插 4 个等差内项，它们是 155，255，355，455。

由于 n=4，所以 $i^n(1-i)^n=-4$。

例 8-5-7　已知 $(2x^{\lg x+\lg 2}+1)^n$ 展开式中最后三项的系数的和是方程 $\lg(y^2-72y-72)=0$ 的正数解，它的中间项是 $10^{4+2\lg\sqrt{2}}$。求 x 的值。

解 $10^{4+2\lg\sqrt{2}}=20000$

$$\lg(y^2-72y-72)=0\Leftrightarrow y^2-72y-73=0\Leftrightarrow y=-1(\text{舍去}),y=73$$

由题设知

$$73=C_n^n+2C_n^{n-1}+4C_n^{n-2}=2n^2+1\Leftrightarrow n=6$$

于是已知二项式的幂变为$(2x^{\lg x+\lg 2}+1)^6$，再由已知条件知，其展开式的中间项为第 4 项，

$$T_4=C_6^3 2^3\cdot x^{3(\lg x+\lg 2)}=20000$$

$$\Leftrightarrow 8x^{3(\lg x+\lg 2)}=10^3\Leftrightarrow x^{\lg x+\lg 2}=5$$

解这个方程得

$$x=\frac{1}{10}\text{或}x=5$$

经检验知，它们都符合题意。

例 8-5-8　证明：

$$(1)\sum_{k=0}^{n}2^k C_n^k=3^n$$

$$(2)2C_{2n}^0+C_{2n}^1+2C_{2n}^2+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}+2C_{2n}^{2n}=3\cdot 2^{2n-1}$$

$$(3)2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3(n\in N)$$

$$(4)C_n^1 1^2+C_n^2 2^2+\cdots C_n^n n^2=n(n+1)2^{n-2}$$

解 $(1)3^n=(1+2)^n=C_n^0 2^0+C_n^1 2+C_n^2 2^2+\cdots+C_n^n 2^n=\sum_{k=0}^{n}2^k C_n^k$

(2)原式左端$=(C_{2n}^0+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^{2n})+(C_{2n}^0+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n})$

$=2^{2n}+2^{2n-1}=2^{2n-1}(2+1)=3\cdot 2^{2n-1}$

$$(3)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}\qquad\text{(i)}$$

由(i)知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$$

另一方面，由(*)得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n^{n-1}}$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

$$(4)C_n^k\cdot k^2=C_n^k[k(k-1)+k]=k(k-1)C_n^k+kC_n^k$$

$$=\frac{k(k-1)\cdot n!}{k!(n-k)!}+k\frac{n!}{k!(n-k)!}=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}(k\leq 2)$$

原式左端 $=C_n^1+[n(n-1)C_{n-2}^0+nC_{n-1}^1]$

$+[n(n-1)C_{n-2}^1+nC_{n-1}^2]+\cdots+[n(n-1)C_{n-2}^{n-2}+nC_{n-1}^{n-1}]$

$=n+n(n-1)(C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+\cdots+C_{n-2}^{n-2})+n(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1})$

$=n+n(n-1)2^{n-2}+n(2^{n-1}-1)=n(n+1)2^{n-2}$

习题

8-5-1 (1)$(3-x)^7$的展开式中，x^5的系数是______；

(2)$\left(|x|+\frac{1}{|x|}-2\right)^3$展开式中的常数项是______；

(3)$(1+x+x^2)(1-x)^5$展开式中，x^5的系数是______；

(4)$(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5$的展开式中,$x^2$项的系数是______。

8-5-2 设$f(x)=(2x+1)^5-5(2x+1)^4+10(2x+1)^3-10(2x+1)^2+5(2x+1)-1$，则$f(x)=$______ [ ]

A．$(2x+2)^5$　　B．$32x^5$

C．$(2x-1)^5$　　D．$2x^5$

8-5-3 设$M=\{a_1，a_2，\cdots，a_{10}\}$，M的全部子集的个数为a，由M的一切3个元素的子集的个数为b。那么$(1+x)^a(2-x)^b$的常数项为______。

8-5-4 $(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$由展开所得的x的多项式中，系数为有理数的共有 [ ]

A．18项　　B．17项

C．16项　　D．15项

8-5-5 设$\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$展开式的第7项与倒数第7项的比为1：6，求展开式的第7项。

8-5-6 在$\left(\frac{1}{x}+2\sqrt{x}\right)^n$的展开式中，

(1)如果第13项是常数，则n=______；

(2)如果各偶数项的二项式系数之和为512，则n=______。

8-5-7 证明：

$\cos n\theta=(2\cos\theta)^n-C_n^1(2\cos n\theta)^{n-1}\cos n\theta+\cdots+(-1)^rC_n^r(2\cos\theta)^{n-r}\cos r\theta+\cdots+(-1)^n\cos n\theta$

8-5-8　在$(2x-3y)^{28}$按 y 的升幂排列的展开式中，系数之绝对值最大项是第几项？

8-5-9　已知$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$展开式中前3项系数成等差数列，求展开式中含 x 的项。

8-5-10　设 $f(x)=(1-2x)^5(1+x+x^2)^4$

(1)求展开式的各项系数和；

(2)求展开式中含 x 的奇次项的各项系数和。

8-5-11　已知$f(x)=(\sqrt[3]{x^2}+3x^2)^n$展开式中各项系数和比各项的二项式系数和大 992。

(1)求展开式中二项式系数的最大项；(2)求展开式中系数的最大项。

8-5-12　求$(5x^2+3x-2)(x-4)^n$展开式中 x^s 项的系数。

8-5-13　求$(1+\sqrt{2})^{50}$展开式中的最大项。

8-5-14　求证 7^n-6n-1 能被 36 整除。

8-5-15　求$z=C_{4n}^1+2C_{4n}^2i+3C_{4n}^3i^2+\cdots+4nC_{4n}^{4n}i^{4n-1}$的模及辐角主值。

8-5-16　设 a 为非 0 实数，且$(ax+1)^9$与$(x+2a)^8$展开式中 x^3 项的系数相等，求下列各式的值。

$(1)1+a+a^2+\cdots$　$(2)|a+\sqrt{63}ai|$

8-5-17　在杨辉三角形中，每一数值是它左上角和右上角两个数值之和，这三角形开头几行如下：

第0行	1
第1行	1　1
第2行	1　2　1
第3行	1　3　3　1
第4行	1　4　6　4　1
第5行	1　5　10　10　5　1
第6行	1　6　15　20　15　6　1
…	…　…　…　…

在杨辉三角形中的哪一行会出现三个相邻的数，它们的比是 3：4：5？

8-5-18　设 a_1，a_2，a_3，a_4 为$(1+x)^n$展开式中四个连续的项的系数，求证：$\frac{a_1}{a_1+a_2}$，$\frac{a_2}{a_2+a_3}$，$\frac{a_3}{a_3+a_4}$是等差数列。

8-5-19　若$(1+i)^{4m+2}$展开式中奇数项的和与$(a-b)^m$展开式中含 b 的奇次项的系数和之差，恰等于$(a+b)^{10}$展开式的二项式系数和。求证：$2^{6n-3}+3^{2n-1}$能被 m 整除，其中 $n\in N$。

第九部分　直线和平面

(一)惟一性命题

提要

结论是“有且只有一个……”的命题叫做惟一性命题。它包括两个方面，一是存在性，二是惟一性。所谓存在性，是肯定有适合所要求的对象存在，但不一定只有一个；所谓惟一性，指的是如果有这样的对象存在，则只能有一个。

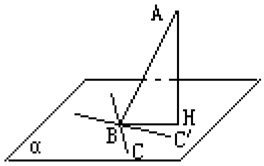
证明惟一性命题，一般先证存在性，再证惟一性。

证明存在性，一般用构造法，即由已知条件(或其部分)构造出图形，并证明所作图形符合题设条件；也可由已知的存在性公理及有关定理直接推证。

证明惟一性，就是证明凡符合题设条件的图形即是所作图形，一般采用反证法或同一法；也可由已知的惟一性公理及有关定理直接推证。

例题

例 9-1-1　已知：直线 AB 是平面α的斜线，AB∩α=B(如下图)。求证：在α内过 B 点而垂直于 AB 的直线有且只有一条。



解　存在性：过点 A 作 AH⊥α，垂足为 H。连结 BH，在α内过 B 作 BC⊥BH。由三垂线定理知，BC⊥AB。所以，在α内过 B 点有一条直线垂直于直线 AB。

惟一性：设 BC′是在α内而垂直于 AB 的直线，由三垂线定理的逆定理知，BC′⊥BH。而 BC⊥BH，且它们同在平面α内，所以 BC′与 BC 重合。故在α内过 B 点而垂直于 AB 的直线只有一条。

由以上可知原命题成立。

注　由本题的结论不难得出：过平面上一点垂直于该平面的直线有且只有一条。

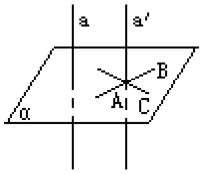
例 9-1-2　求证：过一点 A 而垂直于已知直线 a 的平面有且只有一个。

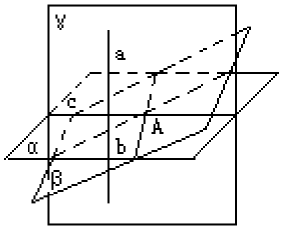
分析　要考虑点 A 与直线 a 的位置关系，应分点 A 在直线 a 上与点 A 在直线 a 外两种情况论证。

解　存在性：当A∉a时，过A作a′∥a，AB⊥a′，AC⊥a′，AB 与 AC 不重合(如下左图)。设 AB 与 AC 确定的平面为α。由直线和平面垂直的判定定理知，a′⊥α。又 a′∥a，所以 a⊥α。即过点 A 有平面α⊥a。

当 A∈a 时，可直接过点 A 作 AB′⊥a，AC′⊥a，从而 AB′与 AC′确定的平面垂直于 a。

所以过点 A 而垂直于 a 的平面存在。





惟一性：假设过点 A 而垂直于 a 的平面，除平面α外还有平面β(如上右图)。过点 A 和直线 a 作平面γ，设β∩γ=b，α∩γ=c。

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\in\alpha,\ A\in\gamma\\ \alpha\cap\gamma=c\end{array}\right\}\Rightarrow A\in c\\ \left.\begin{array}{l}A\in\beta,\ A\in\gamma\\ \beta\cap\gamma=b\end{array}\right\}\Rightarrow A\in b\end{array}\right\}\Rightarrow b\cap c=A$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\ c\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp c\\ \left.\begin{array}{l}a\perp\beta\\ b\subset\beta\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp b\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ 在同一平面内有两条相交直线都与已知直线垂直

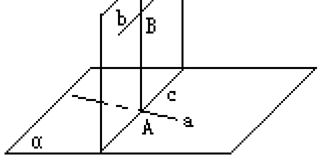
这显然不可能，从而假设不成立，说明过点 A 而与直线 a 垂直的平面只有一个。

由以上可知，原命题成立。

注　本题证明惟一性时采用反证法。请注意反证法与同一法的区别。

例 9-1-3　a，b 是异面直线，证明：a，b 的公垂线存在且惟一。

解　存在性：过 a 作平面α∥b，过 b 作平面β⊥α。设β∩α=c，则 c 与 a 必相交(否则，与 a，b 是异面直线矛盾)。设 a∩c=A，在β内过A作AB⊥b，垂足为B(如下图)。由b∥α，b⊂β，α∩β=c，根据直线和平面平行的性质定理，得 b∥c。又 AB⊥b，得 AB⊥c。由α⊥β，α∩β=c，AB⊥c，根据两个平面垂直的性质定理，得 AB⊥α，于是 AB⊥a。即直线 AB 是异面直线 a，b 的公垂线。



惟一性：假设公垂线不惟一，除直线 AB 外，A′B′也是 a，b 的公垂线，A′∈a，B′∈b。由 A′B′⊥b，b∥c，得 A′B′⊥c；又 A′B′⊥a，根据直线和平面垂直的判定定理，得 A′B′⊥α。由存在性的证明中知 AB⊥α，于是 AB∥A′B′，故 B，B′，A′，A 四点共面。这与 a 与 b 异面矛盾，从而假设不成立，说明公垂线惟一。

由前述可知，命题成立。

习题

9-1-1　求证：经过两条平行直线，有且只有一个平面。

9-1-2　求证：过异面直线公垂线段的中点，且与这两条异面直线都平行的平面可以作且只可以作一个。

9-1-3　求证：过一点 A 有且只有一条直线与平面 α 垂直。

9-1-4　已知直线 a∥平面 α。求证：过 a 而与 α 平行的平面有且只有一个。

9-1-5　经过平面 α 外一点 P，有且只有一个平面与已知平面平行。

9-1-6　经过两条互相垂直的异面直线中的一条而和另一条垂直的平面，有且只有一个。

9-1-7　经过平面的斜线且和该平面垂直的平面，有且只有一个。

(二)共点、共线与共面

提要

(1)共点指的是线共点与面共点。所谓线共点，就是指三条或三条以上的直线相交于同一点；所谓面共点，是指三个或三个以上平面都过同一点。

证明线共点问题的基本思路是：先证其中两条直线交于一点，再证其余直线通过此点，或证这点在其余直线上。证明面共点其法类似。

(2)共线是指点共线与面共线。所谓点共线，就是指三个或三个以上的点在一条直线上；所谓面共线，就是指三个或三个以上平面相交于同一条直线。

证明点共线通常采用证诸点都在两个平面的交线上，或证其余点在某两点的连线上(此时也可采用同一法)。证面共线一般先证其中两个平面交于一条直线，再证其余平面经过这条直线。

(3)共面是指点共面或线共面，即指几个点或几条直线在同一个平面内。

证明共面问题一般根据确定平面的公理及其推论和线在面内公理。可用直接证法，也可用间接证法。

例题

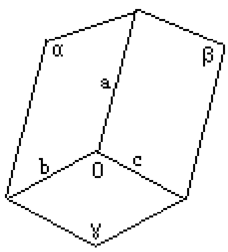
例 9-2-1　求证：不在同一平面的两两相交的三直线必共点。

已知：直线 a，b，c 两两相交，且不共面。

求证：a，b，c 交于一点。

分析　由已知条件易知 a，b，c 可确定三个平面，且它们是这三个平面两两相交的交线，只须证明其中两交线的交点在第三条交线上即可。

解　a，b，c 两两相交，设 a，b 确定的平面为 α，b，c 确定的平面为 γ，a，c 确定的平面为 β(如右图)。设 a∩b=O。

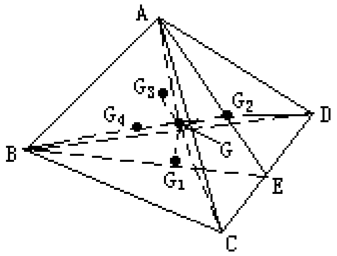


$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}a\cap b=O\Rightarrow O\in a\\ a\subset \boldsymbol{\beta}\end{array}\right\}\Rightarrow O\in \boldsymbol{\beta}\\ \left.\begin{array}{r}a\cap b=O\Rightarrow O\in b\\ b\subset \boldsymbol{\gamma}\end{array}\right\}\Rightarrow O\in\gamma\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\Rightarrow O\in\boldsymbol{\beta}\cap\boldsymbol{\gamma}\\ \boldsymbol{\beta}\cap\boldsymbol{\gamma}=c\end{array}\right\}\Rightarrow O\in c\\ a\cap b=O\end{array}\right\}\Rightarrow a，b，c\text{交于一点}$$

例 9-2-2　在四面体 ABCD 中，G_1，G_2，G_3，G_4 分别是△BCD，△ACD，△ABD，△ABC 的重心(如下右图)。求证：AG_1，BG_2，CG_3，DG_4 四条直线

交于一点。



分析　先由 AG_1，BG_2 交于一点 G，再证 CG_3，DG_4 通过点 G。

解　设 E 是 CD 的中点，连结 AG_2，G_2E，BG_1，G_1E，G_1G_2。由 G_1，G_2 分别是△BCD，△ACD 的重心，知 B，G_1，E 共线，A，G_2，E 共线。

由 $\frac{AG_2}{G_2E}=\frac{BG_1}{G_1E}=\frac{2}{1}$，得 $G_1G_2 /\!/ AB$，于是 AG_1，BG_2 相交，设交点为 G。则有

$$\frac{GG_1}{AG}=\frac{G_1G_2}{AB}=\frac{EG_2}{AE}=\frac{1}{3} \qquad \text{(i)}$$

同理，CG_3 与 AG_1 也相交，设交点为 G′，则

$$\frac{G'G_1}{AG'}=\frac{1}{3} \qquad \text{(ii)}$$

DG_4 与 AG_1 也相交，设交点为 G″，则

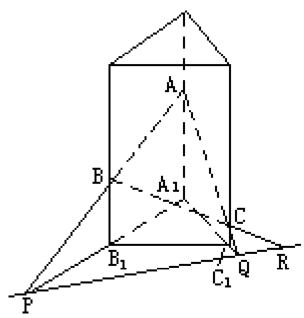
$$\frac{G''G_1}{AG''}=\frac{1}{3} \qquad \text{(iii)}$$

由(i)，(ii)，(iii)知 G，G′，G″重合。故 AG_1，BG_2，CG_3，DG_4 相交于一点。

注　(i)本题是利用交点位置的特殊性证明四线共点。

(ii)将空间问题化归到平面后，应灵活应用平面几何的知识与方法。

例 9-2-3　已知不平行于棱柱底面的平面截该棱柱所得的截面为 ABC，平面 ABC 分别交 A_1B_1，A_1C_1，B_1C_1 的延长线于 P，Q，R(如右图)。求证：P，Q，R 共线。



分析　要证 P，Q，R 共线，只须证明 P，Q，R 都在平面 ABC 与平面 $A_1B_1C_1$ 的交线上。

解　因为平面 ABC 与平面 $A_1B_1C_1$ 不平行，所以它们相交，设交线为 l。

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}P\in A_1B_1\\ A_1B_1\subset \text{平面}A_1B_1C_1\end{array}\right\}\Rightarrow P\in\text{平面}A_1B_1C_1\\ P\in\text{平面}ABC\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow P\in\text{平面}A_1B_1C_1\cap\text{平面}ABC\Rightarrow P\in l$$

同理，$Q\in l$，$R\in l$。

所以 P，Q，R 三点共线。

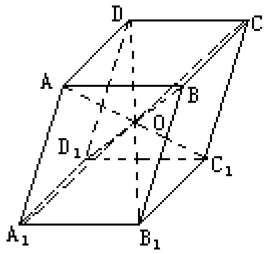
例 9-2-4　已知 AC_1，A_1C，B_1D，BD_1 是平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线。

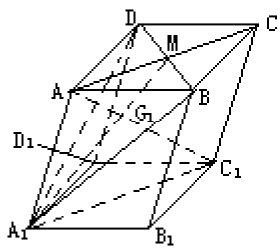
(1)求证：AC_1，A_1C，B_1D，BD_1 四线共点；

(2)若 G 是$\triangle A_1BD$ 的重心，求证：A，G，C_1 三点共线。

分析　因为 AC_1，A_1C 是▱AA_1C_1C 的对角线，所以 AC_1，A_1C 互相平分于 O,要证(1)只须证 B_1D,BD_1 过 O 点即可；要证(2)可先证 AC_1 与$\triangle A_1BD$ 所在平面的交点 G_1 在$\triangle A_1BD$ 的各中线上，再证 G_1 与 G 重合。

解　(1)如下左图，因为 AA_1C_1C 为平行四边形，所以它的对角线 AC_1 与 A_1C 相交且互相平分，设交点为 O。同理，BD_1 与 AC_1 相交且互相平分于 O，B_1D 与 AC_1 相交且互相平分于 O。故 AC_1，A_1C，B_1D，BD_1 四线共点。





(2)设 $AC\cap BD=M$，AC_1 与截面 A_1BD 的交点为 G_1(如上右图)。

$$\left.\begin{array}{l}G_1\in AC_1\subset\text{平面}AA_1C_1C\\ G_1\in\text{平面}A_1BD\end{array}\right\}G_1\in A_1M$$

$$\Rightarrow A_1\text{，}G_1\text{，}M\text{三点共线}$$

在对角面 AA_1C_1C 中，

$$AM /\!/ A_1C_1\Rightarrow\frac{MG_1}{G_1A_1}=\frac{AM}{A_1C_1}=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow MG_1=\frac{1}{2}G_1A_1\\ A_1M\text{为}\triangle A_1BD\text{的中线}\end{array}\right\}\Rightarrow G_1\text{是}\triangle A_1BD\text{的重心}\\ G\text{是}\triangle A_1BD\text{的重心}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow G_1\text{与}G\text{重合}\\ A\text{，}G_1\text{，}C_1\text{三点共线}\end{array}\right\}\Rightarrow A\text{，}G\text{，}C_1\text{三点共线}$$

注　证明 A，G，C1 三点共线应用的是同一法。

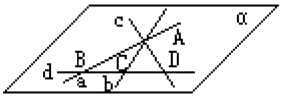
例 9-2-5　求证两两相交且不共点的四条直线共面。

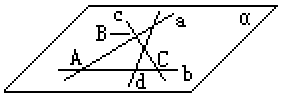
已知：四条直线 a，b，c，d 两两相交，且不过同一点。

求证：a，b，c，d 共面。

分析　因为四条直线两两相交且不共点，所以四条直线的位置关系可分为有三条直线共点和没有三条直线共点两种情况，可分别予以论证。

解　(i)若 a，b，c，d 四条直线中有三条共点，不妨设 $a\cap b\cap c=A$，$a\cap d=B$，$b\cap d=C$，$c\cap d=D$，且相交直线 a，d 所确定的平面为α(如下左图)。





$$\left.\begin{array}{l}A\in a,\ a\subset \alpha \Rightarrow A\in \alpha\\ C\in d,\ d\subset \alpha \Rightarrow C\in \alpha\end{array}\right\}\Rightarrow AC\subset \alpha \Rightarrow b\subset \alpha$$

同理，$c\subset \alpha$。故a，b，c，d都在α内。

(ii)若 a，b，c，d 四条直线无三条直线共点，设 $a\cap b=A$，$a\cap c=B$，$b\cap c=C$，且相交直线 a，b 确定的平面为α(如上右图)。

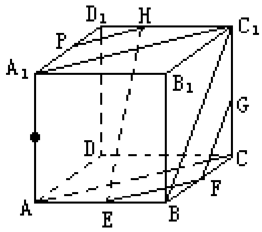
$$\left.\begin{array}{l}B\in a,\ a\subset \alpha \Rightarrow B\in \alpha\\ C\in b,\ b\subset \alpha \Rightarrow C\in \alpha\end{array}\right\}\Rightarrow BC\subset \alpha \Rightarrow c\subset \alpha$$

同理，$d\subset \alpha$，故a，b，c，d都在α内。

综合(i)(ii)知，a，b，c，d 四线共面。

注　证线共面问题时，当确定一个平面后，可用“线在面内公理”直接证明其它直线都在这个面内。

例 9-2-6　在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，H，P，Q 分别是 AB，BC，CC_1，C_1D_1，D_1A_1，A_1A 的中点(如下图)。求证：E，F，G，H，P，Q 六点共面。



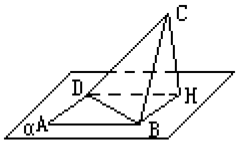
分析　易知 EF∥PH，于是 EF，PH 可确定一个平面α，只需证 G，Q 也在α内即可。

解　连结 AC，A_1C_1，EF，PH。

由 E，F 分别为 AB，BC 的中点，得 EF∥AC，同理 PH∥A_1C_1。而 AC∥A_1C_1，所以 EF∥PH。于是，E，F，P，H 四点共面。设所在平面为α。同理，由 FG∥BC_1∥EH，得 F，G，E，H 四点共面。设所在平面为β。因α，β有不在同一直线上的三个公共点 E，F，H，故α与β重合，于是 $G\in\alpha$。用同样的方法可证 $Q\in\alpha$。所以，E，F，G，H，P，Q 六点共面。

例 9-2-7　已知：A，B，C，D 是空间四点，且∠ABC=∠BCD=∠CDA=∠DAB=90°。求证：A，B，C，D 四点共面。

解　如右图，假设 A，B，C，D 不共面。记 A，B，D 三点确定的平面为α，$C\notin \alpha$。



作 $CH\perp\alpha$，垂足为 H。连结 BH，DH，DB。

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABC=90^\circ\Rightarrow CB\perp AB\\ CH\perp\alpha\Rightarrow CH\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}AB\perp\text{平面}BHC\\ BH\subset\text{平面}BHC\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AB\perp BH\Rightarrow\angle ABH=90^\circ$$

同理可得 $\angle ADH=90^\circ$。又已知 $\angle DAB=90^\circ$，所以 ABHD 是矩形，于是 $\angle BHD=90^\circ$。

在 Rt△BHD 中，有 $BD^2=BH^2+DH^2$；在 Rt△BCD 中，有 $BD^2=BC^2+DC^2$。于是

$$BH^2+DH^2=BC^2+DC^2 \qquad (\text{i})$$

在 Rt△BHC 中，有 BH＜BC；在 Rt△DHC 中，有 DH＜DC。于是

$$BH^2+DH^2<BC^2+DC^2 \qquad (\text{ii})$$

由(i)，(ii)的矛盾知假设不成立。故 A，B，C，D 四点共面。

注　证共面问题，当确定一个平面后，证其它点或线在这个平面内时，若不易用“线在面内公理”，可考虑用反证法或同一法证明。

习题

9-2-1　三条直线两两相交，最多可确定的平面个数是　[　]

A．1　B．2　C．3　D．4

9-2-2　空间有 $n(n\geq 3)$ 条直线，其中任意两条都相交，那么 n 条直线一定是　[　]

A．共面

B．不共面但过同一点

C．过同一点或共面

D．既不过同一点又不共面

9-2-3　审查下列四个命题：

(i)直线 a 在平面 α 内又在平面 β 内，则 α，β 重合；

(ii)直线 a，b 相交，直线 b，c 相交，直线 c，a 相交，则 a，b，c 共面；

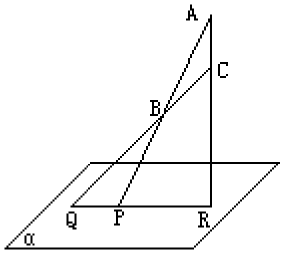
(iii)直线 a，b 共面，直线 b，c 共面，则直线 a，c 也共面；

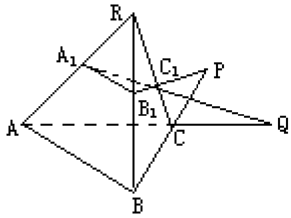
(iv)直线 a 不在平面 α 内，则直线 a 与平面 α 内任何一点都可惟一确定一个平面。

以上四个命题中错误命题的个数是　[　]

A．1　B．2　C．3　D．4

9-2-4　已知△ABC 在平面 α 外，它的三边所在直线分别交平面 α 于 P，Q，R(如下左图)。求证：P，Q，R 三点共线。





9-2-5　如上右图。$BC\cap B_1C_1=P$，$AC\cap A_1C_1=Q$，$AA_1\cap BB_1=R$。求证：CC_1 也经过 R 点。

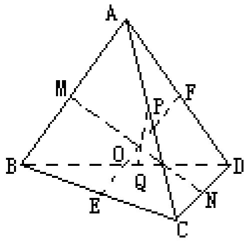
9-2-6　求证：和同一条直线都相交的所有平行线在同一平面内。

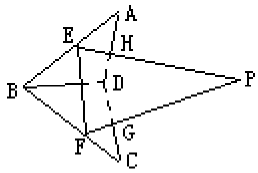
9-2-7　空间 6 个点，其中任三点不共线，任四点共面，求证：这 6 个点都在同一平面内。

9-2-8　求证：过已知直线 l 上一点 A 而与 l 垂直的所有直线都在一个平面内。

9-2-9　求证：两个端点分别在两条异面直线 a，b 上的各线段的中点都在同一平面内。

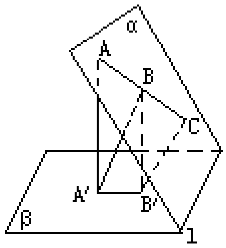
9-2-10　如下左图。在四面体 ABCD 中，M，N，P，Q，E，F 分别是棱 AB，CD，AC，BD，BC，AD 的中点，求证：MN，PQ，EF 必交于一点。

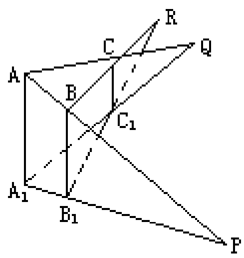




9-2-11　如上右图。在空间四边形 ABCD 中，E，F，G，H 分别在 AB，BC，CD，DA 上。若 EH 与 FG 的延长线交于点 P，求证：BD 的延长线也过 P 点。

9－2－12　设两平面α与β斜交于直线l，点$A\in\alpha$，$A\notin l$。作$AA'\perp\beta$于 A'，作 $A'B\perp\alpha$ 于 B，作 $BB'\perp\beta$ 于 B'，作 $B'C\perp\alpha$ 于 C(如下左图)。求证：A，B，C 三点在同一直线上。

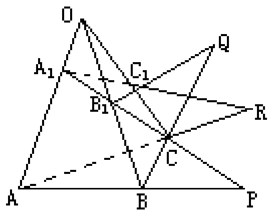




9-2-13　空间不共面的三线段 AA_1，BB_1，CC_1 两两平行且互不相等。求证：AB 与 A_1B_1，BC 与 B_1C_1，AC 与 A_1C_1 分别相交，且三交点在同一直线上(如上右图)。

9-2-14　如右图。$A_1B_1C_1$ 是四面体 OABC 的截面。若 $AB\cap A_1B_1=P$，BC

$\cap B_1C_1=Q$，$AC\cap A_1C_1=R$。求证：P，Q，R 三点共线。



9-2-15　在四面体 ABCD 中，AB 垂直底面 BCD；过棱 AB，AC，AD 分别作对面的垂直平面。求证：所作的三个平面相交于一条直线。

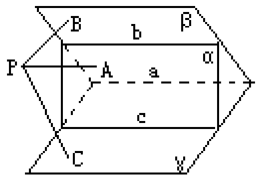
9-2-16　求证：四面体 ABCD 在顶点 A 的三个二面角的平分面相交于同一直线。

9-2-17　求证：平分四面体 ABCD 的六个二面角的各个平面交于一点。

9-2-18　从四面体 ABCD 各个面的外心 O_1，O_2，O_3，O_4 分别作它所在面的垂线 E_1O_1，E_2O_2，E_3O_3，E_4O_4。求证：这四条垂线交于一点。

9-2-19　由 O 引三条不共面的射线 OA，OB，OC，求证：∠AOB，∠BOC 的平分线与∠COA 的外角平分线共面。

9-2-20　如右图。三个平面α，β，γ相交于三条直线 a，b，c，且 a∥b∥c。自三平面外一点 P 引α，β，γ的三条垂线 PA，PB，PC，求证：PA，PB，PC 在同一平面内。



9-2-21　若空间六边形的三双对边互相平行且相等，求证：各边的中点在同一平面内。

(三)线面间的平行与垂直关系

1．线面间的平行关系

提要

(1)证明线线平行可有下列方法：(i)应用三线平行公理、线面平行的性质定理、面面平行的性质定理、线面垂直的性质定理进行直接推证；(ii)根据平行线的定义应用反证法予以证明；(iii)应用同一法进行论证。

(2)证明直线与平面平行可有下列方法：(i)应用线面平行的判定定理与面面平行的性质定理直接推证；(ii)利用反证法证明：假设直线与平面不平行，则直线与平面相交或直线在平面内，通过推导，设法得出矛盾。

(3)证明平面与平面平行可有下列方法：(i)应用面面平行的判定定理，把面面平行问题转化为证线面平行或线线平行的问题；(ii)应用“垂直于同一条直线的两个平面平行”，把面面平行问题转化为证线面的垂直问题。

例题

例 9-3-1　三个平面两两相交，有三条交线，求证：这三条交线交于一点或互相平行。

已知：$\alpha \cap \beta = c$，$\beta \cap \gamma = a$，$\gamma \cap \alpha = b$。

求证：a，b，c 相交于一点，或 $a \parallel b \parallel c$。

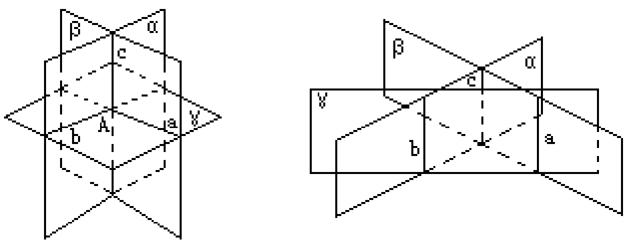
解　$\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = c \\ \gamma \cap \alpha = b\end{array}\right\} \Rightarrow c \subset \alpha$ 且 $b \subset \alpha \Rightarrow b$，$c$ 共面 α

$\Rightarrow b$，c 相交于一点或 $b \parallel c$

(i)若 b，c 相交于一点：设 $b \cap c = A$(如下左图)。

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l} b \cap c = A \\ \gamma \cap \alpha = b \end{array}\right\} \Rightarrow A \in b \\ b \subset \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A \in \gamma$$

同理，$A \in \beta$，所以 A 在 β 与 γ 的交线 a 上。故 a，b，c 交于一点 A。



(ii)若 $b \parallel c$(如上右图)：因 $b \parallel c$，$b \subset \gamma$ 且 $c \not\subset \gamma$ 得 $c \parallel \gamma$；又 $c \subset \beta$，$\beta \cap \gamma = a$，得 $c \parallel a$。从而 $a \parallel b \parallel c$。

注　研究三条直线 a，b，c 的位置关系，可先考虑其中两条 b 与 c 的位置关系。而空间两条直线 b，c 的位置关系有三种：平行，相交或异面；当 b，c 在同一平面时，就只有平行，相交两种位置关系。因此，本题中先证 b，c 共面是很重要的。当我们考虑的几何图形“进入”同一平面后，平面几何的内容和方法就可“大显身手”了。

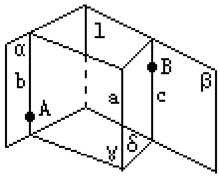
例 9-3-2　如果一条直线与两个相交平面都平行，求证：这条直线与这两个相交平面的交线平行。

已知：$\alpha\cap\beta=l$，$a/\!/\alpha$，$a/\!/\beta$。

求证：$a/\!/l$。

分析　由 $a/\!/\alpha$ 与 $a/\!/\beta$，可过 a 作两个平面分别与 α，β 相交，于是可用线面平行性质定理证明。

解 如右图，在 α 内取一点 A，且 $A\notin l$。过 a，A 作平面 γ，设 $\gamma\cap\alpha=b$；在 β 内取一点 B，且 $B\notin l$，过 a，B 作平面 δ，设 $\delta\cap\beta=c$。



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a/\!/\alpha,\ a\subset\gamma\\ \gamma\cap\alpha=b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/b\\ \left.\begin{array}{l}a/\!/\beta,\ a\subset\delta\\ \delta\cap\beta=c\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/c\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow b/\!/c\\ \quad c\subset\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}b/\!/\beta,\ b\subset\alpha\\ \alpha\cap\beta=l\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow b/\!/l\\ \quad a/\!/b\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/l$$

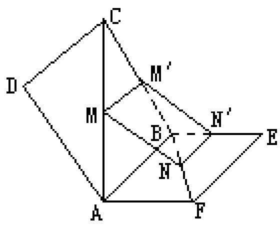
注　本题还可用下列方法证明：

(i)因 $a/\!/\alpha$，所以过 a 有且只有一个平面 γ 与 α 平行。由 β 与 α 相交可得 β 与 γ 也相交，从而可用面面平行的性质定理去证；

(ii)作一平面 $\gamma\perp l$，利用线面垂直定理证明 $a\perp\gamma$，然后根据线面垂直的性质定理得出结论；

(iii)用同一法证明：设 $A\in l$，过 a，A 作平面 γ，设 $\alpha\cap\gamma=l'$，$\beta\cap\gamma=l''$，证 l'，l'' 重合于 l。

例 9-3-3　如右图。ABCD 与 ABEF 是两个全等的正方形，点 M 在 AC 上，点 N 在 BF 上，且 AM=FN。求证：MN∥平面 BCE。



分析　欲证 MN∥平面 BCE，只要在平面 BCE 中，找出一条直线与 MN 平行即可。

解　在平面 ABCD 内，作 $MM'\perp BC$ 于 M'；在 ABEF 内，作 $NN'\perp BE$ 于 N'。则有 $MM'/\!/AB/\!/NN'$。

在 Rt△$MM'C$ 和 Rt△$NN'B$ 中，

$$\left.\begin{array}{r} AC = BF，AM = FN \Rightarrow MC = NB \\ \angle MCM' = \angle FBN' = 45° \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow Rt\triangle MM'C \cong Rt\triangle NN'B \Rightarrow MM' = NN'$

于是，四边形 MM′N′N 为平行四边形，故 MN∥M′N′，而 $M'N' \subset$ 平面BCE，$MN \not\subset$ 平面BCE，据直线与平面平行判定定理，有 MN∥平面 BCE。

注　本题还有下列证法：

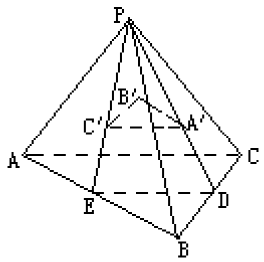
(i)过M作MP∥CB，交AB于P，连结PN。由 $\frac{FN}{FB}=\frac{AM}{AC}=\frac{AP}{AB}$，得 PN∥BE。又 MP∥CB，于是平面 MNP∥平面 BCE，故 MN∥平面 BCE。

(ii)连结 AN 并延长交 BE(或延长线)于 P，连结 CP。由 BE∥AF，得 $\frac{FN}{NB}=\frac{AN}{NP}$；由已知可得 $\frac{FN}{NB}=\frac{AM}{NP}$，所以 $\frac{AN}{NP}=\frac{AM}{MC}$，于是，MN∥CP，故 MN∥平面=BCE。

例 9-3-4　三棱锥 P-ABC 中，A′，B′，C′分别是△PBC，△PCA，△PAB 的重心。求证：平面 A′B′C′∥平面 ABC。

分析　只要证明平面 A′B′C′内有两相交直线与平面 ABC 平行即可。

解　如右图。连结 PA′，PC′，并延长分别交 BC，AB 于 D，E。连结DE。由A′，C′分别是△PBC，△PAB的重心，得 $\frac{PA'}{PD}=\frac{PC'}{PE}=\frac{2}{3}$，于是A′C′∥DE。又DE在平面ABC内，所以A′C′∥平面 ABC。



同理 A′B′∥平面 ABC。

故平面 A′B′C′∥平面 ABC。

注　在一般情况下，立体几何的直观图中，平行线保持平行关系，因此在证明平行的问题中，只要直观图画得正确，又不是特殊情况，从图中就可观察出线线平行，从而也可观察出线面的平行关系，所以平行问题的证明思路比较容易找到。

习题

9-3-1　a，b，c 为三条不重合直线，α，β，γ为三个不重合的平面。现给出六个命题：

(i) $\left.\begin{matrix} a /\!/ c \\ b /\!/ c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a /\!/ b$　　(ii) $\left.\begin{matrix} a /\!/ \alpha \\ b /\!/ \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a /\!/ b$

(iii) $\left.\begin{matrix} c /\!/ \alpha \\ c /\!/ \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$　　(iv) $\left.\begin{matrix} \alpha /\!/ \gamma \\ \beta /\!/ \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$

(v) $\left.\begin{matrix} c /\!/ a \\ c /\!/ \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow a /\!/ \alpha$　　(vi) $\left.\begin{matrix} a /\!/ \gamma \\ \alpha /\!/ \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow a /\!/ \alpha$

其中正确的命题是　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．(i)，(ii)，(iii)

B．(i)，(iv)，(v)

C．(i)，(iv)

D．(i)，(iv)，(v)，(iv)

9-3-2　已知直线 a，b 与平面α，β，γ。在下列各组条件中能推出α∥β的是　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，a∥b

B．$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，a∥β，b∥α

C．a⊥α，a⊥β

D．α⊥γ，β⊥γ

9-3-3　如果一个平面内有无数条直线和另一个平面平行，那么这两个平面　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．平行

B．相交

C．重合

D．平行或相交

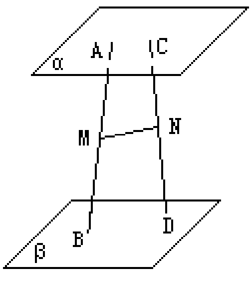
9-3-4　求证：如果两个相交平面分别经过两条平行线中的一条，那么它们的交线和这两直线平行。

9-3-5　已知 a，b 是异面直线，MN 是它们的公垂线，a⊥α， b⊥β，α∩β=EF，且 MN 与 EF 不重合。求证：EF∥MN。

9-3-6　求证：若两个平行平面和另外两个平行平面相交得四条交线，则这四条交线平行。

9－3－7 已知a，b是异面直线，a⊥b，a⊥平面α，$b\not\subset\alpha$。求证：b∥α。

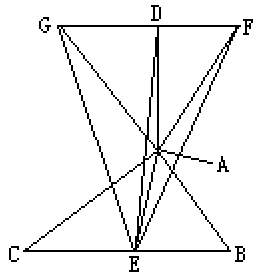
9-3-8　已知平面α∥平面β；AB 与 CD 是异面直线，A∈α，C∈α，B∈β，D∈β；M，N 分别是 AB，CD 的中点，(如右图。)求证：MN∥β。

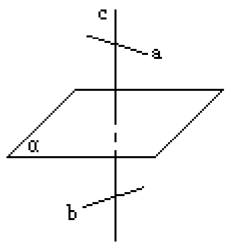


9-3-9　在六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1B_1C_1D_1$ 是梯形，$A_1B_1 /\!/ D_1C_1$，

C_1D_1∥平面 ABCD，求证：A_1B_1∥AB。

9-3-10　如下左图。DA⊥AC，DA⊥AB，AE⊥BC；AC=AF，EG=EF，FD=DG。求证：BC∥GF。

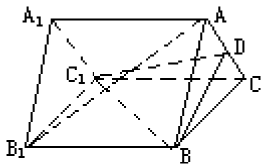


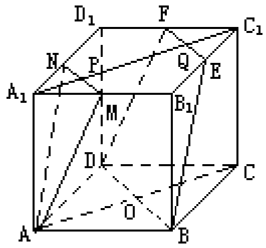


9-3-11　如上右图。a，b 是异面直线，c 是它们的公垂线；c⊥平面α；$a\not\subset\alpha$，$b\not\subset\alpha$。求证：a∥α，b∥α。

9-3-12　已知 a，b 为异面直线，a∥平面α，b∥平面α，a∥平面β，b∥平面β。求证α∥β。

9-3-13　如下左图。$A_1B_1C_1$-ABC 是正三棱柱，D 是 AC 的中点。证明：AB_1∥平面 DBC_1。





9-3-14　如上右图，正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为棱 A_1B_1，A_1D_1 的中点，E，F 分别为棱 B_1C_1，C_1D_1 的中点。

(1)求证：E，F，B，D 共面；

(2)证明平面 AMN∥平面 EFDB。

2．线面间的垂直关系

提要

(1)证明直线与直线垂直常用下列方法：(i)应用定义，即证这两条直线所成的角是直角；(ii)通过证线面垂直得到线线垂直；(iii)应用三垂线定理或其逆定理证明；(iv)应用“三个平面两两垂直所得的三条交线互相垂直”证明；(v)把这两条直线转化到同一平面，用平面几何知识证明。

(2)证明直线与平面垂直常用下列方法：(i)应用定义证明；(ii)应用下列定理证明：①线面垂直的判定定理；②如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于同一个平面；③一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面；④面面垂直的性质定理；⑤两个相交平面都垂直于第三个平面，那么它们的交线也垂直于这个平面。

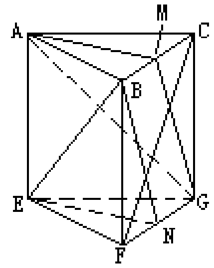
(3)证明平面与平面垂直常用下列方法：(i)应用定义，即证这两个平面所成的二面角是直二面角；(ii)应用面面垂直的判定定理证明。

例题

例 9-3-5　正三棱柱 ABC-EFG 中，已知 AG⊥CF，求证：CF⊥BE。

分析　由题设所给的条件是线线垂直，要求证的也是线线垂直，所以首先想到的是要用三垂线定理或其逆定理。

解　分别取 BC，FG 的中点 M，N，连结 AM，EN，MG，BN(如下右图)。



$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC\text{为正三角形}\\ M\text{为}BC\text{的中点}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AM\perp BC\\ \text{平面}ABC\perp\text{平面}BFGC\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AM\perp\text{平面}BFGC$$

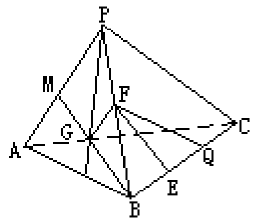
$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow MG\text{是}AG\text{在平面}BFGC\text{内的射影}\\ AG\perp CF\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow MG\perp CF(\text{三垂线定理的逆定理})$$

又 BFGC 为矩形，M，N 分别为 BC，FG 的中点，所以 MG∥BN。已证 MG⊥CF，故 BN⊥CF。由 N 是 FG 的中点及△EFG 为正三角形得 EN⊥FG，于是 EN⊥平面 BFGC，所以 BN 是 BE 在平面 BFGC 内的射影，由 BN⊥CF，据三垂线定理，知 CF⊥BE。

注　(i)运用三垂线定理及逆定理时,要熟悉平面不在水平位置的情况；(ii)应用三垂线定理或逆定理时，要根据题设条件正确地判断出平面的垂线和斜线，同时要注意平面内与斜线垂直(或将证得垂直)的直线不过斜足的情况。

例 9-3-6　设 P 点在正三角形 ABC 所在平面外，且 AP，BP，CP 两两垂直；又G是△ABP的重心；E为BC上一点，$BE=\frac{1}{3}BC$；F为PB上一点，$PF=\frac{1}{3}PB$；$AP=BP=CP$(如下右图)。



(1)求证：GF⊥平面 PBC；

(2)求证：EF⊥BC。

解(1)连结 BG 并延长交 PA 于 M。

G 为△ABP 的重心

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\Rightarrow MG=\frac{1}{3}BM\\ PF=\frac{1}{3}PB\end{array}\right\}\Rightarrow GF\parallel AP\\ \left.\begin{array}{r}AP\perp PB\\ AP\perp PC\end{array}\right\}\Rightarrow AP\perp \text{平面}PBC\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow GF\perp \text{平面}PBC$$

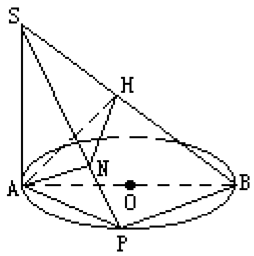
(2)取$CQ=\frac{1}{3}BC$，又已知$PF=\frac{1}{3}PB$，故

$$\left.\begin{array}{r}FQ\parallel PC\Rightarrow FQ=\frac{2}{3}PC\\ PC=PB\end{array}\right\}\Rightarrow FQ=\frac{2}{3}PB$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow FQ=FB\\ BE=EQ=\frac{1}{3}BC\end{array}\right\}\Rightarrow EF\perp BC$$

注　要充分注意平面几何中的知识(如本题中三角形重心性质，等腰三角形性质等)在证题中的运用。

例 9-3-7　AB 为⊙O 的直径，⊙O 在平面α内。SA⊥平面α，∠ABS=30°。动点 P 在⊙O 上移动(不重合于 A，B)。以 N 和 H 分别表示 A 在 SP，SB 上的射影(如下图)。



(1)求证：△APB，△SAP，△SAB，△SPB 都是直角三角形；

(2)求证：SB⊥平面 ANH。

解　(1)由 AB 是⊙O 的直径，P 为⊙O 上的一点，故△APB 为直角三角形；由SA⊥平面α，$AP\subset\alpha$，故△SAP，△SAB为直角三角形；由 SP 在平面α内的射影 AP⊥PB，根据三垂线定理，得 SP⊥PB，所以△SPB 为直角三角形。

(2) $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}SA\perp \text{平面}\alpha\\ PB\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow SA\perp PB\\ AP\perp PB\end{array}\right\}\Rightarrow PB\perp \text{平面}SAP\\ AN\subset \text{平面}SAP\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AN\perp PB\\ AN\perp SP\end{array}\right\}\Rightarrow AN\perp \text{平面}SPB\\ SB\subset \text{平面}SPB\end{array}\right\}\Rightarrow AN\perp SB\\ AH\perp SB\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow SB\perp$平面ANH

注　由本题(1)知：存在四个面都是直角三角形的四面体。

例 9-3-8　在三棱锥 S-ABC 中，S 在底面上的射影 N 位于底面三角形 ABC 的高 CD 上；M 是侧棱 SC 上的一点，使截面 MAB 与底面所成角等于∠NSC(如下右图)。求证：SC⊥平面 MAB。

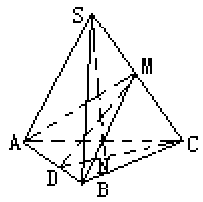
分析　要证 SC⊥平面 MAB,可证 SM 垂直于平面 MAB 内两条相交直线。由 SN⊥平面 ABC 和 CD⊥AB，可得 SC⊥AB，从而只需证 SC⊥MD。

解　连 DM。

$$\left.\begin{array}{l}SN\perp\text{平面}ABC\\AB\subset\text{平面}ABC\end{array}\right\}$$

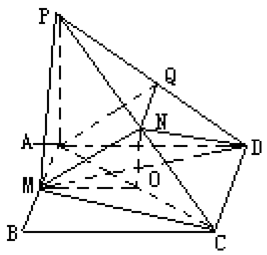
$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow SN\perp AB\\CD\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp\text{平面}SNC$$

$\Rightarrow AB\perp CD$，$AB\perp MD$，$AB\perp SC$



由 AB⊥CD，AB⊥MD，知∠MDC 是二面角 M-AB-C 的平面角，所以∠MDC∠NSC。又∠DCM=∠SCN，得∠DMC=∠SNC=90°，即 DM⊥SC。已证 AB⊥SC，故 SC⊥平面 MAB。

例 9-3-9　ABCD 是矩形，PA⊥平面 ABCD，M，N 分别是 AB，PC 的中点(如右图)。

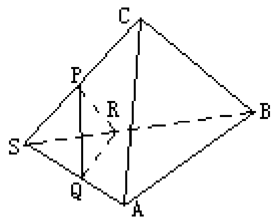


(1)证明：AB⊥MN；

(2)若平面 PDC 与平面 ABCD 成 45°角，求证：平面 MND⊥平面 PDC。

解　(1)连结 AC，取 AC 的中点 O，连结 MO，NO。

由 O，N 分别为 AC，PC 的中点，根据三角形中位线性质，得 ON∥PA；由 PA⊥平面 ABCD，AB⊂平面 ABCD，得 PA⊥AB，于是 AB⊥ON。



由 ABCD 是矩形，得 AB⊥BC；由 M，O 分别为 AB，AC 的中点，得 OM∥BC，于是 AB⊥OM。因此，AB⊥平面 MON，又 MN⊂平面 MON，故 AB⊥MN。

(2)取 PD 的中点 Q，连结 NQ，AQ。易知 MNQA 为平行四边形。

由 PA⊥平面 ABCD，CD⊂平面 ABCD，得 PA⊥CD，又 AD⊥CD，得 CD⊥平面 PAD，于∠PDA 是平面 PCD 与底面 ABCD 所成的平面角，于是∠PDA=45°。而 Q 为 PD 的中点，根据等腰三角形的性质，得 AQ⊥PD。又 MN∥AQ，得 MN⊥PD；由(1)知 AB⊥MN，又 AB∥CD，得 MN⊥CD。于是 MN⊥平面 PDC，又 MN⊂平面 MND，所以平面 MND⊥平面 PDC。

例 9-3-10　在四面体 SABC 中，∠ASC=∠BSC=45°，∠ASB=60°。求证：平面 ASC⊥平面 BSC。

解　在 SC 上取一点 P，分别在面 ASC，BSC 内过点 P 作 PQ⊥SC，PR⊥SC，Q，R 分别为 PQ 与 SA，PR 与 SB 的交点。连结 QR(如右图)。令 SP=a。

在 Rt△SPQ 和 Rt△SPR 中，由∠PSQ=∠PSR=45°，SP=SP，

得$\mathrm{Rt}\triangle \mathrm{SPQ}\cong\mathrm{Rt}\triangle \mathrm{SPR}$。又$\mathrm{SP}=\mathrm{a}$，于是$\mathrm{SQ}=\mathrm{SR}=\sqrt{2}\mathrm{a}$，$\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}=\mathrm{a}$。

在$\triangle \mathrm{SQR}$中，由$\angle \mathrm{QSR}=60°$，$\mathrm{SQ}=\mathrm{SR}=\sqrt{2}\mathrm{a}$，得$\mathrm{QR}=\sqrt{2}\mathrm{a}$。

在$\triangle \mathrm{QPR}$中，由$\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}=\mathrm{a}$，$\mathrm{QR}=\sqrt{2}\mathrm{a}$，得$\mathrm{QR}^2=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$，所以∠QPR=90°，即二面角 A-SC-B 是直二面角，故平面 ASC⊥平面 BSC。

注　由∠ASC=∠BSC=45°，若过顶点 C 作 CO⊥平面 ASB，则垂足 O 必落在∠ASB 的平分线上。过 O 作 OM⊥SA 于 M，过 O 作 ON⊥SB 于 N。连结 CM，CN，易得 MS=MC，NS=NC。若作 MD⊥SC 于 D，连结 ND。可证∠MDN 为二面角 A-SC-B 的平面角，同样可证出∠MDN=90°。

习题

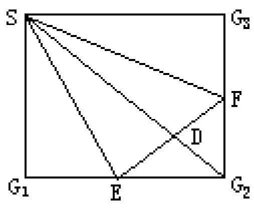
9-3-15　下列命题中正确的是　　　　　　　　　　　　[　　]

A．两条直线在同一平面内的射影互相垂直，则这两条直线必互相垂直。

B．两条直线互不垂直，分别过这两条直线仍可作两个平面互相垂直。

C．两个平面互相垂直，过其中一个平面内一点作一直线垂直于这两个平面的交线，则此直线必垂直于另一个平面。

D．两个平面相交，其中一个平面垂直于第三个平面，则另一个平面也必垂直于第三个平面。

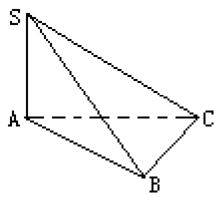


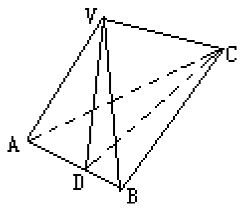
9-3-16　在正方形 $SG_1G_2G_3$ 中，E，F 分别是 G_1G_2 及 G_2G_3 的中点，D 是 EF 的中点(如下右图)。现在沿 SE，SF 及 EF 把这个正方形折成一个四面体，使 G_1，G_2，G_3 三点重合，重合后的点变为 G，那么四面体 S-EFG 中必有　　　　　　　　　　　　[　　]

A．SG⊥平面 EFG　　　B．SD⊥平面 EFG

C．GF⊥平面 SEF　　　D．GD⊥平面 SEF

9-3-17　已知：S 为△ABC 平面处一点，SA⊥平面 ABC，平面 SAB⊥平面 SBC(如下左图)。求证：AB⊥BC。



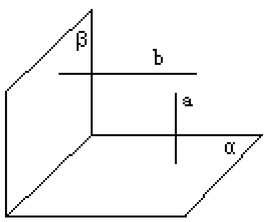


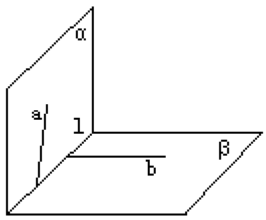
9-3-18　在棱锥 V-ABC 中，VA⊥VC，VB⊥VC(如上右图)。

(1)求证：VC⊥AB；

(2)若 CD 是底面△CAB 边 AB 上的高，求证：VD⊥AB。

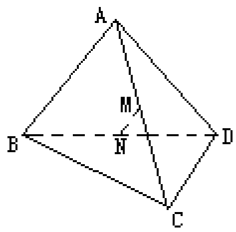
9-3-19　如下左图。设直线 a⊥直线 b，a⊥平面α，b⊥平面β。求证：α⊥β。

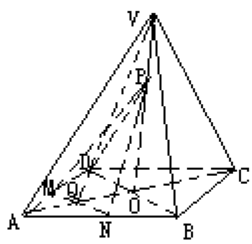




9-3-20　如上右图。平面α⊥平面β，α∩β=l，a⊂α，b⊂β，且 a 与 l，b 与 l 均不垂直。求证：a 与 b 不垂直。

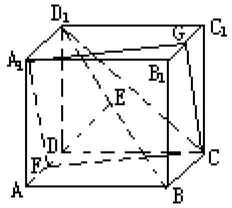
9-3-21　如下左图。A 是平面 BCD 处一点，且 AD=BC，AB=DC，M，N 分别是 AC，BD 的中点。求证：MN 是异面直线 AC，BD 的公垂线。

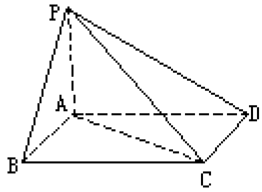




9-3-22　在正四棱锥 V-ABCD 中，VA=AB，AC 与 BD 交于 O 点。M，N，P 分别是 AD，AB，VO 的中点(如上右图)。求证：VC⊥平面 MNP。

9-3-23　如下左图。在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1A=AB$，E，F 分别是 BD_1 和 AD 的中点。





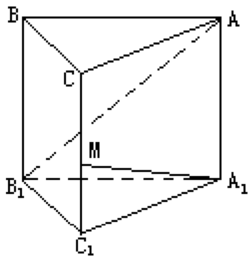
(1)求证：$EF \perp CD_1$；

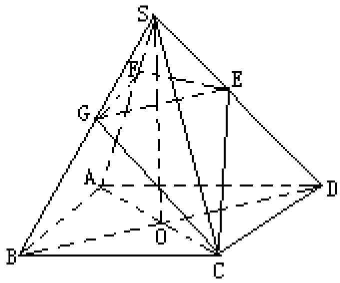
(2)求证：EF 是异面直线 AD 和 BD_1 的公垂线；

(3)若 G 是 B_1C_1 的中点，求证：平面 $A_1FCG \perp$ 平面 BCD_1。

9-3-24　在四棱锥 P-ABCD 中，$\angle DAB = \angle ABC = 90°$，$PA \perp$ 底面 ABCD；AB=BC=1，AD=2(如上右图)。求证：平面 PCD⊥平面 PAC。

9-3-25　如下左图。在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB = 90°$，$\angle BAC = 30°$；$BC = 1$，$AA_1 = \sqrt{6}$；M是CC_1的中点。求证$AB_1 \perp A_1M$。

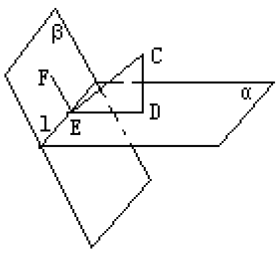




9-3-26　如上右图。正四棱锥 S-ABCD 的截面 EFG⊥SA，求证：GE⊥SC。

9-3-27　已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$。求证：平面 $A_1BD \perp$ 平面 AB_1C_1D。

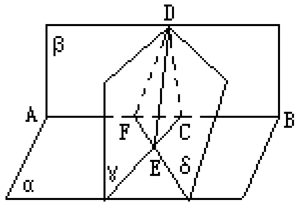
9-3-28　如右图，在 120°的二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 内有一点 C。作 CD⊥平面α，垂足为 D；CE⊥l，垂足为 E。且 CD=a，CE=2a，求证：CE⊥平面β。



9-3-29　△ABC 为正三角形，AD⊥平面 ABC，H 是 A 在平面 BDC 上的射影。求证：H 不可能是△DBC 垂心。

9-3-30　已知 a，b 是异面直线；$a \perp \alpha$，$b \perp \beta$，$\alpha \cap \beta = MN$；又 $a \parallel \gamma$，$b \parallel \gamma$，求证：$MN \perp \gamma$。

9-3-31　如右图。已知平面α，β，γ，δ；$\alpha \cap \beta = AB$，$\gamma \cap \alpha = CE$，$\delta \cap \alpha = EF$。若 $\alpha \perp \beta$，CE⊥EF，DC⊥AB，求证 $\gamma \perp \beta$。



9-3-32　△ABC 和△DBC 所在平面互相垂直，∠BAC=∠DCB=90°。求证平面 ABD⊥平面 ACD。

9-3-33　已知 S 是△ABC 所在平面外一点，且 SA=SB=SC=a。设∠BSC=α，∠CSA=β，∠ASB=γ。且有

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}=\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

求证：平面 SAB⊥平面 ABC；

(四)空间中的距离和角

1．空间中的距离

提要

(1)空间中的距离有：点点距，点线距，点面距；平行的线线、线面、面面的距离；异面直线间的距离。其中点点距是基础，其他距离都可转化为点点距来计算。

(2)求空间中两点间的距离，一般是转化为解直角三角形或解斜三解形。特殊情况下也可应用异面直线上两点间的距离公式

$$d=\sqrt{h^2+a^2+b^2\pm 2ab\cos\theta}$$

其中 a，b，h，θ的含义见例 9-4-9。

(3)求点到直线和点到平面的距离一般有直接作出法与转化法。直接作出法是直接作出点到直线(平面)的垂线段，然后求出其长；转化法是把求点到直线(平面)的距离转化为求直角三角形斜边上的高或求三棱锥的高。

(4)求异面直线间的距离一般有定义法，转化法与代数法。定义法是指直接作出两条异面直线的公垂线段，然后求出公垂线段的长；转化法是把异面直线间的距离转化为线面或面面间的距离来求；代数法是根据“异面直线间的距离是分别在两条异面直线上两点间距离的最小值”的思想，应用代数中求函数最小值的方法来求出两异面直线间的距离。

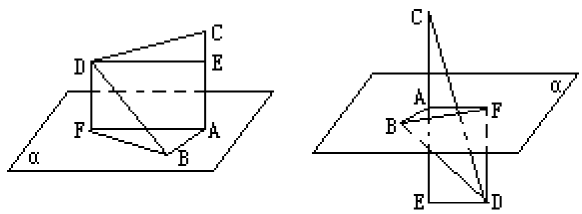
例题

例 9-4-1　已知 CA⊥平面α，垂足为 A；AB⊂α，BD⊥AB，且 BD 与α成 30°角；AC=BD=b，AB=a。求 C，D 两点间的距离。

解　本题应分两种情况讨论：

(i)如下左图。C，D 在α同侧：过 D 作 DF⊥α，垂足为 F。连 BF，则$\angle DBF=30°$**，于是**$DF=\frac{1}{2}BD=\frac{b}{2}$**。根据三垂线定理的逆定理，由 BD⊥AB 得 BF⊥AB。在 Rt△ABF 中，**

$$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{a^2+\frac{3}{4}b^2}$$



过D**作**DE⊥AC**于**E**，则**$DE=AF$，$AE=DF=\frac{b}{2}$**，所以**$EC=AC-AE=b-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}$**。故**

$$CD=\sqrt{EC^2+DE^2}=\sqrt{EC^2+AF^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+a^2+\frac{3}{4}b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

(2)如上右图。C，D在α两侧时：同法可求得

$$CD=\sqrt{a^2+3b^2}$$

注　本题是通过把已知量与未知量归结到一个直角三角形中，应用勾股定理求解。

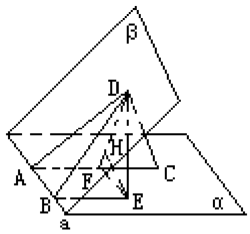
例 9-4-2　已知A，B是二面角α-a-β的棱a上两点，AB=4cm；在α内AC⊥a，且AC=6cm；在β内BD⊥a，且BD=8cm；二面角α-a-β的大小为60°。求

(1)CD的长；

(2)B点到平面ACD的距离。

解　(1)如右图。AB是异面直线AC，BD的公垂线段，AB=4cm，AC=6cm，BD=8cm，又AC，BD所成的角等于二面角α-a-β的平面角，即为60°，利用异面直线上两点间的距离公式，有

$$CD=\sqrt{AB^2+AC^2+BD^2-2AC\cdot BD\cos 60^\circ}$$
$$=2\sqrt{17}\ (cm)$$



(2)过D作DE⊥平面α，垂足为E。连BE，则BE⊥a，于是

$\angle DBE=60°$，$DE=BD\cdot\sin 60°=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$。过E作EF⊥AC，垂足为F，则EF=AB=4。

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}DE\perp\alpha\\ AC\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow DE\perp AC\\ EF\perp AC\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp\text{平面}DEF\\ AC\subset\text{平面}DAC\end{array}\right\}$$

⇒平面DEF⊥平面DAC

过E作EH⊥DF，垂足为H，则EH⊥平面DAC，即EH为点E到平面DAC的距离。在Rt△DEF中，

$$DF=\sqrt{DE^2+EF^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2+4^2}=8$$

于是　$EH=\dfrac{DE\cdot EF}{DF}=\dfrac{4\sqrt{3}\times 4}{8}=2\sqrt{3}$

而BE∥AC，故B到平面DAC的距离为$2\sqrt{3}$cm。

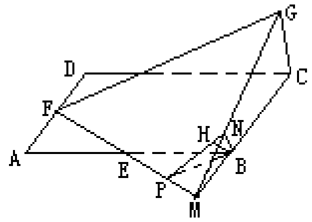
注　本题(2)也可用体积法求解。

例 9-4-3　已知正方形ABCD边长为4；CG⊥平面ABCD；CG=2；E，F分别是AB，AD的中点。求B点到平面GEF的距离。

分析　若用直接法求解，关键在于如何过B点作出一个垂直于平面

GEF 的垂面；若用转化法求解，可以连 BD(BD∥平面 GEF)，在 BD 上选一点(此时选 BD 的中点 O)，求出此点到平面 GEF 的距离；若用体积法求解需算出棱锥 G-BEF 的体积及△GEF 的面积。下面采用直接法求解。

解　如右图。延长 CB 交 FE 的延长线于 M。作 BP⊥EM 于 P。连结 MG。作 BN∥CG，交 MG 于 N。连结 PN。作 BH⊥PN 于 H。



$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}CG\perp \text{平面}ABCD\\ BN\parallel CG\end{array}\right\}\Rightarrow BN\perp \text{平面}ABCD\\ EM\subset \text{平面}ABCD\end{array}\right\}\Rightarrow BN\perp EM \atop BP\perp EM$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow EM\perp \text{平面}PBN\Rightarrow \text{平面}MFG\perp \text{平面}PBN\\ BH\perp PN\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow BH\perp \text{平面}MFG$$

即 BH 是 B 到平面 GEF 的距离。

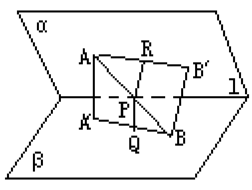
由$AB=4$，$CG=2$，得$BE=BM=2$，$BP=\sqrt{2}$，$BN=\frac{1}{3}CG=\frac{2}{3}$。

在$Rt\triangle BNP$中，$BH=\frac{BP\cdot BN}{PN}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$。故点B到平面GEF的距离为$\frac{2\sqrt{11}}{11}$。

例 9-4-4　线段 AB 夹在锐二面角α-l-β内，A∈α，B∈β；点 A 到 l 的距离小于点 B 到 l 的距离。求证：线段 AB 上除点 A 外任一点到α，β的距离之和大于点 A 到β的距离。

解　如右图，设 P 为线段 AB 上异于 A 的任一点，作 AA′⊥β，PQ⊥β，BB′⊥α，PR⊥α，A′，Q，B′，R 分别为垂足，则

$$\frac{PQ}{AA'}+\frac{PR}{BB'}=\frac{PB}{AB}+\frac{AP}{AB}=1$$

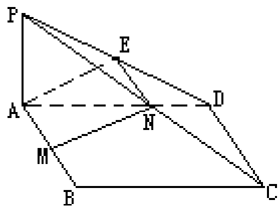


由已知 A 到 l 的距离小于 B 到 l 的距离易知 AA′＜BB′，于是

$$1=\frac{PQ}{AA'}+\frac{PR}{BB'}<\frac{PQ}{AA'}+\frac{PR}{AA'}=\frac{PQ+PR}{AA'}$$

所以 PQ+PR＞AA′。即 AB 上除点 A 外任一点到α，β的距离之和大于点 A 到β的距离。

例 9-4-5　如右图。PA⊥平面 ABCD，ABCD 是矩形，M，N 分别是 AB，PC 的中点。



(1)求证：MN⊥AB；

(2)若平面 PDC 与平面 ABCD 所成二面角为θ，能否确定θ，使得直线 MN 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线？若可以，试确定θ的值。

解　(1)取PD的中点E，连结NE，AE。由NE $\overset{\text{//}}{=}\frac{1}{2}$CD $\overset{\text{//}}{=}\frac{1}{2}$AB，

知 AMNE 为平行四边形。

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}PA\perp\text{平面}ABCD\\ AB\subset\text{平面}ABCD\end{array}\right\}\Rightarrow PA\perp AB\\ AD\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp\text{平面}PAD\\ AE\subset\text{平面}PAD\end{array}\right]$$

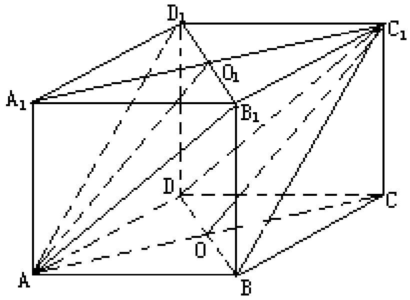
$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AB\perp AE\\ MN\,/\!/\,AE\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp MN$$

(2)由已知易得∠ADP 是平面 PDC 与平面 ABCD 所成二面角的平面角，所以∠ADP=θ。

要使 MN 是 AB 与 PC 的公垂线，只须 MN⊥PC(前面已证 MN⊥AB)。而 AE∥MN，若 AE⊥PD(此时就有 AE⊥平面 PCD)即可。在 Rt△PAD 中，E 是 PD 中点，要使 AE⊥PD，则需∠ADP=45°。即当θ=45°时，就可使 MN 是异面直线 AB，PC 的公垂线。

例9-4-6　正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面边长为1，高为$\sqrt{2}$，求 AB_1 与 BC_1 间的距离。

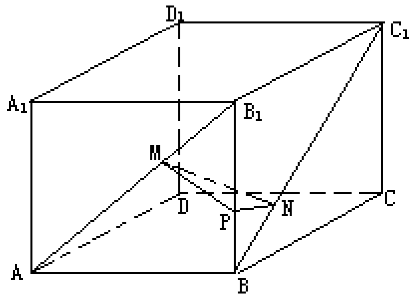
分析　AB_1⊂平面 AB_1D_1，BC_1⊂平面 BC_1D，而平面 AB_1D_1∥平面 BC_1D，于是这两个平面间的距离就是异面直线 AB_1 与 BC_1 的距离(右图)。这是把线线距离转化为面面距离求解。



由 AB_1∥平面 BC_1D，而 $BC_1\subset$平面 BC_1D，故 AB_1 与平面 BC_1D 的距离就是 AB_1 与 BC_1 的距离。这是把线线距离转化为线面距离求解。

下面应用代数法来求解。

解　如右图。在 BB_1 上任取点 P，作 $PM\perp AB_1$ 于 M；又作 $PN\parallel B_1C_1$ 交 BC_1 于 N；连结 MN。



$$\left.\begin{array}{l}B_1C_1\perp\text{平面}ABB_1\\ PN\parallel B_1C_1\end{array}\right\}\Rightarrow PN\perp\text{平面}ABB_1$$

$\Rightarrow PN\perp PM$

设$BP=x$，由$\dfrac{PN}{BP}=\dfrac{B_1C_1}{BB_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，得$PN=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$。

由$\dfrac{PM}{B_1P}=\dfrac{AB}{AB_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，得$PM=\dfrac{B_1P}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{3}}$。

在 Rt△PNM 中，

$$MN=\sqrt{PN^2+PM^2}=\sqrt{\frac{5}{6}\left(x-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2+\frac{2}{5}}$$

当$=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$时，$MN_{\min}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$。即当MN取最小值时，MN即为$AB_1$与$BC_1$的公垂线段，所以$AB_1$与$BC_1$间的距离为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$。

习题

9-4-1　正三棱锥 A-BCD 各边长均为 a，则 AD 与 BC 的距离是　[　　]

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}a$　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}a$　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}a$　D．$\sqrt{3}a$

9-4-2　四面体 ABCD 中，BC=4，其余棱长都是 3，则 D 到平面 ABC 的距离是　　　　[　　]

A．$-\frac{3\sqrt{55}}{10}$　B．$\frac{3\sqrt{55}}{10}$　C．$\sqrt{5}$　D．$\frac{3\sqrt{22}}{16}$

9-4-3　二面角α-l-β等于 120°；A，B 是棱 l 上两点；AC，BD 分别在平面α，β内，AC⊥l，BD⊥l，且 AB=AC=BD=1。则异面直线 AB 和 CD 的距离为　　　　[　　]

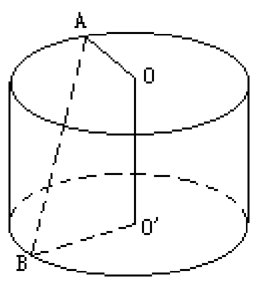
A．$\frac{1}{2}$　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　D．1

9-4-4　平面α内有∠XOY=60°，OA 是α的斜线，OA 与∠XOY 两边所成的角都是 45°，且 OA=1。则点 A 到平面α的距离是______。

9-4-5　正方形 ABCD 的边长是 12㎝，PA⊥平面 ABCD，PA=12㎝，则点 P 与正方形对角线 BD 的距离是______㎝。

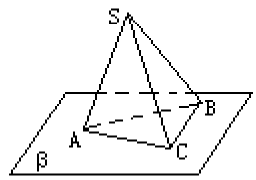
9-4-6　平面外有两点 A 和 B，它们与平面的距离分别为 a 和 b；线段 AB 上有一点 P，已知 AP：PB=1：2。那么点 P 到平面的距离是______。

9-4-7　如右图。已知圆柱的底面半径是 3，高是 4；A，B 两点分别在两底面的圆周上，且 AB=5。那么直线 AB 和轴 OO′之间的距离等于______。



9-4-8　在 60°二面角α-l-β内有一点 P，P 到α，β的距离分别为 3 和 5。求 P 到 l 的距离。

9-4-9　如右图。在平面β内有△ABC，在平面β外有点 S，斜线 SA⊥AC，SB⊥BC，且斜线 SA，SB 分别与平面β所成的角相等。

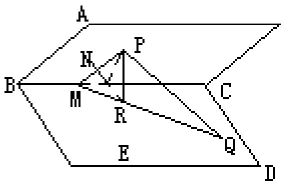


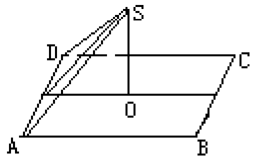
(1)求证：AC=BC；

(2)又设点 S 与平面β的距离为 4㎝，AC⊥BC，且 AB=6㎝，求点 S 与直线 AB 的距离。

9-4-10　如下左图。设平面 AC 与平面 BD 相交于 BC，它们所成的二面角的平面角为 45°。P 为平面 AC 内一点，Q 为平面 BD 内一点。已知直

线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 内的射影，且 M 在 BC 上。又直线 PQ 与平面 BD 所成的角为β，∠CMQ=θ（0°＜θ＜90°）。设线段 PM=a，求线段 PQ 的长。





9-4-11　如上右图，点 O 是边长为 6 的正方形 ABCD 的中心；SO⊥平面 ABCD 于 O；SA=5。求 BC 与平面 SAD 的距离。

9-4-12　在棱长为 a 的正四面体 ABCD 中，M，E 分别是棱 BD，BC 的中点，N 是 BE 的中点。连结 ED，MN。求直线 ED 与平面 AMN 的距离。

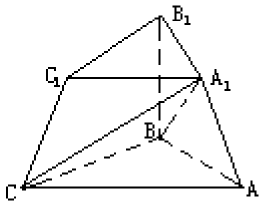
9-4-13　AB，CD 是平面α内相距 28㎝ 的两条平行线；EF 在α外，EF∥AB，且 EF 与平面α相距 15cm，EF 与 AB 相距 17㎝。求 EF 与 CD 的距离。

9-4-14　正四面体 ABCD 的棱长为 2㎝，M，N 分别为 AB，CD 的中点。

(1)求证：MN 是异面直线 AB 和 CD 的公垂线；

(2)求线段 MN 的长。

9-4-15　在三棱台 $A_1B_1C_1$-ABC 中，侧棱 B_1B⊥底面 ABC，且∠ABC=∠AA_1C=90°，AB=2A_1B_1=2㎝(如右图)。



(1)求证：BC⊥A_1B，BC⊥A_1A，A_1A⊥A_1B；

(2)求异面直线 A_1A 和 BC 的距离。

9-4-16　正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长等于 a，求：

(1)AC 与 BD_1 间的距离；

(2)A_1C_1 与 B_1C 间的距离。

9-4-17　空间四边形的四边长都是 6㎝。

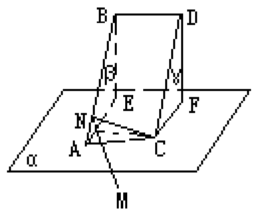
(1)求证：它的两条对角线互相垂直；

(2)若两条对角线的长都是 8㎝，求它们的距离。

9-4-18　二平行平面α与β间的距离为 8，BD=AC=6，AB=8，CD=10，AC⊂α，BD⊂β。求异面直线 AB 与 CD 间的距离。

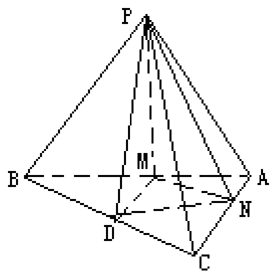
9-4-19　如右图。两条平行直线 AB，CD 与平面α所成的角都是 45

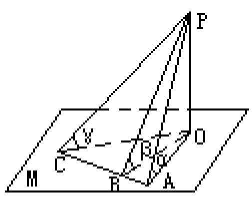
°；若 A，C∈α，且 AC=6；点 C 到 AB 的距离为 5；AB 与其在α内的射影所确定的平面为β，CD 与其在α内的射影所确定的平面为γ。求β与γ之间的距离。



9-4-20　设 l_1，l_2 为空间中两直线。在 l_1 上取 A，B，C 三点，其中 B 为 AC 中点。若 A，B，C 到 l_2 的距离分别为 a，b，c，试证：$b \le \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$。

9-4-21　如下左图。在三棱锥 P-ABC 中，底面△ABC 是边长为 a 的正三角形，侧面 PBC 垂直于底面 ABC，侧面 PAC，PAB 与底面 ABC 所成的角的大小均为α。D 是 BC 的中点。在△ABC 中，DM⊥AB 于 M，DN⊥AC 于 N。连结 PM，MN，PN。求点 A 到平面 PMN 的距离。





9-4-22　如上右图。由平面 M 外一点 P 向平面 M 引三条斜线，这三条斜线在同一平面内，斜线足分别为 A，B，C，且斜线与平面 M 所成的角分别为α，β，γ。又 AB=a，BC=b。求点 P 到平面 M 的距离。

9-4-23　设 l，m 是两条异面直线。在 l 上有 A，B，C 三点，且 AB=BC。过 A，B，C 分别作 m 的垂线 AD，BE，CF，垂足依次为 D，E，F。已知 $AD=\sqrt{15}$，$BE=\frac{7}{2}$，$CF=\sqrt{10}$，求 l 与 m 的距离。

2．空间中的角

提要

(1)空间中的角有：异面直线所成的角，直线与平面所成的角和二面角。

异面直线所成的角θ的取值范围是 $0°<θ≤90°$；直线与平面所成的角θ的取值范围是 $0°≤θ≤90°$；二面角的大小，可以用它的平面角来度量，通常认为二面角的平面角θ的取值范围是 $0°<θ≤180°$。

求空间中各种角的大小都是转化为平面内两射线的角来计算，都是先定其位，后算其量。

(2)求异面直线所成的角的大小一般有平移法和补形法。平移法是指：在异面直线中的一条直线上选择恰当的点作另一条的平行线，或在空间中选择恰当的点分别作它们的平行线，把异面直线所成角转化为平面角。补形法是指：把空间图形补成熟悉的或完整的几何体，如补形为正方体、平行六面体等，以便于异面直线所成角的转化或计算。

(3)求斜线与平面所成的角的关键在于作出斜线在该平面内的射影。有时也可借助式子 $\cos θ_1 \cdot \cos θ_2=\cos θ$ (详见课本总复习参考题第3题)进行计算。

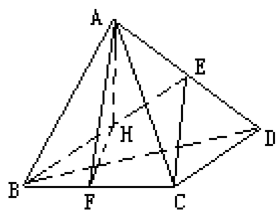
(4)求二面角的大小有定义法、射影法和公式法。定义法是先作出二面角的平面角，然后计算平面角的大小；射影法是利用面积射影公式 $S'=S\cdot\cos\theta$ 求二面角的大小；公式法是应用公式 $\mathrm{cso}\theta=\dfrac{a^2+b^2+h^2-d^2}{2ab}$ 求二面角的大小(详见9-4-9)。射影法与公式法可以不作出二面角的平面角，直接求出二面角的大小，这是这两种方法的优点。

例题

例9-4-7　在棱长都相等的四面体ABCD中，E，F分别为棱AD，BC的中点。连结AF，CE。求异面直线AF与CE所成角的大小。

分析　AF与CE是异面直线，求它们所成角的大小可以选择某特殊点，通过平移使异面直线成为相交直线(即应用“平移法”)。为此，我们可以在平面BCE中过F作CE的平行线FH，达到平移CE的目的；也可以平面AFD内过E作AF的平行线EG，达到平移AF的目的。

解　如右图。连结BE。在△BCE中，过F作FH∥CE，交BE于H，则∠AFH是异面直线AF和CE所成的角。



设四面体ABCD的棱长为a，由AC=CD=AD=a，CE为△ACD的中线，得 $CE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$；又FH是△BCE的中位线，所以 $FH=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，在Rt△AHE中，

$$AH=\sqrt{AE^2+HE^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}a$$

在△AFH 中，由余弦定理，得

$$\cos\angle AFH=\frac{FH^2+AF^2-AH^2}{2\cdot FH\cdot AF}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}a\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2}{3}$$

于是$\angle AFH=\arccos\frac{2}{3}$，即异面直线AF与CE所成的角为$\arccos\frac{2}{3}$。

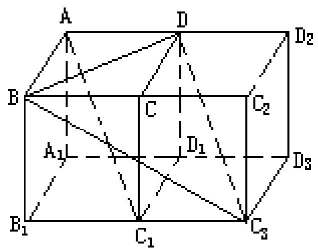
注　在应用余弦定理求异面直线所成的角时，应注意异面直线所成角的范围是(0°，90°]，当求得的余弦值为负值时，其对应角为钝角，它不是两异面直线所成的角，它的补角才是两异面直线所成的角。

例 9-4-8　长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的长 AB=4，宽 BC=3，高 AA_1=5。求异面直线 AC_1 与 BD 所成的角的大小。

分析　若直接利用平移法，在如何选取特殊点上会有一定的困难。如果把原长方体补形为如下右图，则解决起来就容易多了(实质上达到了平移 AC_1 至 DC_3 的目的)。

解　如右图，在原长方体的右侧补上一个相同的长方体，它们有公共面 CC_1C_1D。连结 DC_3，则 DC_3∥AC_1，于是∠BDC_3 为异面直线 AC_1与BD所成的角。由勾股定理，易得$BD=5$，$AC_1=DC_3=5\sqrt{2}$，$BC_3=\sqrt{61}$。在△BDC_3中，根据余弦定理，求得$\cos\angle BDC_3=\frac{7\sqrt{2}}{50}$。

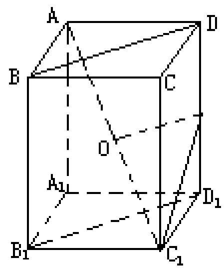
故异面直线AC_1与BD所成的角为$\arccos\frac{7\sqrt{2}}{50}$。



注　本题也可用下列的平移法求解：

设对角线 AC_1 与面 BB_1D_1D 交于 O，则 O 为 AC_1 的中点。取 DD_1 的中点E，连OE，则OE$\underline{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}$BD。连$EC_1$(如右图)。容易求得$OC_1=\frac{1}{2}\sqrt{50}$，

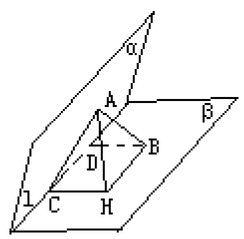
$OE=\frac{5}{2}$，$C_1E=\frac{9}{2}$。在△OC_1E中，由余弦定理，得$\cos\angle EOC_1=-\frac{7\sqrt{2}}{50}$<0，所以$AC_1$与BD所成的角应是$\angle EOC_1$的补角，故$AC_1$与BD所成的角的大小为$\arccos\frac{7\sqrt{2}}{50}$。

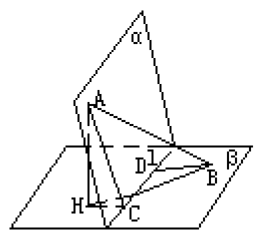


例 9-4-9　已知二面角α-l-β的大小为θ，其内有线段AB，A∈α，B∈β。在α内作AC⊥l于C，在β内作BD⊥l于D。且AC=a，BD=b，CD=h。求AB与平面β所成角的大小。

分析　因二面角α-l-β的大小θ未指明范围，根据题意应为0°<θ<90°，θ=90°，90°<θ<180°三种情况分别求解。

解　(i)当0°<θ<90°或90°<θ<180°时，过A作AH⊥β于H。连结CH，由AC⊥l得CH⊥l。从而∠ACH=θ(如下左图)或∠ACH=180°-θ(如下右图)。在Rt△ACH中，由AC=a，得AH=asinθ。





当0°<θ<90°时，异面直线AC与DB所成的角为θ，此时

$$AB=\sqrt{a^2+b^2+h^2-2ab\cos\theta}$$

当90°<θ<180°时，异面直线AC与DB所成的角为180°-θ，此时

$$AB=\sqrt{a^2+b^2+h^2+2ab\cos(180°-\theta)}=\sqrt{a^2+b^2+h^2-2ab\cos\theta}$$

于是，在Rt△AHB中，都有

$$\sin\angle ABH=\frac{AH}{AB}=\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2+h^2-2ab\cos\theta}}$$

故　$$\angle ABH=\arcsin\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2+h^2-2ab\cos\theta}}$$

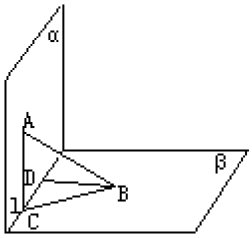
即AB与平面β所成角的大小为$\arcsin\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2+h^2-2ab\cos\theta}}$。

(ii)当θ=90°时，连结CB(如下右图)。由α⊥β，AC⊥l，AC⊂α，

得 AC⊥β。又 BC⊂β，所以 AC⊥BC。在 Rt△BDC 中，$BC^2=h^2+b^2$；

于是，在 Rt△ACB 中，$\sin\angle ABC=\frac{AC}{AB}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+h^2}}$，故

$$\angle ABC=\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+h^2}}$$



综合(i)，(ii)，AB 与平面β所成的角都可表示为

$$\arcsin\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2+h^2-2ab\cos\theta}}$$

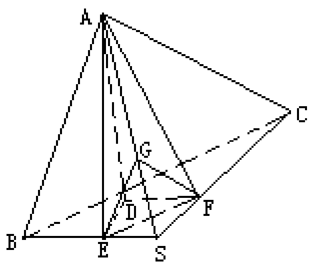
注　(i)1981 年全国高考数学理科试题第八题是本题的特例，是 $\theta=120°$，$a=2$，$b=4$，$h=6\sqrt{2}$ 时的情形。

(ii)由本题的推导可得求二面角大小的一种方法：若 AB=d，BC=a，BD=b，CD=h，二面角为θ，则

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2+h^2-d^2}{2ab}$$

(iii)由本题结论容易推出下列命题成立："若一条直线与二面角的两个面相交，则此直线与两个面的交角相等的充要条件是：此直线与这两个面的两个交点与二面角的棱距离相等。"

例 9-4-10　如右图。二面角 A-BS-C 和二面 A-CS-B 都是 45°，∠BSC=90°。求二面角 B-AS-C 的大小。



分析　关键是作出三个二面角的平面角。先作出两个已知二面角的平面角，然后再考虑所求二面角的平面角应当作在什么位置才便于与已作出的两个平面角相联系。

解　作 AD⊥平面 SBC 于 D，在平面 BSC 内。分别过 D 作 DE⊥SB 于 E，DF⊥SC 于 F。连 AE，AF。则由三垂线定理知 AE⊥SB，AF⊥SC，从而∠AED 和∠AFD 分别是二面角 A-BS-C 和 A-CS-B 的平面角。由已知有∠AED=∠AFD=45°，并由作法易知 Rt△AES≌Rt△AFS。

在△AES 内作 EG⊥AS 于 G。连 GF。由以上结果可知 FG⊥AS，于是∠EGF 为二面角 B-AS-C 的平面角。在△EGF 中据余弦定理，有

$$\cos\angle EGF=\frac{EG^2+FG^2-EF^2}{2\cdot EG\cdot FG}$$

$$=\frac{2EG^2-2ES^2}{2EG^2}=\frac{-SG^2}{EG^2}=-\left(\frac{SE}{AE}\right)^2$$

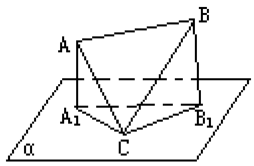
注意到 DESF 是正方形，则有

$$\cos\angle EGF=-\left(\frac{DE}{AE}\right)^2=-(\cos45°)^2=-\frac{1}{2}$$

所以　　∠EGF=120°

注　本题是先用定义法作出二面角的平面角，然后用解三角形的方法求出其大小。

例 9-4-11　如右图。Rt△ABC 的直角顶点 C 在平面α内，两直角边 AC，BC 和α所成的角都是 30°；且 AC=2，BC=4。求△ABC 所在平面与α所成角的大小。



分析　由于容易求出 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle A_1B_1C}$，所以用射影法求解较方便。

解　由 AC⊥BC，AC=2，BC=4，得 $S_{\triangle ABC}$=4。

作 AA_1⊥α于 A_1，BB_1⊥α于 B_1，则△ABC 在α内的射影为△A_1B_1C。依题意知$\angle ACA_1=30°$，$\angle BCB_1=30°$。所以$A_1C=\sqrt{3}$，$B_1C=2\sqrt{3}$，且$AA_1=1$，$BB_1=2$。

C．$\frac{4}{3}$　　　　　　　　D．$\frac{5}{3}$

$\sqrt{19}$。在$\triangle A_1B_1C$中，由余弦定理得$\cos\angle A_1CB_1=-\frac{1}{3}$，于是$\sin\angle A_1CB_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以$S_{\triangle A_1B_1C}=2\sqrt{2}$。

设平面 ABC 与平面α所成二面角的度数为θ，由射影面积公式得

$$\cos\theta=\frac{S_{\Delta A_1B_1C}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

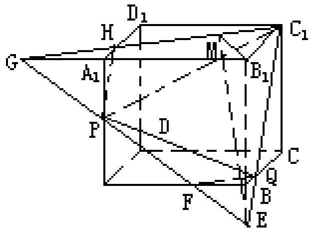
所以θ=45°。故所求的二面角为 45°。

例 9-4-12　在正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，P，Q 两点分别在棱 AA_1，BC上，且$AP=PA_1$，$BQ=\frac{1}{3}BC$。求平面C_1PQ和平面ABCD所成二面角的较小值。

分析　要求平面 C_1PQ 与平面 ABCD 所成二面角的大小，首先要作出平面 C_1PQ 与正方体的截面。

解　如右图。设 C_1Q 与 B_1B 交于 E；EP 与 B_1A_1 交于 G，与 AB 交于 F；

GC_1 与 A_1D_1 交于 H；连 EQ，PH。则 $PFQC_1H$ 为平面 C_1PQ 与正方体的截面。



过 B_1 作 $B_1M\perp GC_1$，垂足为 M。连 ME。由三垂线定理知，$EM\perp GC_1$，所以$\angle B_1ME$ 是平面 C_1PQ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成二面角的平面角。设正方体的棱长为 a。

$$BQ /\!/ B_1C_1 \Rightarrow \frac{BQ}{B_1C_1}=\frac{EB}{EB_1}\Rightarrow \frac{\frac{1}{3}a}{a}=\frac{EB}{a+EB}$$

$$\Rightarrow EB=\frac{1}{2}a\Rightarrow EB_1=\frac{3}{2}a$$

同理，由$A_1P /\!/ B_1E$，求得$GB_1=\frac{3}{2}a$。

在 $Rt\triangle GB_1C_1$ 中，有

$$GC_1=\sqrt{B_1C_1^2+GB_1^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}a\Rightarrow B_1M=\frac{B_1C_1\cdot GB_1}{GC_1}=\frac{3}{\sqrt{13}}a$$

在$Rt\triangle B_1ME$中，$tg\angle B_1ME=\frac{EB_1}{B_1M}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，所以

$$\angle B_1ME=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$$

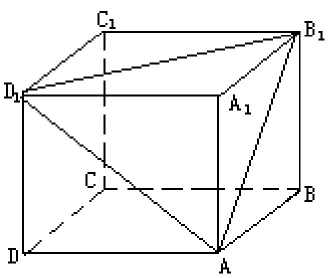
因为平面 ABCD∥平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以平面 C_1PQ 与平面 ABCD

所成二面角中较小值等于$\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$。

习题

9-4-24　如右图。长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\angle D_1AD=45°$，$\angle B_1AB=60°$，则$\angle D_1AB_1$ 的余弦值是　　[　　]

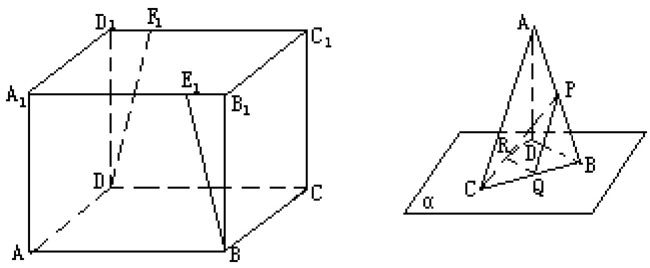
A．$\frac{\sqrt{3}}{6}$　B．$\frac{\sqrt{2}}{6}$　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　D．$\frac{\sqrt{6}}{4}$



9-4-25　如下左图。$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，$B_1E_1=D_1F_1=$

$\frac{A_1B_1}{4}$，则BE_1与DF_1所成的角的余弦值是 [ ]

A．$\frac{15}{17}$ B．$\frac{1}{2}$ C．$\frac{8}{17}$ D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$



9-4-26 如上右图。AB，BC，CD 为不在同一平面内的三条角线段，AB，BC，CD的中点分别为P，Q，R，且$PQ=2$，$QR=\sqrt{5}$，$PR=3$，则 AC 与 BD 所成的角为 [ ]

A．60°

B．30°

C．90°

D．120°

9-4-27 ∠AOB 在平面α内，OC 是平面α的一条斜线．已知∠AOB=∠BOC=∠COA=θ（90°＜θ＜120°），则 OC 与平面α所成的角的余弦值是 [ ]

因点P(4，1)在椭圆上，所以$\frac{16}{4b^2}+\frac{1}{b^2}=1$，由此得$b^2=5$

C．$-\frac{\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

D．$-\frac{\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$

9-4-28 已知异面直线 a 与 b 所成的角为 50°，P 为空间一定点，则过 P 且与 a，b 所成角都是 30°的直线有且仅有 [ ]

A．1 条

B．2 条

C．3 条

D．4 条

9-4-29 在二面角α-l-β的一个平面α内有一条直线 AB，它与棱 l 的夹角为 45°，AB 与平面β所成的角为 30°，则这个二面角的度数为 [ ]

A．60°

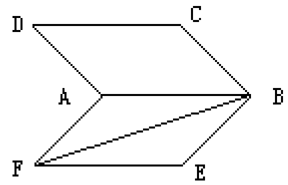
B．45°

C．90°

D．30°

9-4-30　AB 是异面直线 CA 和 DB 的公垂线段，且 AB=CD=DB，若直线 AC 与 BD 成 60°角，则 AB 与 DC 所成的角等于______度.

9-4-31　如右图.正方形 ABCD 所在平面与正方形 ABEF 所在平面成 60°的二面角，则异面直线 AD 与 BF 所成角的余弦值是______.



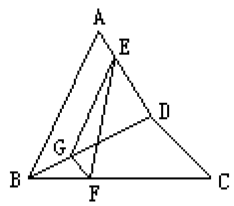
9-4-32 平面α∩平面β $=l$，$AM\subset\alpha$，且$AM\perp\beta$，$M\in l$．$B\in\beta$，且 AB 与平面β成 45°角.此时 AB 与平面α所成角的取值范围是______；若 AB 在平面β内的射影与棱 l 成 45°角，则 AB 与平面α所成角的大小是______.

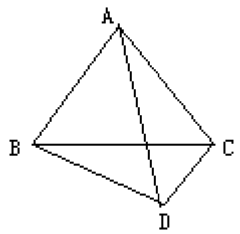
9-4-33　在 45°的二面角α-AB-β的一个平面α内有一个以 AB 为直径的半圆;M 为半圆上一点;直线 AM，BM 与平面β所成的角分别为θ_1，θ_2.则

$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$=______

9-4-34　已知∠AOB=90°，过 O 点引∠AOB 所在平面的斜线 OC 与 OA，OB 分别成 45°，60°角，则以 OC 为棱的二面角的余弦值为______.

9-4-35　如下左图.AB，CD 是两条异面直线；AB=CD=3；E，F 分别是线段 AD，BC 上的点，且 AE：ED=BF：FC=1：2，EF $=\sqrt{7}$．求AB与CD所成角的大小.



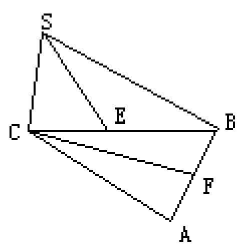


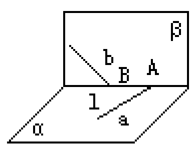
9-4-36　如上右图.直二面角 A-BC-D 中，BC=6，AB=AC，∠BDC=60°，∠BAC=∠BCD=90°.

(1)求证：平面 ABD⊥平面 ADC；

(2)求直线 AD 和 BC 所成角的正切值.

9-4-37 如下左图．SC⊥平面ABC；且△ABC为边长是$4\sqrt{2}$的正三角形；又 SC=2；E，F 分别为 BC，AB 的中点.求 SE 与 CF 所成角的大小.

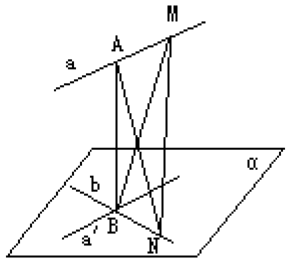


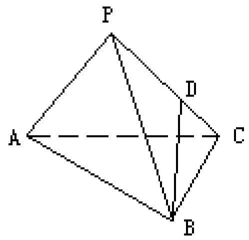


9-4-38 如上右图，平面α⊥平面β，α∩β $=l$；直线$a\subset\alpha$，且a是平面β的斜线，直线$b\subset\beta$，且b是平面α的斜线．若a与β，b与α均成

45°角，求异面直线 a 与 b 所成角的大小．

9-4-39　如下左图．两条异面直线 a，b 所成的角为 30°；它们的公垂线与 a，b 分别交于 A，B，且 AB=d；又 M∈a，N∈b；∠AMB=45°，∠ANB=30°．求 MN 与 AB 所成角的大小．





9-4-40　如上右图．正四面体 P-ABC 中，D 是 PC 的中点．

(1)求 BD 与 PA 所成角 α 的正弦值；

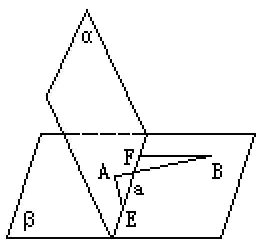
(2)求 BD 与平面 ABC 所成角 β 的正弦值．

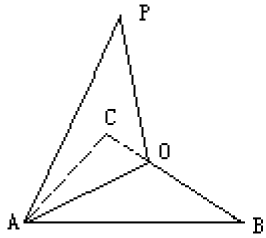
9-4-41　如下左图．在 120°的二面角 α-a-β 的两个面内，分别有点 A∈a，点 B∈β；A，B 到棱 a 的距离分别为 2 和 4；线段 AB=10．

(1)求 A，B 在棱 a 上的射影间的距离；

(2)求直线 AB 在棱 a 所成角的余弦；

(3)求直线 AB 与 β 所成角的正弦．





9-4-42　如上右图．Rt△ABC 中，∠A=90°，AB=3，AC=4；PA 为平面 ABC 的斜线；∠PAB=∠PAC=60°．

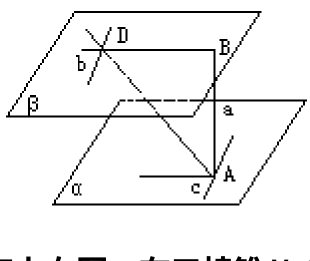
(1)求 PA 与平面 ABC 所成角的大小；

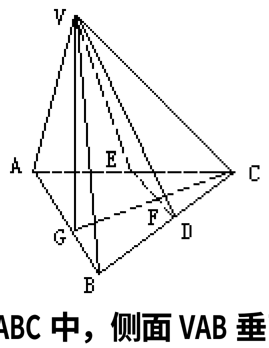
(2)PA 等于多少时，P 点在平面 ABC 内的射影 O 恰好落在 BC 上？

9-4-43　如下左图．直线 a⊥平面 α，垂足为 A；直线 b 与 a 是异面直线；且 b⊥a，b∉α．

(1)求证：b∥α；

(2)如果 B∈a，D∈b；且 BD⊥b，BD∥α；a，b 间的距离为 d，AB=m．求 AD 与 α 所成角的大小．





9-4-44　如上右图，在三棱锥 V-ABC 中，侧面 VAB 垂直于底面 ABC；且侧面 VAB 与底面 ABC 是两个全等的正三角形；D，E 分别为 BC，AC 的中

点．求侧棱 VC 和截面 VDE 所成角的大小．

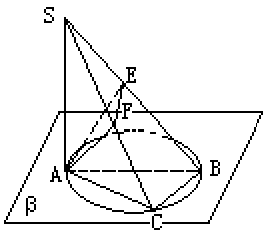
9-4-45 正三棱台上，下底面面积分别为$4\sqrt{3}$和$16\sqrt{3}$，侧棱长为$\frac{8}{3}\sqrt{3}$．求侧棱与所对侧面所成的角的大小．

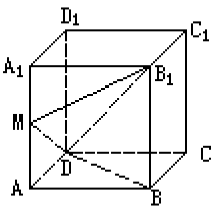
9-4-46 如下左图．平面β内有一以 AB 为直径的圆；过 A 作 SA⊥平面β；C为$\overset{\frown}{AB}$弧上一点；连SB，SC．

(1)求证：平面 SAC⊥平面 SBC；

(2)若 A 在 SB，SC 上的射影分别为 E，F，求证∠AEF 为二面角 C-SB-A 的平面角；

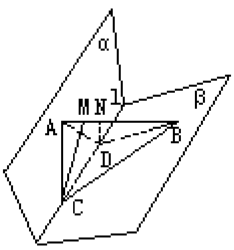
(3)若$\angle ABS = 30°$，$\angle BAC = \theta$，$\angle AEF = \varphi$，求证：$tg\theta \cdot tg\varphi = 2$．

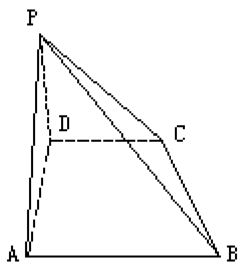




9-4-47 如上右图．正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是棱 A_1A 的中点．连结 MB_1，B_1D，MD．求△MDB_1 所在平面与平面 ABCD 所成的锐二面角的大小．

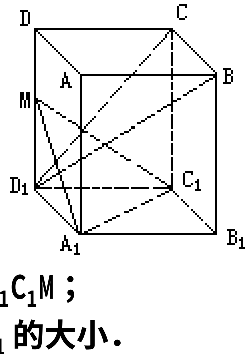
9-4-48 如下左图．长度为 2 的线段 AB 夹在两个互相垂直的平面α，β之间，A∈α，B∈β；AB 与α，β分别成 45°，30°角；A，B 在α与β的交线 l 上的射影分别为 C，D，且 CD=1．求二面角 C-AB-D 的大小．





9-4-49 如上右图．ABCD 是直角梯形，DA⊥AB；PD 垂直于平面 ABCD；PD=AD=AB=2CD=1．求二面角 A-PB-C 的大小．

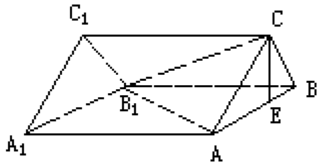
9-4-50 右如图．正四棱柱 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 底面边长为 3，侧棱长为 4；连结 CD_1；作 C_1M⊥CD_1 交 DD_1 于 M．



(1)求证：BD_1⊥平面 A_1C_1M；

(2)求二面角 C_1-A_1M-D_1 的大小．

9-4-51　如下右图．直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 $AA_1=4cm$；它的底面△ABC 中有 AC=BC=2cm．∠C=90°；E 是 AB 的中点．



(1)求证：$CE\perp AB_1$；

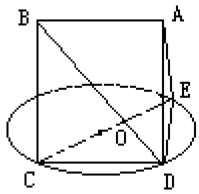
(2)求证：CE和AB_1所在异面直线的距离为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$cm；

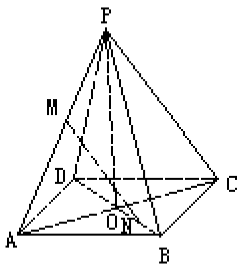
(3)求截面 ACB_1 与侧面 ABB_1A_1 所成较小的二面角的大小．

9-4-52　如下左图．平面 ABCD 与平面 CDE 的交线是 CD，线段 CD 既是半径为$\frac{3}{2}\sqrt{7}$的⊙O的弦，又是正方形ABCD的一条边；A点在平面 CDE 上的射影是⊙O 上异于 C，D 的点 E，且 AE=3．求：

(1)AE 与 BC 间的距离；

(2)二面角 B-CD-E 的大小．



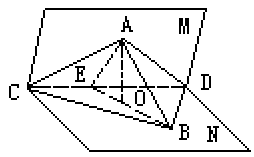


9-4-53　如上右图．正四棱锥 P-ABCD 的底面边长和各侧棱长均为 13；M，N 分别是 PA，BD 上的点，且 PM∶MA=BN∶ND=5∶8．

(1)求证：直线 MN∥平面 PBC；

(2)求直线 MN 与平面 ABCD 所成的角．

9-4-54　在二面角 M-CD-N 中，A 为平面 M 上一定点，且△ADC 的面积为定值 S，DC=a；B 为平面 N 内一点．若 AB⊥CD，AB 与 N 成 30°(如右图)．求△BCD 面积的最大值，并求取得最大值时二面角 M-CD-N 的大小．



3．翻折问题中的距离与角

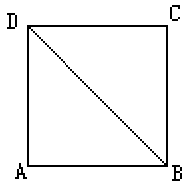
提要

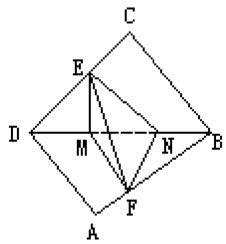
(1)解翻折问题时，要研究两个图形：一个是翻折前图形，另一个是翻折后的图形．还要研究在翻折过程中的变量和不变量．

(2)解翻折问题的一般步骤是：①准确地画出翻折前的平面图形及翻折后的空间图形；②确定翻折过程中的变量与不变量；③根据不变量及有关定理、公式进行推理或计算．

例题

例 9-4-13　将边长为 1 的正方形 ABCD(下左图)沿对角线 BD 翻折成直二面角，求翻折后 AB 与 CD 的距离．





解　如上右图．设 EF 为 AB 与 CD 的公垂线．在面 BCD 内作 EM⊥BD，则 EM 垂直于面 ABD；在面 ABD 内作 FN⊥BD，则 FN 垂直于面 BCD．连 EN，FM．由三垂线定理的逆定理得 FM⊥AB，EN⊥CD．于是△DME，△DEN，△BNF，△BFM 都是等腰直角三角形，于是

$$\mathrm{DM}=\mathrm{MN}=\mathrm{NB}，\mathrm{EM}=\mathrm{DM}=\frac{1}{3}\mathrm{BD}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\mathrm{MF}=\frac{2}{3}\mathrm{AD}=\frac{2}{3}$$

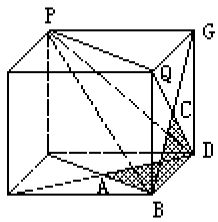
在 Rt△EMF 中，

$$\mathrm{EF}=\sqrt{\mathrm{EM}^2+\mathrm{MF}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

即翻折后AB与CD的距离为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

注　(i)上述解题方法属定义法．本题也可用代数法求解．

(ii)下面给出另一种解法，这种解法一般称为补形法．

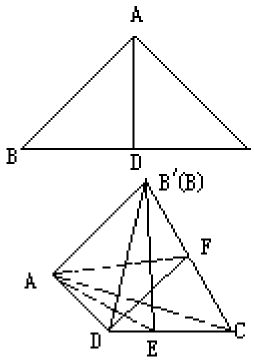


如右图，把翻折后的图形补成一个正方体．易知正方体的边长为$\sqrt{2}$．连PQ，PD，PB．由PQ∥AB知AB∥面DPQ．则AB到面DPQ的距离 d 就是两异面直线的距离．用两种方法计算三棱锥 B-DPQ 的体积，有

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(DQ)^2\cdot d=V_{B-DPQ}=V_{P-BDQ}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}BD\cdot BQ\right)\cdot PG$$

把$BD=BQ=PG=\sqrt{2}$，$DQ=2$代入，即可得$d=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

例9-4-14 已知等腰直角△ABC(右上图)的斜边$BC=\sqrt{2}$，AD是BC边上的高.沿AD把△ABC折成一个二面角,使B到达B′,且BC=AD(如右下图).



(1)求证：平面B′DC⊥平面ADC；
(2)求AB′与平面ADC所成的角；
(3)求二面角A-B′C-D的大小.

解 (1)$\left.\begin{matrix}AD\perp DC\\AD\perp DB'\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}AD\perp\text{平面}B'DC\\AD\subset\text{平面}ADC\end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow$ 平面$B'DC\perp$平面ADC

(2)取CD的中点E．连B′E，AD．由△ABC是等腰直角三角形，得BD=DC=AD.又B′C=AD,B′D=BD,所以B′D=DC=B′C,于是B′E⊥DC.又已证平面B′DC⊥平面ADC，所以B′E⊥平面ADC．故∠B′AE为AB′与平面ADC所成的角.

由题设可得$AB'=AD=1$，$B'E=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{6}}{4}$，在$Rt\triangle B'AE$中，$\sin\angle B'AE=\frac{B'E}{AB'}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，故$\angle B'AE=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$．即$AB'$与平面$ADC$所成的角为$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$．

(3)取B′C的中点F．连DF，AF．则由AB′=AC，DB′=DC得AF⊥B′C，DF⊥B′C，所以∠AFD为二面角A-B′C-D的平面角．由AD⊥平面B′DC得∠ADF=90°．在Rt△ADF中，

$$tg\angle AFD=\frac{AD}{DF}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

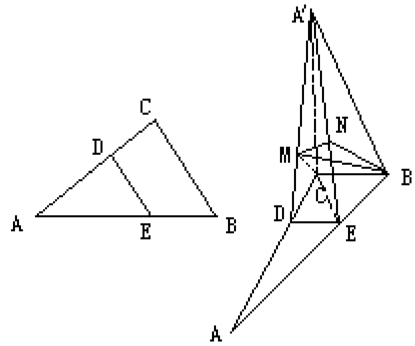
所以$\angle AFD=\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$，即二面角$A-B'C-D$的大小为$\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

例 9-4-15　Rt△ABC 中，∠C=90°，∠A=30°，BC=a，D，E 分别为 AC，AB 上二点，且 DE∥BC(如下左图)．现沿 DE 将△ADE 折起，使 A 到达 A′，此时 A′点在平面 BCDE 上的射影恰好落在 BC 上，且四棱锥 A′-BCDE 的各个侧面均为直角三角形(如下右图)．

(1)求二面角 A′-BE-C 的大小；

(2)在 A′D 上取一点 M，过 B，C，M 作四棱锥的截面，求证截面 BCMN 为直角梯形；

(3)当 M 在何处时，线段 BM 的长最短？BM 的最小值是多少？



解　(1)$\left.\begin{array}{l}DE\perp DC\\ DE\perp DA'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}DE\perp 平面A'CD\\ DE\subset 平面BCDE\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ 平面$A'CD\perp$平面$BCDE$

于是过 A′作平面 BCDE 的垂线在平面 A′CD 内；又已知 A′在平面 BCDE 上的射影落在 BC 上，所以 A′的射影恰为 C．显然△A′CD，△A′DE 都是直角三角形；又已知△A′BE 也是直角三角形且只能是∠A′EB=90°(由 A′的射影恰为 C 知 CD＜DA，于是由

$\frac{BE}{EA}=\frac{CD}{DA}$得$BE<EA'$，所以$\angle BA'E<90°$；若$\angle A'BE=90°$，则得$BE\perp BC$，与$\angle EBC=60°$矛盾)．连$CE$，则$BE\perp CE$，所以$\angle A'EC$为二面角$A'-BE-C$的平面角．由$BC=a$，$BE=\frac{a}{2}$，$CE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$A'E=\frac{3}{2}a$，于是在$Rt\triangle A'CE$中有

$$\cos\angle A'EC=\frac{CE}{A'E}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\angle A'EC=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$$

即二面角$A'-BE-C$的大小为$\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$．

$$(2)\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BC\parallel DE\\ DE\subset A'DE\end{array}\right\}\Rightarrow BC\parallel 平面A'DE\\ \left.\begin{array}{r}\\ 平面BCMN\cap平面A'DE=MN\end{array}\right\}\Rightarrow BC\parallel MN\\ \left.\begin{array}{l}BC\perp 平面A'CD\\ CM\subset 平面A'CD\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}BC\perp CM\\ BN\nparallel CM\end{array}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow BCMN$为直角梯形

(3)由 $BM^2=BC^2+CM^2=a^2+CM^2$ 知，当 CM 最小时，BC 取最小值．当 CM 最小时，有 CM⊥A′D．因为

$$CD=\frac{1}{2}CE=\frac{\sqrt{3}}{4}a，A'D=\sqrt{3}a-\frac{\sqrt{3}}{4}a=\frac{3\sqrt{3}}{4}a$$

$$A'C=\sqrt{A'D^2-CD^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$$

所以$CM=\frac{A'C\cdot CD}{A'D}=\frac{\sqrt{6}}{6}a$．此时，$BM=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2}=\frac{\sqrt{42}}{6}a$．

即当CM⊥A′D时，BM的长最短，其最小值为$\frac{\sqrt{42}}{6}a$．

习题

9-4-55　菱形 ABCD 的∠A=60°，沿对角形 BD 将△ABD 折起，使之与△BCD 成直二面角，则折起后的异面直线 AB 和 CD 所成角的余弦值为　[　]

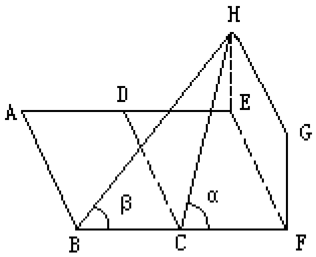
A．$\frac{1}{3}$

B．$\frac{1}{4}$

C．$\frac{\sqrt{3}}{4}$

D．$\frac{\sqrt{2}}{3}$

9-4-56　同一个平面上三个相同的正方形 ABCD,CDEF,EFGH 相接.将正方形 EFGH 沿 EF 折起，使之与另外两个正方形所在平面垂直(如右图)．设∠FCH=α，∠FBH=β，则α+β=　[　]



A．45°

B．60°

C．90°

D．120°

9-4-57 菱形ABCD中，$\angle A=60°$，边长为$\sqrt{3}$．沿对角线BD把它折成 60°的二面角，则 AC 与 BD 的距离是　[　]

A．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

B．$\frac{3}{4}$

C．$\dfrac{3}{2}$

D．$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

9-4-58　CD是Rt△ABC斜边AB上的高．将△BCD沿CD折转(B转到B′)，使二面角B′-CD-A成直二面角，则△B′CA是　　　　[　　]

A．锐角三角形

B．钝角三角形

C．直角三角形

D．不能确定

9-4-59　把边长为a的正△ABC沿高线AD折成60°的二面角，则A到BC的距离为　　　　[　　]

A．a

B．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$

C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

D．$\dfrac{\sqrt{15}}{4}a$

9-4-60　Rt△ABC中，AC=BC=2．以AC，AB的中点连线MN为折痕，把三角形折成120°的二面角，A点折到A′的位置，则A′点到BC的距离为______，A′M和NB所成的角的大小为______，A′B和平面BCMN所成角的大小为______．

9-4-61　将一个直角三角形沿斜边上的高折成直二面角后，两条直角边的夹角为θ，则θ的取值范围是______．

9-4-62　将锐角A为60°，边长为a的菱形ABCD沿对角线BD折成二面角θ，若θ∈[60°，120°]，则AC与BD的最大距离是______，最小距离是______．

9-4-63　在直角梯形ABCD中，AB∥CD，∠D=45°，AE⊥CD，垂足为E．把△ADE沿AE折起，使二面角C-AE-D为45°，这时点D在平面ABCE内的射影恰好落在C点，则∠DAB的度数等于______．

9-4-64　已知矩形ABCD，AB=4，BC=3．沿对角形AC把矩形折成二面角D-AC-B，并使D点在平面ABC内的射影落在AB上．

(1)求二面角D-AC-B的余弦值；

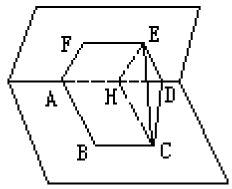
(2)求折后∠ADB的大小．

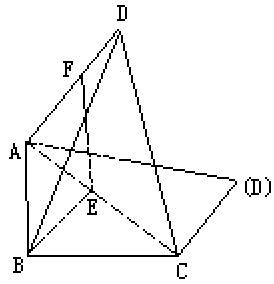
9-4-65　BD是边长为a的正方形ABCD的对角线．把△ABD沿BD折起，使平面ABD与平面BCD成120°的二面角．求二面角A-CD-B的大小．

9-4-66　将正六边形ABCDEF沿对角线AD折成二面角F-AD-C(如下左图)．

(1)求证：AD⊥CE；

(2)若CF与AD成30°角，求二面角F-AD-C的大小．





9-4-67　在平面四边形 ABCD 中，AB=BC=CD=a，∠B=90°，∠C=135°．沿对角线 AC 将此四边形折成直二面角(如上右图)．

(1)求证：AB⊥平面 BCD；

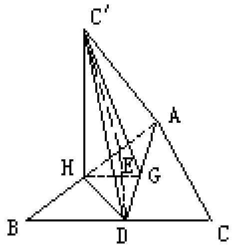
(2)求面 ABD 与面 ACD 所成二面角的大小；

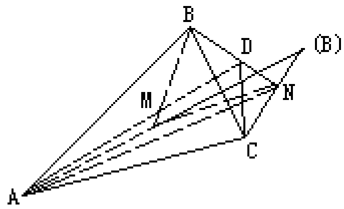
(3)求点 C 到平面 ABD 的距离．

9-4-68　设 D 是△ABC 的 BC 边上一点．把△ACD 沿 AD 折起，使 C 点所处的新位置 C′在平面 ABD 上的射影 H 恰在 AB 上(如下左图)．

(1)求证：C′D 与平面 ABD 和平面 AHC′所成的两个角之和不超过 90°；

(2)若∠BAC=90°，二面角 C′-AD-H 为 60°，求∠BAD 的大小．



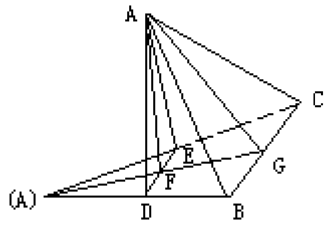


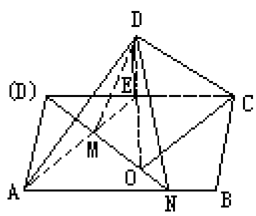
9-4-69　已知等腰直角三角形 ACB，其中∠C=90°；M，N 分别是 AB，BC 的中点．把这等腰三角形沿 MN 折成 60°的二面角 B-MN-A(如上右图)．求二面角 A-BN-C 的大小．

9-4-70　等边△ABC 的边长为 a．沿平行于 BC 的线段 DE 折起，使平面 ADE⊥平面 BDEC(如下左图)．设 A 到 DE 的距离为 x，AB 的长为 d．

(1)x 为何值时，d^2 取得最小值，最小值是多少？

(2)设∠BAC=θ，试求 cosθ 的最小值．





9-4-71　矩形 ABCD 中，AB=4，BC=3；E 为 DC 边上的中点．沿 AE 折成 60°的二面角．分别求 DE，DC 与平面 AC 所成的角的大小(如上右图)．

第十部分　多面体和旋转体

(一)多面体和旋转体的概念

提要

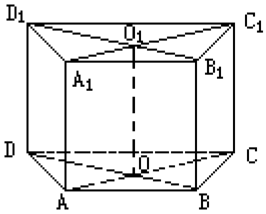
(1)中学立体几何中主要研究两类几何体：一类是多面体，包括棱柱、棱锥、棱台等；另一类是旋转体，包括圆柱、圆锥、圆台、球和球缺．掌握上述几何体的概念及基本性质是解题的基础．

(2)多面体与旋转体中有关问题的解法依据是线面关系中的有关定理．解题的主要方法是转化法，即把空间问题转化为平面问题来解决．

例题

例 10-1-1　试证：若四棱柱的两个对角面都与底面垂直，则这个四棱柱是直四棱柱．

已知：四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，对角面 $ACC_1A_1D_1$⊥底面 ABCD，对角面 BDD_1B_1⊥底面 ABCD(如右图)．



求证：四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱．

分析　只要证明有一条侧棱与底面垂直即可．

解　设对角线 AC 与 BD 交于 O 点，A_1C_1 与 B_1D_1 交于 O_1 点．连结 OO_1．

$$\left.\begin{array}{l}AA_1 /\!/ BB_1\\ AA_1 \not\subset \text{平面}BDD_1B_1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}AA_1 /\!/ \text{平面}BDD_1B_1\\ \text{平面}ACC_1A_1\cap\text{平面}BDD_1B_1=OO_1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AA_1 /\!/ OO_1$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{平面}ACC_1A_1\perp\text{平面}ABCD\\ \text{平面}BDD_1B_1\perp\text{平面}ABCD\\ \text{平面}ACC_1A_1\cap\text{平面}BDD_1B_1=OO_1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}OO_1\perp\text{平面}ABCD\\ AA_1 /\!/ OO_1\end{array}\right\}\Rightarrow AA_1\perp\text{平面}ABCD$$

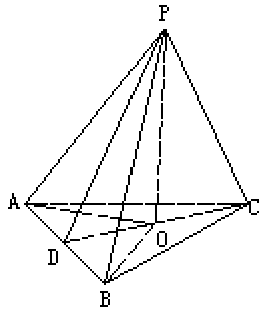
$$\Rightarrow \text{四棱柱}ABCD-A_1B_1C_1D_1\text{是直棱柱}$$

注　由上面证明不难得到下面结论：

(i)直 n 棱柱的两个对角面相交，则交线必垂直于底面；

(ii)如果 n 棱柱(n≥4)有两个对角面垂直于底面，且这两个对角面所在的平面不平行，那么这个 n 棱柱是直 n 棱柱．

例 10-1-2　已知三棱锥 P-ABC 中，三条侧棱两两垂直(如右图)．求证：



(1)顶点 P 在底面 ABC 内的射影 O 是△ABC 的垂心；

(2)△ABC 是锐角三角形；

$(3) S_{\triangle PAB}^{2}=S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ABO}$

$(4) S_{\triangle PAB}^{2}+S_{\triangle PBC}^{2}+S_{\triangle PCA}^{2}=S_{\triangle ABC}^{2}$

分析　(1)要证 AO⊥BC，只需证 PA⊥BC 即可；(2)要证△ABC 为锐角三角形，一般可有两条途径：一是应用余弦定理，求出三内角的余弦值为正；二是证明垂心 O 在△ABC 内．(3)因 AB 是△PAB，△ABC，△ABO 的公共边，所以只要证 $PD^2=DC\cdot DO$ 即可．(4)可由(3)推出．

解　$(1)\left.\begin{array}{l}PA\perp PB\\PA\perp PC\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}PA\perp \text{平面}PBC\\BC\subset\text{平面}PBC\end{array}\right\}$

$\Rightarrow PA\perp BC$

因 PO⊥平面 ABC，所以 AO 是 PA 在平面 ABC 内的射影，由三垂线定理的逆定理，得 AO⊥BC．同理可得 BO⊥AC．故 O 是△ABC 的垂心．

(2)设 PA=x，PB=y，PC=z，由(1)知△PAB，△PBC，△PCA 均为直角三角形，于是 $AB^2=x^2+y^2$，$BC^2=y^2+z^2$，$CA^2=z^2+x^2$．故有

$$AB^2+BC^2=(x^2+y^2)+(y^2+z^2)>x^2+z^2=CA^2$$

$$\Rightarrow \cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2\cdot AB\cdot BC}>0\Rightarrow\angle ABC\text{为锐角}$$

同理，∠BCA，∠BAC 为锐角．

故△ABC 为锐角三角形．

(3)连 CO 并延长 CO 交 AB 于 D．连 PD．

$O\text{为}\triangle ABC\text{的垂心}\Rightarrow CD\perp AB\Rightarrow PD\perp AB$

由(1)知△PDC 为直角三角形，由射影定理知，$PD^2=DC\cdot DO$，于是

$$\left(\frac{1}{2}AB\cdot PD\right)\left(\frac{1}{2}AB\cdot PD\right)=\left(\frac{1}{2}AB\cdot DC\right)\cdot\left(\frac{1}{2}AB\cdot DO\right)$$

即$S_{\triangle PAB}^{2}=S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle ABO}$

(4)由(3)知，

$S_{\triangle PAB}^{2}=S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle ABO}$，$S_{\triangle PBC}^{2}=S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle BCO}$，$S_{\triangle PCA}^{2}=S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle CAO}$

上述三式相加得

$$S_{\triangle PAB}^{2}+S_{\triangle PBC}^{2}+S_{\triangle PCA}^{2}=S_{\triangle ABC}(S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BCO}+S_{\triangle CAO})$$

$$=S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABC}^{2}$$

注　我们还可以有以下结论：

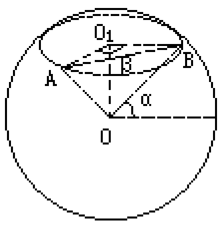
(i)若三棱锥的三个侧面两两垂直，则顶点在底面上的射影是底面三角形的垂心．

(ii)若三棱锥的侧棱都相等，则顶点在底面上的射影是底面三角形的外心；若三棱锥的侧棱与底面所成的角都相等，则顶点在底面上的射影是底面三角形的外心；若三棱锥的顶点在底面上的射影到三条侧棱的距离相等，则顶点在底面上的射影是底面三角形的外心．

(iii)若三棱锥的侧面与底面所成的二面角都相等，则顶点在底面上的射影是底面三角形的内心；若三棱锥的侧棱与底面相邻的两条边成等角，则顶点在底面上的射影是底面三角形的内心；若三棱锥的高和侧面成等角，则顶点在底面上的射影是底面三角形的内心；若三棱锥的顶点在底面上的射影到三个侧面的距离相等，则其射影是底面三角形的内心．

例 10-1-3　把地球看作半径为 R 的球，A，B 是北纬 α 度圈上的两点，它们的经度差为 β 度．求 A，B 两点间的球面距离．

解　如右图．设 α 度的纬线圆圆心为 O_1，半径为 r，则 $r=R\cos\alpha$．由题设知 $\angle AO_1B=\beta$，则



$$AB=2r\cdot\sin\frac{\beta}{2}=2R\cos\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

在△AOB中，

$$\sin\left(\frac{1}{2}\angle AOB\right)=\frac{\frac{1}{2}AB}{R}=\cos\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

所以　$\angle AOB=2\arcsin\left(\cos\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)$

于是，A，B两点间的球面距离为

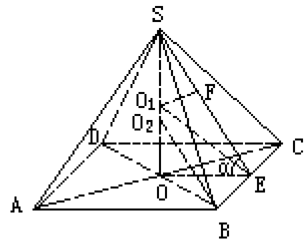
$$l=2R\arcsin\left(\cos\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

注　(i)注意球面上两点间的(球面)距离与球面上两点间的直线距离的区别．

(ii)求球面上两点间的距离，关键在于求出球心对这两点的张角 θ(弧度数)，然后利用公式 $l=\theta R$ 即可求出球面上两点的球面距离．为此又必须先求出两点间的直线距离．

(iiii)球面上两点的位置，分以下三种情形：①A，B 两点的经度相同，纬度不同；②A，B 两点的纬度相同，经度不同；③A，B 两点的经度不同，纬度也不同．我们只要求掌握前两种情况．

例 10-1-4　正四棱锥内接于半径为 R 的球且外切于半径为 r 的球，求证：$\frac{R}{r}\geq\sqrt{2}+1$．



解　设正四棱锥 S-ABCD 底面边长为 a，O 是顶点 S 在底面上的射影，O_1，O_2 分别是它的内切球与外接球的球心(如右图)．则 O_1，O_2 在 SO 上．作 O_1F⊥平面 SBC，SF 的延长线交 BC 于 E，则 E 是 BC 的中点．连 EO，O_1E．记∠SEO=α，SO=h，有

$$r = O_1O = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

在 $Rt\triangle O_2OB$ 中，$O_2B = R$，$O_2O = SO - SO_2 = h - R$，$OB = \frac{\sqrt{2}}{2}a$．

依勾股定理，有

$$(h-R)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = R^2 \Rightarrow R = \frac{2h^2 + a^2}{4h}$$

注意到 $h = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$，即得 $R = \frac{a(\operatorname{tg}^2\alpha + 2)}{4\operatorname{tg}\alpha}$．所以

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 2}{2\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

令 $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = t$，整理后可得

$$\frac{R}{r} = \frac{1+t^2}{2t(1-t)}$$

令 $\frac{1+t^2}{2t(1-t)} = y$，去分母得

$(2y+1)t^2-2yt+1=0$　　　(i)

记 $f(t) = (2y+1)t^2 - 2yt + 1$，由 $0 < t = \operatorname{tg}^2 - \frac{\alpha}{2} < 1$ 知，方程(i)在(0，1)内有实根，故

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \\ 0 < -\frac{-2y}{2(2y+1)} < 1 \end{cases} \quad 或 \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$$

解之，并注意到 $y > 0$，即得

$$\frac{R}{r} = y \geq \sqrt{2} + 1$$

习题

10-1-1　下面的各多面体中，长方体是　　　　　　　　　　[　　]

A．侧面都是矩形的棱柱

B．侧面都是矩形的直棱柱

C．底面是矩形的直棱柱

D．对角面是全等的矩形的四棱柱

10-1-2　一棱锥的各棱都相等，则这棱锥必不是　　　　[　　]

A．三棱锥

B．四棱锥

C．五棱锥

D．六棱锥

10-1-3　若三棱锥的顶点在底面的射影是底面三角形的内心，则下列命题中错误的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．侧面和底面所成的二面角都相等

B．顶点到底面各边的距离相等

C．这个棱锥是正三棱锥

D．顶点在底面的射影到各侧面的距离相等

10-1-4　在斜棱柱的所有侧面中，矩形最多有　　　　　　[　　]

A．2个

B．3个

C．4个

D．6个

10-1-5　已知命题

①球被平面所截得的一部分叫做球冠

②圆锥是将直角三角形旋转一周所得的几何体

③过球面上两个不同的点，只能作一个球的大圆

这些命题中，真命题的个数为　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．0

B．1

C．2

D．3

10-1-6　长方体的一条对角线与它一个顶点上三条棱所成的角分别

为α，β，γ；与过这个顶点的三个面所成的角分别为θ，φ，ψ，则

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$______

$\sin^2\theta+\sin^2\varphi+\sin^2\psi=$______

10-1-7　正三棱锥底面边长为a，侧棱与底面所成的角为45°则它的斜高等于______．

10-1-8　三棱锥的三条侧棱两两垂直，底面上一点到三个侧面的距离分别为2㎝，3㎝，6㎝，则此点到三棱锥顶点的距离是______．

10-1-9　正三棱台侧面与底面成45°角，侧棱与底面成θ角，则tgθ=______．

10-1-10　A，B两地在同一纬线上，这两地间的纬线长为πRcosα(R是地球半径，α是这两地的纬度的弧度数)，则这两地的球面距离为

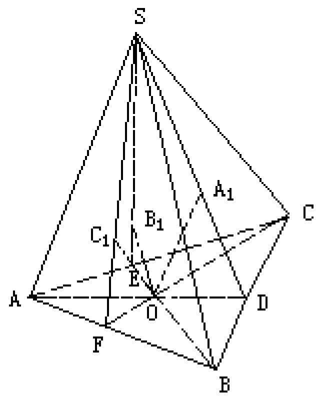
______.

10-1-11　证明：平行六面体所有棱长的平方的和等于它的所有的对角线的平方的和．

10-1-12　证明 $n(n\geq 3)$ 棱柱所有相邻二侧面构成的二面角之和为 $(n-2)\cdot 180°$．

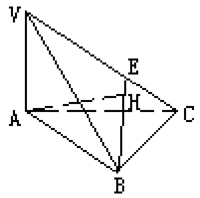
10-1-13　若四面体中有两条高线相交，则另外两条高线也必定相交．

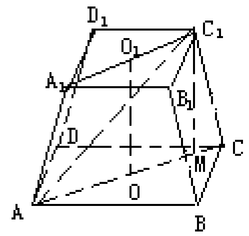
10-1-14　从三棱锥 S-ABC 的底面 ABC 上一点 O 出发，作直线 OA_1，OB_1，OC_1 分别平行于棱 SA，SB，SC，和面 SBC，SCA，SAB 分别交于 A_1，B_1，C_1(如右图)．证明：



$$\frac{OA_1}{SA}+\frac{OB_1}{SB}+\frac{OC_1}{SC}=1$$

10-1-15　如下左图．在三棱锥 V-ABC 中，VA⊥平面 ABC；△ABC 是锐角三角形；H 是 A 在面 VBC 上的射影．求证：H 不可能是△VBC 的垂心．





10-1-16　如上右图．正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 $AC_1\perp$ 侧棱 C_1C，下底面边长 AB=27，侧棱长为 24．求这四棱台的高和上底面边长．

10-1-17　已知四棱柱的底面是梯形，求证：

(1)它有两个侧面互相平行，另两个侧面不平行；

(2)如果不平行的两个侧面都与底面垂直，则这个四棱柱是直棱柱．

10-1-18　将一个棱长均为 a 的正四棱锥的一个侧面与一个棱长均为 a 的正三棱锥的一面拼接，问：拼成的多面体是什么几何体？并证明你的结论．

10-1-19　求证：对角线相等的平行六面体是长方体．

10-1-20　已知正四棱锥 P-ABCD 的侧面与底面所成的角为 α，相邻两个侧面所成的二面角为 β．求证：$\cos^2\alpha+\cos\beta=0$．

(二)多面体和旋转体的表面积与体积

提要

(1)解几何体的求积问题一般应遵循先证后算的顺序，即先要根据直线与平面的有关定理确定其线面关系，然后运用面积与体积公式进行计算．

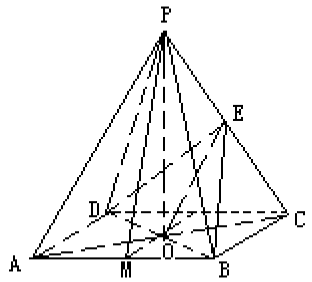
(2)求积问题的常用方法除直接应用公式外，还经常采用等积转换法与割补法．等积转换法一般用于体积计算(或应用体积求线段的长度)，是选择同一锥体的不同顶点与底面，或把锥体与等积的锥(柱)体转换，使之便于求出．割补法是指对几何体实施“割”或“补”，变整体为局部(或变局部为整体)，化不规则为规则，使问题容易解决．实施时，常见的是补台体为锥体，补锥体为柱体，扶斜柱体为直柱体，割多面体为四面体等．

1．多面体的表面与体积

例题

例 10-2-1　已知正四棱锥 P-ABCD 相邻两个侧面所成的二面角为 120°，底面边长 a，求它的侧面积和体积．

分析　关键是求出它的斜高与高．



解　如图．过底面中心 O 作 OE⊥PC 于 E．连结 BE，DE．根据三垂定理，由 OC⊥BD 得 PC⊥BD，于是 PC⊥平面 BDE，所以∠BED 是两个侧面所成二面角的平面角，故∠BED=120°，故∠BEO=

60°．已知底面边长为a，得$BO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$．

于是$OE+BO\cdot ctg60°=\frac{\sqrt{6}}{6}a$，$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

$$PC=\frac{OC^2}{CE}=\frac{\sqrt{3}}{2}a，PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=\frac{1}{2}a$$

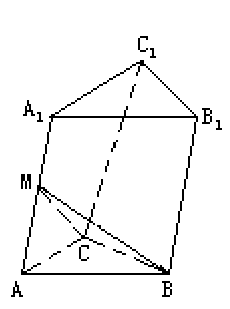
作PM⊥AB于M，则$PM=\sqrt{PO^2+OM^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，故

$$S_{侧}=4\cdot\frac{1}{2}AB\cdot PM=4\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\sqrt{2}a^2$$

$$V=\frac{1}{3}S\cdot PO=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{1}{2}a=\frac{1}{6}a^3$$

注　求锥体(或台体)的高或斜高时,要充分利用四个直角三角形(如本题中的 Rt△BMO，Rt△PMB，Rt△POB)．

例 10-2-2　如图．斜三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 a 的正三角形，侧棱长为 b，且侧棱 A_1A 与底面相邻两边 AB，AC 都成 45°角．求它的侧面积与体积．



分析　求斜棱柱的侧面积一般有两种方法：第一种是求出各个侧面的面积，再求其和；第二种是作出斜棱柱的直截面，若直截面的周长为 $C_{直}$，侧棱长为 l，则可应用公式 $S_{侧}=C_{直}\cdot l$ 来求．斜棱柱的体积除应用

公式 $V_{柱}$ S·h 外，也可应用公式 $V_{柱}=S_{直}\cdot l$（$S_{直}$表示直截面的面积，l为侧棱长）来求．下面用作直截面的方法求解．

$$\left.\begin{array}{l}AB=AC\\ \angle MAB=\angle MAC=45^\circ\\ AM=AM\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle BAM\cong\triangle CAM$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\angle BMA=\angle CMA=90^\circ\Rightarrow CM\perp A_1A\\ BM\perp A_1A\end{array}\right\}\Rightarrow A_1A\perp 面BMC$$

所以△BMC 是斜柱的直截面．

由$\angle MAB=\angle MAC=45^\circ$，$AB=AC=a$，得$MB=MC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$．

于是△BMC的周长为$c=\frac{\sqrt{2}}{2}a+a+\frac{\sqrt{2}}{2}a=(\sqrt{2}+1)a$，故

$$S_{侧}=c\cdot l=(\sqrt{2}+1)ab$$

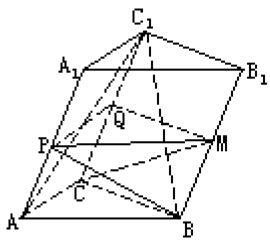
在△BMC中，$MB=MC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$BC=a$，根据勾股定理的逆定理知△BMC 直角三角形，即∠BMC=90°．于是

$$S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{1}{4}a^2$$

$$V=S_{\triangle BMC}\cdot l=\frac{1}{4}a^2b$$

因此，斜三棱柱的侧面积是$(\sqrt{2}+1)ab$，体积是$\frac{1}{4}a^2b$．

例 10-2-3　如图．三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V；P，Q 分别是侧棱 AA_1 和 CC_1 上的点，且 $AP=C_1Q$；M 是 BB_1 上的点．求四棱锥 M-APQC 的体积，



分析　欲求四棱锥 M-APQC 的体积，必须与已知的三棱柱的体积联系起来．为此设法先通过底的转换，再通过顶点的互换将四棱锥与等积的三棱锥联系起来．

解　由 BB_1∥平面 APQC 且 M 在 BB_1 上，知 M 到平面 APQC 的距离等于 B 到该下面的距离．由等底面积等高的两个棱锥等积可得 $V_{M-APQC}=V_{B-APQC}$．连 AC_1．由 A_1ACC_1 是平行四边形，且 $AP=C_1Q$，得

$$S_{梯形APQC}=\frac{1}{2}S_{\square A_1ACC_1}=S_{\triangle ACC_1}$$

于是　$V_{M-APQC}=V_{B-APQC}=V_{B-ACC_1}=V_{C_1-ABC}$

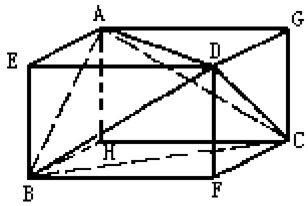
$$=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}V$$

注　本题多次运用等积转换法，不仅有四棱锥与四棱锥间的等积转换，三棱锥与三棱锥间的等积转换，也有四棱锥与三棱锥间的等积转换，是一个应用等积转换法的典型题．

例10-2-4　四面体ABCD中，$AB=CD=\sqrt{41}$，$AC=BD=\sqrt{34}$，$AD=BC=5$，求它的体积．

分析　如果直接按三棱锥的体积公式求解，底面积虽然不难求出，但求其高比较困难．由对棱相等可知，易把这四面体补成一个平行六面体，这样求体积就较易了．

解　分别过四面体ABCD的每一条棱作一个平面，使它与对棱平行，这样共得的三对平面，它们相交成一个平行六面体．原四面体是该平行六面体的内接四面体(如图)．



由作图知EG=BC，又已知BC=AD，于是EG=BC=AD故AEDG是矩形．同理，AEBH，EBFD也是矩形，于是AEDG-HBFC是长方体．

设AH=x，AE=y，AG=z，则

$$\begin{cases}x^2+y^2=41\\x^2+z^2=34\\y^2+z^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\\z=3\end{cases}$$

于是 $V_{长方体BG}=xyz=60$，$V_{D-BCF}=\frac{1}{6}V=10$

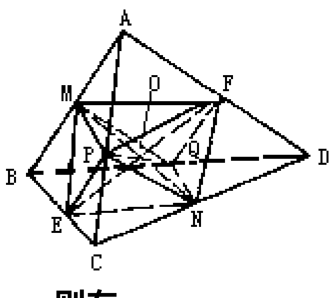
$V_{A-BHC}=V_{B-AED}=V_{C-AGD}=V_{D-BCF}=10$

所以　$V_{ABCD}=V_{长方体BG}-V_{A-BHC}-V_{B-AED}-V_{C-AGD}-V_{D-BCF}=60-4\times10=20$．

注　(i)本题是应用割补法求解．割补法可分分割与补形两种形式，上面的解法是应用后者．

本题也可应用割补法中分割法求解．简释如下：

设E，F，M，N，P，Q分别是各棱的中点，易知MENF，MPNQ，EPFQ是菱形，其对角线相交于一点O，且两两垂直平分(如图)．



设MN=x，EF=y，PQ=z，则有

$$\begin{cases}x^2+y^2=34\\y^2+z^2=41\\x^2+z^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\\z=5\end{cases}$$

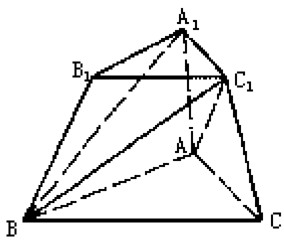
于是　$V_{ABCD}=V_{A-MPF}+V_{F-MPNQ}+V_{E-MPNQ}+V_{M-BEQ}+V_{P-ECN}+V_{F-QND}$

$$=\frac{5}{2}+5+5+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=20$$

(ii)本题中的四面体三组对棱分别相等，这样的四面体称为等面四面体(即四个面都是全等的)．

例 10-2-5　三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上、下底面积之比为 4∶9．连结 A_1B，BC_1 和 AC_1，把棱台分类三个棱锥 $B-A_1B_1C_1$，C_1-ABC，A_1-ABC_1．求这三个棱锥体积之比．

分析　本题关键是找出 A_1-ABC_1 的体积与 $B-A_1B_1C_1$ 或 C_1-ABC 的体积之间的关系．直接用棱锥体积公式来求比较困难，于是从整体入手，利用 A_1-ABC_1 的体积是棱台的体积减去另外两个锥体的体积得出．



解　如图．设三棱锥 $B-A_1B_1C_1$，C_1-ABC，A_1-ABC_1 的分别为 V_1，V_2，V_3，又设棱台的高为 h，上，下底面积分别为 S_1，S_2．依题意，得

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}S_1h}{\frac{1}{3}S_2h}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{9}\Rightarrow V_1=\frac{4}{9}V_2$$

又　$V_{棱台}=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)=\frac{1}{3}h(\frac{4}{9}S_2+\sqrt{\frac{4}{9}S_2^2}+S_2)$

$$=\frac{19}{9}\cdot\frac{1}{3}S_2h=\frac{19}{9}V_2$$

所以　$V_3=V_{棱台}-(V_1-V_2)=\frac{19}{9}V_2-\left(\frac{4}{9}V_2+V_2\right)=\frac{2}{3}V_2$

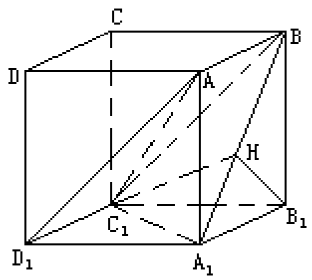
故　$V_1:V_2:V_3=4:9:6$

例 10-2-6　长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB=a，AD=b，$AA_1=c$，求异面直线 A_1B 与 AD_1 的距离．

分析　易知 AD_1∥平面 A_1BC_1，于是求异面直线 A_1B 与 AD_1 的距离可转化为求直线 AD_1 与平面 A_1BC_1 的距离．而

$$V_{A-BC_1A_1}=V_{B_1-BC_1A_1}=V_{B-B_1C_1A_1}=\frac{1}{6}abc$$

故可考虑应用体积法求解．



解　如图．连结 A_1C_1，C_1B．由 $AD_1 /\!/ BC_1$ 知 $AD_1 /\!/$ 平面 BC_1A_1，故直线 AD_1 与平面 BC_1A_1 的距离即为异面直线 AD_1 与 A_1B 的距离．

设点 A 到平面 BC_1A_1 的距离为 h，则有

$$V_{A-BC_1A_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle BC_1A_1}\cdot h$$

又 $$V_{A-BC_1A_1}=V_{B_1-BC_1A_1}=V_{B-B_1C_1A_1}=\frac{1}{6}abc$$

所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle BC_1A_1}\cdot h=\frac{1}{6}abc$

过 B_1 作 $B_1H\perp A_1B$ 于 H．连结 C_1H．根据 $C_1B_1\perp$ 平面 A_1B_1B，B_1H 是斜线 C_1H 在面 A_1B_1B 内的射影，于是由三垂线定理可得 $C_1H\perp BA_1$．所以

$$S_{\triangle BC_1A_1}=\frac{1}{2}BA_1\cdot C_1H=\frac{1}{2}\sqrt{A_1B_1^2+BB_1^2}\cdot\sqrt{B_1C_1^2+B_1H^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+\frac{a^2c^2}{a^2+c^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

于是 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot h=\frac{1}{6}abc$

故 $$h=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

即异面直线 A_1B 与 AD_1 间的距离为 $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$．

注　本题也可以下列形式出现：三棱锥 S-ABC 中，∠ASB=∠BSC=∠CSA=90°，三条侧棱长分别为 a，b，c，求顶点 S 到底面 ABC 的距离．

习题

10-2-1　一个平行六面中，一个顶点上的三条棱长都是 a；这三条棱中，每两条棱的夹角都是 60°．则其体积是　　[　　]

A．$\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$　B．$\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$

10-2-2　已知正六棱台的上，下底面边长分别为 2 和 4，高为 2，则其体积为　　[　　]

A．$32\sqrt{3}$　B．$28\sqrt{3}$　C．$24\sqrt{3}$　D．$20\sqrt{3}$

10-2-3　侧面都是直角三角形的正三棱锥，若底面边长为 a，则三棱锥的全面积是　　[　　]．

A．$\frac{3+\sqrt{3}}{4}a^2$　B．$\frac{3}{4}a^2$　C．$\frac{3+\sqrt{3}}{2}a^2$　D．$\frac{6+\sqrt{3}}{4}a^2$

10-2-4　一个正四棱台的上、下底面边长分别为 a、b，高为 h；且侧面面积等于两底面面积之和．则下列关系式中正确的是　［　　］．

A．$\frac{1}{h}=\frac{1}{a+b}$　B．$\frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　C．$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{h}$　D．$\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{h}$

10-2-5　若四面体的一条棱长为 x，其余棱长都为 1，它的体积为 F(x)，则 F(x)在其定义域上　［　　］

A．是增函数，但无最大值

B．是增函数，且有最大值$\frac{1}{4}$

C．不是增函数，但有最大值$\frac{1}{8}$

D．不是增函数，且无最大值

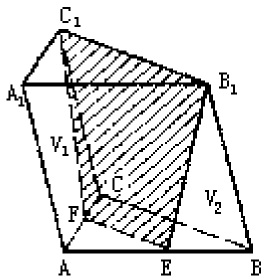
10-2-6 正四棱台上、下底边长分别为a，b，侧棱长为$\frac{1}{2}(a+b)$，则此棱台的侧面积为______．

10-2-7　三棱锥的底面边长分别为 9，10，11，各侧面与底面所成二面角均为 45°，则三棱锥的全面积为______．

10-2-8　三棱锥 S-ABC 的三条侧棱两两垂直，且 SA=5，SB=4，SC=3；D 为 AB 的中点，E 为 AC 的中点．则四棱锥 S-BCED 的体积为_____．

10-2-9　正方形 ABCD 边长为 2a，E 是 AB 中点．沿 CE 和 DE 将△CBE 和△DAE 折起，使 BE 和 AE 重合．则四面体 AECE 的体积为______．

10-2-10　如图．三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 E、F 分别为 AB、AC 的中点，平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1，V_2 的两部分，那么 V_1：V_2=______．



10-2-11　在四面体ABCD中，棱$AD=\sqrt{2}$，其余五条棱长都为1．

(1)求此四面体的体积；

(2)求面 ACD 与面 BCD 所成二面角的余弦值．

10-2-12　斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面是等腰直角三角形，其中 $AB=AC=2$，$BC_1=2\sqrt{6}$；且$BC_1\perp AC$；BC_1与底面ABC所成角的正切值为$\frac{\sqrt{15}}{3}$．

(1)求证 C_1 在底面内的射影 H 与 A，B 共线；

(2)求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积．

10-2-13　三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，AB=AC=a，∠BAC=90°；顶点 A_1 在底面 ABC 上的射影 M 为 BC 的中点．

(1)求证 BC 垂直于由三点 A_1，A，M 所确定的平面；

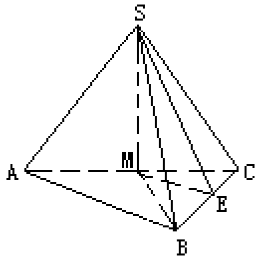
(2)如果平面 A_1ABB_1 与平面 ABC 所成的二面角为 60°，求三棱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积．

10-2-14　斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 2 的等边三角形；顶点 A_1 在底面的射影 O 是△ABC 的中心；AA_1 与 AB 的夹角为 45°．

(1)求证 $A_1A\perp$平面 A_1BC；

(2)求这个棱柱的侧面积．

10-2-15　如图．三棱锥 S-ABC 的底面 ABC 为正三角形，边长为 a；侧面 SAC 也是正三角形；且侧面 SAC⊥底面 ABC．求这三棱锥的侧面积．



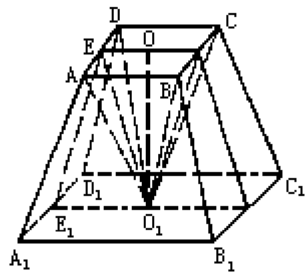
10-2-16　正三棱锥 P-ABC 的底面边长为 a；M，N 分别是侧棱 PB，PC 的中点，且过 A，M，N 三点的截面垂直于侧面 PBC．求：

(1)棱锥 P-ABC 的全面积；

(2)棱锥侧面与底面所成二面角的大小．

10-2-17　棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 两底面为矩形；上，下底面对角线的交点分别为 O_1 与 O，且 $O_1O\perp$底面 ABCD；下底面 ABCD 的边长分别为 54 和 30，上底面的周长是 112；两底面间的距离是 12．求此棱台的侧面积．

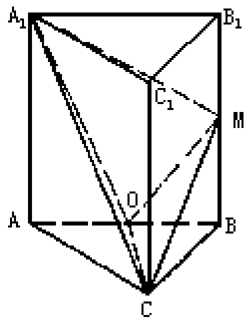
10-2-18　如图．在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内，以较小底面 ABCD 为底，较大底面中心 O_1 为顶点作内接正四棱锥．设大底边长为 a，小底边长为 b，且棱台的侧面积和内接正四棱锥的侧面积相等．求棱锥的高，并讨论此题是否总有解．

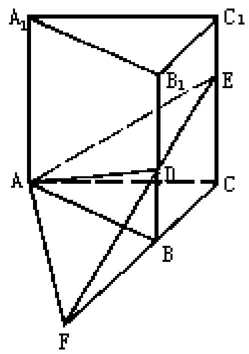


10-2-19　在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，AA_1=AC=a；AC⊥BC；O 为 AB 中点，M 为 BB_1 中点(如下图)．求：

(1)二面角 A_1-CO-M 的大小；

(2)三棱锥 A_1-COM 的体积．



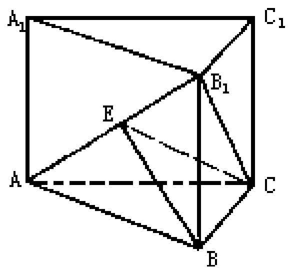


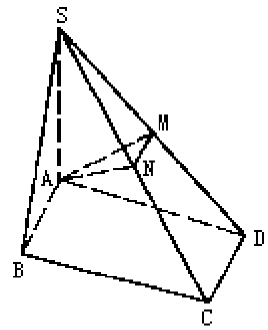
10-2-20　已知侧棱长大于底面边长的正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的底面面积是$\sqrt{3}\mathrm{cm}^2$；D，E分别是侧棱BB_1，CC_1上的点；且$EC=BC=2BD$(如上图)．

(1)求四棱锥 A-BCED 的体积；

(2)延长 ED 和 CB，设相交于 F．连结 AF．求截面 ADE 与底面 ABC 所成的二面角 E-AF-C 的度数．

10-2-21　直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的侧棱长为 a；底面边长 AB=BC=a；且 AB⊥BC(如下左图)．





(1)求四棱锥 B_1-ACC_1A_1 的体积；

(2)求二面角 B-AB_1-C 的余弦值．

10-2-22 如上右图，SA⊥平面ABCD；AN⊥SC；$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$；M为SD的中点；$AB=CD=1\mathrm{cm}$，$SA=AD=2\mathrm{cm}$，$BC=\sqrt{2}\mathrm{cm}$．

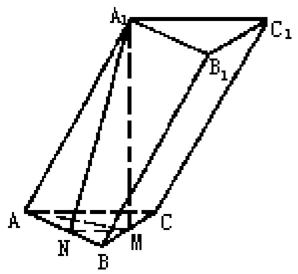
(1)求证：NM⊥SD；

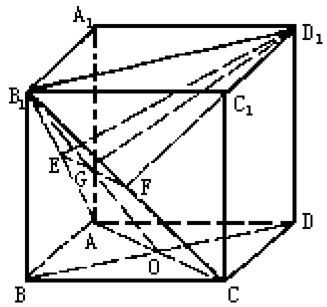
(2)求三棱锥 S-AMN 的体积．

10-2-23　如下左图．三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，AB=AC=a，∠BAC=90°；顶点 A_1 在底面 ABC 上的射影为 BC 边的中点 M．

(1)求证：BC 垂直于过三点 A_1，A，M 的平面；

(2)如果平面 A_1ABB_1 与平面 ABC 所成的二面角为 60°，求三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的体积 V．





10-2-24 **如上右图．在长方体** $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ **中，** $AA_1=\sqrt{3}$，$AB=BC=\sqrt{2}$．**设** AB_1，CB_1 **的中点分别为** E，F．**连结** D_1E，D_1F．

(1)求证：面 D_1EF⊥面 B_1EF；

(2)求四面体 $D_1\text{-}AB_1C$ 的体积．

10-2-25　在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 AB=AD=2a，AA_1=a，∠A_1AD=∠DAB=∠A_1AB=60°．

(1)求证：AA_1⊥截面 B_1D_1C；

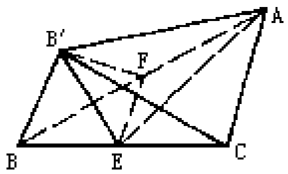
(2)求这个平行六面体的体积 V．

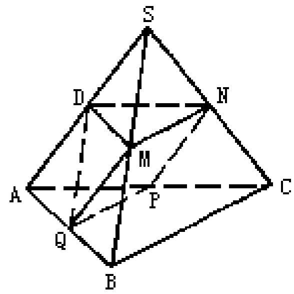
10-2-26　在△ABC 中，∠C=90°，AC=BC=2a，E，分别是 BC，BA 的中点；连 EF，并沿 EF 把△BEF 向上翻折到△B′EF 的位置，使平面 B′EF 与平面 BEF 成 60°角(如下左图)．

(1)求证：BB′⊥平面 B′AC；

(2)求证：B′C 为异面直线 AC 与 BB′的公垂线，并求出 AC 与 BB′之间的距离；

(3)求三棱锥 B′-ECA 的体积．





10-2-27　如上右图，四面体 S-ABC 中，M，N，P，Q 分别为所在棱的中点．

(1)求证 M，N，P，Q 四点共面；

(2)求证平面 MNPQ 把四面体分成等积的两部分．

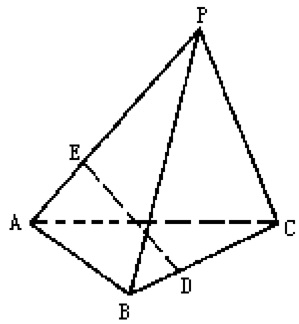
10-2-28　四面体 ABCD 中，E 是 CD 的中点；M 是△BCD 的重心；O 是 AM 上一点，且 AO：OM：=3：1．求证：

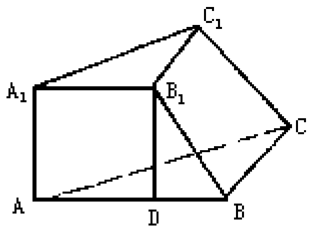
(1)$V_{A-BCE}=V_{A-EDB}$

(2)$V_{A-BOC}=V_{A-COD}=V_{A-DOB}$

(3)$V_{O-ABC}=V_{O-ACD}=V_{O-DAB}=V_{O-BCD}$

10-2-29　如下左图．三棱锥 P-ABC=中，已知 PA⊥BC；PA=BC=l； PA、BC **的公垂线** $ED=h$．**求证三棱锥** $P\text{-}ABC$ **的体积为** $V=\frac{1}{6}l^2h$．



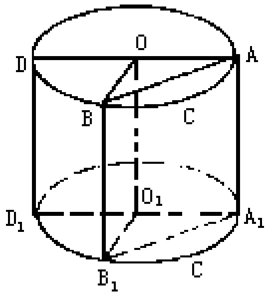


10-2-30　如上右图.在三棱台 $A_1B_1C_1$-ABC 中，已知 A_1A⊥底面 ABC；$A_1A=A_1B_1=B_1C_1=a$，B_1B⊥BC；且 B_1B 和底面 ABC 所成的角是 45°．求这个棱台的体积．

2．旋转体的表面与体积

例题

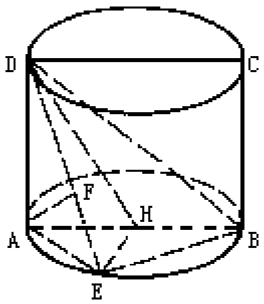
例 10-2-7　已知底面半径为 R，轴截面为正方形的圆柱，被一经过两母线的平面分为两部分，其中一部分的侧面的曲面部分占圆柱侧面积的$\frac{1}{4}$．求这两部分中较小部分的全面积．



解　如图．由已知 ADD_1A_1 是正方形，得圆柱高为 2R，圆柱侧面积为$4\pi R^2$．所以曲面ABB_1A_1的面积$S_1=\frac{1}{4}\cdot 4\pi R^2=\pi R^2$；矩形$ABB_1A_1$的面积$S_2=AA_1\cdot AB=2R\cdot\sqrt{2}R=2\sqrt{2}R^2$；弓形ACB的面积＝弓形$A_1C_1B_1$的面积$S_3=\frac{1}{4}\pi R^2-\frac{1}{2}R^2=\frac{1}{4}R^2(\pi-2)$．所以

$$S_{全}=S_1+S_2+2S_3=\pi R^2+2\sqrt{2}R^2+2\cdot\frac{1}{4}R^2(\pi-2)=\frac{R^2}{2}(3\pi-2+4\sqrt{2})$$

例 10-2-8　如图，圆柱的轴截面 ABCD 是正方形，点 E 在底面的圆周上；AF⊥DE，F 是垂足．



(1)求证 AF⊥DB；

(2)若圆柱与三棱锥 D-ABE 的体积比为 3π，求直线 DE 与平面 ABCD 所成的角．

分析　欲证 AF⊥DB，只须证 AF⊥平面 DEB．过 E 作 EH⊥AB 于 H．连 DH，则∠EDH 就是 DE 与平面 ABCD 所成的角，只须求出 EH 与 DH 的长问题就解决了．

解　(1)根据圆柱性质，DA⊥平面 ABE．而 EB⊂平面 ABE，所以 DA⊥EB；又 AB 是圆柱底面的直径，点 E 在圆周上，于是 AE⊥EB．又 AE∩AD=A，故得 EB⊥平面 DAE．而 AF⊂平面 DAE，所以 EB⊥AF，又 AF⊥DE，且 EB∩DE=E，故得 AF⊥平面 DEB．而 DB⊂平面 DEB，所以 AF⊥DB．

(2)过点 E 作 EH⊥AB，H 是垂足．连结 DH．根据圆柱性质，平面 ABCD

⊥平面 ABE，AB 是交线．且 EH⊂平面 ABE，所以 EH⊥平面 ABCD．

又 DH⊂平面 ABCD，所以 DH 是 ED 在平面 ABCD 上的射影，从而∠EDH 是 DE 与平面 ABCD 所成的角．

设圆柱的底面半径为 R，则 DA=AB=2R，于是

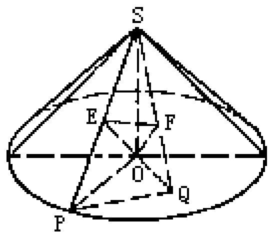
$$V_{圆柱}=2\pi R^3$$

$$V_{D-ABE}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\triangle ABE}=\frac{2R^2}{3}\cdot EH$$

由 $V_{圆柱}:V_{D-ABE}=3\pi$，得 EH=R，可知 H 是圆柱底面的圆心．D 故

$AH=R$，$DH=\sqrt{DA^2+AH^2}=\sqrt{5}R$，所以$\angle EDH=\mathrm{arcctg}\frac{DH}{EH}=\mathrm{arcctg}\sqrt{5}$

例 10-2-9　如图．圆锥的轴截面是等腰直角三角形；母线长为 2a；P，Q 分别是底面圆周上和圆内的动点，且 OQ⊥PQ；又 E 是 SP 的中点；F 是点 O 在 SQ 上的射影．



(1)求证：OF⊥平面 SPQ；

(2)求三棱锥 S-OEF 体积的最大值．

解　(1)由 F 是 O 在 SQ 上的射影，得 OF⊥SQ．又 SO⊥底面⊙O，所以 PQ⊥SO．又已知 PQ⊥OQ，于是 PQ⊥平面 SOQ．而 OF⊂平面 SOQ，所以 PQ⊥OF．而 SQ∩PQ=Q，故 OF⊥平面 SPQ．

(2)已知圆锥轴截而等腰直角三角形，母线长为$2a$，有$SO=OP=\sqrt{2}a$．又 E 是 SP 中点，知 OF⊥EF，从而 SP⊥平面 OEF．在 Rt△OEF 中，设∠EOF=θ，又 OE=a，则 EF=asinθ，OF=acosθ．所以

$$V_{S-OEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle OEF}\cdot SE=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot EF\cdot OF\cdot a$$

$$=\frac{1}{6}\cdot a\sin\theta\cdot a\cos\theta=\frac{1}{12}a^3\sin 2\theta\le\frac{1}{12}a^3$$

当且仅当$\sin 2\theta=1$，即$\theta=\frac{\pi}{4}$，亦即$\triangle EFO$为等腰直角三角形时，V_{S-OEF}

最大值$\frac{1}{12}a^3$．

注　本题亦可应用不等式求最值的方法来求：由 OF⊥EF 得 $OF^2+EF^2=OE^2=a^2$，所以

$$V_{S-OEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle OEF}\cdot SE=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot EF\cdot OF\cdot a=\frac{1}{6}\cdot a\cdot EF\cdot OF$$

$$\le\frac{1}{6}a\left(\frac{EF^2+OF^2}{2}\right)=\frac{1}{12}a^3.$$

当且仅当 EF=OF，即△EFO 为等腰直角三角形时，V_{S-OEF}取最大

值$\frac{1}{12}a^3$．

习题

10-2-31 已知圆锥的侧面积是它的全面积的$\frac{3}{4}$，则它的侧面展开图的圆心角是 [　　]．

A．π　B．$\frac{\pi}{3}$　C．$\frac{3\pi}{2}$　D．$\frac{2\pi}{3}$

10-2-32　设一个半球的全面积为 S，一个圆柱与此半球等底等体积，则这个圆柱的全面积是 [　　]．

A．$\frac{10}{9}S$　B．$\frac{7}{6}S$　C．$\frac{5}{3}S$　D．$\frac{2}{3}S$

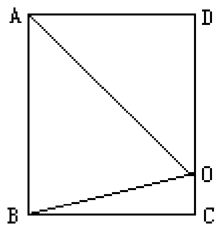
10-2-23 球的体积为$\frac{32}{3}\pi cm^3$，一个平面截此球所得的一个球冠的高为 1cm，则球冠的面积为 [　　]．

A．$\frac{\sqrt{6}}{2}\pi cm^2$　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi cm^2$　C．$4\pi cm^2$　D．$6\pi cm^2$

10-2-34　已知圆台的上、下底面半径分别为 r、2r，侧面积等于上、下底面积之和，则圆台的高为 [　　]．

A．$\frac{4}{3}r$　B．$\frac{3}{4}r$　C．$\frac{\sqrt{3}}{4}r$　D．$\frac{4\pi}{3}r$

10-2-35　如图．O 是矩形 ABCD 的边 CD 上一点，直线 CD 为轴旋转这个矩形所得的圆柱体的体积为 V，其中以 OA 为母线的圆锥的体积为$\frac{V}{4}$，则以OB为母线的圆锥的体积等于



[　　]．

A．$\frac{V}{6}$　B．$\frac{V}{9}$　C．$\frac{V}{12}$　D．$\frac{V}{15}$

10-2-36　圆锥轴截面的顶角为 120°；过顶点的截面三角形的最大面积为 2．则圆锥的侧面积为 [　　]．

A．$2\sqrt{3}\pi$　B．$\sqrt{3}\pi$　C．4π　D．2π

10-2-37 中心角为$\frac{3\pi}{4}$，面积为S_1的扇形围成一个圆锥；如果这个圆锥的底面积为 S_2，那么 S_1∶S_2=______．

10-2-38　面积为 Q 的菱形绕一边旋转，所得旋转体的表面积等于______．

10-2-39　若圆锥的侧面积为 6π，底面半径为母线长的一半，则

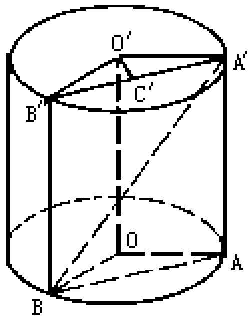
圆锥的体积等于______.

10-2-40　已知圆台两底面半径的和为 8㎝，其半径差的绝对值为 4㎝，圆台高为 3㎝，则圆台的全面积是______.

10-2-41　人造地球卫星离地面的高度为 R(R 为地球半径)，这颗卫星的电波能直射到地球的表面面积与地球的面积之比是______.

10-2-42 一个横放的圆柱形油桶，桶里有油部分占底圆周长的 $\frac{1}{4}$，那么当油桶直立时，油的高度与桶的高度之比是______.

10-2-43　如图．线段 A′B 的两个端点分别在圆柱的两底圆周上，它与圆柱的轴 OO′之间的距离等于 3，所成的角为 30°；又 A′B=16．求圆柱的侧面积．



10-2-44　同底等高的圆柱和圆锥，当它们的侧面积相等时，求圆锥的顶角．

10-2-45　设圆台的高为 h；母线与下底面的交角为 a，在轴截面中，一条对角线垂直于腰．求圆台的侧面积．

10-2-46　已知一个圆锥的底面积和侧面积之和是 10π．求：

(1)圆锥体积 V 关于底面圆半径 r 的表达式；

(2)V 的最大值及对应 r 的值．

10-2-47　设 SA，SB 是圆锥 SO 的两条母线；O 是底面圆心；底面半径为 10㎝；C 是 SB 上一点．

(1)求证：AC 与平面 SOB 不垂直；

(2)若∠AOB=60°，C 是 SB 的中点，AC 与底面成 45°角，求这圆锥的体积．

10-2-48　圆锥的轴截面为等腰直角△SAB，Q 为底圆周上的一点，S 为圆锥的顶点，O 为底面圆的圆心．

(1)如果 QB 的中点为 C，OH⊥SC，求证 OH⊥平面 SBQ；

(2)如果$\angle AOQ = 60°$，$QB = 2\sqrt{3}$，求此圆锥的体积．

10-2-49　有甲、乙两个容器，甲容器是圆柱形，深为 2㎝，底的内

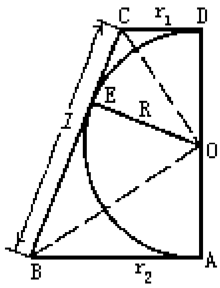
半径为1cm；乙容器是锥顶向下的圆锥形，深2cm，底的内半径为$2\sqrt{3}$㎝．若将甲容器灌满水，然后将一部分水倒入乙容器，使得两容器的水面同高，求这时水面的高度．

10-2-50　是否存在这样的圆台，当用一平行于底面的平面把圆台分成两个体积相等的分部时，这两个新的小圆台侧面积之比为 2∶1?

3．组合体的求积问题

例题

例 10-2-10　如图．半圆 O 的直径为直角梯形垂直于底的腰，且切 AB，BC，CD 于 A，E，D 点．将其绕 AD 所在直线旋转一周，得到一个球与一个圆台．若球的表面积与圆台侧面积的比为 3∶4，求球的体积与圆台体积之比．



解　设球半径为 R，则圆台高为 2R，母线长为 l，上、下底面半径分别为 r_1，r_2，在 Rt△BOC 中，$r_1r_2=R_2$，$r_1+r_2=l$

依题意，有 $\dfrac{4\pi R^2}{\pi l(r_1+r_2)}=\dfrac{3}{4}$

将(i)代入(ii)，得 $\dfrac{4R^2}{(r_1+r_2)^2}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow(r_1+r_2)^2=\dfrac{16}{3}R^2$　　(iii)

这时球体积与圆台体积分别为

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{台}=\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)=\frac{1}{3}\pi\cdot 2R\left[(r_1+r_2)^2-r_1r_2\right]\qquad\text{(iv)}$$

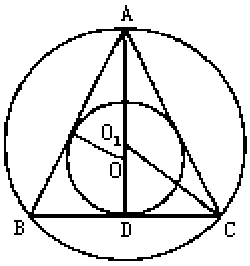
将(i)、(iii)代入(iv)，得

$$V_{台}=\frac{\pi}{3}\cdot 2R\cdot\left[\frac{16}{3}R^2-R^2\right]=\frac{26}{9}\pi R^3$$

因此　$$\frac{V_{球}}{V_{台}}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{26}{9}\pi R^3}=\frac{6}{13}$$

注　解关于组合体的求积问题，首先要熟练地运用各自的求积公式，为便于条件的运用，常要添设一定数量的参数；同时要注意平面几何知识的运用及必要的代数变形．

例 10-2-11　一个圆锥的外接球体积为 972π，且圆锥侧面和底面积的和等于它的内切球面积的 2 倍，求这个圆锥的体积．



解　如图．设圆锥的高为 h，底面半径为 r，母线长为 l；内切球球心为 O，半径为 x，则

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$

$$=\frac{1}{2}\cdot l\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot x+\frac{1}{2}l\cdot x=(l+r)x$$

又　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot h=rh$

所以 $(l+r)x=rh\Rightarrow x=\frac{rh}{l+r}$

设外接球球心为O_1，半径$O_1C=y$，则$\sqrt{O_1C^2-DC^2}=h-O_1A$，即

$$\sqrt{y^2-r^2}=h-y\Rightarrow y=\frac{l^2}{2h}$$

依题意，有 $\frac{4}{3}\pi(\frac{l^2}{2h})^2=972\pi$　　(i)

$$\pi rl+\pi r^2=2\left[4\pi\left(\frac{hr}{l+r}\right)^2\right]\qquad\text{(ii)}$$

由(ii)得　$8h^2r=(l+r)^3$

又$h^2=l^2-r^2$，所以$8(l^2-r^2)r=(1+r)^3$．而$l+r\neq 0$．所以

$8(l-r)r=(l+r)^2\Rightarrow l^2-6rl+9r^2=0\Rightarrow l=3r$

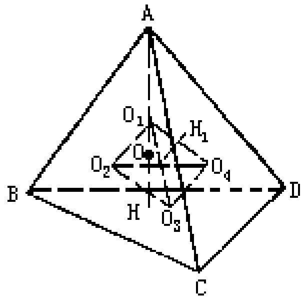
所以　$h=\sqrt{l^2-r^2}=2\sqrt{2}r$。

由(i)得$\frac{l^2}{2h}=9$，即 $\frac{(3r)^2}{2(2\sqrt{2}r)}=9\Rightarrow r=4\sqrt{2}$

所以　$V_{圆锥}\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot(4\sqrt{2})^2\cdot(2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2})=\frac{512}{3}\pi$

例 10-2-12　在棱长为 a 的正四面体内放入四个半径为 R 的等球．这四个等球两两外切，并与正四面体的面相切．求球的半径 R．

解　如图．设 O_1，O_2，O_3，O_4 为四个球的球心，则 $O_1O_2O_3O_4$ 为正四面体，其棱长均为 2R 其四个面与正四面体 ABCD 对应的四个面分别平行；且其高 O_1H_1 在四面体 ABCD 的高 AH 上．



设四面体 $O_1O_2O_3O_4$ 的内切球球心为 O，半径为 x．正四面体 $O_1O_2O_3O_4$ 的体积等于四个小正三棱锥 $O\text{-}O_2O_3O_4$ 的体积，即

$$4\cdot\frac{1}{3}x\cdot S_{\triangle O_2O_3O_4}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle O_2O_3O_4}\cdot O_1H_1=\frac{1}{3}S_{\triangle O_2O_3O_4}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}R$$

所以 $x=\frac{\sqrt{6}}{6}R$

所以O到正四面体ABCD各面距离$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}+1\right)R$，即$OH=\left(\frac{\sqrt{6}}{6}+1\right)R$．但正四面体ABCD的体积又等于四个正三棱锥O - BCD的体积．故

$$\frac{1}{3}AH\cdot S_{\triangle BCD}=4\cdot\frac{1}{3}OH\cdot S_{\triangle BCD}$$

所以 $AH=4\cdot OH=\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}+4\right)R$

而 $AH=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，因此 $\frac{\sqrt{6}}{3}a=\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}+4\right)R\Leftrightarrow R=\frac{\sqrt{6}-1}{10}a$

习题

10-2-51　平行四边形两邻边长分别为 a，b．用 V_a，V_b 分别表示平行四边绕长度为 a，b 的边所在直线旋转所得的旋转体的体积，则 V_a：V_b= [　　]．

A．a：b

B．b：a

C．a^3：b^3

D．b^3：a^3

10-2-52　一个球与它的外切圆柱、外切等边圆锥体积之比为 [　　]．

A．2：3：5

B．2：3：4

C．3：5：8

D．4：6：9

10-2-53　正方体内接于一球，正方体内又有一个内切球，则由外而内三个几何体体积之比为 [　　]．

A．$3\sqrt{3}$∶$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$∶1

B．$2\sqrt{2}$∶$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$∶1

C．$\sqrt{3}$∶$\sqrt{2}\pi$∶1

D．3∶2π∶1

10-2-54　若球的内接正方体的棱长为 a，则球的体积为　[　　]

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$　B．$\frac{3}{2}\pi a^3$　C．$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$　D．$\sqrt{3}\pi a^3$

10-2-55　设直角三形三边长为 a，b，c，其中 c 为斜边．用 V_a，V_b，V_c 分别表示以 a，b，c 所在直线为轴旋转所成的几何体的体积，则下列等式成立的是　[　　]

A．$V_c = V_a + V_b$

B．$V_c^2 = V_a^2 + V_b^2$

C．$\frac{1}{V_c^2} = \frac{1}{V_a^2} + \frac{1}{V_b^2}$

D．$\frac{1}{V_C} = \frac{1}{V_a} + \frac{1}{V_b}$

10—2—56　体积为$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$的球的内接正方体的全面积为______。

10—2—57　若一个正方体的所有顶点都在同一个球面上，则此正方体的全面积 S_1 与该球球面面积 S_2 的比 S_1∶S_2=______。

10—2—58　一个长方体的三度顺次为 3㎝，4㎝ 和 5㎝，那么它的外接球面的面积等于______。

10—2—59　作一个圆柱的内接正三棱柱，又作这个三棱柱的内切圆柱，那么这两个圆柱的侧面积之比为______。

10—2—60　一个等边圆锥(轴截面为等边三角形的圆锥)的底面圆的半径为 r，求它的内接等边圆柱(轴截面为正方形的圆柱)的全面积。

10—2—61　圆锥轴截面顶角为 60°其内切球 O 的半径为 R。求球面与圆锥顶点间的体积，并求这个体积与球体积的比。

10—2—62　圆锥母线长为 l，它和底面所成的角为 θ，求这个圆锥内接正方体的棱长。

10—2—63　已知一个圆锥的底面半径为 R，高为 h；在其中有一个高为 x 的内接圆柱。

(1)求圆柱的侧面积；

(2)x 为何值时，圆柱的侧面积最大？

(三)截面问题

提要

(1)所谓截面，是指一个平面截几何体所得内部的平面部分。在《普通高等学校招生全国统一考试说明》中，对截面问题作了如下规定：“对于截面问题，只要求会解决与几种特殊的截面(棱柱、棱锥、棱台的对角面，棱柱的直截面，圆柱、圆锥、圆台的轴截面和平行于底面的截面，球的截面)以及已给出图形或它的全部顶点的其他截面的有关问题。”

(2)求截面的面积一般有下列方法：(i)利用平面几何知识；(ii)利用三角知识；(iii)利用射影面积公式；(iv)利用展开图。

(3)对于平行于底面的截面，应知以下事实：

①对于棱柱，平行于底面的截面与底面全等。

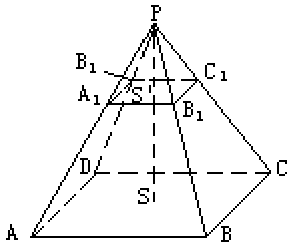
②对于棱锥，平行于底面的截面与底面相似，并且有如下的比例关系：

$l':l=h':h$

$S':S=h'^2:h^2$

$V':V=h'^3:h^3$

其中 l'，h'，S'，V' 分别是截得的小棱锥的侧棱长、高、底面面积与体积；l，h，S，V 是已知棱锥的侧棱长、高、底面面积和体积。

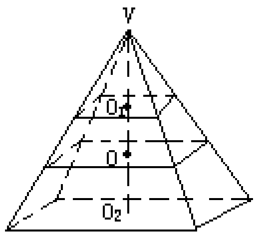


例题

例 10—3—1　设棱台(或圆台)的高是 h，底面面积是 S_1 和 S_2(S_2＞S_1)；一平行于底面的截面的面积 S 是两底面积的比例中项，求证这截面与上底面的距离为 $\dfrac{\sqrt[4]{S_1}h}{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}$。

分析　涉及平行于棱台(或圆台)底面的截面面积和高的问题，一般把棱台(或圆台)补成棱锥，以利用棱锥的性质。

解　如右图。棱台的各侧棱的延长线交于一点 V。设 V 到下底面的垂线 VO_2 分别交上底面、截面于 O_1，O，并设 VO_1=x。则



$$\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}=\frac{x+h}{x}=1+\frac{h}{x}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{S_1}h}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}$$

同理$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_1}}=1+\frac{O_1O}{x}\Leftrightarrow O_1O=\frac{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}}\cdot x=\frac{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}h$

已知$S=\sqrt{S_1S_2}$，所以

$$O_1O=\frac{\sqrt[4]{S_1S_2}-\sqrt[4]{S_1^2}}{\sqrt{S_2-\sqrt{S_1}}}h=\frac{\sqrt[4]{S_1}}{\sqrt[4]{S_2}+\sqrt[4]{S_1}}h$$

注　对于棱台还有下列结论：

若棱台的下底面、上底面、平行于底面的截面的面积分别是 S，S′，S_0。则

(i)棱台的高被截面分成的两段的比为$(\sqrt{S_0}-\sqrt{S'}):(\sqrt{S}-\sqrt{S_0})$；

(ii)若截面把棱台的高自上而下分为 m：n 两段，则

$$\sqrt{S_0}=\frac{m\sqrt{S}+n\sqrt{S'}}{m+n}$$

(3)若截面把棱台体积自上而下分成 m：n 两部分，则

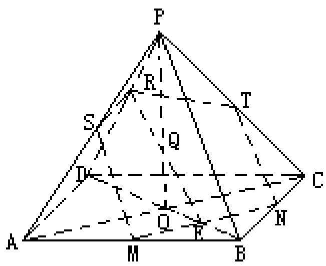
$$S_0^{3/2}=\frac{mS^{\frac{3}{2}}+nS'^{\frac{3}{2}}}{m+n}$$

例 10—3—2　已知正四棱锥 P-ABCD 的底面边长为 2，高 PO=4；M，N 分别是 AB，BC 的中点，Q 是 PO 的中点。求过点 M，N，Q 的截面面积。

分析　本题中的截面，未给出其所有顶点，因而要先作出截面，然后再求它的面积。

解　如右图。连结 MN 交 BD 于 E，由 MN 是△ABC 的中位线知

$MN\underset{=}{/\!/}\frac{1}{2}AC$，故MN平分OB于E。



在△PBD 中，连 EQ 并延长交 PD 于 R。取 PA 的中点 S，PC 的中点 T。连结 MS，SR，RT，TN。则 MS∥BP，NT∥BP，ER∥BP，所以 MS∥NT∥ER。又 M，E，N 共线，所以 M，N，T，R，S 在同一平面内，即五边形 MNTRS 是过 M，N，Q 的截面。

因 QO⊥平面 ABCD，MN∥AC，AC⊥BD，所以 MN⊥BD。而 QO⊥平面 ABCD，于是 QE⊥MN。所以 MN⊥平面 BRD，从而 MN⊥RE。故

$S_{MNTRS}=S_{直角梯形\ MERS}+S_{直角梯形\ RENT}$

根据已知，有

$$\mathrm{ME}=\mathrm{EN}=\frac{1}{2}\mathrm{MN}=\frac{1}{4}\mathrm{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{MS}=\mathrm{NT}=\frac{1}{2}\mathrm{PB}=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{PO}^2+\mathrm{OB}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16+2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

又在△PBD中，$\mathrm{ER}/\!/\mathrm{PB}$，$\mathrm{RE}:\mathrm{PB}=3:4$，于是$\mathrm{ER}=\frac{3}{4}\mathrm{PB}=\frac{9}{4}\sqrt{2}$，故

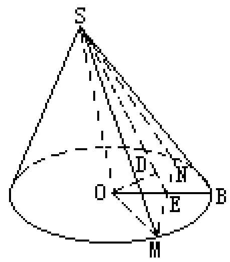
$$S_{\mathrm{MNTRS}}=\frac{1}{2}(\mathrm{MS}+\mathrm{ER})\cdot\mathrm{ME}+\frac{1}{2}(\mathrm{NT}+\mathrm{ER})\cdot\mathrm{EN}$$

$$=(\mathrm{MS}+\mathrm{ER})\cdot\mathrm{ME}=(\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{9}{4}\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{15}{4}$$

例 10—3—3　圆锥的高为 20，底面半径为 25，过其顶点作一截面，使这截面与圆锥底面圆心的距离为 12。求截面面积。

解　如下右图。过顶点的截面为等腰△SMN；它的底边 MN 与圆锥底面半径 OB 垂直，垂足为 E。连结 SE，则 MN⊥SE。于是 MN⊥面 SOE，故平面 SMN⊥平面 SOE。过 O 作 OD⊥SE 于 D，则 OD⊥平面 SMN，所以 OD=12 为底面圆心到截面 SMN 的距离。已知 SO=20，在 Rt△SOD 中可求得 SD=16。在 Rt△SOE 中，由 $OD^2=OE\cdot SD$，得

$$\mathrm{DE}=\frac{\mathrm{OD}^2}{\mathrm{SD}}=9，\mathrm{OE}=15$$



在 Rt△OEM 中，由 OM=25，得 ME=20。故

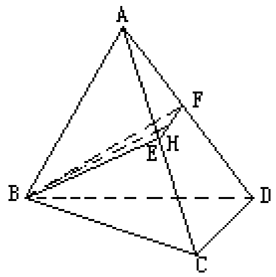
$$S_{\triangle\mathrm{OMN}}=\frac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot\mathrm{OE}=\frac{1}{2}\times40\times15=300$$

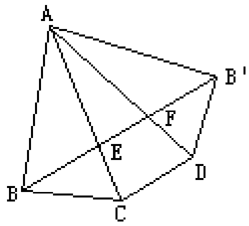
因△OMN 是截面△SMN 在底面内的射影，且面 SMN 与底面夹角为∠SEO，且$\cos\angle\mathrm{SEO}=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{OE}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$，故

$$S_{\triangle\mathrm{SMN}}=\frac{S_{\triangle\mathrm{OMN}}}{\cos\angle\mathrm{SEO}}=\frac{300}{\frac{3}{5}}=500$$

注　本题应用射影面积公式求截面面积，当然也可直接应用三角形面积公式求截面面积。

例 10—3—4　正三棱锥 A-BCD 底面边长为 a，侧棱长为 2a。过 B 点作与侧棱 AC，AD 都相交的截面(如下左图)。当截面三角形周长最小时，求其截面的面积。





解　沿侧棱 AB 把三棱锥 A-BCD 的侧面展开(如上右图)。则 BE，EF，FB′为截面△BEF 的三边，欲使截面三角形的周长最小，由平面几何知识知，须 B，E，F，B′共线，即线段 BB′为周长最小时的截线展开图。

易知 BE=B′F，EF∥CD，△BCE∽△ABC∽△AEF，于是

$$BE = B'F = BC = a，CE = DF = \frac{1}{2}a，AE = AF = \frac{3}{2}a$$

所以 $EF = \frac{3}{4}a$

设 EF 的中点为 H，则

A．$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$　　B．$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$

C．$y = \pm\sqrt{2}(x+2)$　　D．$y = \pm\sqrt{2}(x-2)$

则当截面三角形周长最小时截面面积为

$$S = \frac{1}{2}EF \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{\sqrt{55}}{8}a = \frac{3\sqrt{55}}{64}a^2$$

习题

10—3—1　给出下列三个命题：

(i)圆台的中截面面积是两底面积的等差中项；

(ii)平行于圆台轴的截面是一个等腰梯形；

(iii)过圆锥顶点的截面中，轴截面面积最大。

其中正确命题的个数是　[　]

A．0　　B．1

C．2　　D．3

10—3—2　棱台的上，下底面面积分别是 16，81；有一个平行于底面的截面，截面面积为 36。则这截面截得的两棱台的高的比是

[　]

A．1∶1　　B．1∶2

C．2∶3　　D．3∶4

10—3—3　一个锥体被平行于底面的平面所截，若截面面积是底面

面积的一半，则锥体的高被截面分成的上、下两部分之比为　[　　]

A．1∶4

B．$1:(\sqrt{2}+1)$

C．1∶2

D．$1:(\sqrt{2}-1)$

10—3—4　已知圆锥的母线长为 l，底面半径为 r，过圆锥顶点和高线的截面面积为$\frac{l^2}{2}$，则$\frac{r}{l}=$　[　　]

A．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B．2

C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

10—3—5　圆台母线与底面成 30°角，侧面积为 2πQ，则它的轴截面面积为　[　　]

A．$\frac{Q}{4}$　　B．$\frac{Q}{2}$

C．2Q　　D．Q

10—3—6　正四棱柱的底面面积为 P，过相对侧棱的截面面积为 Q，则该正四棱柱的体积是　[　　]

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{PQ}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{QP}$

C．$\sqrt{PQ}$　　D．$\sqrt{QP}$

10—3—7　在三棱台 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，已知 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=m^2$，$S_{\triangle ABC}=n^2$（m＞n＞0）；BC 到截面 AB_1C_1 的距离等于这个棱台的高，那么截面 AB_1C_1 的面积是　[　　]

A．$\frac{mn}{2}$　　B．$\frac{mn}{3}$

C．2mn　　D．mn

10—3—8　圆台的侧面积与轴截面面积的比为 k，则 k 的取值范围是　[　　]

A．(1，+∞)　　B．[1，+∞)

C．(π，+∞)　　D．(0，+∞)

10—3—9　半径为 10 的球被一个平面所截，截面将球的面积分成 1∶4 两部分，则截面面积是　[　　]

A．64π　　B．52π

C．40π　　D．36π

10—3—10　如果过圆锥顶点的最大截面是轴截面，圆锥侧面展开图的扇形圆心角为α，则α的取值范围是　[　　]

A．(0，2π)　　B．(0，π]

C．$(0,\sqrt{2}\pi]$　　D．$[\pi,\sqrt{2}\pi]$

10—3—11　在球内有相距 9cm 的两个平行截面，面积分别为 49π cm^2 和 400π cm^2，且球心不在两截面之间，则球的面积为______。

10—3—12　设圆台上、下底面的半径分别为 r，R，一个与底面平行的截面分它的侧面积之比为 m：n，则截面圆的半径为______。

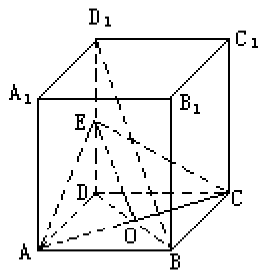
10—3—13　圆锥高为 10；高与母线夹角为 60°；过两条母线 OA，OB 作截面 AOB。若这两条母线互相垂直，则截面面积为______。

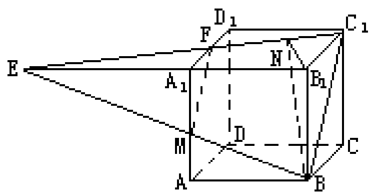
10—3—14　正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 上底面 $A_1B_1C_1$ 的边长为 a，侧棱长为 b。过上底一边 A_1B_1 作平行其所对侧棱 C_1C 的平面，则所得截面面积为______。

10—3—15　三棱锥 S-ABC 中，SA⊥BC，且 SA=a，BC=b。作平行于 SA 和 BC 的截面，则截面面积的最大值是______。

10—3—16　圆锥的底面半径为 r；母线与底面所成的角为 45°；过圆锥顶点 S 作一平面交底面于 AB，截面 SAB 与轴 SO 成 30°的角。求截面的面积。

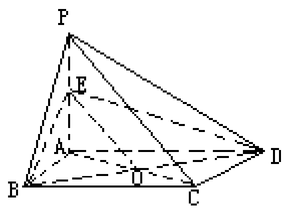
10—3—17　如下左图。在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，过底面的一条对角线 AC 的截面与对角线 BD_1 平行。若底面是边长为 a 的正方形，BD_1 和底面成 a 角，求截面面积。

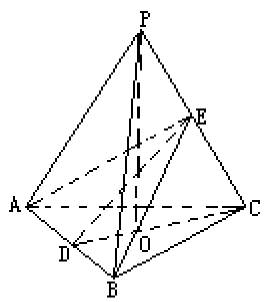




10—3—18　如上右图。在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，AA_1 上有一点M，且 $AM=\frac{1}{3}AA_1$；过B，C_1，M三点作截面。求此截面与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的正弦。

10—3—19　如下左图。四棱锥 P-ABCD 的底面 ABCD 是平行四边形；PA⊥底面 ABCD；E 是侧棱 PA 上的点，PC∥截面 BDE。求四棱锥 P-ABCD 被截面分成的两部分的体积之比。



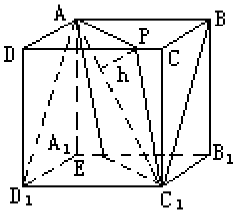


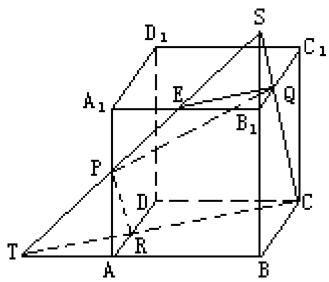
10—3—20　如上右图。正三棱锥底面边长为 a，侧棱与底面所成的角为 45°。

(1)求此三棱锥的侧面积；

(2)若过底面一边作一平面，使之与底面成 30°的二面角，求截面的面积。

10—3—21　点 P 在单位立方体 AC_1 的棱 CD 上滑动，过 P，A，C_1 三点作截面(如下左图)，求截面面积的最小值。





10—3—22　如上右图，在正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，P，Q 分别是AA_1和B_1C_1上的点，且$AP=PA_1$，$B_1Q=\frac{1}{3}B_1C_1$，求平面CPQ与底面 ABCD 所成二面角的正切。

10—3—23　正三棱锥 V-ABC 的侧棱长为 a；每相邻两侧面互相垂直；P 为棱 VC 上的动点。求动截面 ABP 的面积的取值范围。

第十一部分　直线和圆

(一)有向线段、定比分点

提要

(1)有向线段$\overline{AB}$是一个几何图形。$\overline{AB}$和$\overline{BA}$是长度相等方向相反的两个不同的有向线段。有向线段的长度记为|AB|，是一个正实数或零，它

与方向无关。数轴上的有向线段$\overline{AB}$的数量，是将终点的坐标减去起点的坐标的差，它是一个实数。在解题中要注意区分有向线段的长度与数量。

到y轴距离为d，由椭圆第二定义，有$\frac{|PF|}{d}=e$，即

此当$\overline{P_1P}$与$\overline{PP_2}$方向相同时λ取正值；当$\overline{P_1P}$与$\overline{PP_2}$方向相反时，λ取负值，这时P点必在线段P_1P_2(或P_2P_1)的延长线上。但是λ不能为-1，因为当P点落在线段延长线上时，$|P_1P|\neq|PP_2|$。

在运用定比分点公式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}，y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

时，特别要注意这里的x_1，y_1是有向线段起点的坐标，而x_2，y_2是有向线段终点的坐标，位置不能颠倒。

(3)解析几何是数形结合的科学，其显著特点是用代数的方法研究几何图形的性质，从而使代数、几何互相沟通。在解题时，要贯穿数形结合的思想，能用坐标法证明几何问题，也能用构造法把代数问题转化为几何问题。

例题

例 11—1—1　设P，A，B，C为同一直线上的任意四点，求证：

(1)PA·BC+PB·CA+PC·AB=0

(2)PA^2·BC+PB^2·CA+PC^2·AB+BC·CA·AB=0

分析　PA，PB，PC，AB，BC，CA都为有向线段的数量，取P，A，B，C所在直线为数轴，P点为原点，给出A，B，C三点的坐标，利用有向线段的数量公式即可证明。

解　取A，B，C三点所在直线为数轴，P点为原点，设A，B，C三点的坐标分别为a，b，c。

(1)PA·BC+PB·CA+PC·AB=a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)

=ac-ab+ba-bc+cd-ca=0

(2)PA^2·BC+PB^2·CA+PC^2·AB+BC·CA·AB

$=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)+(c-d)(a-c)(b-a)$

$=a^2c-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2-ac^2+abc$

$-ab^2-bc^2+b^2c-a^2c+a^2b+ac^2-abc=0$

例 11—1—2　三角形的三个顶点是 A(4，1)，B(7，5)，C(-4，7)。求：

(1)△ABC 的∠A 的平分线 AD 的长；

(2)∠A 的外角平分线与 CB 延长线的交点 E 的坐标。

分析　求 AD 的长，关键在于求出 D 点的坐标。由三角形角平分线的性质定理可求得 D 点分 CB 的比，再利用定比分点公式即可求出 D 点的坐标。用同样的方法求出 E 点的坐标。

解　(1)由 AD 是∠A 的平分线，得

$$\frac{|CD|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{10}{5}=2$$

考虑到 D 点在 C 点与 B 点之间，可知 D 点分 CB 的比λ=2。

设点 D 的坐标为(x_D，y_D)，则

$$x_D=\frac{-4+2\times7}{1+2}=\frac{10}{3}，y_D=\frac{7+2\times5}{1+2}=\frac{17}{3}$$

即D的坐标为($\frac{10}{3}$，$\frac{17}{3}$)。所以

$$|AD|=\sqrt{(4-\frac{10}{3})^2+(1-\frac{17}{3})^2}=\frac{10}{3}\sqrt{2}$$

(2)由 AE 是∠A 的外角平分线，得

$$\frac{|CE|}{|EB|}=\frac{|AC|}{|AB|}=2$$

而E在CB的延长线上，于是，E点分CB的比λ $\frac{CE}{EB}$ = -2。

设 E 点的坐标为(x_E，y_E)，则

$$x_E=\frac{-4-2\times7}{1-2}=18，y_E=\frac{7-2\times5}{1-2}=3$$

即 E 的坐标为(18，3)。

注　第(2)小题，也可把B点看作线段CE的内分点，则λ $=\frac{CB}{BE}=1$，

于是$7=\frac{-4+x_E}{2}$，$5=\frac{7+y_E}{2}$，解得$x_E=18$，$y_E=3$。

例 11—1—3　过已知两点 A(x_1，y_1)、B(x_2，y_2)的直线与直线 l：$A_x+B_y+C=0(A^2+B^2\neq0)$相交于点P，求$\frac{AP}{PB}$的值。

分析　若设P点坐标为(x_0，y_0)，$\frac{AP}{PB}$ = λ，则由点P在直线l上及定比分点公式可得关于 x_0，y_0，λ的三个方程，于是就可求出λ。

解　设点 P 的坐标为(x_0，y_0)，则

$Ax_0+By_0+C=0$　　　　　　　　　　(i)

又设$\frac{AP}{PB}=\lambda$，则

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \qquad \text{(ii)}$$

$$y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad \text{(iii)}$$

将(ii)、(iii)代入(i)，得

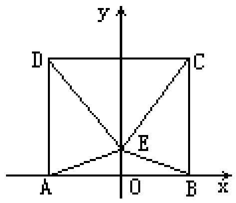
$$\frac{A(x_1+\lambda x_2)}{1+\lambda}+\frac{B(y_1+\lambda y_2)}{1+\lambda}+C=0$$

解之，得$\lambda=\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$，故

$$\frac{AP}{PB}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$$

例 11—1—4　如右图，在正方形 ABCD 内，∠EAB=∠EBA=15°。求证：△DEC 是正三角形。

分析　这是一个平面几何问题，用坐标法予以证明就是要通过建立坐标系，把平面图形性质的问题化为有关点的坐标的数量关系，再用代数方法进行讨论。



解　以 AB 所在直线为 x 轴，过 E 垂直 AB 的直线为 y 轴建立如图的坐标系，则可设A，B，C，D的坐标分别为A($-\frac{a}{2}$，0)，B($\frac{a}{2}$，0)，C($\frac{a}{2}$，a)，D($-\frac{a}{2}$，a)(其中|AB|= A＞0)．

在 Rt△AOE 中，

$$|OE|=|OA|\,tg15°=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin30°}{1+\cos30°}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}a$$

所以，E点的坐标为(0，$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$a)。故

$$|CE|=\sqrt{(\frac{a}{2}-0)^2+(a-\frac{2-\sqrt{3}}{2}a)^2}=\sqrt{a^2}=a$$

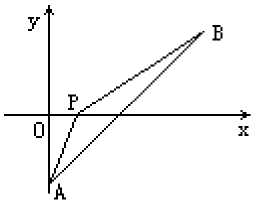
$$|DE|=\sqrt{(-\frac{a}{2}-0)^2+(a-\frac{2-\sqrt{3}}{2}a)^2}=\sqrt{a^2}=a$$

故　|CE|=|DE|=|CD|，即△DEC 是正三角形。

例11—1—5　求函数$u=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-10x+29}$的最小值。

分析　所给函数的解析式可看成两条线段长度的和，所以求函数 u 的最小值可转化为线段和的最小值问题。

解　如右图。在直角坐标系 x0y 中，设点 A，B，P 的坐标分别为(0，-3)，(5，2)，(x，0)，则



$$|AP|=\sqrt{(x-0)^2+(0+3)^2}=\sqrt{x^2+9}$$

$$|BP|=\sqrt{(x-5)^2+(0-2)^2}=\sqrt{x^2-10x+29}$$

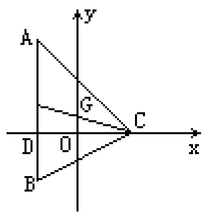
从而，

$$u=|AP|+|BP|\geq|AB|=\sqrt{(5-0)^2+(2+3)^2}=5\sqrt{2}$$

显然，上式中等号在 A，P，B 三点共线时成立。于是函数 u 的最小值是$5\sqrt{2}$。

注　本题是代数问题，借助于它潜在的几何背景，利用图形的性质，达到问题的解决。这是一种数形结合思想。而运用代数式的几何意义构造几何图形，使问题得到解决的解题方法，一般称为构造法。本题是根据两点间的距离进行构造，在构造时，如何选择点的坐标，常常要经过分析与尝试。

例 11—1—6　Rt△ABC 的斜边 AB 垂直 x 轴，顶点 C 的坐标为(4，0)，且 $S_{\triangle ABC}$=39。若三角形的重心 G 在 y 轴上，求 A，B 及重心 G 的坐标。



解　如右图。设 A，B 的坐标分别为(x_1，y_1)，(x_1，y_2)，则由三角形的重心坐标公式，有$\frac{x_1+x_1+4}{3}=0$，解得$x_1=-2$。于是△ABC边AB上的高$|CD|=4-(-2)=6$。

已知$S_{\triangle ABC}=39$，所以$\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=39$，即

$|y_1-y_2|\cdot 6=78$　　　　(i)

又由勾股定理，有$|AB|^2=|BC|^2+|CA|^2$，即

$$(y_1-y_2)^2=(-2-4)^2+y_2^2+(-2-4)^2+y_1^2\Leftrightarrow y_1y_2=-36 \quad (ii)$$

解(i)，(ii)得

$$\begin{cases}y_1=9\\ y_2=-4\end{cases}\text{或}\begin{cases}y_1=4\\ y_2=-9\end{cases}$$

设重心G的坐标为(0，y_0)则

$$y_0=\frac{y_1+y_2+0}{3}=\frac{9-4+0}{3}=\frac{5}{3}\text{，或}y_0=\frac{4-9+0}{3}=-\frac{5}{3}$$

故A，B，C的坐标分别为A(-2，9)，B(-2，-4)，G(0，$\frac{5}{3}$)或A(−2，4)，B(−2，−9)，G(0，$-\frac{5}{3}$)。

习题

11—1—1　对于数轴上任意三点A，B，O，在如下关于有向线段的数量关系中，不恒成立的是　[　]

A．AB=OB-OA

B．AO+OB+BA=0

C．AB=AO+OB

D．AB+AO+BO=0

11—1—2　已知数轴上两点A，B，点A的坐标是-2，BA=-4，则点B的坐标是　[　]

A．-6　B-1．

C．2　D．6

11—1—3　若点P在线段AB的反向延长线上，且P点分AB的比为λ，则λ的取值范围是　[　]

A．(0，+∞)　B．(-1，0)

C．(-∞，-1)　D．(-∞，0)

11—1—4　△ABC重心的坐标是G(3,-1),AC边中点M的坐标是(7，4)，则顶点B的坐标是　[　]

A．(5，-11)　B．(-5，11)

C．(-5，-11)　D．(5，11)

11—1—5　设A，B的坐标分别为A(2，0)、B(0，2)，则△AOB(O为坐标原点)内切圆圆心的横坐标是　[　]

A．1　B．$2-\sqrt{2}$

C．$\sqrt{2}$　D．$1+\sqrt{2}$

11—1—6　已知点M(3cosα,3sinα)、N(2cosβ,2sinβ),则|MN|的最大值是　[　]

A．5　B．3

C．2　D．1

11—1—7　已知P点分$\overline{AB}$的比为$\frac{1}{3}$，则B点分$\overline{AP}$的比为______。

11—1—8　若三点P_1，P_2和P在一条直线上，点P_1和P_2在直角坐标系中的坐标分别为(0，-6)和(3，0)，且$\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{1}{2}$，则点P的坐标是________。

11—1—9　已知点A(3，1)，点B在x轴负半轴上，且$|AB|=\sqrt{17}$，则点B的坐标是______。

11—1—10　已知三角形三边中点坐标分别为(3,-2),(5,2),(-1,4)，则三个顶点的坐标为______。

11—1—11　已知点 $P_1(3,-2)$，$P_2(-1,4)$，P 点在直线 P_1P_2 上，分别求适合下列条件的 P 点的坐标：

(1) $P_1P_2=4PP_2$

(2) $|P_1P|=\frac{1}{2}|PP_2|$

11—1—12　已知正△ABC 的两个顶点 A，B 的坐标分别为(2，0)，(4，2)，求顶点 C 的坐标。

11—1—13　设△ABC 的三个顶点的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，边长|BC|=a，|CA|=b，|AB|=c。求它的内心 I 的坐标。

11—1—14　已知三点 A(-1，2)，B(2，-1)，C(7，4)，求一点 P，使

|PA|：|PB|：|PC|=1：2：3

11—1—15　△ABC中，顶点A，B，C的坐标分别为$(2,\sqrt{3})$，(-3，0)，(3，0)。求△ABC 的外心的坐标。

11—1—16　求点 M(x，y)，

(1)使它到三点(2，-3)，(-1，1)，(5，-7)的距离的平方和最小；

(2)使它到三角形三顶点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$的距离的平方和最小。

11—1—17　已知 a，b，c，d 都是正数，求证：

(1) $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

(2) $\sqrt{d^2+a}+\sqrt{(c-d)^2+b}\geq\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$

(3) $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{d^2+a^2}\geq\sqrt{2}(a+b+c+d)$

11—1—18　在△ABC的边BC上取一点D，使$\frac{BD}{DC}=\frac{n}{m}$，求证：

$m|AB|^2+n|AC|^2=(m+n)|AD|^2+m|BD|^2+n|DC|^2$

11—1—19　如果对于四边形 ABCD 及同一平面上的任意一点 P，恒有$|AP|^2+|CP|^2=|BP|^2+|DP|^2$，试确定四边形 ABCD 的形状。

(二)直线的方程

提要

(1)直线的倾斜角与斜率都是反映直线相对于 x 轴正方向倾斜的程度。求倾斜角时应注意：①倾斜角是指直线向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角；②当直线平行于 x 轴时，它的倾角规定为 0°而不是 180°，因此倾斜角α的范围是(0°，180°)。直线的斜率是它的倾斜角的正切值，也是反映直线方向的一种几何量，每一条直线都有一个确定的倾斜角，但不是所有的直线都具有斜率。当直线垂直于 x 轴，即直线的倾斜角为 90°时，此直线的斜率不存在。

(2)平面上确定一条直线取决于两个条件，即这条直线的方向和经过的某点。在解析几何中，直线的方向由这条直线的斜率或倾角来决定。如果只知道直线经过某个定点(即这点的坐标)，而不知道直线的斜率(或倾角)即方向，那样满足条件的直线就有无数条；同样，如果只知道直线的斜率即方向，而不给定直线经过某一点，那么满足条件的直线也会有无数条。像这样只知一个条件的直线集合，叫做直线系。

(3)直角坐标平面内任一条直线一定对应着一个二元一次方程；反之任意一个二元一次方程也一定对应着坐标平面内的一条直线。直线方程有五种形式，即斜式、斜截式、两点式、截距式、一般式。这五种形式在一定条件下可以互相转化；而直线方程的特殊形式反映了直线的某些特性，在解题时有它的特殊作用，因此，在解题中通常根据需要变换方程的形式。

例题

例 11—2—1　已知点 A(cosα，sinα)，B(cosβ，sinβ)，这里$-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，求直线AB的斜率及倾斜角。

解　直线 AB 的斜率

$$k_{AB}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=-\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\mathrm{tg}(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2})$$

已知$-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以$0<\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}<\pi$，故AB的倾角为$\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}$，斜率为$-\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$。

注　一定要注意倾斜角的范围。

例 11—2—2　已知 AC，CE 是正六边形 ABCDEF 的两条对角线；

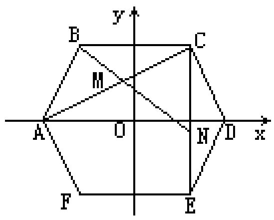
点M，N分别是AC，CE上的点，且$\frac{|AM|}{|AC|}=\frac{|CN|}{|CE|}=r$；又B、M、N三点共线。求 r 的值。

分析　若以正六边形中心为原点，AD 所在直线为 x 轴，且设正六边形边长为 1，易求得各顶点坐标。由定比分点公式，可得用 r 表示的 M，N 点坐标。然后由三点共线条件 $k_{BM}=k_{BN}$，建立 r 的方程，从而求出 r 的值。

解　如右图。以正六边形的中心 O 为原点，OD 为 x 轴的正方向建立直角坐标系。设正六边形的边长为 1，则点 A，B，C，E，的坐标分别为(-1，0)，$(-\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})$，$(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})$，$(\frac{1}{2}，-\frac{\sqrt{3}}{2})$。于是

$$|AC|=|CE|=\sqrt{(\frac{1}{2}+1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-0)^2}=\sqrt{3}$$

由已知$\frac{|AM|}{|AC|}=\frac{|CN|}{|CE|}=r$，$|AM|=|CN|=\sqrt{3}r$。



设M的坐标为(x，y)，$\lambda=\frac{AM}{MC}=\frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{3}-\sqrt{3}r}=\frac{r}{1-r}$，所以

$$x=\frac{-1+\frac{r}{1-r}\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{r}{1-r}}=\frac{-2+3r}{2}，\quad y=\frac{0+\frac{r}{1-r}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{r}{1-r}}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$x_1+x_2=\frac{2(e^2+n)}{e^2-2}$$

因为 B、M、N 三点共线，所以 $k_{BM}=k_{BN}$，即

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}r-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-2+3r}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}r}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

化简得$r^2=\frac{1}{3}$。因$r>0$，所以$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

例 11—2—3　过点 P(0，1)作直线 l，使它在两直线

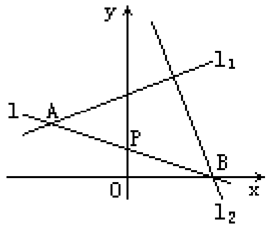
l_1：x-3y+10=0 与 l_2：2x+y-8=0

间截得的线段 AB 被点 P 平分，求直线 l 的方程。

分析　由于直线 l 过点 P(0，1)，所以求 l 的方程，只须求出 A(或 B)的坐标。

解　如图。设直线 l 分别交 l_1，l_2 于 A，B，且 A 点的坐标为(x_0，

y_0)。因 P(0，1)是 AB 的中点，所以由中点坐标公式可得 B 的坐标为$(-x_0$，$2-y_0)$。



由 A 在 l_1 上，B 在 l_2 上，得

$$\begin{cases}x_0-3y_0+10=0\\2(-x_0)+2-y_0-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-4\\y_0=2\end{cases}$$

于是，直线l的方程为$\frac{y-1}{2-1}=\frac{x-0}{-4-0}$，即

注　也可用点斜式设直线 l 的方程为：y=kx+1。

解方程组$\begin{cases}y=kx+1\\x-3y+10=0\end{cases}$得$x_A=\frac{7}{3k-1}$；

解方程组$\begin{cases}y=kx+1\\2x+y-8=0\end{cases}$得$x_B=\frac{7}{k+2}$。

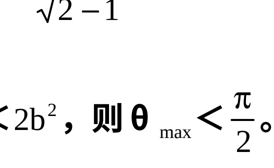
又由中点坐标公式有$\frac{x_A+x_B}{2}=0$得$k=-\frac{1}{4}$，故l的方程为$y=-\frac{1}{4}$

$x+1$。

例 11—2—4　已知△ABC 的三个顶点 A(1，1)，B(5，3)，C(4，5)，直线 l 平分△ABC 的面积，且 l∥AB，求直线 l 的方程。

分析　因所求的直线与 AB 平行且平分△ABC 的面积，故截得的小三角形与原三角形相似，且对应边平方之比为 1：2，所以可求得直线 l 与边 AB 交点的坐标：又 $k_1=k_{AB}$，于是直线 l 可求。

解　如右图。设直线 l 分别交 AC，BC 于 D，E，则由 l∥AB 知△CDE∽△CAB。又$S_{\triangle CDE}:S_{\triangle CAB}=1:2$，得$CD:CA=1:\sqrt{2}$。所以



$$\lambda=\frac{CD}{DA}=\frac{CD}{CA-CD}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

从而

若$2b^2-a^2>0$ 即$a^2<2b^2$，则$\theta_{max}<\frac{\pi}{2}$。则当$\cos\theta=\frac{2b^2-a^2}{a^2}$时，

又$l \parallel AB$，所以$k_1 = k_{AB} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2}$。故所求直线$l$的方程为

$$y = (5-2\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(x - \frac{8-3\sqrt{2}}{2})$$

即 $x - 2y + 6 - \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0$

例 11—2—5　已知通过定点 A(8，6)的四条直线，其倾斜角的比是 1∶2∶3∶4，第二条直线的方程是 3x-4y=0，求其余三条直线的方程。

分 析　已知第二条直线的斜率及它们倾斜角的比，就可求出其余直线的斜率。

解　设四条直线的倾斜角依次为α，2α，3α，4α，因为 0°≤4α＜180°，所以 0°≤α＜45°。

由题意知$tg2\alpha = \frac{3}{4}$，即

$$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3tg^2\alpha + 8tg\alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow tg\alpha = \frac{1}{3}\text{或}tg\alpha = -3(\text{舍去})$$

故第一条直线方程为$y - 6 = \frac{1}{3}(x-8)$，即$x - 3y + 10 = 0$。

又由$tg\alpha = \frac{1}{3}$，$tg2\alpha = \frac{3}{4}$，求得

$$tg3\alpha = \frac{tg\alpha + tg2\alpha}{1 - tg\alpha tg2\alpha} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}} = \frac{13}{9}$$

$$tg4\alpha = \frac{2tg2\alpha}{1-tg^2 2\alpha} = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{7}$$

故第三条直线方程为$y - 6 = \frac{13}{9}(x-8)$，即

$$13x - 9y = 50 = 0$$

第四条直线方程为$y - 6 = \frac{24}{7}(x-8)$，即

24x-7y-150=0

例 11—2—6　过点(1，4)引一直线，使与两坐标轴正方向围成的三角形的面积最小。求此直线的方程。

解　设过点(1，4)所引的直线为

l∶y-4=k(x-1)(k 为待定系数)

令$x = 0$，得横截距$a = 4 - k$；令$y = 0$，得纵截距$b = 1 - \frac{4}{k}$。由题设知$a＞0$，b＞0。于是，l 与两坐标轴正向所围成的三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(4-k)(1-\frac{4}{k})=\frac{1}{2}(-k+\frac{16}{-k})+4$$

因为$(-k)(\frac{16}{-k})=16$是常数，所以当$-k=\frac{16}{-k}$即$k=-4$($k=4$不合)时，S有最小值。故所求的直线方程为$y-4=-4(x-1)$，即

4x+y-8=0

注　(i)上述解法中得到$S=\frac{1}{2}(4-k)(1-\frac{4}{k})$后可整理为

$$k^2+2(S-4)k+16=0$$

则由△=[2(S-4)]²-4·16·1≥0 得 S≥8。所以 S 的最小值为 8，于是 k=-4。所求直线为 4x+y-8=0。

(ii)也可设直线的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (a，b为待定参数)$$

因为直线过点(1，4)，所以$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$，注意到$\frac{1}{a}>0$，$\frac{4}{b}>0$，且$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$为定值，故当$\frac{1}{a}=\frac{4}{b}$即$4a=b$时，$\frac{1}{a}\cdot\frac{4}{b}$有最大值，也就是ab有最小值，从而面积有最小值。于是，

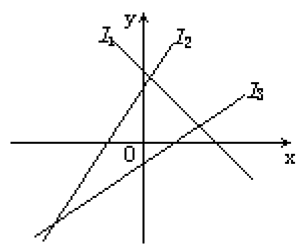
$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1\\4a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=8\end{cases}$$

故所求直线方程为$\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1$，即$4x+y-8=0$。

习题

11-2-1　若下图中的直线 l_1，l_2，l_3 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，则

[　　]



A．$k_1<k_2<k_3$

B．$k_3<k_1<k_2$

C．$k_3<k_2<k_1$

D．$k_1<k_3<k_2$

11-2-2　直线$y=x\cdot tg\frac{4\pi}{3}$的倾斜角为

[　　]

A． $\frac{4\pi}{3}$

B． $\frac{2\pi}{3}$

C． $\frac{\pi}{3}$

D． $-\frac{2\pi}{3}$

11-2-3　直线 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ 的倾斜角是

[　　]

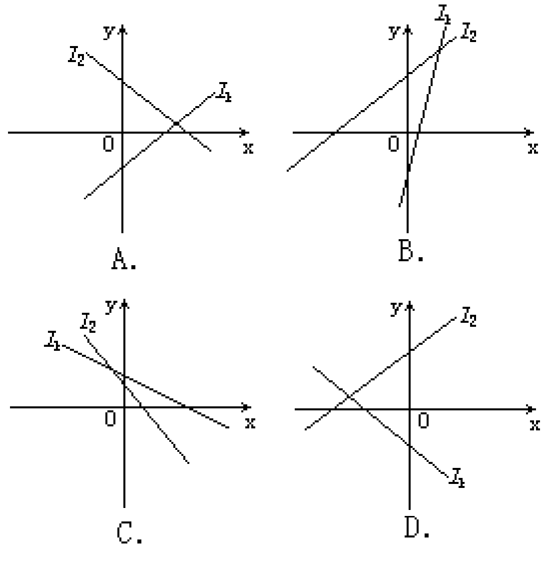
A． $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

B． $\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

C． $\pi+\operatorname{arctg}(-\frac{4}{3})$

D． $\pi-\operatorname{arctg}(-\frac{4}{3})$

11-2-4　直线 l_1：ax-y+b=0 与直线 l_2：bx+y-a=0(ab≠0)的图象应是　　[　　]



11-2-5　m，n∈R，直线(3m-n)x+(m+2n)y-n=0 过定点，此定点的坐标是　　[　　]

A．(-1，3)

B． $(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2})$

C． $(-\frac{1}{5},\ \frac{3}{5})$

D． $(-\frac{1}{7},\ \frac{3}{7})$

11-2-6 过点(1，2)，倾斜角α的正弦值为$\frac{4}{5}$的直线方程是 [ ]

A．4x-3y+2=0

B．4x+3y-5=0

C．3x-4y+6=0 和 4x+3y-2=0

D．4x-3y+2=0 和 4x+3y-10=0

11-2-7 已知两定点 A(2，-3)，B(-3，-2)，直线 *l* 过 P(1，1)且与线段 AB 相交，则直线 *l* 的斜率 k 的取值范围是 [ ]

A．$k\geq\frac{3}{4}$或$k\leq-4$

B．$-4\leq k\leq\frac{3}{4}$

C．$k\neq-\frac{1}{5}$

D．$-\frac{3}{4}\leq k<4$

11-2-8 直线 *l* 与直线 y=1，x-y-7=0 各交于点 P、Q，线段 PQ 的中点(1，-1)，那么 *l* 的斜率为 [ ]

A．$\frac{2}{3}$

B．$\frac{3}{2}$

C．$-\frac{2}{3}$

D．$-\frac{3}{2}$

11-2-9 已知直线 2x+ay=4 通过点(1，-2)，则 a=______。

11-2-10 过点 P(-2，m)和 Q(m，4)的直线的斜率等于 1，那么 m 的值为_______。

11-2-11 直线 xcosα-y+1=0 的倾斜角的变化范围是________。

11-2-12 经过$A(-\sqrt{3}，0)$，$B(\sqrt{3}，6)$两点的直线在y轴上的截距是_________。

11-2-13 试求下列直线的方程：

(1)过点 P(2，-3)，且与 x 轴成 120°角的直线；

(2)过点 P(3，-2)，且在 x 轴上的截距为 6 的直线；

(3)过点 P(3，2)，且在两坐标轴上截距之和为 12 的直线；

(4)过点P(-2，3)，且倾斜角为$\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}$的直线；

(5)斜率为$\frac{1}{6}$，且和坐标轴围成的三角形面积为3的直线。

11-2-14 经过点 A(2，3)的一条直线的倾斜角等于直线 x-2y=0 的倾斜角的 2 倍，求这条直线的方程。

11-2-15 一直线过点P(-5，4)，且夹在坐标轴间的有向线段$\overline{AB}$(A

在 x 轴上，B 在 y 轴上)被点 P 分成 1∶2 两段，求这条直线的方程。

11-2-16　一直线被两直线 $4x+y+6=0$ 和 $3x-5y-6=0$ 截得的线段的中点恰好是坐标原点，求这条直线的方程。

11-2-17　已知一条直线 l 在两坐标轴上的截距之差的绝对值等于 3，且与坐标轴围成的三角形的面积等于 2，求直线 l 的方程。

11-2-18　设二次方程 $3x^2+2xy-y^2+7x-5y+k=0$ 表示两条直线。

(1)求 k 的值；

(2)求此两直线的方程；

(3)求此两直线与 x 轴所围图形的面积。

11-2-19　已知三条直线 l_1：$ax+by+c=0$，l_2：$bx+cy+a=0$，l_3：$cx+ay+b=0$ 相交于一点。求证：$a+b+c=0$。

11-2-20　如果 $A+B+C=0$，证明直线 $Ax+By+C=0$ 必过一定点。

11-2-21　已知定点 P(6，4)及定直线 l：$y=4x$，点 Q 是 l 上第一象限内的点。直线 PQ 交 x 轴正半轴于 M。点 Q 在什么位置时△OMQ 的面积最小。

11-2-22　过直线 l_1：$2x+y+8=0$ 和 l_2：$x+y+3=0$ 的交点作一条直线，使它夹于两直线 $x-y-5=0$ 和 $x-y-2=0$ 之间的线段的长等于 3，求所作直线的方程。

(三)两条直线的位置关系

提要

(1)根据直线平行与垂直的条件可以知道，所有与直线 l：Ax+By+C=0 平行的直线均可表示为 Ax+By+λ=0，所有与直线 l：Ax+By+C=0 垂直的直线均可表示为 Bx-Ay+μ=0。这两个结论与 A，B 的取值无关(当然 A，B 不同时为零)，它总成立。在解题时，运用上述结论可使解题过程变得简捷。

(2)利用直线垂直的条件，可求出与已知点关于已知直线对称的点的坐标。若点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$关于直线 l：Ax+By+C=0 对称，那么，连结 P_1P_2 的直线必垂直于对称轴 l，即

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{B}{A}\quad (A\neq 0，x_2=x_1) \qquad \text{(i)}$$

而且线段P_1P_2的中点$M(\frac{x_1+x_2}{2}，\frac{y_1+y_2}{2})$必在对称轴$l$上，即

$$A(\frac{x_1+x_2}{2})+B(\frac{y_1+y_2}{2})+C=0\ (\text{这里}A\neq 0，x_1\neq x_2)\text{(ii)}$$

联立(i)、(ii)，就可求出 x_2，y_2。

求与已知直线关于另一直线对称的直线，一般可转化为求已知点的对称点的问题。

(3)要注意“直线 l_1 到直线 l_2 的角”与“直线 l_1 与直线 l_2 所成的角”的区别，若 l_1 的斜率为 k_1，l_2 的斜率为 k_2，则 l_1 到 l_2 的角的取值范围为$[0°，180°)$。当$1+k_1k_2\neq 0$时，l_1到l_2的角θ由公式$\mathrm{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$确定；当 $1+k_1k_2=0$ 时，θ=90°。而 l_1 与 l_2 所成的角(亦称 l_1 与 l_2 的夹角)的取值范围为[0°，90°]。当 $1+k_1k_2\neq 0$ 时，l_1 与 l_2 的夹角θ由公式

$\mathrm{tg}\theta=|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}|$确定；当$1+k_1k_2=0$时，$\theta=90°$。

(4)运用夹角公式与点到直线距离公式时，会遇见绝对值符号。当去掉绝对值符号时，常常会得到两解。一般说这两个解都是符合题意的，因此不能任意地，毫无根据地去掉某一解。

1．应用两直线位置关系求直线方程

例题

例 11-3-1　一直线被两平行直线 x+2y-1=0，x+2y-3=0 所截线段的中点在直线 x-y-1=0 上，并且这直线与两平行直线的交角为 45°，求这条直线的方程。

分析　要求得这条直线的方程，须求出其夹在两平行直线间的线段的中点坐标及斜率。该线段的中点在直线 x-y-1=0 上，也在到两平行直线距离相等且与此两直线平行的直线上，因此易求出此点坐标。又已知所求的直线与两平行线的交角为 45°，所以，要考虑利用夹角公式求斜率。

解　设所求的直线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，其中$(x_0，y_0)$是此直线被两平行直线所截线段的中点 P 的坐标，k 是斜率。

因直线l_1：$x+2y-1=0$的纵截距$b_1=\frac{1}{2}$，直线l_2：$x+2y-3=0$的纵截距$b_2=\frac{3}{2}$，故过点P且与直线l_1，l_2平行的直线l的纵截距为$b=\frac{1}{2}(b_1+b_2)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{3}{2})=1$，斜率为 $-\frac{1}{2}$，于是，l的方程是

$$y=-\frac{1}{2}x+1$$

联立方程$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+1 \\ x-y-1=0 \end{cases}$得P点坐标$(\frac{4}{3}，\frac{1}{3})$。

由夹角公式$\left|\frac{-\frac{1}{2}-k}{1+(-\frac{1}{2})k}\right|=tg45°$，解得$k=-3$或$k=\frac{1}{3}$。

故所求的直线方程为：$9x+3y-13=0$ 或 $3x-9y-1=0$。

注　直线方程中含有两个独立的参数，因此确定直线的方程必须有两个条件。分析直线的问题要抓住斜率。直线平行或垂直的条件、夹角公式等，常常用来确定直线的斜率。

例 11-3-2　已知正方形的中心为 G(-1，0)，正方形有一边所在的方程为 $x+3y-5=0$，求其他三边所在的直线的方程。

分析　所求的直线与已知的直线或平行，或垂直，因而可采用和已知直线平行或垂直的直线系方程。然后利用正方形中心到四边等距的条件分别求出直线系方程中的常数。

解　正方形的中心 G(-1，0)到各边距离为

$$\frac{|-1-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

设正方形与已知直线平行的一边所在直线方程为

$$x+3y-\lambda=0$$

则有　$\frac{|-1-\lambda|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$

解得$\lambda=5$(对应于已知直线)或$\lambda=-7$，故与已知边平行的一边为

$$x+3y+7=0$$

设正方形另一组对边所在直线的方程为

$$3x-y-\mu=0$$

则有　$\frac{|3\cdot(-1)-\mu|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$

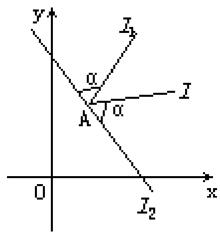
解得$\mu=3$ 或$\mu=-9$，故另两边的方程为

$$3x-y-3=0 \text{ 和 } 3x-y+9=0$$

例 11-3-3　光线沿直线 l_1：$x-y+1=0$ 射入，遇到直线 l_2：$2x+y-4=0$ 立即反射，试求反射光线所在直线 l 的方程。

分析　如下图。由于直线 l 过点 A，而 A 点的坐标可以求出，因此求 l 的方程，只须求 l 的斜率。

解　如下图。设 l_1，l_2，l 的斜率分别为 k_1，k_2，k，则 $k_1=1$，$k_2=-2$。



由 l_1 到 l_2 的角与 l_2 到 l 的角相等，得

$$\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\frac{k-k_2}{1+kk_2}$$

即

$$\frac{-2-1}{1+(-2)\times 1}=\frac{k+2}{1-2k}\Leftrightarrow k=\frac{1}{7}$$

再解方程组

$$\begin{cases}x-y+1=0\\2x+y-4=0\end{cases}$$

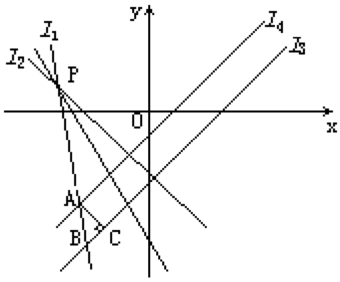
得点 A 的坐标为(1，2)。

于是，反射光线所在直线 l 的方程为 $y-2=\frac{1}{7}(x-1)$，即

x-7y+13=0

注　本题也可用求对称点的方法解决，这将在后面提及。

例 11-3-4　如下图。过直线



l_1：2x+y+8=0 和 l_2：x+y+3=0

交点作一条直线，使它夹在两条直线。

l_3：x-y-5=0 和 l_4：x-y-2=0

之间的线段的长为 $\sqrt{5}$，求此直线方程。

解　设前两条直线的交点为 P。解方程组

$$\begin{cases}2x+y+8=0\\x+y+3=0\end{cases}$$ 得P点坐标为(-5，2)。

两平行线 x-y-5=0 与 x-y-2=0 间的距离为

$$d=\frac{|-5-(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

设所求直线与两平行直线交于 A，B，由 A 作另一直线的垂线，垂

足为C，则$|AB|=\sqrt{5}$，$|AC|=d=\frac{3\sqrt{2}}{2}$。

在 Rt△ABC 中，

$$\mathrm{tg}\angle ABC=\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|AC|}{\sqrt{AB^2-AC^2}}=3$$

设所求直线的斜率为k，则$|\frac{k-1}{1+k}|=3$，解得$k=-2$或$k=-\frac{1}{2}$。

故所求直线方程为

x+2y+1=0 或 2x+y+8=0

习题

11-3-1　点(-2，3)到直线 3x-4y=2 的距离 d=　[　]

A．$\frac{16}{5}$

B．$\frac{18}{5}$

C．4

D．20

11-3-2 已知直线l_1：$\sqrt{3}x-y+3=0$，l_2：$\sqrt{3}x-3y+1=0$，则l_1到 l_2 的角 θ 等于　[　]

A．30°

B．150°

C．60°

D．120°

11-3-3 两直线$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$和$x=1$夹角的平分线方程是

[　]

A．$3x-\sqrt{3}y-2=0$或$x+\sqrt{3}y-2=0$

B．$3x-\sqrt{3}y-2=9$

C．$x+\sqrt{3}y-2=0$

D．$\sqrt{3}x-3y-2=0$或$\sqrt{3}x+y-2=0$

11-3-4　直线 Ax+By+C=0 与直线 x+3y-5=0 垂直，则系数 A，B，C 之间的关系一定是　[　]

A．3A+B=0

B．A+3B=0

C．3A=B+C

D．3B=A+C

11-3-5　已知两直线$a_1x+b_1y+1=0$和$a_2x+b_2y+1=0$的交点是P(2,3)，则过两点$Q_1(a_1，b_1)$，$Q_2(a_2，b_2)$的直线方程是　[　]

A．3x-2y=0

B．2x-3y+5=0

C．2x+3y+1=0

D．3x+2y+1=0

11-3-6　过点 P(1，2)引一直线 l，使 A(2，3)和 B(4，-5)到 l 的距离相等，那么 l 的方程为　[　]

A．4x+y-6=0

B．x+4y-6=0

C．3x+2y-7=0 或 4x+y-6=0

D．2x+3y-7=0 或 x+4y-6=0

11-3-7　连结 A(4，1)，B(-8，5)两点的线段的垂直平分线方程是________。

11-3-8　过点(-6，4)，且与直线 x+2y+3=0 平行的直线方程是________。

11-3-9　过点(3，5)，且与直线 3x-2y+7=0 交成 45°角的直线方程是________。

11-3-10　直线 l 平行于二平行直线 3x+4y-10=0 和 3x+4y-35=0，且分这两平行线间的距离为 2∶3，则 l 的方程是___________。

11-3-11　二平行直线分别过点 A(1，0)和 B(0，5)，且两平行线间的距离为 5，则它们的方程是___________。

11-3-12　从原点向某直线所引垂线的垂足的坐标为(2，3)，则这条直线的方程是_________。

11-3-13 将直线l_1∶$x-y+\sqrt{3}-1=0$绕着它上面一点$(1，\sqrt{3})$沿逆时针方向旋转 15°，则旋转后直线 l_2 的方程是_________。

11-3-14 过点P(acosφ，bsinφ)，且与直线

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1(\varphi\neq\frac{n\pi}{2}，n\in Z)$$

垂直的直线方程是__________。

11-3-15　已知三角形的三个顶点为 A(3，3)，B(2，-2)和 C(-7，1)。求

(1)∠A 的平分线 AD 所在直线的方程；

(2)中线 BE 所在直线的方程；

(3)高 CF 所在直线的方程。

11-3-16　已知等腰直角三角形的斜边所在直线的方程是 3x-y+5=0，直角顶点是 C(4，-1)，求两条直角边所在直线的方程。

11-3-17　点 P(-2,6)到直线 l 的距离为 4，且直线 l 和直线 7x+y=0 交成 45°的角。求直线 l 的方程。

11-3-18　三角形的两条高所在直线方程为 2x-3y+1=0 和 x+y=0；点 A(1，2)是它的一个顶点。求 BC 边所在直线的方程。

11-3-19　求过二直线 2x-y+4=0 和 x-y+5=0 的交点，且与点(2，-1)距离为 5 的直线方程。

11-3-20　求过二直线 3x+4y-5=0 和 2x-3y+8=0 的交点，且与两点(2，3)、(-4，5)等距离的直线方程。

11-3-21　过点(2，3)的直线 l，在二平行线 3x+4y+8=0，3x+4y-7=0 上截得线段长为$3\sqrt{2}$，求l的方程。

11-3-22 正方形中心为M(1，-1)，边长为4，一边的斜率为$\sqrt{3}$，求正方形各边所在的直线方程。

2．对称问题

例题

例 11-3-5　已知点 P(4，5)，求

(1)点 P 关于直线 x=2 的对称点 P_1；

(2)点 P 关于直线 y=x+3 的对称点 P_2；

(3)点 P 关于直线 y=3x+3 的对称点 P_3。

解　(1)设 P_1 的坐标为(x_1，y_1)，则由

$$\frac{x_1+4}{2}=2，\frac{y_1+5}{2}=5$$

求得 P_1 的坐标为(0，5)。

(2)设 P_2 的坐标为(x_2，y_2)，线段 PP_2 的中点为 $P_0(x_0，y_0)$，则有

$$x_0=\frac{4+x_2}{2}，y_0=\frac{5+y_2}{2}$$

因点 P_0 在直线 y=x+3 上，故

$$\frac{5+y_2}{2}=\frac{4+x_2}{2}+3\Leftrightarrow x_2-y_2+5=0 \qquad \text{(i)}$$

又因 $k\cdot k_{PP_2}=-1$，即 $1\cdot\frac{y_2-5}{x_2-4}=-1$，即

$$x_2+y_2-9=0 \qquad \text{(ii)}$$

联立(i)、(ii)，解得 $x_2=2$，$y_2=7$。故所求对称点为 $P_2(2，7)$。

(3)设 P_3 的坐标为(x_3，y_3)，线段 PP_3 的中点为 $P_0(x_0，y_0)$，则有

$$x_0=\frac{4+x_3}{2}，y_0=\frac{5+y_3}{2}。$$

因点 P_0 在直线 y=3x+3 上，故

$$\frac{5+y_3}{2}=3\cdot\frac{4+x_3}{2}+3\Leftrightarrow 3x_3-y_3+13=0 \qquad \text{(i)}$$

又因 $k\cdot k_{PP_3}=-1$，即 $3\cdot\frac{y_3-5}{x_3-4}=-1$，即

$$x_3+3y_3-19=0 \qquad \text{(ii)}$$

联立(i)、(ii)，解得 $x_3=-2$，$y_3=7$。故所求对称点为 $P_3(-2，7)$。

注　(i)上述解法是求关于已知直线对称点的“通法”。

求点 P(x，y)关于直线 *l* 的对称点 P′(x′，y′)，一般按以下步骤进行：

①利用中点公式求出线段 PP′的中点 $P_0(x_0，y_0)$，目的在于将 x_0，y_0 分别用 x′，y′表示；

②因为点 P_0 在直线 *l* 上，所以将求得的点 P_0 的坐标代入直线 *l* 的方程中，即得 x′，y′的方程；

③用垂直关系的斜率公式 $k_1\cdot k_{PP'}=-1$，求得另一个关于 x′，y′的方程；

④解关于 x′，y′的方程组，求得 x′，y′。

(ii)点 $P(x_0，y_0)$ 关于直线 y=x+b 的对标点 P′(x′，y′)，可由公式

$x'=y_0-b$，$y'=x_0+b$

求出。点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=-x+b$ 的对称点 $P'(x',y')$，可由公式

$x'=-y_0+b$，$y'=-x_0+b$

求出。这里需注意的是，此时对称轴的直线方程的斜率必为±1。

(iii)点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $ax+by+c=0$ 的对称点 $P'(x',y')$，可由公式

$$x'=x_0-\frac{2a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}，y=y_0-\frac{2b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$$

求出(可由求对称点的“通法”推导得出)。

例 11-3-6　已知直线 l：$2x-y+3=0$，求

(1)直线 l 关于直线 l_1：$3x-y+3=0$ 的对称直线方程；

(2)直线 l 关于直线 l_2：$x+y+6=0$ 的对称直线方程。

解　(1)由方程组

$$\begin{cases}2x-y+3=0\\3x-y+3=0\end{cases}$$

解得 $x=0$，$y=3$ 所以直线 l 与 l_1 的交点 P 的坐标为(0，3)。

在直线 l 取异于 P 的点 $P'(-1,1)$，设 P' 关于 l_1 的对称点 $P_1(x_1,y_1)$，则 $k_{P'P_1}=-\frac{1}{3}$，即

$$\frac{y_1-1}{x_1+1}=-\frac{1}{3}。\qquad\text{(i)}$$

又 $P'P_1$ 的中点 $(\frac{x_1-1}{2},\frac{y_1+1}{2})$ 在直线 l_1 上，所以

$$3\cdot\frac{x_1-1}{2}-\frac{y_1+1}{2}+3=0\qquad\text{(ii)}$$

联立(i)、(ii)，解得 $x_1=-\frac{2}{5}$，即 P_1 点的坐标为 $(-\frac{2}{5},\frac{4}{5})$。

由两点式，求得直线 PP_1 的方程为 $\frac{y-\frac{4}{5}}{3-\frac{4}{5}}=\frac{x+\frac{2}{5}}{0+\frac{2}{5}}$，即

$11x-2y+6=0$

(2)仿(1)求出 l 关于 l_2 的对称直线方程为

$x-2y-3=0$

注　(i)求对称直线问题是转化为求对称点问题解决的。

(ii)曲线 C：$F(x,y)=0$ 关于 x 轴的对称曲线是 C'：$F(x,-y)=0$；关于 y 轴的对称曲线是 C''：$F(-x,y)=0$；关于原点的对称曲线是 C'''：$F(-x,-y)=0$

曲线 C：$F(x,y)=0$ 关于直线 $y=x$ 的对称曲线是 C_1：$F(y,x)=0$；关于直线 $y=-x$ 的对称曲线是 C_2：$F(-y,-x)=0$。

曲线 C：$F(x,y)=0$ 关于直线 $x-y+b=0$ 的对称曲线是 G'：$F(y-b,x+b)=0$；关于直线 $x+y+b=0$ 的对称曲线是 G''：$F(-y-b,-x-b)$。

曲线 C：F(x，y)=0 关于直线 ax+by+c=0 的对称曲线是

$$G_1：F(x-\frac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2})，y-\frac{2b(ax+by+c)}{a^2+b^2}$$

例 11-3-7　在△ABC 中，顶点 A 的坐标为(1，4)，∠B 和∠C 的平分线方程为 x-2y=0，x+y-1=0。求 BC 边所在直线的方程。

分析　因为角的平分线是角的两边所在直线的对称轴，故可用对称关系求解。

解　设点 A(1，4)关于直线 l_1：x+y-1=0 的对称点 $P(x_1，y_1)$，则

$x_1=-y_0+1=-4+1=-3$，$y_1=-x_0+1=-1+1=0$

即 P 点坐标为(-3，0)。

同法求得，点A关于直线l_2：$x-2y=0$的对称点$Q(\frac{19}{5}，-\frac{8}{5})$。

根据平面几何中图形的性质："三角形中一顶点关于另两角平分线的对称点必落在另两角顶点的连线上"，知边 BC 所在直线通过 P、Q 两点，故 BC 边所在直线方程为

$$\frac{y-0}{x+3}=\frac{-\frac{8}{5}-0}{\frac{19}{5}+3}\Leftrightarrow 4x+17y+12=0$$

例 11-3-8　已知直线 l：3x-y-1=0 及点 A(4，1)，B(0，4)。

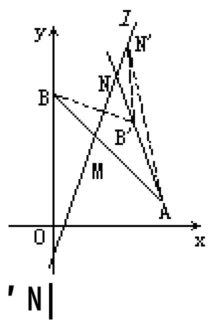
(1)在 l 上求一点 M，使|AM|+|BM|最小；

(2)在 l 上求一点 N，使|AN|-|BN|最大。

解　(1)因为 A，B 在 l 的两侧，所以 AB 与 l 的交点即为所求的点 M。由直线 AB 的方程 3x+4y-16=0 与 l 的方程联立可得点 M 的坐标为

$(\frac{4}{3}，3)$。

(2)设 B 点关于 l 的对称点是 B′，则 A，B′在 l 的同侧，AB′与 l 的交点即为所求 N 点(如下图)，事实上，在 l 上任取异于 N 的一点 N′，都有



|AN|-|BN|=|AN|-|B′N|

=|AB′|>|AN′|-|B′N′|

易求得 B′的坐标为(3，3)，因而直线 AB′的方程为

2x+y-9=0

它与 3x-y-1=0 联立解之，即得交点 N 的坐标为(2，5)。

习题

11-3-23　设直线 3x+4y-5=0 的倾斜角为θ，则它关于直线 x=3 对称的直线的倾斜角是　　　　[　　]

A. θ

B. $\frac{\pi}{2}-\theta$

C. $\pi-\theta$

D. $\pi-\frac{\pi}{2}$

11-3-24　直线 $ax+3y-9=0$ 与直线 $x-3y+b=0$ 关于原点对称，则 a，b 的值是　　[　　]

A. a=1，b=9

B. a=-1，b=9

C. a=1，b=-9

D. a=-1，b=-9

11-3-25　曲线 y=f(x)关于点(1，0)对称的曲线方程是 [　　]

A. y=f(2-x)

B. y=-f(2-x)

C. y=f(1-x)

D. y=f(x-1)

11-3-26　曲线 C∶F(x，y)=0 关于直线 x-y-2=0 对称曲线 C′的方程为　　[　　]

A. F(y+2，x)=0

B. F(x-2，y)=0

C. F(y+2，x-2)=0

D. F(y-2，x+2)=0

11-3-27　直线 l 和直线 $2x-y+3=0$ 关于直线 $x+y=0$ 对称，则直线 l 的方程是　　[　　]

A. 2y-x+3=0

B. 2y-x-3=0

C. 2y+x-3=0

D. 2y+x+3=0

11-3-28　点 A(a+2，b+2)和点 B(b-a，-b)关于直线 $4x+3y-11=0$ 对称，则 a、b 的值是　　[　　]

A. a=-4，b=2

B. a=4，b=-2

C. a=2，b=4

D. a=4，b=2

11-3-29　曲线 F(x，y)=0 关于定点 $M(x_0，y_0)$成中心对称的曲线的方程是_______。

11-3-30　曲线 F(x，y)=0 关于直线 $x+y+1=0$ 为对称的曲线的方程是_________。

11-3-31　函数 y=f(x) 关于直线 x=1 对称的函数表达式是_________。

11-3-32　若曲线方程 y=f(x)适合 f(x)=f(2a-x)，则此曲线必有一条对称轴。其对称轴方程是_______。

11-3-33　点(-1，2)关于直线 y=-x 对称的点在直线 $ax+by+c=0$ 上，

则 a，b，c 的关系是__________。

11-3-34　直线 y=-2x+1 关于 x 轴的对称直线的方程是________；关于 y 轴的对称直线的方程是_______；关于 x+y=0 的对称直线的方程是______；关于 x-y+2=0 的对称直线的方程是______；关于 2x-y=0 的对称直线的方程是________。

11-3-35　已知直线 l：y=3x+3，求

(1)点 P(4，5)关于 l 的对称点的坐标；

(2)直线 y=x-2 关于 l 的对称直线方程；

(3)l 关于点 M(3，2)的对称直线方程。

11-3-36　已知直线 Ax+By+C=0，试求：

(1)关于 x 轴对称的直线方程；

(2)关于原点对称的直线方程；

(3)关于直线 y=x 对称的直线方程。

11-3-37　△ABC 的两个顶点分别是 A(9，1)，B(3，4)，内心是点 G(4，1)。求 BC 边所在的直线方程。

11-3-38　光线从点 A(-3，5)射到 l：3x-4y+4=0 以后，再反射到一点 B(2，15)。求这条光线从 A 到 B 的长度。

11-3-39　光线从点(3，-2)射出，若镜面的位置在直线 3x-2y+3=0 上，其反射线经过点(0，-4)。求：

(1)反射线方程；

(2)入射点 N 的坐标；

(3)入射线方程。

11-3-40　求函数$y=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-8x+41}$的最小值。

11-3-41　已知 A(1，2)，B(5，4)和直线 x-2y-2=0 上一动点 P，且点 P 使|PA|+|PB|最小，求点 P 的坐标。

11-3-42　已知 A(4，1)，B(0，4)和直线 3x-y-1=0 上一动点 P，且点 P 使|PA|-|PB|最大，求点 P 的坐标。

(四)圆的方程

提要

(1)圆是平面内与定点距离等于定长的点的轨迹。圆心和半径确定了圆的位置和大小，从而确定了圆。圆的标准方程中，包含了 a，b，r 三个参数，因此必须具备这三个独立条件才能确定一个圆。同样，在圆的一般方程中，也包含了 D，E，F 三个参数，确定了 D，E，F 的值，也确定了圆。所以，求圆的方程实际上就是确定 a，b，r 或 D，E，F，这是一个确定三个参数值的代数问题，为此需要根据题设条件列出三个方程，通过解这个三元方程组求出这三个参数的值。这种解决问题的方法，称为待定系数法。

(2)在计算或论证时，选择圆的方程的哪种形式较好(含 a，b、r 的，还是含 D，E，F 的)，要视具体情况而定。一般来说，当已知条件涉及到圆心坐标和半径长或关于圆心到某直线的距离等问题时，常使用圆的标准方程求解，由于圆的标准方程可以直接反映出圆心和半径，所以又称为“径心式方程”。如果已知条件涉及到经过圆上三点，则使用圆的一般方程比较方便。凡题由有圆过某些点的问题，圆的两种方程都可使用，选用圆的一般方程较多，它有时可避免去解三元二次方程组。

例题

例 11-4-1　已知△ABC 的三边所在直线的方程

AB：x-6=0，BC：x-2y-8=0，CA：x+2y=10

求此三角形的外接圆方程。

解　由△ABC 三边所在直线方程两两联立，求得三顶点的坐标分别是 A(6，-3)，B(6，-1)，C(4，-2)。

设△ABC 外接圆方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，以 A、B、C 三点的坐标分别代入并整理，得

$$\begin{cases}6D-3E+F+45=0\\6D-E+F+37=0\\4D-2E+F+20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}D=-\dfrac{21}{2}\\E=4\\F=30\end{cases}$$

故所求圆方程为$x^2+y^2-\dfrac{21}{2}x+4y+30=0$。

例 11-4-2　设圆 C 过点 A(1，2)，B(3，4)，且在 x 轴上截得的弦长为 6，求圆 C 的方程。

分析　所求圆的问题不涉及圆心和半径，故可设圆 C 的方程为一般式。

解　设所求圆 C 的方程为

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

因圆 C 过点 A(1，2)，B(3，4)，故将 A，B 的坐标代入以上方程，可得

$D+2E+F=-5$　　(i)

$3D+4E+F=-25$　　(ii)

又令 y=0，得

$$x^2+Dx+F=0 \qquad (iii)$$

设圆和 x 轴的两个交点的横坐标分别为 x_1，x_2(x_1，x_2 是(iii)的两实根)，由根与系数关系，得

$$x_1+x_2=-D，x_1x_2=F$$

因$|x_2-x_1|=6$，而$(x_2+x_1)^2=(x_2-x_1)^2+4x_2x_1$，故

$$(-D)^2=36+4F \Longleftrightarrow D^2-4F=36 \qquad (iv)$$

联立(i)，(ii)，(iv)，解之得 D=12，E=-22，F=27 或 D=-8，E=-2，F=7。

故所求圆 C 的方程为

$$x^2+y^2+12x-22y+27=0 \text{ 域 } x^2+y^2-8x-2y+7=0$$

注　涉及弦长的有关问题，解答时要注意运用一元二次方程的根与系数关系，这样可简化运算过程。

例 11-4-3　求过点 A(2，-1)，和直线 x-y=1 相切，且圆心在直线 y=-2x 上的圆方程。

解　由于所求圆的圆心在直线 y=-2x 上，故可设此圆方程为

$$(x-a)^2+(y+2a)^2=r^2$$

又此圆过已知点 A(2，-1)，所以

$$(2-a)^2+(-1+2a)^2=r^2 \qquad (i)$$

又圆和直线 x-y=1 相切，所以

$$\frac{|a+2a-1|}{\sqrt{2}}=r \Leftrightarrow (3a-1)^2=2r^2 \qquad (ii)$$

由(i)、(ii)得

$$(3a-1)^2=2[(2-a)^2+(1+2a)^2]$$

$$\Longleftrightarrow a^2-10a+9=0 \Longleftrightarrow a=1 \text{ 或 } a=9$$

代入(ii)，得 $r^2=2$ 或 $r^2=338$。

故所求的圆方程为

$$(x-1)^2+(y+2)^2=2 \text{ 或 } (x-9)^2+(y+18)^2=338$$

例 11-4-4　设圆满足：①截 y 轴所得弦长为 2；②被 x 轴分成两段圆弧长的比为 3：1。在满足条件①，②的所有圆中，求圆心到直线 l：x-2y=0 的距离最小的圆的方程。

解　设圆的圆心为 P(a，b)，半径为 r，则点 P 到 x 轴，y 轴的距离分别为|b|，|a|。

由题设知圆 P 截 x 轴所得劣弧对的圆心角为 90°，从而知圆 P 截 x 轴所得的弦长为$\sqrt{2}r$，故

$$r^2=2b^2 \qquad (i)$$

又圆 P 截 y 轴所得的弦长为 2，所以有

$$r^2=a^2+1 \qquad (ii)$$

由(i)，(ii)得

$$2b^2-a^2=1$$

又点 P(a，b)到直线 x-2y=0 的距离为

$$d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$$

所以　$5d^2=|a-2b|^2=a^2+4b^2-4ab$

$$\geq a^2+4b^2-2(a^2+b^2)=2b^2-a^2=1$$

当且仅当 a=b 时上式等号成立。d 取得最小值，此时 $5d^2=1$。由此有

$$\begin{cases}a=b\\2b^2-a^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$$

由于 $r^2=2b^2$ 知 $r=\sqrt{2}$。于是，所求圆的方程是

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \text{ 或 } (x+1)^2+(y+1)^2=2$$

注 上列解法中得到 $d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$ 后可按下列方法求解。

$$d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow a-2b=\pm\sqrt{5}d\Leftrightarrow a^2=4b^2\pm\sqrt{5}bd+5d^2 \quad \text{(i)}$$

将 $a^2=2b^2-1$ 代入(i)式，整理得

$$2b^2\pm4\sqrt{5}bd+5d^2+1=0 \qquad \text{(ii)}$$

把(ii)看成 b 的二次方程，由于方程有实根，故判别式非负，即

$$\triangle=8(5d^2-1)\geq0\Longleftrightarrow5d^2\geq1$$

所以 $5d^2$ 有最小值 1，从而 d 有最小值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$。

将 $d=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 代入(ii)，得

$$2b^2\pm4b+2=0\Longleftrightarrow b=\pm1$$

将 $b=\pm1$ 代入 $r^2=2b^2$，得 $r^2=2$。由 $r^2=a^2+1$ 得 $a=\pm1$。综上，$a=\pm1$，$b=\pm1$，$r^2=2$。

由 $|a-2b|=1$，知 a，b 同号，于是，所求圆的方程是

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \text{ 或 } (x+1)^2+(y+1)^2=2$$

习题

11-4-1 方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+2ax+a=0$ 表示圆，则 [ ]

A．a=-1

B．a=2

C．a=-1 或 2

D．a=1

11-4-2 当 E=0 时，圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的圆心一定在 [ ]

A．x 轴上

B．y 轴上

C．直线 y=x 上

D．直线 y=-x 上

11-4-3 方程 $x^2+y^2+4mx-2y+5m=0$ 表示圆的充要条件是 [ ]

A．$\frac{1}{4}<m<1$

B．$m<\frac{1}{4}$ 或 $m>1$

C．$m<\frac{1}{4}$

D．m＞1

11-4-4 如果圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴相切于原点，那么

[ ]

A．$D\neq0$，$E\neq0$，$F\neq0$

B．$D\neq0$，$E=0$，$F=0$

C．$D=0$，$E\neq0$，$F=0$

D．$D=0$，$E=0$，$F\neq0$

11-4-5　如果方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$所表示的曲线关于直线 $y=x$ 对称，则　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$D=E$

B．$D=F$

C．$E=F$

D．$D=E=F$

11-4-6　如果圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 y 轴相交，且两个交点在原点两侧，那么　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$D\neq0$，$F>0$

B．$E=0$，$F>0$

C．$F<0$

D．$D=0$，$E\neq0$

11-4-7　圆心在直线 $x-2y-3=0$ 上，并且与两坐标轴相切的圆

[　　]

A．有且只有一个

B．恰有两个

C．有无穷多个

D．不存在

11-4-8　已知 A(2，0)、B(-4，6)，C(4，2)，D(2a，a)四点共圆，则 a 的值是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．$a=\frac{5}{2}$或$a=-2$

B．$a=-\frac{5}{2}$或$a=2$

C．$a=\frac{2}{5}$或$a=-2$

D．$a=-\frac{2}{5}$或$a=2$

11-4-9 直线$x-5y+3=0$经过圆$x^2+y^2-mx+2y+\frac{m^2}{4}-1=0$的圆心，则 m=________。

11-4-10　圆心在 x 轴上，且经过点(-2，2)和(-3，1)的圆的方程是________。

11-4-11　以点(1，0)为圆心，且与直线 $2x-y=3$ 相切的圆的方程为_________。

11-4-12 以$(2\sqrt{3}，0)$为圆心，截直线$y=\sqrt{3}x$得弦长为8的圆的方程是________。

11-4-13　圆心在直线 $2x+y=0$ 上，并且与直线 $x+y-1=0$ 切于点(2，-1)，则圆的方程是_______。

11-4-14　已知圆在 x 轴上截距(即圆与 x 轴交点的横坐标)分别为

a，b，在 y 轴上一截距(即圆与 y 轴交点的纵坐标)为 c(c≠0)，求此圆的方程。

11-4-15　已知三点 A(-1，0)，B(3，0)，C(0，4)，构成△ABC。

(1)求过三边中点 D，E，F 的圆的方程；

(2)若△ABC 三边上的高分别为 AG，BH，CO，求过三垂足(G，H，O 的圆的方程。

11-4-16　求圆心在直线 5x-3y-8=0 上，又与坐标轴相切的圆的方程。

11-4-17　求与 y 轴的正半轴相切，且与直线 4x-3y+1=0 切于纵坐标为 3 的点的圆方程。

11-4-18　已知经过点 A(0，1)和点 B(4，a)，且与 x 轴相切的圆只有一个，求此时 a 的值及相应的圆方程。

11-4-19　一个圆的圆心在 x 轴上，半径为 5，且它以点 P(5，4)为

中点的弦长为$2\sqrt{5}$，求圆的方程。

11-4-20　已知一个圆与 y 轴相切，在直线 y=x 上截得的弦的长为$2\sqrt{7}$，圆心在直线$x-3y=0$上，求此圆的方程。

11-4-21　求过直线 x+y+4=0 与圆 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 的交点，且与直线 y=x 相切的圆的方程。

(五)直线(圆)与圆的位置关系

提要

(1)直线与圆的关系有三种：相交、相切、相离。直线 l：Ax+By+C=0 和圆 O：$(x-a)^2+(y-b)^2+r^2$ 的位置关系可由以下两种方法进行判断：

①判别式法：

设方程组

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \end{cases}$$

通过消元得到的一元二次方程的判别式为△，则

△＞0⟺直线与圆相交

△=0⟺直线与圆相切

△＜0⟺直线与圆相离

②线心距法：

若圆心(a，b)到直线 Ax+By+C=0 的距离为

$$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

则　　d＜r⟺直线与圆相交

d=r⟺直线与圆相切

d＞r⟺直线与圆相离

(2)求圆的切线问题可分为两类：

①过圆上一点(切点)的切线方程——切点公式法：

经过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点$(x_0，y_0)$的切线方程为

$x_0x+y_0y=r^2$

经过圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点$(x_0，y_0)$的切线方程为

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

②过圆外一点的切线方程，除了可用上述方法转化为切点公式法求解外，一般可用判别式法及线心距法求解。

(3)圆与圆的位置关系要着重掌握相切与相交的情况：

①两圆外切的条件是圆心距等于两圆半径之和；两圆内切的条件是圆心距等于两圆半径之差的绝对值。

②两圆相交的公共弦所在直线方程，可由下法求得。已知两圆 C_1：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和圆 C_2：$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的公共弦所在直线方程是上述两式相减所得：

$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$

例题

例 11-5-1　已知圆 $x^2+y^2-6x+8y+21=0$ 和直线 kx-y-4k+3=0。

(1)求证：不论 k 取什么值，直线和圆总相交；

(2)求 k 取什么值时，直线被圆截得的弦最短，并求最短弦的长。

解　已知圆方程经配方得

$(x-3)^2+(y-4)^2=4$

圆心(3，4)到直线 kx-y-4k+3=0 的距离为

$$d=\frac{|3k-4-4k+3|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{1+k^2}}$$

(1)要证明直线和圆有两个不同的公共点，只要证$\frac{|k+1|}{\sqrt{1+k^2}}<2$对任意 $k\in R$ 成立，只要证$(k+1)^2<4(1+k^2)$，只要证 $k^2+2k+1<4+4k^2$，即证$3k^2-2k+3>0$ 对 $k\in R$ 成立。因

$$3k^2-2k+3=3(k-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{3}>0$$

显然成立，故不论 k 取什么值，直线和圆总有两个不同的公共点。

(2)直线被圆截得的弦最短，当且仅当圆心到直线的距离最长。圆心到直
线的距离

$$d=\frac{|k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{(k+1)^2}}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{1+\frac{2k}{1+k^2}}\le\sqrt{1+\frac{1+k^2}{1+k^2}}=\sqrt{2}$$

当且仅当$k=1$时，$d=\sqrt{2}$。

故当 k=1 时，圆截直线所得的弦最短，并且这最短弦的长为$2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$。

例 11-5-2　已知圆 $x^2+y^2=8$ 和一定点 P(4，0)。问过 P 点的直线的倾斜角在什么范围内取值时，这条直线与已知圆：(1)相切；(2)相交；(3)相离。并写出过 P 点的切线方程。

解　设过 P 点的直线的倾斜角为 $\alpha(0\le\alpha<\pi)$，则其方程为

$$y=\operatorname{tg}\alpha(x-4)\quad(\alpha\ne\pi/2)\qquad(\text{i})$$

方程(i)与圆的方程 $x^2+y^2=8$ 联立，消去 y 得

$$x^2+\operatorname{tg}^2\alpha(x-4)^2=8$$

即　$$(1+\operatorname{tg}^2\alpha)x^2-8x\operatorname{tg}^2\alpha+16\operatorname{tg}^2\alpha-8=0$$

其判别式为

$$\Delta=64\operatorname{tg}^4\alpha-4(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(16\operatorname{tg}^2\alpha-8)$$
$$=64\operatorname{tg}^4\alpha-64\operatorname{tg}^4\alpha-32\operatorname{tg}^2\alpha+32=32(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$$

(1)令$1-\operatorname{tg}^2\alpha=0$，因$0\le\alpha<\pi$，所以$\alpha=\frac{\pi}{4}$或$\alpha=\frac{3\pi}{4}$。故当倾角为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$时，直线与圆相切，切线方程为。

$$x-y-4=0\text{ 或 }x+y-4=0$$

(2)令 $1-\operatorname{tg}^2\alpha>0$，则$-1<\operatorname{tg}\alpha<1$，这时

$$S_{\triangle A_2MN}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{\frac{117}{125}}=\frac{3\sqrt{65}}{10}$$

注　也可由k的值求出$|y_1-y_2|$的值，再由$S_{\triangle A_2MN}=\frac{1}{2}|F_2A_2|\cdot|y_1-y_2|$

故当倾角α满足上述条件时，直线和圆相交。

(3)令 $1-\operatorname{tg}^2\alpha<0$，即 $\operatorname{tg}\alpha>1$ 或 $\operatorname{tg}\alpha<-1$，这时

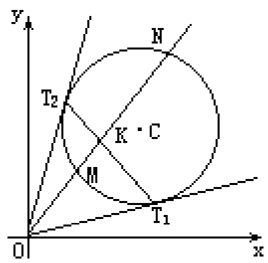
$$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$$

又当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，显然直线与圆相离。

故当$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4}，\frac{3\pi}{4}\right)$时，直线和圆相离。

注　本题亦可应用线心距法求解。

例 11-5-3　已知圆 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=2$。过原点作此圆的切线，切点为 T_1，T_2，又过原点任作一直线 l，交圆 C 于 M，N，交直线 T_1T_2 于 K(如右图)。设$|OM|=t_1$，$|ON|=t_2$，$|OK|=t_3$。求证：



$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{t_3}$$

分析　要证$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{t_3}$，应考虑用M，N，K的坐标表示$t_1$，$t_2$，$t_3$，因此需求出直线 T_1T_2 的方程，并设直线 l 的方程为 y=mx，求得 K 点的坐标。再由直线 l 与圆 C 相交的条件确定 t_1，t_2。

解　设过原点的切线方程为 y=kx，与圆 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 联立，消去 y，得

$$(1-k^2)x^2-4(1+k)x+6=0$$

根据相切条件，知

$$\Delta=16(1+k)^2-4\cdot 6(1-k^2)=0\Leftrightarrow k=2\pm\sqrt{3}$$

从而由方程组

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=2\\ y=(2\pm\sqrt{3})x\end{cases}$$

解得切点坐标分别为$T_1\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}，\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$，$T_2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}，\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$。因而得直线$T_1T_2$的方程为

$$x+y-3=0$$

设 l 的方程为 y=mx，M，N，K 的坐标分别为$(x_1，mx_1)$，$(x_2，mx_2)$，$(x_3，mx_3)$。

由方程组

$$\begin{cases}y=mx\\ (x-2)^2+(y-2)^2=2\end{cases}$$

消去 y，得

$$(1+m)^2x^2-4(1+m)x+6=0$$

由根与系数关系，得

$$x_1+x_2=\frac{4(1+m)}{1+m^2}，x_1x_2=\frac{6}{1+m^2}$$

于是

$$t_1=|OM|=\sqrt{x_1^2+(mx_1)^2}=x_1\sqrt{1+m^2}$$

$$t_2=|ON|=\sqrt{x_2^2+(mx_2)^2}=x_2\sqrt{1+m^2}$$

所以

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{x_1\sqrt{1+m^2}}+\frac{1}{x_2\sqrt{1+m^2}}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2\sqrt{1+m^2}}=\frac{2(1+m)}{3\sqrt{1+m^2}}$$

由方程组

$$\begin{cases}y=mx\\x+y-3=0\end{cases}$$

解得$x=x_3=\frac{3}{1+m}$。所以

$$\frac{2}{t_3}=\frac{2}{|OK|}=\frac{2}{\sqrt{x_3^2+(mx_3)^2}}=\frac{2}{x_3\sqrt{1+m^2}}=\frac{2(1+m)}{3\sqrt{1+m^2}}$$

于是可知

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{t_3}$$

例 11-5-4　已知集合

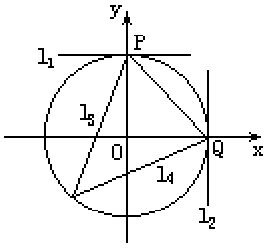
A={(x，y)|ax+y=1}，B={(x，y)|x+ay=1}

C={(x，y)|$x^2+y^2=1$}

(1)当a取何值时，(A∪B)∩C为含有两个元素的集合？

(2)当a取何值时，(A∪B)∩C为含有三个元素的集合？

分析　解决本题的关键在于理解题意。集合 A 中的 ax+y=1 是过定点 P(0，1)的直线；集合 B 中的 x+ay=1 是过定点 Q(1，0)的直线；而集合 C 中的 $x^2+y^2=1$ 为单位圆。显然，P、Q 在单位圆上。于是，问题(1)就是要回答当 a 取何值时，这两条直线与单位圆有且仅有两个交点；问题(2)则要回答当 a 取何值时，这两条直线与单位圆有且仅有三个交点。



解　如右图。方程 ax+y=1 表示过定点 P(0，1)的直线；方程 x+ay=1 表示过定点 Q(1，0)的直线；方程 $x^2+y^2=1$ 表示单位圆，且 P(0，1)，Q(1，0)在此单位圆上。

(1)依题意，二直线与单位圆有且仅有两个交点，只能有两种情形：

①两直线分别与单位圆相切于 P，Q(如图中 l_1，l_2)，此时 a=0；

②两直线均过 P，Q 两点(如图，两直线重合为 PQ)。此时 a=1。

故当$a=0$或$a=1$时,$(A\cup B)\cap C=\{(0，1)，(1，0)\}$。

(2)二直线与单位圆有且仅有三个交点(如图中 l_3，l_4)，这时因已知二直线不可能平行，故只能相交，且交点恰好在单位圆上。解方程组 $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+ay=1 \end{cases}$ 得两直线的交点为$\left(\frac{1}{a+1}，\frac{1}{a+1}\right)$。此点在单位圆上，故

$$\left(\frac{1}{a+1}\right)^2+\left(\frac{1}{a+1}\right)^2=1 \Leftrightarrow (a+1)^2=2 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{2}-1$$

此时 $(A\cup B)\cap C=\left\{(0，1)(1，0)，\left(\frac{\sqrt{2}}{2}，\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

或 $(A\cup B)\cap C=\left\{(0，1)(1，0)，\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}，-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

习题

11-5-1　直线ax-by=0与圆$x^2+y^2-ax+by=0(a^2+b^2\neq 0)$的位置关系是　[　]

A．相切　　B．相交但不过圆心

C．直线过圆心　　D．相离

11-5-2 两圆方程是$x^2+y^2-2x+4y+4=0$与$x^2+y^2-4x+2y+\frac{19}{4}=0$,那么它们的位置关系是　[　]

A．相切　　B．相离

C．内含　　D．相交

11-5-3　圆$(x-1)^2+(y+2)^2=4$上的点到直线2x-y+1=0的最短距离是　[　]

A．$\sqrt{5}-1$　　B．$3-\sqrt{5}$

C．$\sqrt{5}-2$　　D．2

11-5-4　圆$x^2+y^2+4x+3=0$的所有切线中，在两坐标轴上的截距都相等的切线的条数是　[　]

A．1　　B．2

C．3　　D．4

11-5-5 若直线$y=x+k$与曲线$x=\sqrt{1-y^2}$恰有一个公共点，则k的取值范围是　[　]

A．$k=\pm\sqrt{2}$

B．$[\sqrt{2}，+\infty)\cup(-\infty，-\sqrt{2}]$

C．$(-\sqrt{2}，\sqrt{2})$

D．$k=-\sqrt{2}$或$k\in(-1，1]$

11-5-6 在满足$(x-3)^2+(y-3)^2=6$的所有实数对$(x，y)$中，$\frac{y}{x}$的最大值是　[　]

A．$3\sqrt{3}$　　B．$2+\sqrt{3}$

C．$3+2\sqrt{3}$　　D．6

11-5-7　过点(-8，6)所作圆$(x+3)^2+(y-4)^2=25$的切线方程是

______。

11-5-8　过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $(x_1，y_1)$ 引此圆的二切线，切点为 A，B，则直线 AB 的方程为______。

11-5-9　设圆心都在直线 y=x 上的相交两圆的交点为 A，B，且 A 点的坐标为(-4，5)，则 B 点的坐标为______。

11-5-10　若原点在圆 $(x-a)^2+(y+a)^2=4$ 的内部，则 a 的取值范围是______。

11-5-11 过点 $P(6，-4)$ 且在圆 $x^2+y^2=20$ 中截出长为 $6\sqrt{2}$ 的弦所在直线方程为______。

11-5-12　求满足下列条件的圆的切线。

(1)过圆 $x^2+y^2=10$ 上一点 $M(2，\sqrt{6})$ 与圆相切；

(2)斜率为 1 且与圆 $x^2+y^2=1$ 相切；

$$k^2\cdot\frac{4\left(k^2-4\right)^2}{25k^4}+k^2-4>0$$

$$\Leftrightarrow\left(k^2-4\right)\cdot\frac{29k^2-16}{25k^2}>0$$

(4)过点 M(2，4)与圆 $(x-1)^2+(y+3)^2=1$ 相切。

11-5-13　设 $a^2\sin\theta+a\cos\theta-1=0$，$b^2\sin\theta+b\cos\theta-1=0(a\neq b)$，求证：经过两点 $(a，a^2)(b，b^2)$ 的直线不论 θ 如何变化，都与某定圆相切。

11-5-14　已知直线 $y=ax+b(a\neq 0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$。

(1)a，b 满足什么条件，直线与圆有两个公共点？

(2)设这两个公点为 M，N，且 OM，ON(O 为原点)与 x 轴所成的角为 α，β。求证：$\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-1}{a^2+1}$。

11-5-15　求经过两圆

C_1：$x^2+y^2+2x-3=0$ 和圆 C_2：$x^2+y^2-4x-5=0$

的交点和点 P(1，-2)的圆的方程。

11-5-16　已知圆 C_1：$x^2+y^2=144$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-30y+216=0$，试判断两圆位置关系，并求两圆公切线方程。

11-5-17　已知圆 $x^2+y^2+x-6y+m=0$ 与直线 $x+2y-3=0$ 相交于 P，Q 两点，O 为原点。若 OP⊥OQ，求实数 m 的值。

第十二部分　椭圆、双曲线、抛物线

(一)椭圆

提要

(1)定义

第一定义：平面上到两定点的距离之和等于定长(大于两定点间的距离)的点的轨迹叫椭圆。

第二定义：平面上到一定点和不过此定点的一定直线的距离之比等于常数 e(0＜e＜1)的点的轨迹叫椭圆。

(2)标准方程

①焦点在x轴上：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$；

②焦点在y轴上：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$。

(3)求椭圆方程的常用方法有：①利用椭圆定义求方程；②利用待定系数法求方程。这时应先判定类型，确定方程形式，再求有关参数。而确定椭圆焦点的位置，是正确解题的前提。

(4)求与椭圆有关的参数的值或范围。应注意数形结合，充分利用椭圆的几何性质；注意参数 a，b，c，e 间的关系，如 $a^2=b^2+c^2$，e=$\frac{c}{a}$等。

(5)在椭圆中，焦点与椭圆上任一点所连线段叫椭圆的焦半径，过焦点的弦叫焦点弦。解与椭圆焦半径、焦点弦、准线有关的问题，通常是利用椭圆的第一或第二定义求解。

(6)判定直线与椭圆的位置关系通常要运用一元二次方程根的判别式。

(7)求直线与椭圆截得的弦长，一般方法有：

①解方程组，求出交点坐标，利用两点间距离公式。

②不求出交点坐标，利用一元二次方程根与系数的关系。

由方程组$\begin{cases} y=kx+b \\ f(x、y)=0 \end{cases}$消去y得

$Ax^2+Bx+C=0$

当 A≠0 且 $\Delta=B^2-4AC>0$ 时，有二实根 x_1，x_2，则

$$弦长=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$$

若消去 x，得关于 y 的一元二次方程，同法可得

$$弦长=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$$

③若弦过椭圆的焦点，由椭圆定义可得：

过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点的弦长$=2a-e(x_1+x_2)$；过左焦

点的弦长=$2a+e(x_1+x_2)$。

(8)解与弦的中点有关的问题通常有两种方法：

①联立直线方程与椭圆方程组成方程组，消元得关于某一未知数的一元二次方程，利用判别式、韦达定理、中点公式求解；

②设出弦的两端点坐标，将弦的两端点坐标分别代入椭圆方程，所得两方程相减后，再利用中点公式及直线斜率的两点式公式求解。

(9)解与椭圆有关的最值问题常用方法是：

①几何法：根据图形的几何性质和平面几何有关定理求最值；

②函数法：根据图形的性质，列出函数关系式，求函数的最值。

例题

例12-1-1 已知$P(x_0，y_0)$为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任一点，点 $F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)(c>0)$为椭圆的左、右两焦点，离心率为 e。求证：$|PF_1|=a+ex_0$，$|PF_2|=a-ex_0$。

解 设点P到椭圆左准线的距离为d，则$d=x_0+\frac{a^2}{c}$。由椭圆第二定义知$\frac{|PF_1|}{d}=e$，即

$$|PF_1|=ed=e(x_0+\frac{a^2}{c})=a+ex_0$$

又由椭圆第一定义得

$$|PF_2|=2a-|PF_1|=2a-(a+ex_0)=a-ex_0$$

注 此题所证结论$|PF_1|=a+ex_0$，$|PF_2|=a-ex_0$为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任一点 $P(x_0，y_0)$的两焦半径的计算公式。

例 12-1-2 已知椭圆的中心在坐标原点，对称轴在坐标轴上，且长轴长是短轴长的 2 倍，又点 P(4，1)在椭圆上，求此椭圆方程。

解 设椭圆长半轴长、短半轴长分别为 a，b。由已知得 a=2b。

若椭圆焦点在 x 轴上，则椭圆方程为

$$\frac{x^2}{(2b)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

因点P(4，1)在椭圆上，所以$\frac{16}{4b^2}+\frac{1}{b^2}=1$，由此得$b^2=5$

故所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$$

若椭圆焦点在 y 轴上，同法可得所求椭圆方程为

$$\frac{y^2}{65}+\frac{4x^2}{65}=1$$

注 用待定系数法求椭圆方程首先应确定椭圆焦点的位置，定出含参数的方程形式，再利用已知条件求方程中有关参数的值。当椭圆焦点位置不确定时，应分情况讨论。

例 12-1-3　已知中心在原点，对称轴为坐标轴的椭圆与直线 $x+y=1$ 相交于A，B两点，且$|AB|=2\sqrt{2}$，连结AB的中点与原点的直线的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，求此椭圆方程。

解　设椭圆的方程为 $Mx^2+Ny^2=1$（M、N＞0），A，B 两点的坐标分别为$(x_1, y_1)(x_2, y_2)$。

由方程组$\begin{cases} x+y=1 \\ Mx^2+Ny^2=1 \end{cases}$消去y得

$(M+N)x^2-2Nx+N-1=0$

当$\Delta=4N^2-4(M+N)(N-1)=4(M+N-MN)>$时，方程有两不等实根 x_1，x_2。由韦达定理

$$x_1+x_2=\frac{2N}{M+N}，x_1x_2=\frac{N-1}{M+N}$$

故

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{M+N-MN}}{M+N}，$$

依题意 $\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{M+N-MN}}{M+N}=2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow M+N-MN=(M+N)^2 \qquad (i)$$

设 AB 的中点 P 的坐标为(x_0, y_0)，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{N}{M+N}，y_0=1-x_0=\frac{M}{M+N}$$

由已知，AB的中点与原点的连线的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{M}{N}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow N=\sqrt{2}M \qquad (ii)$$

将(ii)代入(i)得

$$(\sqrt{2}+1)M-\sqrt{2}M^2=[(\sqrt{2}+1)M]^2$$

注意到M＞0，解得$M=\frac{1}{3}$，$N=\frac{\sqrt{2}}{3}$。

故所求椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{\sqrt{2}y^2}{3}=1$。

注　当无法确定焦点位置时，可设椭圆方程为 $Mx^2+Ny^2=1$。

例 12-1-4　已知椭圆的左准线为 $x=1$，左焦点为 F(2，0)。B 点为椭圆短轴的上端点。又 M，N 为直线 $2x+2y-3=0$ 上两点。且△MNB 的重心为$G(\frac{7}{3}, 0)$。求此椭圆方程。

解　设椭圆中心的坐标为(m，0)。由题意，椭圆方程为

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

则短轴上端点 B 的坐标为(m，b)，半焦距 c=m-2。

因为左准线方程为$x=1$，则$\frac{a^2}{c}=m-1$，所以

$a^2=c(m-1)=(m-2)(m-1)$

设 M、N 两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$。因 M，N 两点在直线 2x+2y-3=0 上，故

$2x_1+2y_1-3=0$，$2x_2+2y_2-3=0$

两式相加，得

$$x_1+x_2+y_1+y_2=3 \qquad (i)$$

又△MNB的重心为$G(\frac{7}{3}，0)$，所以

$$\begin{cases}\frac{x_1+x_2+m}{3}=\frac{7}{3}\\ \frac{y_1+y_2+b}{3}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2=7-m\\ y_1+y_2=-b\end{cases} \qquad (ii)$$

(ii)代入(i)，得　7-m-b=3，即 b=4-m。因为 $a^2-c^2=b^2$，所以

$$(m-2)(m-1)-(m-2)^2=(4-m)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2-9m+18=0 \Leftrightarrow m=3或6$$

当 m=6 时，b=4-m=-2，故舍去。当 m=3 时 $a^2=2$，$b^2=1$。从而所求椭圆方程为

$$\frac{(x-3)^2}{2}+y^2=1$$

例 12-1-5　已知椭圆的一个焦点为 F(3，1)，相应的准线为 y 轴；直线l过焦点F，倾斜角为$\frac{\pi}{3}$，且被椭圆截得的弦AB长为$\frac{16}{5}$，求此椭圆方程。

解　设 P(x，y)为椭圆上任一点，椭圆离心率为 e(0＜e＜1)。P 到y轴距离为d，由椭圆第二定义，有$\frac{|PF|}{d}=e$，即

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=e|x|$$

$$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2-6x+(y-1)^2+9=0 \qquad (i)$$

又由已知得直线 l 的方程为

$$y-1=\sqrt{3}(x-3) \qquad (ii)$$

将(ii)代入(i)，消去 y，得

$$(4-e^2)x^2-24x+36=0 \qquad (iii)$$

设 A，B 两点坐标为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$。这里 x_1，x_2 为方程(iii)的两实根。由韦达定理，

$$x_1+x_2=\frac{24}{4-e^2}>0，x_1x_2=\frac{36}{4-e^2}>0$$

故两根 x_1，x_2 均为正数。

又由椭圆第一定义，有

$$|AB|=|FA|+|FB|=e(x_1+x_2)=\frac{24e}{4-e^2}$$

所以

$$\frac{24e}{4-e^2}=\frac{16}{5}\Leftrightarrow e=\frac{1}{2}\text{或}e=-8(\text{舍})$$

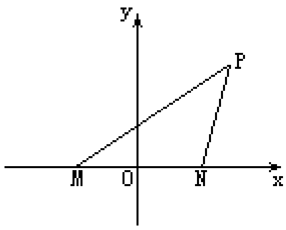
故所求椭圆方程为$\frac{3}{4}x^2-6x+(y-1)^2+9=0$，即

$$\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$$

注　凡与椭圆的焦点、准线有关的问题，常利用椭圆的定义求解。

例12-1-6 在面积为1的△PMN中，$\mathrm{tg}\angle PMN=\frac{1}{2}$，$\mathrm{tg}\angle MNP=-2$。建立适当的坐标系，求以M，N为焦点且过点P的椭圆方程。

解　以MN所在直线为x轴，MN的垂直平分线为y轴建立如右图所示的坐标系。



设以M、N为焦点且过P点的椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点M、N的坐标分别为M(-c，0)，N(c，0)，(c>0)。

由已知$\mathrm{tg}\angle PMN=\frac{1}{2}$，$\mathrm{tg}\angle PNx=\mathrm{tg}(\pi-\angle MNP)=2$得直线PM的方程为

$$y=\frac{1}{2}(x+c)$$

类似地，直线PN的方程为

$$y=2(x-c)$$

由以上两方程解得$x=\frac{5}{3}c$，$y=\frac{4}{3}c$，即P点坐标$(\frac{5}{3}c，\frac{4}{3}c)$。故

$$S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot\frac{4}{3}c=\frac{4}{3}c^2$$

由已知$\frac{4}{3}c^2=1$，得$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，于是点P坐标为$\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}，\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$。所以，

$$|PM|=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$$

$$|PN|=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

从而 $a=\frac{1}{2}(|PM|+|PN|)=\frac{\sqrt{15}}{2}$，$b^2=a^2-c^2=3$

故所求椭圆方程为$\frac{4x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$。

注 (i)建立恰当的坐标系可使方程简化，本题以两焦点所在直线为 x 轴，以 MN 的中点为原点建立坐标系，则所求椭圆方程为标准形式。

(ii)解涉及椭圆两焦点的问题，应注意利用椭圆定义。

例 12-1-7 已知椭圆 E 的中心在坐标原点 O，焦点在 x 轴上，离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$；直线l：$x+y+1=0$与椭圆E交于P，Q两点，且$OP\perp OQ$。求椭圆 E 的方程。

解 设椭圆E的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，半焦距为c，由已知$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$。因为$a^2=b^2+c^2$，则$a^2=4b^2$。所以椭圆方程为 $x^2+4y^2=4b^2$

设 P，Q 两点的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)。

由方程组$\begin{cases}x+y+1=0\\x^2+4y^2=4b^2\end{cases}$消去y得

$$5x^2+8x+4-4b^2=0$$

当$\Delta=64-20(4-4b^2)>0$，即$b^2>\frac{1}{5}$时，方程有两实根x_1，x_2，且

$$x_1+x_2=-\frac{8}{5},\quad x_1x_2=\frac{4-4b^2}{5}$$

此时 $y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1=\frac{1-4b^2}{5}$

因为 $OP\perp OQ$，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$，所以

$$\frac{4-4b^2}{5}+\frac{1-4b^2}{5}=0\Leftrightarrow b^2=\frac{5}{8}$$

故所求椭圆方程为$\frac{2x^2}{5}+\frac{8y^2}{5}=1$。

注 解直线与椭圆相交问题，利用韦达定理常可使过程简化。

例 12-1-8 已知椭圆

$$k^2x^2+4y^2+2k^3x+24y+k^4-4k^2+36=0$$

上的点都在第四象限，求实数 k 的取值范围。

解 将已知方程整理配方得

$$\frac{(x+k)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{k^2}=1$$

由此可知，

$$\begin{cases}(x+k)^2\le 4\\(y+3)^2\le k^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2-k\le x\le 2-k\\-|k|-3\le y\le |k|-3\end{cases}$$

因椭圆上的点都在第四象限，故

$$\begin{cases}-2-k>0\\|k|-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k<-2\\|k|<3\end{cases}\Leftrightarrow -3<k<-2$$

故所求实数 k 的取值范围是 k∈(-3，-2)

注　求曲线方程中参变量取值范围的问题，关键是根据曲线的形状、位置和范围列出方程或不等式。

例12-1-9 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$**的长轴两端点**A，B**。若椭圆上存在一点 Q，使∠AQB=120°，求此椭圆的离心率 e 的取值范围。**

解　设 A，B，Q 点的坐标分别为 A(-a，0)、B(a，0)，Q(x，y)。由椭圆的对称性，不妨设 Q 在 x 轴上方，即 y＞0。则 AQ，BQ 所在直线的斜率分别为

$$k_{AQ}=\frac{y}{x+a}，k_{BQ}=\frac{y}{x-a}$$

由已知，$tg\angle AQB=tg120°=-\sqrt{3}$**，故**$\frac{k_{BQ}-k_{AQ}}{1+k_{BQ}\cdot k_{AQ}}=-\sqrt{3}$**，即**

$$\frac{\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x+a}}{1+\frac{y^2}{x^2-a^2}}=-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x^2+\sqrt{3}y^2+2ay-\sqrt{3}a^2=0 \qquad (i)$$

又点Q**在椭圆上，则**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$**，即**

$$x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2 \qquad (ii)$$

(ii)代入(i)得

$$\sqrt{3}(b^2+a^2)y^2+2ab^2y=0$$

而$y>0$**，则**$y=\frac{2ab^2}{\sqrt{3}(a^2-b^2)}=\frac{2ab^2}{\sqrt{3}c^2}$**。再由**$y\le b$**得**

$$\frac{2ab^2}{\sqrt{3}c^2}\le b\Leftrightarrow 4a^2b^2\le 3c^4\Leftrightarrow 4a^2(a^2-c^2)\le 3c^4$$

$$\Leftrightarrow 3c^4+4a^2c^2-4a^4\ge 0\Leftrightarrow 3e^4+4e^2-4\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (3e^2-2)(e^2+2)\ge 0\Leftrightarrow e^2\ge\frac{2}{3}$$

又$0<e<1$**，故**$\frac{\sqrt{6}}{3}\le e<1$**。**

例12-1-10 已知中心在坐标原点，一焦点为$(0，5\sqrt{2})$**的椭圆被直线**$3x-y-2=0$**截得的弦**AB**的中点**M**的横坐标为**$\frac{1}{2}$**。求此椭圆方程。**

解　根据已知条件可设椭圆方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

又设 A，B 两点的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)

［法一］由方程组$\begin{cases} 3x-y-2=0 \\ \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1 \end{cases}$消去$y$，并整理得

$$(a^2+9b^2)x^2-12b^2x+4b^2-a^2b^2=0 \qquad (i)$$

将 $a^2=b^2+c^2=50+b^2$，代入(i)得

$$(50+10b^2)x^2-12b^2x-46b^2-b^4=0$$

由韦达定理，有$x_1+x_2=\dfrac{12b^2}{50+10b^2}$；由已知，AB的中点M的横坐标为$\dfrac{1}{2}$，即$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2}$。从而

$$\frac{12b^2}{50+10b^2}=1 \Leftrightarrow b^2=25$$

进而 $a^2=b^2+c^2=75$。

故所求椭圆方程为$\dfrac{y^2}{75}+\dfrac{x^2}{25}=1$。

［法二］ 因为 A，B 两点均在椭圆上，故

$$\begin{cases} b^2y_1^2+a^2x_1^2=a^2b^2 \\ b^2y_2^2+a^2x_2^2=a^2b^2 \end{cases}$$

两式相减得

$$b^2(y_1-y_2)(y_1+y_2)+a^2(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{a^2(x_1+x_2)}{b^2(y_1+y_2)} \qquad \text{(ii)}$$

又因为A、B两点在直线$3x-y-2=0$上，且AB的中点M的横坐标为$\dfrac{1}{2}$，故

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1+x_2=1$$

$$y_1+y_2=3(x_1+x_2)-4=-1$$

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=3$$

将上述结果代入(ii)得

$$\frac{a^2}{b^2}=3 \Leftrightarrow a^2=3b^2$$

再考虑到$a^2=b^2+c^2$及$c^2=(5\sqrt{2})^2=50$，得$b^2=25$，$a^2=75$。

故所求方程为$\dfrac{y^2}{75}+\dfrac{x^2}{25}=1$。

注　与弦的中点有关的问题，通常采用以上两种方法求解。法一是将直线方程代入椭圆方程，利用韦达定理求解；法二是将弦的两端点坐标分别代入椭圆方程，将所得两方程相减，再利用中点公式、直线的两点式斜率公式求解。

例12-1-11 已知长为b的线段PQ。P点在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上运动，Q点在x轴上运动。求线段PQ的中点M的轨迹。

解 设点P，Q，M的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，0)$，$(x，y)$。

因为P点在椭圆上，则

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

又|PQ|=b，则

$$(x_1-x_2)^2+y_1^2=b^2$$

由上面两个方程可求得

$$x_2=\frac{(a\pm b)x_1}{2}$$

由线段的中点坐标公式，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_1+\dfrac{(a\pm b)x_1}{a}}{2} \\ y=\dfrac{y_1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{2ax}{2a\pm b} \\ y_1=2y \end{cases}$$

代入所设椭圆方程得$\frac{4x^2}{(2a\pm b)^2}+\frac{4y^2}{b^2}=1$，即

$$\frac{x^2}{(a+\frac{b}{2})^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1\text{及}\frac{x^2}{\left(a-\frac{b}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1$$

所以点M的轨迹为两个椭圆，方程如前。

注 此例属相关点的轨迹问题。题中动点M依赖于已知椭圆和x轴上的动点P，Q而运动。根据已知条件找出P，M点的坐标间的关系，将P点的坐标用M点坐标的关系式表示出来，再利用P点坐标所满足的方程求出点M的轨迹方程。

例 12-1-12 已知△ABC的三边BC,CA,AB的长成等差数列,且|BC|＞|CA|＞|AB|，又A，C两点的坐标为A(1，-3)，C(-2，-3)。求△ABC的重心G的轨迹方程。

解 由题设易知

|BC|+|AB|=2|AC|=6

即B点到两定点A，C的距离之和为定值6，且|BC|＞|AB|，所以B点的轨迹为以A，C为两焦点的椭圆的右半部分。此椭圆的中心O′的坐标为$\left(-\frac{1}{2}，-3\right)$，长半轴长$a=3$，半焦距$c=\frac{3}{2}$，则短半轴长$b=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$。所以，$B(X，Y)$点的轨迹方程为

$$\frac{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2}{9}+\frac{(Y+3)^2}{\frac{27}{4}}=1 \quad \left(-\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}\right)$$

设△ABC 的重心 G 坐标为(x，y)；又 B 点坐标为(X，Y)。由三角形重心坐标公式得

$$\begin{cases} x=\frac{1-2+X}{3} \\ y=\frac{-3-3+Y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=3x+1 \\ Y=3y+6 \end{cases}$$

代入 B 点的轨迹方程得

$$\frac{\left(3x+1+\frac{1}{2}\right)^2}{9}+\frac{(3y+6+3)^2}{\frac{27}{4}}=1$$

即 $$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4(y+3)^2}{3}=1$$

因为 $-\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2}$，则 $-\frac{1}{2}<3x+1<\frac{5}{2}$，所以 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$。

故重心 G 的轨迹方程为

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4(y+3)^2}{3}=1 \quad \left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$$

例12-1-13 已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，若椭圆上存在不同两点关于直线 l：y=2x+m 对称，求实数 m 的取值范围。

解 设椭圆上二点 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$ 关于直线 l 对称，则直线 l 是线段 MN 的垂直平分线，故可设 MN 所在直线方程为

$$y=-\frac{1}{2}x+t$$

由方程组 $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+t \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 消去x，得

$$25y^2-32ty+16t^2-36=0$$

当 $\Delta=(-32t)^2-100(16t^2-36)>0$，即 $-\frac{5}{2}<t<\frac{5}{2}$ 时，方程有两不等实根 y_1，y_2，且 $y_1+y_2=\frac{32t}{25}$。

设 MN 的中点为 $Q(x_0，y_0)$，则

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{16}{25}t，\quad x_0=2t-2y_0=\frac{18}{25}t$$

因为Q在直线l上，则$\frac{16}{25}t = 2 \cdot \frac{18}{25}t + m$，所以$t = -\frac{5}{4}m$，故有

$$-\frac{5}{2} < -\frac{5}{4}m < \frac{5}{2} \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

故实数 m 的取值范围是 m∈(-2，2)。

例12-1-14 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$。A，B是椭圆上相异两点，线段 AB 的垂直平分线在 x 轴、y 轴上的截距分别为 m，n。求证：

$$\frac{b^2-n^2}{a^2}+\frac{a^2-m^2}{b^2}>2$$

证 设 A，B 两点的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$(x_1 \neq x_2)$，AB 的中点 Q 的坐标为(x_0, y_0)。

因 A，B 两点都在椭圆上，故

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1，\quad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$$

两式相减得

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$$

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

所以 AB 的垂直平分线的方程为

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$$

因此直线在 x 轴、y 轴上的截距分别为 m，n，则

$$-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(m-x_0) \Leftrightarrow x_0=\frac{a^2m}{a^2-b^2}$$

$$n-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(-x_0) \Leftrightarrow y_0=\frac{nb^2}{b^2-a^2}$$

所以Q点的坐标为$\left(\frac{a^2m}{a^2-b^2}，\frac{b^2n}{b^2-a^2}\right)$。

因 Q 为弦 AB 的中点，则Q点必在椭圆内，所以

$$\frac{\left(\frac{a^2m}{a^2-b^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b^2n}{b^2-a^2}\right)^2}{b^2}<1 \Leftrightarrow m^2a^2+n^2b^2<(a^2-b^2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2(a^2-m^2)+b^2(b^2-n^2)>2a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2-n^2}{a^2}+\frac{a^2-m^2}{b^2}>2$$

例12-1-15 设P是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任一点，$F_1$，$F_2$为两焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$。求 $\sin\theta$ 的最大值。

解 设$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，$c=\sqrt{a^2-b^2}$。由椭圆定义知，$r_1+r_2=2a$，$|F_1F_2|=2c$。

在△PF_1F_2中，由余弦定理，得

$$\cos\theta=\frac{r_1^2+r_2^2-(2c)^2}{2r_1r_2}=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2-4c^2}{2r_1r_2}$$

$$=\frac{4a^2-4c^2-2r_1r_2}{2r_1r_2}=\frac{2b^2}{r_1r_2}-1$$

因为$r_1+r_2=2a\geq 2\sqrt{r_1r_2}$，所以$r_1r_2\leq a^2$，所以

$$\cos\theta\geq\frac{2b^2}{a^2}-1$$

即当$r_1=r_2$时，$\cos\theta$取最小值$\frac{2b^2-a^2}{a^2}$。

若$2b^2-a^2\leq 0$ 即$a^2\geq 2b^2$，则$\theta_{max}\geq\frac{\pi}{2}$。则$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\sin\theta$取最大值 1；

若$2b^2-a^2>0$ 即$a^2<2b^2$，则$\theta_{max}<\frac{\pi}{2}$。则当$\cos\theta=\frac{2b^2-a^2}{a^2}$时，

$$(\sin\theta)_{max}=\sqrt{1-\left(\frac{2b^2-a^2}{a^2}\right)^2}=\frac{2bc}{a^2}$$

例12-1-16 设椭圆的中心在原点O，焦点在x轴上，离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$。过椭圆外一点 M(0，2)作直线 l 交椭圆于 A，B 两点，当△AOB 的面积最大值为$\sqrt{2}$时，求此椭圆的方程和直线l的方程。

解 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$c=\sqrt{a^2-b^2}$。则

$$e=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2=2b^2$$

故椭圆方程为 $x^2+2y^2=2b^2$。

因 M(0，2)在椭圆外，则 $0<b<2$。

设直线 l 的方程为 $y=kx+2$，A，B 两点的坐标分别为$(x_1，x_2)$，$(x_2，y_2)$。

由方程组$\begin{cases}y=kx+2\\x^2+2y^2=2b^2\end{cases}$消去y，得方程

$$(1+2k^2)x^2+8kx+8-2b^2=0 \qquad (i)$$

当$\Delta=64k^2-4(1+2k^2)(8-2b^2)=8(2k^2b^2+b^2-4)>0$，即 $2k^2b^2+b^2>4$ 时，方程有两不等实根 x_1，x_2。且

$$x_1+x_2=-\frac{8k}{1+2k^2}，\ x_1x_2=\frac{8-2b^2}{1+2k^2}$$

故

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2k^2b^2+b^2-4}}{1+2k^2}$$

又O到直线l的距离$d=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$，则△AOB的面积

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2k^2b^2+b^2-4}}{1+2k^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2k^2b^2+b^2-4}}{1+2k^2}$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{1+2k^2}-\frac{4}{(1+2k^2)^2}}$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{-4\left(\frac{1}{1+2k^2}-\frac{b^2}{8}\right)^2+\frac{b^4}{16}}$$

当$\dfrac{1}{1+2k^2}=\dfrac{b^2}{8}$时，

$$(S_{\triangle AOB})_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}b^2$$

由$\dfrac{1}{1+2k^2}=\dfrac{b^2}{8}$及$\dfrac{\sqrt{2}}{2}b^2=\sqrt{2}$得$b^2=2$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。

故所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，直线l的方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}x+2$。

例 12-1-17　已知椭圆的中心在坐标原点，一个顶点为 A(0，-1)，焦点在x轴上，且右焦点到直线$x-y+2\sqrt{2}=0$的距离为3。试问是否存在一条斜率为 k(k≠0)的直线 l，使 l 与已知椭圆交于不同两点 M，N，且|AM|=|AN|，并说明理由。

解　由已知，可设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，右焦点$F_2$的坐标为(c，0)(c>0)。

已知F_2到直线$x-y+2\sqrt{2}=0$的距离为3，故

$$\frac{|c+2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=3\Leftrightarrow c=\sqrt{2}$$

又已知椭圆的一个顶点为A(0，-1)，则$b=1$，所以$a=\sqrt{3}$。

故椭圆方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，即$x^2+3y^2=3$。

设直线 l 的方程为 y=kx+m(k≠0)，点 M，N 的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，

由方程组$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+3y^2=3\end{cases}$消去y，得方程

$$(1+3k^2)x^2+6kmx+3(m^2-1)=0$$

当 $\Delta=36k^2m^2-12(m^2-1)(1+3k^2)=12(3k^2-m^2+1)>0$，
即当 $m^2<3k^2+1$ 时，方程有两个不等实根 x_1，x_2，且

$$x_1+x_2=-\frac{6km}{1+3k^2}$$

故弦MN的中点P的坐标为$\left(-\frac{3km}{1+3k^2}，\frac{m}{1+3k^2}\right)$。

|AM|=|AN|的充要条件是 A 在 MN 的垂直平分线上，则 AP⊥MN。因 AP 所在直线斜率

$$k_{AP}=\frac{\frac{m}{1+3k^2}+1}{-\frac{3km}{1+3k^2}}=-\frac{1+m+3k^2}{3km}$$

又已知 MN 所在直线 l 斜率为 $k_{MN}=k$，于是

$$-\frac{1+m+3k^2}{3km}\cdot k=-1\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}(1+3k^2) \qquad \text{(i)}$$

将(i)代入前面已证的不等式 $m^2<3k^2+1$ 得

$$\frac{1}{4}(1+3k^2)^2<3k^2+1\Leftrightarrow 0<k^2<1$$

$\Leftrightarrow -1<k<0$或$0<k<1$.

故当 $k\in(-1，0)\cup(0，1)$时，存在满足条件的直线 l.

例12-1-18 已知一个焦点为F（2，0），相应的准线为$l：x=\frac{3}{2}$的椭圆截直线 y=kx+3 所得的弦恰好被 x 轴平分，求实数 k 的取值范围.

解　设椭圆的离心率为 e，P(x，y)为椭圆上任一点.

因F（2，0）为椭圆的一个焦点，$l：x=\frac{3}{2}$为其相应的准线，则由椭圆的第二定义，得

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|x-\frac{3}{2}|}=e\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=e^2(x-\frac{3}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2+y^2+(3e^2-4)x+4-\frac{9}{4}e^2=0$$

$$\Leftrightarrow (1-e^2)\left[x+\frac{3e^2-4}{2(1-e^2)}\right]^2+y^2=\frac{9}{4}e^2-4+\frac{(3e^2-4)^2}{4(1-e^2)}$$

所以椭圆的中心为$\left(\frac{4-3e^2}{2(1-e^2)}，0\right)$.

因直线 y=kx+3 被椭圆所截得的弦恰被 x 轴平分，由椭圆对称性知，直线 y=kx+3 必过椭圆中心．所以，

$$k\cdot\frac{4-3e^2}{2(1-e^2)}+3=0\Leftrightarrow e^2=\frac{4k+6}{3k+6}(k\neq-2)$$

因 $0<e<1$，所以 $0<e^2<1$，于是

$$0<\frac{4k+6}{3k+6}<1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}<k<0$$

注　注意椭圆的几何性质在解题中的应用．

例12-1-19　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．能否在椭圆上找到一点M，使得点M到椭圆的左准线 l 的距离|MN|为点M到两焦点 F_1，F_2 的距离的等比中项？

解　假设椭圆上存在点M(x，y)满足题设条件．

过M作MN⊥l于N，设|MN|=t(t＞0)，$c=\sqrt{a^2-b^2}$．则离心率$e=\frac{c}{a}$，左准线l方程为$x=-\frac{a^2}{c}$．

由椭圆定义，有

$$|MF_1|=e|MN|=et$$

$$|MF_2|=2a-|MF_1|=2a-et$$

因为$|MN|^2=|MF_1|\cdot|MF_2|$，所以

$$t^2=et(2a-et) \Leftrightarrow t=\frac{2ae}{1+e^2}$$

又因为$\frac{a^2}{c}-a\leq|MN|\leq\frac{a^2}{c}+a$，则

$$\frac{a^2}{c}-a\leq\frac{2ae}{1+e^2}\leq\frac{a^2}{c}+a \Leftrightarrow \frac{1}{e}-1\leq\frac{2e}{1+e^2}\leq\frac{1}{e}+1$$

因 0＜e＜1，则 $e+e^2+e^3\geq1$．

故当椭圆离心率 e 满足 $e+e^2+e^3\geq1$ 时，椭圆上存在一点M，使$|MN|^2=|MF_1|\cdot|MF_2|$；当椭圆离心率 e 使 $e+e^2+e^3<1$ 时，椭圆上不存在满足条件的点M．

例 12-1-20　已知椭圆 $x^2+4(y-1)^2=4$．点P(a，1)不在线段 y=1(-2≤x≤2)上．当 a 为何值时，过P点存在一对互相垂直的直线同时与椭圆有公共点？

解　因点P不在线段 y=1(-2≤x≤2)上，则P点在椭圆外．设过P点满足条件的一对直线为 l_1 与 l_2，其方程分别为

$$l_1: y-1=k(x-a)$$

$$l_2: y=-\frac{1}{k}(x-a)\quad(k\neq0)$$

由方程组$\begin{cases}y-1=k(x-a)\\x^2+4(y-1)^2=4\end{cases}$消去y，得方程

$$(1+4k^2)x^2-8ak^2x+4(k^2a^2-1)=0$$

其判别式为

$$\Delta_1=64a^2k^4-16(1+4k^2)(k^2a^2-1)=16(4k^2-a^2k^2+1),$$

同理，由方程组$\begin{cases} y-1=-\frac{1}{k}(x-a) \\ x^2+4(y-1)^2=4 \end{cases}$消去y，所得关于x的方程的判别式为

$$\Delta_2=\frac{16}{k^2}(k^2-a^2+4)$$

l_1和l_2同时与椭圆有公共点的充要条件是关于k的不等式组$\begin{cases} \Delta_1 \geq 0 \\ \Delta_2 \geq 0 \end{cases}$有解．即

$$\begin{cases} 4k^2-a^2k^2+1 \geq 0 \\ k^2-a^2+4 \geq 0 \end{cases}$$

有解．因为 a＜-2 或 a＞2，即 a^2＞4．故由上面的不等式组得

$$\begin{cases} k^2 \leq \frac{1}{a^2-4} \Leftrightarrow a^2-4 \leq \frac{1}{a^2-4} \\ k^2 \geq a^2-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0<a^2-4 \leq 1 \Leftrightarrow 2<|a| \leq \sqrt{5}$$

故当$a\in[-\sqrt{5}, -2)\cup(2, \sqrt{5}]$时，过P点存在一对互相垂直的直线与椭圆同时有公共点．

习题

12-1-1　若方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,则实数 k 的取值范围是　[　　]

A．(0，∞)　　B．(0，2)

C．(1，-∞)　　D．(0，1)

12-1-2 已知对$k\in R$，直线$y-kx-1=0$与椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$恒有公共点，则实数 m 的职值范围是 [　　]

A．(0，1)　　B．(0，5)

C．(1，+∞)　　D．(1，5)

12-1-3　已知椭圆两准线间的距离与两焦点间的距离之比是 4∶3，则此椭圆的离心率为　[　　]

A．$\frac{4}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

12-1-4 已知椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$上一点P到它的右准线的距离为10，则点 P 到它的左焦点的距离是 [　　]

A．8　　B．10

C．12　　D．14

12-1-5　一椭圆的两条准线与其一条对称轴分别交于 P_1，P_2 两点，两焦点 F_1，F_2 将线段 P_1P_2 三等分，则此椭圆的离心率为 [　　]

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

12-1-6　已知椭圆的短轴长、焦距和长轴长成等差数列，则此椭圆的离心率为 [　　]

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

12-1-7　过椭圆 $x^2+2y^2-8x+4y+2=0$ 的一个焦点且与长轴垂直的弦长等于 [　　]

A．8　　B．4　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

12-1-8 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上三点A，B，C的横坐标$x_1$，$x_2$，$x_3$ 成等差数列，F 为椭圆的左焦点，则|AF|，|BF|，|CF|

[　　]

A．成等差数列　　B．成等比数列

C．的倒数成等差数列　　D．的倒数成等比数列

12-1-9 斜率为1的直线l与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$相交于A，B两点，则|AB|的最大值为 [　　]

A．2　　B．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{4\sqrt{10}}{5}$　　D．$\frac{8\sqrt{10}}{5}$

12-1-10 已知AB为经过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的中心的弦，F(c，0)为椭圆的右焦点，则△AFB 的面积的最大值为 [　　]

A．b^2　　B．ab

C．ac　　D．bc

12-1-11　平面上动点 M(x，y)到两定点 $F_1(-4，0)$和 $F_2(4，0)$的距离之和为 2a(a>0)，则动点 M 的轨迹是______．

12-1-12　已知两直线 l_1：$y=k_1x+b$ 与 l_2：$y=k_2x-b$(b 为非零常数)的交点的轨迹是椭圆，则 k_1，k_2 满足的条件是_______．

12-1-13　已知中心在坐标原点，对称轴是坐标轴的椭圆的短轴的一

个端点到一个焦点的距离为5，一条准线方程为$x=\frac{25}{4}$，则此椭圆的方程为________．

12-1-14 中心在原点，对称轴在坐标轴上且过点M(4，$-\sqrt{3}$)，N($2\sqrt{2}$，3)的椭圆方程为________．

0)和(0，b)两点．已知原点到直线l的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}$c，则双曲线的离心

x=3 的椭圆方程是_______．

12-1-16 已知离心率$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$的椭圆的一个焦点为F(2，$2\sqrt{2}$)，相应的准线l：$y=3\sqrt{2}$，则此椭圆的方程为________．

12-1-17　以椭圆的两焦点 F_1，F_2 所连线段为直径的圆与椭圆交于

A，B，C，D 四点，且六边形 ABF_1CDF_2 是正六边形，则此椭圆的离心率 e=________．

12-1-18 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a＞b＞0)$上与两焦点连线互相垂直的点的个数为______．

12-1-19 椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的内接△ABC的边BC为椭圆的长轴，点A在椭圆上，则△ABC 的重心 G 的轨迹方程为_______．

12-1-20 椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$被点P(2，1)平分的弦AB所在直线的方程为______．

12-1-21 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a＞b＞0)$上一点P(3，4)，两焦点$F_1$，$F_2$．若 $PF_1\perp PF_2$，求此椭圆方程．

12-1-22　在直线 l：x-y+9=0 上任取一点 M，过 M 作以 $F_1(-3，0)$，$F_2(3，0)$为焦点的椭圆．当 M 在什么位置时，所作椭圆长轴最短？并求此时椭圆方程．

12-1-23　已知椭圆中心在原点，焦点在 x 轴上，其中一个焦点与短

轴两端点连线互相垂直，且此焦点与较近的一个长轴端点的距离为$4(\sqrt{2}-1)$．求此椭圆的方程、离心率及准线方程．

12-1-24　已知椭圆的对称轴为坐标轴，短轴的一个端点与两焦点连

线构成一正三角形，且焦点到椭圆上的点的最短距离为$\sqrt{3}$．求此椭圆的方程．

12-1-25　已知椭圆中心在坐标原点，焦点在 x 轴上．椭圆上一点 P 到两焦点 F_1，F_2 的距离之差为 2．$\angle F_1PF_2$ 的平分线与椭圆长轴交于 $Q(\frac{1}{2}，0)$．且一条准线方程为$x=8$．求此椭圆的方程．

12-1-26 已知以直线$y=1$为准线，离心率为$\frac{1}{2}$的椭圆过点P(0，-1)．求此椭圆长轴长的取值范围．

12-1-27 在椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上求一点M，使点M到左准线l的距离$|MN|$为点 M 到两焦点 F_1，F_2 的距离的等比中项．

12-1-28 已知点P是椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$上一点，$F_1$，$F_2$为两焦点，且$\angle F_1PF_2=30°$．求$\triangle F_1PF_2$ 的面积．

12-1-29　已知椭圆上一点 P，椭圆的两焦点为 F_1，F_2，且$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=2\alpha(\alpha\in(0，\frac{\pi}{2}))$．求此椭圆的离心率e及α的取值范围．

12-1-30 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点P在长轴AA′上的射影恰为椭圆的一个焦点F，求∠APA′的值．

12-1-31 若椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与直线$l$：$x+y=1$在第一象限内有两个不同的交点．求a，b所满足的条件，并画出点P(a，b)的存在区域．

12-1-32 已知椭圆的中心在原点，焦点在坐标轴上．斜率为1的直线l与椭圆相交于不同两点A，B，且AB的中点Q恒在定直线y=-px(p＞0且p≠1)上．求此椭圆的离心率．

12-1-33 已知椭圆中心在原点，焦点在x轴上．过其右焦点F作倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线交椭圆于P，Q两点．若OP⊥OQ，求此椭圆的离心率e．

12-1-34 已知椭圆的中心在坐标原点，焦点的x轴上，一条准线为x=1．设倾斜角为45°的直线l交椭圆于A，B两点，线段AB的中点为M，直线AB与OM夹角为α．

(1)当α=arctg2时，求此椭圆的方程；

(2)当arctg2＜α＜arctg3时，求椭圆短轴的长的范围．

12-1-35 已知椭圆的两焦点为$F_1(0，-2\sqrt{2})$，$F_2(0，2\sqrt{2})$，离心率$e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

(1)求此椭圆的方程；

(2)是否存在直线l，它与椭圆交于不同两点M，N，且线段MN恰好被直线$x=-\frac{1}{2}$平分？若存在，求出直线l的倾斜角的范围；若不存在，说明理由．

12-1-36 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$上有两点A，B，直线$l$：y=x+k上有两点C，D，且四边形ABCD为正方形，这个正方形外接圆的方程为$x^2+y^2-2y-8=0$．求椭圆方程及直线l的方程．

12-1-37 已知椭圆中心在原点，焦点在坐标轴上．直线y=x+1与椭圆相交于不同两点P，Q，且OP⊥OQ，$|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$．求此椭圆的方程．

12-1-38 过椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的右焦点作一直线l交椭圆于M，N两点，且M，N两点到直线$x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$的距离之和为$\sqrt{3}$．求直线l的方程．

12-1-39 求椭圆$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$的斜率为m的平行弦的中点的轨迹．

12-1-40　已知以直线 $x=1$ 为左准线，以 $F(2,0)$ 为左焦点的椭圆 E 的短轴的一个端点为 B，求 BF 中点 P 的轨迹方程．

12-1-41　椭圆的中心在坐标原点 O，一个焦点为 $F(0,1)$，长轴和短轴长的比为 t．

(1)求椭圆的方程；

(2)设过原点且斜率为 t 的直线与椭圆在 y 轴右边部分的交点为 Q．点 P 在直线上，且 $|\frac{OP}{OQ}|=t\sqrt{t^2-1}$．当 t 变化时，求点 P 的轨迹方程，并说明轨迹是什么图形．

12-1-42　已知直线 l：$y=kx+a$ 与 y 轴交于点 A，与椭圆 $(x-2)^2+by^2=1(b>0)$ 交于不同两点 B，C．点 P 在弦 BC 上，且满足 $\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}$．求当 k 变化时，动点 P 的轨迹．

12-1-43　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 l：$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$．P 为 l 上一点，射线 OP 交椭圆于点 R．又点 Q 在 OP 上，并且满足 $|OP|\cdot|OQ|=k\cdot|OR|^2$（k 为正常数）．当点 P 在直线 l 上运动时，求点 Q 的轨迹方程．

12-1-44　已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，试确定实数 m 的取值范围，使椭圆上存在不同两点关于直线 $y=4x+m$ 对称．

12-1-45　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．A，B 是椭圆上的两点，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于一点 $P(x_0,0)$，证明：$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$．

12-1-46　在椭圆 $x^2+4y^2-4x+1=0$ 上，分别求使 (1) $\frac{y}{x}$；(2) x^2-y^2 取最大值和最小值时点 P 的坐标．

12-1-47　已知 F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点．若椭圆上存在一点 M，使 $\angle F_1MF_2=30°$．求此椭圆的离心率 e 可能取得的最小值．

12-1-48　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．椭圆上存在一点 $P(x_0,y_0)$ 到一条准线的距离为 1．求椭圆的长轴长取最大值时，椭圆的方程．

12-1-49　已知椭圆 E 与椭圆 $x^2+4y^2=12$ 有公共的焦点，且椭圆 E 与直线 $x-y+9=0$ 有公共点．求椭圆 E 的长轴最短时椭圆的方程．

12-1-50　已知椭圆的左顶点在抛物线 $y^2=x-1$ 上，椭圆的长轴长为 4，且 y 轴为其左准线，求椭圆的离心率 e 最大时，椭圆的方程．

12-1-51 设椭圆的中心在坐标原点，长轴在x轴上，离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$．已知点$P(0，\frac{3}{2})$到这椭圆上点的最远距离为$\sqrt{7}$，求此椭圆的方程及最远点的坐标．

12-1-52 已知△ABC的边AB在x轴上，顶点C在椭圆$x^2+\frac{(y-2)^2}{2}=1$上 y≥3 的一段弧上运动，若△ABC 的内心为 I(0，1)，求|AB|的最大值及此时 C 点的坐标．

12-1-53 已知椭圆 $x^2+4y^2-2kx-16y+21=0(k>0)$的两准线间的距离为$\frac{8\sqrt{3}}{3}$，中心为O′．与准线平行的直线l交椭圆于A，B两点，求△O′AB的面积最大时，直线 l 的方程．

12-1-54 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点P作圆$x^2+y^2=b^2$的两条切线，点 A，B 为两切点．过 A，B 两点的直线 l 与 x 轴，y 轴分别交于点 M，N．

(1)求证：$\frac{b^2}{|OM|^2}+\frac{a^2}{|ON|^2}$为定值；

(2)求△OMN(O 为原点)的面积的最小值及此时点 P 的坐标．

12-1-55 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(c，0)$，过F的弦 AB 长为 m(直线 AB 不与 x 轴重合)．

(1)求△AOB 的面积；

(2)m 为何值时，△AOB 的面积最大？并求其最大值．

12-1-56 已知椭圆 $2x^2+y^2=4$．过点 P(1，0)作直线 l 与椭圆交于 A，B 两点．求|AB|的最大值及此时直线 l 的方程．

12-1-57 已知椭圆$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$内有一内接△PAB，$\angle xOP=60°$，AB∥OP．求△PAB 的面积的最大值，并求此时 AB 边所在直线的方程．

12-1-58 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．点A，B在椭圆，O为坐标原点，且 OA⊥OB．求证：O 到 AB 的距离为常数．

12-1-59 已知椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$及点$M\left(-\frac{3}{2}，-\frac{1}{2}\right)$．过点M作直线l交椭圆于 P，Q 两点．求证：以线段 PQ 为直径的圆恒过椭圆上一定点．

12-1-60 已知中心在原点、焦在 x 轴上的椭圆上一点 P 与椭圆短轴两端的连线分别交椭圆长轴(或延长线)于点 Q，R，求证：|OQ|·|OR|为常数．

12-1-61 已知P为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任一点．$F_1$，$F_2$为左、

右两焦点．连PF_1，PF_2并延长分别交椭圆于P_1，P_2．求证：$\dfrac{PF_1}{F_1P_1}+\dfrac{PF_2}{F_2P_2}$为定值．

(二)双曲线

提要

(1)定义

第一定义：平面上到两定点的距离之差的绝对值等于定长(小于两定点间的距离)的点的轨迹叫双曲线．

第二定义：平面上到一定点和不过此定点的一定直线的距离之比等于常数 e(e＞1)的点的轨迹叫双曲线．

(2)标准方程

①焦点在x轴上：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$；

②焦点在y轴上：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$．

(3)等轴双曲线与共轭双曲线

等轴双曲线：实轴长与虚轴长相等的双曲线叫等轴双曲线．

共轭双曲线：以已知双曲线的虚轴为实轴，实轴为虚轴的双曲线叫原双典线的共轭双曲线．其性质为：(i)双曲线与它的共轭双曲线有共同的渐近线；(ii)双曲线与它的共轭双曲线的四个焦点在同一圆上．

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的共轭双曲线是$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$．

与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有共同渐近线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$．

其渐近线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$．

(4)主要参数间的关系：$c^2=a^2+b^2$，$e=\frac{c}{a}$,焦参数$p=\frac{b^2}{c}$，焦点到渐近线的距离等于虚半轴长 b．

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$的焦半径：焦点与双曲线上任一点所连线段叫双曲线的焦半径．设 F_1，F_2 为左、右两焦点，P(x，y)是双曲线上一点．则当 x≥a 时，

$|PF_1|=ex+a$，$|PF_2|=ex-a$

当 x≤-a 时，

$|PF_1|=-(ex+a)$，$|PF_2|=-(ex-a)$

(5)求双曲线方程常用方法有：①利用双曲线定义；②利用待定系数法．此时应先根据焦点的位置，判定类型，确定方程形式，再根据已知条件求有关参数．

(6)求与双曲线有关的参数的值或范围．注意数形结合，充分利用双曲线的几何性质．

(7)判定直线与双曲线的位置关系时，通常利用一元二次方程根的判别式．但当直线与双曲线渐近线平行时，不能用这种方法．

(8)直线被双曲线截得的弦分为端点在双曲线一支上的弦和端点分别在双曲线左、右两支上的弦两类情况．解题时要注意．其弦长的求法

一般有：

①解方程组，求出交点坐标，利用两点间距离公式求．

②不求出交点坐标，利用一元二次方程根与系数的关系求．具体过程是：

由方程组$\begin{cases} y = kx + b \\ f(x，y) = 0 \end{cases}$消去y得

$Ax^2+Bx+C=0$．

当 $A\neq 0$ 且 $\Delta=B^2-4AC>0$ 时，有两实根 x_1，x_2 则

$$弦长 = \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$$

③若弦为过双曲线焦点的弦(称为焦点弦)，则可利用焦半径公式求弦长．

(9)与弦的中点有关的问题，常用的解题方法有：

①利用一元二次方程根的判别式、韦达定理、中点公式求解；

②与弦的中点及斜率有关的题，可将弦的端点坐标代入曲线方程，将所得两方程相减，再利用中点公式及直线斜率的两点式公式求解．

例题

例12-2-1 已知中心在原点，焦点在x轴上的双曲线过点$A(3，2\sqrt{2})$，且焦点到渐近线的距离为 2．求此双曲线的方程．

解 设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a>0，b>0)$，则其渐近线的方程为$y = \pm\frac{b}{a}x$，即$bx\pm ay = 0$．焦点的坐标为$(\pm c，0)$，这里$c = \sqrt{a^2+b^2}$．由题设知

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \Leftrightarrow b = 2$$

又点$A(3，2\sqrt{2})$在双曲线上，故$\frac{9}{a^2} - \frac{8}{4} = 1$，所以$a^2 = 3$．

故所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$．

注 此题是用待定系数法求双曲线方程．首先由题设条件确定方程的形式，再求其中的待定系数．注意双曲线中有关参数间的关系的运用．

例12-2-2 已知椭圆$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$，一双曲线的左焦点和左顶点分别是已知椭圆的左顶点和左焦点，且双曲线的焦点到相应准线的距离等于$\frac{9}{5}$．求双曲线的方程．

解 易知椭圆$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$的左焦点、左顶点坐标分别为$F(-4，0)$，$A(-5，0)$，故双曲线的左焦点为 $F'(-5，0)$，左顶点为 $A'(-4，0)$．

设双曲线的实半轴长、虚半轴长、半焦距分别为 a，b，c，则

$$\begin{cases} c-a=-4-(-5)=1 \\ c-\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow c=5，a=4$$

进而 $b^2=c^2-a^2=9$．

故所求双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$．

注　解此题的关键在于根据双曲线的几何性质列出方程组求出参数 a，b，c．

例12-2-3 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 上一点P到两焦点 F_1，F_2 的距离分别为6和2，且 $\angle F_1PF_2$ 的平分线交x轴于点 $Q(\dfrac{3}{2}，0)$．求此双曲线的方程．

解 设两焦点坐标为 $F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$．

因 P 在双曲线上，由双曲线定义得 $||PF_1|-|PF_2||=2a$，即

$$|6-2|=2a \Leftrightarrow a=2$$

又PQ是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线，则 $\dfrac{|F_1Q|}{|QF_2|}=\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$，所以

$$\frac{\dfrac{3}{2}+c}{c-\dfrac{3}{2}}=\frac{6}{2} \Leftrightarrow c=3$$

进而　$b^2=3^2-2^2=5$

故所求双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$．

注　解涉及双曲线焦半径的问题，应注意利用定义．

例 12-2-4　已知 P 为直线 l：$2x-y+3=0$ 上一点．求过点 P 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 有共同焦点的双曲线中，实轴最长时的双曲线的方程．

解　依题意，可设双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$$

这里 $a^2+b^2=16$，即双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16-a^2}=1$$

因 P 是直线 l 与双曲线的一交点．

由方程组 $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{16-a^2}=1 \end{cases}$ 消去y，得

$$(16-5a^2)x^2-12a^2x+a^4-25a^2=0$$

当 $16-5a^2=0$，即 $a^2=\dfrac{16}{5}$ 时，方程组有解 $x=\dfrac{-109}{60}$，$y=-\dfrac{19}{30}$．

当 $16-5a^2\neq0$ 时，

$$\Delta=144a^4+4(16-5a^2)(25a^2-a^4)=20a^2(a^4-21a^2+80)$$

令 $a^4-21a^2+80\geq0$ 得 $a^2\leq5$ 或 $a^2\geq16$.

当 $a^2\geq16$ 时，$b^2=16-a^2\leq0$，不合，舍去．故 $a^2\leq5$，即 $a^2_{max}=5$，此时双曲线实轴最长．

故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{11}=1$．

注　有关直线与双曲线交点的问题，通常是转化为方程组解的问题进行研究．注意，$a^2=\frac{16}{5}$ 时，直线 l 与双曲线的渐近线平行．

例 12-2-5　已知中心在原点,焦点在 x 轴上的双曲线的实半轴与虚半轴的长的乘积的 $\sqrt{3}$．直线 l 过其右焦点 F_2，且倾斜角 α 满足 $\cos\alpha=\frac{2}{5}$．又 l 与 y 轴交于点 P，线段 PF_2 与双曲线交于点 Q，且点 Q 分线段 PF_2 为 $PQ∶QF_2=2∶1$．求此双曲线的方程．

解 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$．右焦点为 $F_2(c，0)(c=\sqrt{a^2+b^2})$．

由 $\cos\alpha=\frac{2}{5}$ 得 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{21}}{2}$．所以直线 l 的方程为

$$y=\frac{\sqrt{21}}{2}(x-c)$$

令 $x=0$，得 $y=-\frac{\sqrt{21}}{2}c$，故 P 点坐标为 $P\left(0，-\frac{\sqrt{21}}{2}c\right)$．

设 Q 点坐标为(x，y)．因为 $PQ∶QF_2=2∶1$，由定比分点公式得

$$\begin{cases}x=\frac{0+2c}{1+2}=\frac{2}{3}c\\ y=\frac{-\frac{\sqrt{21}}{2}c+0}{1+2}=-\frac{\sqrt{21}}{6}c\end{cases}$$

故 Q 点坐标为 $\left(\frac{2}{3}c，-\frac{\sqrt{21}}{6}c\right)$．

由 Q 点在双曲线上，且 $ab=\sqrt{3}$，得

$$\begin{cases}\frac{\left(\frac{2}{3}c\right)^2}{a^2}-\frac{\left(-\frac{\sqrt{21}}{6}c\right)^2}{b^2}=1\\ ab=\sqrt{3}\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{3}\\ c=2\end{cases}$$

所以，双曲线的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

例 12-2-6　已知双曲线 E 同时满足下列两个条件：原点 O 和直线 x=1 是它的一个焦点和相应的一条准线；且被直线 x+y=0 垂直平分的弦长为

$2\sqrt{2}$. 求此双曲线的方程.

解　设双曲线的离心率为 e(e＞1)，P(x，y)为双曲线上的任一点.因原点 O 和直线 x=1 为其一焦点和相应的准线，由双曲线定义得

$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x-1|}=e$，由此可得双曲线的方程为

$(e^2-1)x^2-y^2-2e^2x+e^2=0$ (i)

设被直线 y+x=0 垂直平分的弦 AB 所在直线的方程为

$y=x+n$ (ii)

将(ii)代入(i)，得

$(e^2-2)x^2-2(e^2+n)x+e^2-n^2=0$　(iii)

若 $e^2-2=0$，则双曲线是等轴双曲线，其渐近线与弦 AB 平行，矛盾.所以 $e^2-2\neq0$，于是当

$\Delta=4(e^2+n)^2-4(e^2-2)(e^2-n^2)>0$

时，方程(iii)有两不等实根 x_1，x_2，(x_1，x_2 为点 A，B 的横坐标). 且

$$x_1+x_2=\frac{2(e^2+n)}{e^2-2}$$

设 AB 的中点 Q 的坐标为(x_0，y_0)，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{e^2+n}{e^2-2}，y_0=x_0+n$$

又因 Q(x_0，y_0)在直线 x+y=0 上，故 $y_0=-x_0$，所以

$$-x_0=x_0+n\Leftrightarrow n=-2x_0$$

于是$n=-2\cdot\frac{e^2+n}{e^2-2}$，即$n=-2$. 此时$\Delta=8(e^2-2)>0$，即$e^2>2$.

又因为$|AB|=2\sqrt{2}$，于是

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{1+1}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{8(e^2-2)}}{|e^2-2|}=e^2$$

$$\Leftrightarrow e^2=4$$

将 $e^2=4$ 代入(i)得双曲线方程 $3x^2-y^2-8x+4=0$，即

$$\frac{9\left(x-\frac{4}{3}\right)^2}{4}-\frac{3y^2}{4}=1$$

注　已知焦点及相应准线求双曲线方程，一般是利用双曲线的第二定义.

例 12-2-7　已知双曲线的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上. 过双曲

线的右焦点且斜率为$\sqrt{\frac{3}{5}}$的直线交双曲线于P，Q两点，若OP⊥OQ且|PQ|=4，求双曲线的方程．

解 设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a＞0，b＞0)$．

依题意知，点 P，Q 的坐标满足方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 & \text{(i)}\\ y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)(\text{其中}c=\sqrt{a^2+b^2}) & \text{(ii)}\end{cases}$$

将(ii)式代入(i)，消去 y，整理得

$$(5b^2-3a^2)x^2+6a^2cx-(3a^2c^2+5a^2b^2)=0 \quad \text{(iii)}$$

设方程(iii)的两根为 x_1，x_2(此即点 P，Q 的横坐标)．

若$5b^2-3a^2=0$，则$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{3}{5}}$．即直线(ii)与双曲线(i)的一条渐近线平行，故直线与双曲线只有一个交点，与题设矛盾，所以 $5b^2-3a^2\neq0$．

根据根与系数的关系，有

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{6a^2c}{5b^2-3a^2} & \text{(iv)}\\ x_1x_2=-\frac{3a^2c^2+5a^2b^2}{5b^2-3a^2} & \text{(v)}\end{cases}$$

由于P，Q在直线$y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$上，可设P，QG两点的坐标分别为$P\left(x_1，\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)\right)$，$Q\left(x_2，\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)\right)$．

由 OP⊥OQ，得

$$x_1x_2+\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)=0$$

$$\Leftrightarrow 8x_1x_2-3c(x_1+x_2)+3c^2=0 \quad \text{(vi)}$$

将(iv)，(v)及 $c^2=a^2+b^2$ 代入(vi)，整理得

$$3a^4+8a^2b^2-3b^4=0\Leftrightarrow (a^2+3b^2)(3a^2-b^2)=0$$

但$a^2+3b^2\neq0$，故$b^2=3a^2$．所以$c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$．

将$b^2=3a^2$，$c=2a$代入(iv)，(v)，整理得$x_1+x_2=-a$，$x_1x_2=-\frac{9}{4}a^2$．

由|PQ|=4 得

$$(x_2-x_1)^2+\left[\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)-\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)\right]^2=4^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-10=0$$

$$\Leftrightarrow a^2-4(-\frac{9}{4}a^2)-10=0\Leftrightarrow a^2=1$$

从而 $b^2=3a^2=3$．

故所求双曲线方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$．

例 12-2-8　已知双曲线

$$x^2-3y^2-4x-6y+1-3m=0(m\neq 0)$$

(1)求此双曲线的中心、焦点的坐标及准线、渐近线的方程；

(2)若此双曲线的一个焦点恰好在直线 $y=3x-11$ 上，求 m 的值．

解　(1)将双曲线方程整理得

$$(x-2)^2-3(y+1)^2=3m$$

若 m＞0，则方程为

$$\frac{(x-2)^2}{3m}-\frac{(y+1)^2}{m}=1$$

故$a^2=3m$，$b^2=m$，$c^2=4m$，中心坐标为$(2，-1)$；焦点坐标为$(2\pm 2\sqrt{m}，-1)$；准线方程为$x=2\pm\frac{3\sqrt{m}}{2}$；渐近线方程为$y+1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$．

若 m＜0，则方程为

$$\frac{(y+1)^2}{-m}-\frac{(x-2)^2}{-3m}=1$$

所以，$a^2=-m$，$b^2=-3m$，$c^2=-4m$．这时，中心坐标为(2，-1)；焦点坐标为$(2，-1\pm 2\sqrt{-m})$；准线方程为$y=-1\pm\frac{\sqrt{-m}}{2}$；渐近线方程为$y+1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$．

(2)由(1)知，$m>0$时，焦点为$(2\pm 2\sqrt{m}，-1)$，则

$$-1=3(2\pm 2\sqrt{m})-11\Leftrightarrow m=\frac{4}{9}$$

$m<0$时，焦点为$(2，-1\pm 2\sqrt{-m})$，则

$$-1\pm 2\sqrt{-m}=6-11\Leftrightarrow m=-4$$

故所求m的值为$\frac{4}{9}$或-4．

注　求中心不在原点，但对称轴与坐标轴平行的双曲线的中心、焦点坐标及准线、渐近线方程，除上述根据双曲线的几何性质直接求得外，还可通过平移坐标轴(以双曲线的中心为新原点)的方法求解．

例12-2-9　已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b\in N)$的两焦点为$F_1$，$F_2$．P是双曲线上的一点，且满足$|PF_1|\cdot|PF_2|=|F_1F_2|^2$，$|PF_2|<4$．求 b 的值．

解　设$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，半焦距为 c．由题设知，双曲线实半轴长 $a=2$，且 $c^2=4+b^2$，于是$|r_1-r_2|=4$，但 $r_2<4$，故 $r_1>r_2$．所以

$$r_1-r_2=4\Leftrightarrow r_1=4+r_2$$

因为$|PF_1|\cdot|PF_2|=|F_1F_2|^2$，故

$$r_1r_2=4c^2=4(4+b^2)\Leftrightarrow(4+r_2)r_2=4(4+b^2)$$

因为 $0<r_2<4$，则 $0<(4+r_2)r_2<32$，所以

$$4(4+b^2)<32 \Leftrightarrow b^2<4,$$

又 $b\in N$，所以 $b=1$.

例 12-2-10　已知双曲线 $16x^2-9y^2=144$，F_1，F_2 为两焦点，P 在双曲线上，且 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{64}{3}$.

(1)求 $\angle F_1PF_2$ 的大小；(2)求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积；(3)求 P 点的坐标.

解　(1)设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$. 由已知双曲线方程知 $a=3$，$b=4$，$c=5$. 故 $|F_1F_2|=2c=10$，$|r_1-r_2|=2a=6$，且 $r_1r_2=\frac{64}{3}$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}$$

$$=\frac{r_1^2+r_2^2-10^2}{2r_1r_2}=\frac{(r_1-r_2)^2+2r_1r_2-100}{2r_1r_2}=-\frac{1}{2}$$

故
$$\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$$

$$(2)S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

(3)设P点的坐标为 (x, y). 因 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y|=5|y|$，得

$$5|y|=\frac{16\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow y=\pm\frac{16\sqrt{3}}{15}$$

又 P 在双曲线上，则

$$16x^2-9\left(\pm\frac{16\sqrt{3}}{15}\right)^2=144\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{273}}{5}$$

故P点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{273}}{5},\ \pm\frac{16\sqrt{3}}{15}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{273}}{5},\ \pm\frac{16\sqrt{3}}{15}\right)$.

例12-2-11　已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的离心率 $e=3$，左、右两焦点分别为 F_1，F_2，左准线为 l. 试问：双曲线的左支上是否存在一点 P，使 $|PF_1|$ 是 P 到 l 的距离 d 与 $|PF_2|$ 的比例中项？若存在，求出 P 点的坐标；若不存在，说明理由.

解　设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$. 假设在双曲线左支上存在点 P 满足条件 $r_1^2=dr_2$，则 $\frac{r_1}{d}=\frac{r_2}{r_1}$.

由双曲线第二定义知，$\frac{r_1}{d}=e$，那么 $\frac{r_2}{r_1}=e$，即 $r_2=3r_1$. 又由双曲线定义知 $r_2-r_1=2a$. 从而 $r_1=a$，$r_2=3a$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$r_1+r_2>2c(c=\sqrt{a^2+b^2})$，就是 $4a>2c$，于是 $e=\frac{c}{a}<2$，

与 $e=3$ 矛盾．

故双曲线左支上不存在满足条件的点 P．

注　探索性问题，一般先肯定结论，再进行推理．

例 12-2-12　过点(0，1)的直线 l 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，与双曲线 $x^2-2y^2=r^2$ 有两个交点．判断直线 l 能否经过双曲线的右焦点 F．若能，求出此时 l 的斜率；若不能，说明理由．

解　由题设知点(0，1)在圆上或圆外，故 $0<r\le 1$．

设直线 l 的方程为 $y=kx+1$．

因 l 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切，故 $\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}=r$．

双曲线 $\dfrac{x^2}{r^2}-\dfrac{2y^2}{r^2}=1$ 的半焦距 c 满足 $c^2=r^2+\dfrac{r^2}{2}=\dfrac{3r^2}{2}$，故 $c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}r$．故右焦点坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}r，0\right)$．

假设直线 l 经过右焦点 F，则

$$\frac{\sqrt{6}}{2}kr+1=0$$

将 $r=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ 代入得

$$\frac{\sqrt{6}k}{2\sqrt{k^2+1}}+1=0 \Leftrightarrow k=-\sqrt{2}$$

即当 l 斜率为 $-\sqrt{2}$ 时，l 过右焦点 F．这时 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，直线 l 的方程为

$$y=-\sqrt{2}x+1$$

将 $y=-\sqrt{2}x+1$ 代入双曲线方程 $3x^2-6y^2=1$ 中，得

$$9x^2-12\sqrt{2}x+7=0$$

其判别式 $\Delta=(12-\sqrt{2})^2-4\times 9\times 7=288-252=36>0$，故直线 l 与双曲线有两个交点．

综上可知，当过点(0，1)的直线 l 的斜率为 $-\sqrt{2}$ 时，满足条件．

例 12-2-13　已知双曲线 $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}=1$．过点 P(2，0)作直线 l 与双曲线交于 A，B 两点，若 $|AB|=4\sqrt{3}$．求直线 l 的方程．

解　设直线 l 的方程为 $ky=x-2$．A，B 两点的坐标分别为 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$．

由方程组 $\begin{cases} ky=x-2 \\ \dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}=1 \end{cases}$ 消去 x，得方程

$$(1-2k^2)y^2-8ky-12=0 \quad \text{(i)}$$

注意到 $1-2k^2=0$ 时，l 与双曲线的渐近线平行，不可能有两个交点，故 $1-2k^2\ne 0$．这样，当

$\Delta=64k^2+48(1-2k^2)=16(3-2k^2)>0$

即$k\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$且$-\frac{\sqrt{6}}{2}<k<\frac{\sqrt{6}}{2}$时，方程(i)有两个不等实根$y_1$，$y_2$($y_1$，$y_2$点A，B的纵坐标)．于是

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{1+k^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{3-2k^2}}{|1-2k^2|}$$

但已知$|AB|=4\sqrt{3}$，故

$$\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{3-2k^2}}{|1-2k^2|}=4\sqrt{3}\Leftrightarrow(1+k^2)(3-2k^2)=3(1-2k^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 14k^4-13k^2=0\Leftrightarrow k=0\text{或}k=\pm\frac{\sqrt{182}}{14}$$

故所求直线 l 的方程为

$$x=2\text{或}x-\frac{\sqrt{182}}{14}y-2=0\text{或}x+\frac{\sqrt{182}}{14}y-2=0$$

注　因直线 l 不与 x 轴平行，则设 l 方程为 ky=x-2 较好，这样可避免讨论 l⊥x 轴的情况．

例12-2-14 已知双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$．过右焦点$F_2$的弦MN长为5，右顶点为 A_2．求△A_2MN 的面积．

解 设M，N的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$．双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的右焦点为 $F_2(5，0)$，右顶点为 $A_2(4，0)$．

设MN所在直线方程为$ky=x-5$，由方程组$\begin{cases}ky=x-5\\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$消去x，得方程

$$(9k^2-16)y^2+90ky+81=0,$$

此方程有两不等实根 y_1，y_2 的条件是 $9k^2-16\neq0$ 且$\Delta>0$．由此知 $k\neq\pm\frac{4}{3}$．且由韦达定理知

$$y_1+y_2=\frac{-90k}{9k^2-16}，y_1y_2=\frac{81}{9k^2-16}$$

所以 $|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}|y_1-y_2|$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{5184(k^2+1)}}{|9k^2-16|}=\frac{72(1+k^2)}{|9k^2-16|}$$

由已知|MN|=5，故

$$\frac{72(1+k^2)}{|9k^2-16|}=5\Leftrightarrow k^2=\frac{8}{117}$$

又 A_2 到 MN 的距离

$$d=\frac{|4-5|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{117}}}=\sqrt{\frac{117}{125}}$$

故△A_2MN 的面积为

$$S_{\triangle A_2MN}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{\frac{117}{125}}=\frac{3\sqrt{65}}{10}$$

注 也可由k的值求出$|y_1-y_2|$的值，再由$S_{\triangle A_2MN}=\frac{1}{2}|F_2A_2|\cdot|y_1-y_2|$求面积．

例12-2-15 已知l_1，l_2是过点$P\left(-\sqrt{2}，0\right)$的两条互相垂直的直线；且 l_1，l_2 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 各有两个交点，分别为 A_1，B_2 和 A_2，B_2．

(1)求 l_1 的斜率 k_1 的取值范围；

(2)若$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$，求$l_1$，$l_2$的方程．

解 (1)依题设，l_1，l_2的斜率都存在．因为l_1过点$P\left(-\sqrt{2}，0\right)$且与双曲线有两个交点，故方程组

$$\begin{cases}y=k_1\left(x+\sqrt{2}\right)\left(k_1\neq 0\right)\\ y^2-x^2=1\end{cases}\qquad\text{(i)}$$

有两个不同的实解．在方程组(i)中消去 y，整理得

$$(k_1^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_1^2x+2k_1^2-1=0\qquad\text{(ii)}$$

若 $k_1^2-1=0$，则方程组(i)只有一解，即 l_1 与双曲线只有一个交点，与题设矛盾．故 $k_1^2-1\neq 0$，即

$$|k_1|\neq 1.\qquad\text{(iii)}$$

方程(ii)的判别式为正，即

$$\triangle_1=\left(2\sqrt{2}k_1^2\right)^2-4\left(k_1^2-1\right)\left(2k_1^2-1\right)=4\left(3k_1^2-1\right)>0\qquad\text{(iv)}$$

同法可知，

$$|k_2|\neq 1，\triangle_2=4(3k_2^2-1)>0\qquad\text{(v)}$$

又因为 $l_1\perp l_2$，则有

$$k_1\cdot k_2=-1\qquad\text{(vi)}$$

由(iii)，(iv)，(v)，(vi)得

$$k_1\in\left(-\sqrt{3}，-1\right)\cup\left(-1，-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3}，1\right)\cup\left(1，\sqrt{3}\right)$$

(2)设 A_1，B_1 的坐标为 $A_1(x_1，y_1)$，$B_1(x_2，y_2)$．由方程(ii)知

$$x_1+x_2=\frac{-2\sqrt{2}k_1^2}{k_1^2-1}，x_1\cdot x_2=\frac{2k_1^2-1}{k_1^2-1}$$

所以 $|A_1B_1|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+k_1^2)(x_1-x_2)^2$

$$=\frac{4\left(1+k_1^2\right)\left(3k_1^2-1\right)}{\left(k_1^2-1\right)^2}$$

同理可得

$$|A_2B_2|^2=\frac{4\left(1+k_2^2\right)\left(3k_2^2-1\right)}{\left(k_2^2-1\right)^2}=\frac{4\left(1+k_1^2\right)\left(3-k_1^2\right)}{\left(1-k_1^2\right)^2}$$

由已知$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$，得$|A_1B_1|^2=5|A_2B_2|^2$，故

$$\frac{4\left(1+k_1^2\right)\left(3k_1^2-1\right)}{\left(k_1^2-1\right)^2}=5\times\frac{4\left(1+k_1^2\right)\left(3-k_1^2\right)}{\left(1-k_1^2\right)^2}\Leftrightarrow k_1=\pm\sqrt{2}$$

当$k_1=\sqrt{2}$时，l_1：$y=\sqrt{2}\left(x+\sqrt{2}\right)$，$l_2$：$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\sqrt{2}\right)$；

当$k_1=-\sqrt{2}$时，l_1：$y=-\sqrt{2}\left(x+\sqrt{2}\right)$，$l_2$：$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\sqrt{2}\right)$.

例 12-2-16　已知以 y 轴为右准线的双曲线 E 的实半轴长 a、虚半轴长 b、半焦距 c 成等差数列，且右支过定点 P(1，2).

(1)求双曲线 E 的右焦点 F 的轨迹；

(2)设过点 P 和 F 的直线与双曲线右支的另一交点为 Q，求 Q 点的轨迹方程.

解　(1)由已知 $2b=a+c$，又 $c^2=a^2+b^2$，故

$$c^2=a+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\Leftrightarrow 3c^2-2ac-5a^2=0\Leftrightarrow(3c-5a)(c+a)=0$$

$$\Leftrightarrow 3c-5a=0$$

故离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

设右焦点 F 的坐标为(x，y)，因 P 到 y 轴距离为 1，

由双曲线定义得|PF|=e 即

$$\sqrt{(x-1)^2+\left(y-2\right)^2}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(y-2\right)^2=\frac{25}{9}(x>0)$$

故F点轨迹为圆$(x-1)^2+\left(y-2\right)^2=\frac{25}{9}$在y轴右边的一段弧.

(2)设 Q 点的坐标为(x，y)(x＞0)．由双曲线定义，有

$$\frac{|QF|}{x}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow|QF|=\frac{5}{3}x$$

又$|PF|=\frac{5}{3}$，则$|QP|=|PF|+|QF|=\frac{5}{3}(1+x)$．于是

$$(x-1)^2+\left(y-2\right)^2=\frac{25}{9}(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{64\left(x+\frac{17}{8}\right)^2}{225}-\frac{36\left(y-2\right)^2}{225}=1(x>0)$$

此即 Q 点的轨迹方程.

例 12-2-17　已知双曲线中心在坐标原点，准线平行于 x 轴，离心率

$e=\frac{\sqrt{5}}{2}$．点P(0，5)到双曲线上点的最近距离为2．求此双曲线方程及

双曲线上到 P 点的距离为 2 的点的坐标．

解　由已知，设双曲线方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$．由$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，得$a=\frac{2}{\sqrt{5}}c$．

则$b=\sqrt{c^2-a^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}c$．所以，$a=2b$．故双曲线方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{4x^2}{a^2}=1$$

设$Q(x_0，y_0)$为双曲线上一点，则$x_0^2=\frac{y_0^2-a^2}{4}$．所以，

$$d=|PQ|=\sqrt{x_0^2+(y_0-5)^2}\Leftrightarrow d^2=\frac{y_0^2-a^2}{4}+(y_0-5)^2$$

$$\Leftrightarrow d^2=\frac{5}{4}(y_0-4)^2+\frac{20-a^2}{4}$$

且 $y_0 \geq a$ 或 $y_0 \leq -a$．

若$0<a\leq 4$，则当$y_0=4$时$d_{min}^2=\frac{20-a^2}{4}$．

由$\frac{20-a^2}{4}=2^2$，解得$a=2$，此时Q的坐标为$(\sqrt{3}，4)$或$(-\sqrt{3}，4)$．

若$a>4$，则当$y=a$时，$d_{min}^2=(a-5)^2$．

由|a-5|=2 解得 a=7 或 a=3(舍)．此时，Q 点坐标为(0，7)．

故所求双曲线方程为$\frac{y^2}{4}-x^2=1$，点的坐标为$(\pm\sqrt{3}，4)$；或$\frac{y^2}{49}-\frac{4x^2}{49}=1$，点的坐标为$(0，7)$．

例 12-2-18　已知双曲线 $2x^2-y^2=2$，

(1)过点 A(2，1)的直线 l 交双曲线于 P_1，P_2 两点，且 A 为 P_1P_2 的中点，求 l 的方程；

(2)过点 B(1，1)能否作直线 m 交双曲线于 Q_1，Q_2 两点，且 B 为 Q_1Q_2 的中点？

解　(1)因点 A(2，1)在双曲线 $2x^2-y^2=2$ 的右支内，则 l 不与 x 轴垂直．设 P_1，P_2 两点坐标为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，且 $x_1\neq x_2$．因 P_1、P_2 在双曲线上，故

$$\begin{cases}2x_1^2-y_1^2=2\\2x_2^2-y_2^2=2\end{cases}$$

两式相减得

$$2(x_1-x_2)(x_1+x_2)=(y_1-y_2)(y_1+y_2)$$

$$\Leftrightarrow\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2(x_1+x_2)}{y_1+y_2}$$

因为 A 为 P_1P_2 的中点，则 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$．
所以直线 l 的斜率

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2\times 4}{2}=4$$

故 l 不与渐近线平行，且过右支内点 A，则 l 必与双曲线有两个交点．故 l 的方程为 $y-1=4(x-2)$，即

$4x-y-7=0$

(2)点 B(1，1)在双曲线 $2x^2-y^2=1$ 的右支与两渐近线所夹的区域内．

设直线 m 的方程为 $y-1=k(x-1)$，即

$y=kx+1-k$

设 Q_1，Q_2 两点的坐标为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$．

将 $y=kx+1-k$ 代入方程 $2x^2-y^2=2$，得

$2x^2-(kx+1-k)^2=2$

$\Leftrightarrow(2-k^2)x^2-2k(1-k)x-(1-k)^2-2=0$

当 $2-k^2=0$ 时，直线 m 与双曲线不可能有两个交点；当 $2-k^2\neq 0$ 时，

$\triangle=4k^2(1-k)^2+4(2-k^2)[(1-k)^2+2]=24-16k>0$

$\Leftrightarrow k<\frac{3}{2}$

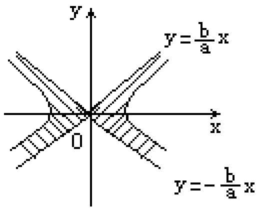
由韦达定理知

$$x_1+x_2=\frac{2k(1-k)}{2-k^2}$$

因B为Q_1Q_2的中点，故$\frac{2k(1-k)}{2-k^2}=1$，解得$k=2$；与$k<\frac{3}{2}$矛盾．故满足条件的 k 不存在．即过 B 点不能作直线 m，使被双曲线截得的弦以 B 为中点．

注　(i)一般地，涉及弦的中点和斜率的问题可用(1)的解法，但必须先证明直线与曲线相交，否则就会得出错误的结论．

(ii)对双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，当点P在图中阴影区域内时，以P点为中点的弦不存在；当点 P 在图中阴影区域外时，存在以 P 点为中点的弦．



例12-2-19　设双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$上存在不同两点关于直线$y=kx+2$对称，求k的取值范围．

解　显然，所给双曲线上不存在关于直线 y=2 对称的不同的两点，因而 $k\neq 0$．

设双曲线上 A，B 两点关于直线 $y=kx+2$ 对称．则过 A，B 的直线与直线 $y=kx+2$ 垂直且 AB 中点 P 在直线 $y=kx+2$ 上．

设AB所在直线方程为$y=-\frac{1}{k}x+t$．又设A，B及中点P的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_0, y_0)．

由方程组$\begin{cases} y=-\frac{1}{k}x+t \\ \frac{x^2}{4}-y^2=1 \end{cases}$消去x，整理得

$(k^2-4)y^2-2k^2ty+k^2t^2-4=0$

此方程有二不等实根y_1，y_2，故

$k^2-4\neq 0$，$\triangle=4k^4t^2-4(k^2-4)(k^2t^2-4)>0$

即$k\neq\pm 2$，且

$k^2t^2+k^2-4>0$． (i)

又$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{k^2t}{k^2-4}$，$x_0=-k(y_0-t)=-\frac{4kt}{k^2-4}$

且P点在直线$y=kx+2$上，故

$$\frac{k^2t}{k^2-4}=-\frac{4k^2t}{k^2-4}+2\Rightarrow t=\frac{2(k^2-4)}{5k^2} \qquad \text{(ii)}$$

将(ii)代入(i)得

$$k^2\cdot\frac{4(k^2-4)^2}{25k^4}+k^2-4>0$$

$$\Leftrightarrow (k^2-4)\cdot\frac{29k^2-16}{25k^2}>0$$

$$\Leftrightarrow k^2>4\text{或}0<k^2<\frac{16}{29}$$

$$\Leftrightarrow k<-2\text{或}-\frac{4\sqrt{29}}{29}<k<0\text{或}0<k<\frac{4\sqrt{29}}{29}\text{或}k>2$$

故k的取值范围为

$$(-\infty, -2)\cup\left(-\frac{4\sqrt{29}}{29}, 0\right)\cup\left(0, \frac{4\sqrt{29}}{29}\right)\cup(2, +\infty)$$

注　关于直线对称的问题，要抓住垂直、平分这两点．

例12-2-20 已知双曲线E：$x^2+\frac{(1-t^2)y^2}{t^2}=1(t>1)$的右支分别与x轴及直线$x+y=0$相交于A，B两点．以A为焦点、对称轴是x轴，且开口向左的抛物线过B点，抛物线顶点为M．求当双曲线E的一条渐近线的斜率在$\left[\frac{4}{\sqrt{15}}, +\infty\right]$上变化时，直线BM的斜率的范围．

解　化双曲线方程$x^2+\frac{(1-t^2)y^2}{t^2}=1$为

$$x^2-\frac{y^2}{\frac{t^2}{t^2-1}}=1(t>1)$$

点 A 坐标为(1，0).

将 $y=-x$ 代入双曲线方程得 $x^2=t^2$．因 B 在双曲线右支上，则 B 点的坐标为(t，-t).

双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{\frac{t^2}{t^2-1}}x$.

由题设知

$$\sqrt{\frac{t^2}{t^2-1}}\geq\frac{4}{\sqrt{15}}\Leftrightarrow 1<t\leq 4 \qquad \text{(i)}$$

依题设，设 M 点坐标为(m，0)，显然 m＞1.

设抛物线方程为

$y^2=-2p(x-m)(p>0)$

因 $\frac{p}{2}=|AM|=|m-1|=m-1$，则 $p=2(m-1)$.

故抛物线方程为

$y^2=-4(m-1)(x-m)$

因 B 在抛物线上，故

$$t^2=-4(m-1)(t-m) \qquad \text{(ii)}$$

直线BM的斜率为 $k=\frac{t}{m-t}>0$，所以 $m=t+\frac{t}{k}$，代入(ii)式得

$$t^2=-4\left(t+\frac{t}{k}-1\right)\left(-\frac{t}{k}\right)\Leftrightarrow t=\frac{4k}{4+4k-k^2} \qquad \text{(iii)}$$

将(iii)代入(i)得

$$1<\frac{4k}{4+4k-k^2}\leq 4\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leq\frac{4+4k-k^2}{4k}<1$$

因 k＞0，则

$$\begin{cases}4+4k-k^2<4k\\4+4k-k^2\geq k\end{cases}\Leftrightarrow 2<k\leq 4$$

故直线 BM 的斜率 $k\in(2，4]$.

习题

12-2-1　设双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的两焦点为 F_1，F_2，A为双曲线上一点，且 $|AF_1|=8.5$，则 $|AF_2|$ 的值为　　[　　]

A．40.5　　B．0.5

C．16.5　　D．16.5 或 0.5

12-2-2　以椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 的焦点为焦点，离心率 $e=2$ 的双曲线方程是　　[　　]

A．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　B．$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

C．$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$　　D．$\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{4}=1$

12-2-3　已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，则它的共轭双曲线的准线方程是　[　]

A．$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$　B．$y=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

C．$y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$　D．$x=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

12-2-4　已知 e_1、e_2 分别是两共轭双曲线的离心率，则有　[　]

A．$e_1^2+e_2^2>e_1^2e_2^2$　B．$e_1^2+e_2^2=e_1^2e_2^2$

C．$e_1^2+e_2^2<e_1^2e_2^2$　D．以上都不对

12-2-5　设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$的半焦距为$c$，直线$l$过$(a，0)$和$(0，b)$两点．已知原点到直线$l$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}c$，则双曲线的离心率为　[　]

A．2　B．$\sqrt{3}$

C．$\sqrt{2}$　D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

12-2-6　已知 F_1，F_2 是双曲线的两个焦点，PQ 是过点 F_1 且垂直于实轴所在直线的双曲线的弦．若$\angle PF_2Q=90°$，则此双曲线的离心率 e=　[　]

A．$\sqrt{2}$　B．$\sqrt{2}+1$

C．$\sqrt{2}-1$　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

12-2-7　已知双曲线 C：$x^2-2y^2-2ax=0$．若平移坐标轴，使原点移到点(-2，0)，可将曲线 C 的方程化为标准方程，则在原坐标系中，双曲线 C 的渐近线方程为　[　]

A．$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$　B．$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$

C．$y=\pm\sqrt{2}(x+2)$　D．$y=\pm\sqrt{2}(x-2)$

12-2-8　已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的实轴长、虚轴长、焦距成等差数列，则此双曲线的离心率 e=　[　]

A．2　B．3

C．$\frac{4}{3}$　D．$\frac{5}{3}$

12-2-9　双曲线 E 的中心在原点，焦点在坐标轴上，且两渐近线的夹

角为$60°$，焦点到相应准线的距离为$\frac{1}{2}$，则双曲线E的方程为[　]

A．$\frac{x^2}{3}-y^2=1$或$y^2-\frac{x^2}{3}=1$　B．$\frac{x^2}{3}-y^2=1$或$\frac{y^2}{3}-x^2=1$

C．$9x^2-3y^2=1$ 或 $9y^2-3x^2=1$　D．以上都不对

12-2-10 已知方程$\frac{x^2}{2+\lambda}-\frac{y^2}{1+\lambda}=1$为一双曲线的方程，则实数$\lambda$的取值范围是______．

12-2-11　焦点坐标为 $F_1(-2，0)$，$F_2(6，0)$，离心率为 2 的双曲线方程是______．

12-2-12　已知双曲线 E 的离心率 e=3，一条准线的方程为 y=2，相应的焦点为(3，0)，则此双曲线方程为______．

12-2-13　设双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$与椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$在第一象限的交点为 P，则点 P 到双曲线左、右两准线的距离之比为______．

12-2-14　以坐标轴为对称轴，渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{3}x$，并且过点$(-3，\sqrt{6})$的双曲线方程为______．

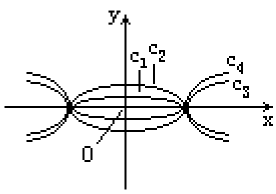
12-2-15　与双曲线$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{12}=1$有共同的渐近线且焦距为10的双曲线方程为______．

12-2-16　过点A(3，-1)且被点A平分的双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的弦所在直线的方程为______．

12-2-17　直线l在双曲线$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$上截得弦长为4，且l的斜率为 2，则直线 l 的方程为______．

12-2-18　双曲线 $16(x-1)^2-9(y+1)^2=144$ 的两条渐近线与一条准线所围成的三角形的面积等于______．

12-2-19　如下图．椭圆 c_1，c_2 与双曲线 c_3，c_4 的离心率分别为 e_1，e_2，e_3 与 e_4，则 e_1，e_2，e_3，e_4 的大小关系是____．



12-2-20　已知圆锥曲线 $mx^2+4y^2=4m$ 的离心率 e 为方程 $2x^2-5x+2=0$ 的一根，则满足条件的曲线有几条？并说明它们是什么曲线．

12-2-21　已知双曲线 E 的中心在原点，焦点在坐标轴上，离心率 e=

$\frac{\sqrt{6}}{2}$，且双曲线过点$P(2，3\sqrt{2})$．求双曲线E的方程．

12-2-22　已知双曲线的中心在原点，焦点在坐标轴上，且双曲线与圆 $x^2+y^2=17$ 有一个交点为 A(4，-1)．若此圆在 A 点处的切线与双曲线的一条渐近线平行，求此双曲线方程．

12-2-23　已知双曲线与椭圆 $x^2+4y^2=64$ 有公共的焦点，且双曲线的一条渐近线的方程为 $x+\sqrt{3}y=0$．求此双曲线方程．

12-2-24　已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a＞0，b＞0)$ 过点 $A(\sqrt{14}，\sqrt{5})$，且点 A 到双曲线的两条渐近线的距离的积为 $\frac{4}{3}$．求此双曲线方程．

12-2-25　直线 $y=3x+2$ 与中心在原点、焦点在坐标轴上的等轴双曲线相交于 A，B 两点，且 $|AB|=\frac{3\sqrt{10}}{2}$．求此双曲线方程．

12-2-26　已知双曲线的两条渐近线的方程分别为 $3x-4y-2=0$ 和 $3x+4y-10=0$，一条准线方程为 $5y+4=0$．求此双曲线方程．

12-2-27　已知圆锥曲线的一个焦点为 F(1，0)，相应的准线为 y 轴，且曲线过点 $M(2，-\sqrt{5})$．求此双曲线的方程．

12-2-28　已知椭圆中心在原点，焦点在坐标轴上，焦距为 $2\sqrt{13}$；另有一双曲线与此椭圆有公共焦点且实轴长比椭圆的长轴长小 8，两曲线离心率的比为 3∶7．求此双曲线方程．

12-2-29　以坐标轴为对称轴的双曲线 E 与直线 l：$5x-7y-1=0$ 相交于 A，B 两点；且以点 A，B 及点 P(5，14)为顶点的△ABP 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形．求双曲线 E 的方程．

12-2-30　已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a＞0，b＞0)$ 的左、右两焦点分别为 F_1，F_2；P 为双曲线左支上一点，P 到左准线的距离为 d，且 d，$|PF_1|$，$|PF_2|$ 成等比数列．

(1)若 $y=\sqrt{3}x$ 是已知双曲线的一条渐近线，求 P 点的坐标；

(2)求此双曲线离心率 e 的取值范围．

12-2-31　已知双曲线 $x^2-y^2=a^2(a＞0)$ 的两顶点为 A′，A，MN 为垂直于 x 轴的一条弦．

求证：∠MAN+∠MA′N=180°．

12-2-32　已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a＞0，b＞0)$ 的两焦点为 F_1，F_2；P 为双曲线上一点，且 $\angle F_1PF_2=\theta$．求证：$\triangle F_1PF_2$ 的面积 $S=b^2\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$．

12-2-33　已知点 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a＞0，b＞0)$ 上除顶点外的任意一点，F_1，F_2 为它的左，右两焦点；设 $\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$．

求证：$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{c-a}{c+a}$．

12-2-34　过双曲线 $x^2-y^2=a^2(a＞0)$ 的右焦点 F 作直线交此双曲线右

支于M，N两点，弦MN的垂直平分线交x轴于点P，求$\frac{|FP|}{MN}$的值．

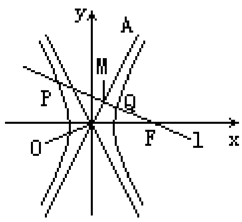
12-2-35 设P是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$上任意一点．过P作双曲线两渐近线的平行线，分别与另一条渐近线交于点R，Q．求证：

$|PR|\cdot|PQ|=\frac{a^2+b^2}{4}$

12-2-36 已知对任意的实数b，双曲线$x^2-2y^2=1$与直线$y=kx+b$都有公共点，求实数k的取值范围．

12-2-37 直线$y=kx+1$与双曲线$3x^2-y^2=1$相交于A，B两点．当k为何值时，以AB为直径的圆过坐标原点．

12-2-38 如下图．已知F是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右焦点；过F作直线l垂直于双曲线的一条渐近线OA，垂足为M；l交双曲线于P，Q两点．



(1)求FM的长；

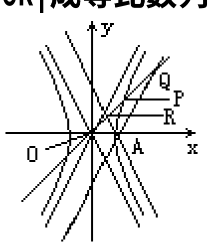
(2)求证：M在双曲线的一条准线上；

(3)求线段PQ的长．

12-2-39 过双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的右焦点F作倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的弦AB．求AB的中点M到F的距离．

12-2-40 直线l与圆$x^2+y^2=1$交于A，B两点；与双曲线$x^2-y^2=1$交于C，D两点；且A，B两点将线段CD三等分．求直线l的方程．

12-2-41 如下图．中心在原点的双曲线的一个顶点为A；点P是双曲线上的一点，过A作双曲线两渐近线的平行线，与直线OP分别交于点Q，R，求证：|OQ|，|OP|，|OR|成等比数列．



12-2-42 已知直线l与双曲线$x^2-y^2=1$的右支交于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点；且$|AB|=\sqrt{2}(x_1+x_2)-2$．

(1)求证：直线l过双曲线的右焦点F；

(2)若|AF|=2|FB|，求直线l的方程及|AB|的值．

12-2-43 已知圆C_1：$x^2+y^2=1$，双曲线C_2：$(x-1)^2-y^2=1$，直线l同时满足下列两个条件：①与双曲线C_2相交；②与圆C_1相切，且切点M

是直线 l 与 C_2 相交弦的中点．求直线 l 的方程．

12-2-44　已知双曲线 E 的中心在原点，焦点在 y 轴上，其顶点 A，B 向平行于 x 轴的动弦 PQ 所张的角∠PAQ 与∠PBQ 互补．又双曲线 E 与圆 D：$(x-4)^2+(y-6)^2=13$ 的两交点 M，N 的连线恰好为圆 D 的直径．求双曲线 E 的方程．

12-2-45 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a，b∈$R^+$ 且 a≠b），其右焦点 F 坐标为（c，0）；一条渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 交右准线于 A，过 F、A 两点的直线 l 与双曲线的左支交于点 c，与左准线交于点 B．若 B 是 AC 的中点，求此双曲线的离心率．

12-2-46　直线 m：y=kx+1 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左支交于不同两点 A，B；直线 l 过点 P(-2，0)和弦 AB 的中点 M．求直线 l 在 y 轴上的截距 b 的取值范围．

12-2-47　直线 y=ax+1 与双曲线 $3x^2-y^2=1$ 相交于 A，B 两点，是否存在实数 a 使 A，B 两点关于直线 y=2x 对称？若存在，求出实数 a；若不存在，说明理由．

12-2-48　已知双曲线 $\frac{(x+2)^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ 上总存在不同两点关于直线 l：$y=-\frac{1}{2}x+m$ 对称，求实数 m 的取值范围．

12-2-49　已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）．求与此椭圆有公共焦点的双曲线，使得以它们的交点为顶点的四边形面积最大，并求出此四边形的顶点的坐标．

12-2-50　长为 10 的线段 AB 的两端点 A，B 在双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的右支上移动．求当 AB 的中点 M 的横坐标最小时，AB 所在直线的方程．

12-2-51　已知实轴与 x 轴平行的双曲线 E 的两渐近线的方程分别为 x-2y-1=0 和 x+2y-1=0；定点 A(4，0)到双曲线 E 上动点 P 的距离的最小值为 1．求此双曲线方程．

12-2-52　已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个顶点为 A(-a，0)与 A′(a，0)，弦 PQ⊥AA′．求 AP 与 A′Q 所在直线的交点的轨迹方程．

12-2-53　已知点 Q 是双曲线 $y^2-x^2=2$ 上任一点；F 为双曲线在 x 轴上方的一个焦点；P 是线段 FQ 上一点，且 $\frac{FP}{PQ}=\frac{1}{3}$．求动点 P 的轨迹．

12-2-54　已知双曲线的实轴长为 4；y 轴为其右准线；且右顶点在抛物线 $y^2=x-1$ 上．

(1)求双曲线中心的轨迹方程；

(2)求离心率最小时的双曲线方程．

12-2-55　已知双曲线 E 过点 M(5，$\sqrt{55}$)，且以直线 x=1 为右准线．若此双曲线的离心率 e=2，求此双曲线中心 O′的轨迹方程．

12-2-56　过双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的对称轴上一点$A(2，0)$作直线$l$交双曲线于 B，C 两点，求线段 BC 的中点 M 的轨迹．

12-2-57　已知双曲线$E：\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a＞0，b＞0)$，两顶点为$A_1$，$A_2$；直线 l 过左顶点 A_1 与双曲线右支交于点 P(P 不与 A_2 重合)；过 P 作 PM⊥y 轴于 M；又直线 l 与 A_2M 交于点 Q．求点 Q 的轨迹方程．

12-2-58　已知双曲线 $x^2-3y^2=3$ 的右焦点为 F，右准线为 l；以 F 为左焦点且以 l 为左准线的椭圆的中心为 A；又 A 点关于直线 y=2x 的对称点 A′恰好在双曲线的左准线上．求椭圆方程及它的离心率．

12-2-59　已知椭圆 $16x^2+25y^2-64x=336$ 与双曲线 $4x^2-a^2y^2-16x=4a^2-16(a＞0)$有共同的焦点 F_1，F_2．

(1)求 a 的值；

(2)设双曲线与椭圆的一个公共点是 M，求$\angle F_1MF_2$；

12-2-60　已知直线 ax-y=1 与曲线 $x^2-2y^2=1$ 相交于 P，Q 两点．

(1)求整数a，使得$|PQ|=2\sqrt{1+a^2}$；

(2)是否存在实数 a，使得以 PQ 为直径的圆经过原点 O？若存在，试求出 a 值；若不存在，说明理由．

(三)抛物线

提要

(1)定义：平面内到一定点 F 和一条定直线 l(F 不在 l 上)的距离相等的点的轨迹叫抛物线.

(2)标准方程：

①焦点在 x 轴上：

开口向右时，$y^2=2px(p>0)$

开口向左时，$y^2=-2px(p>0)$

②焦点在 y 轴上：

开口向上时，$x^2=2py(p>0)$

开口向下时，$x^2=-2py(p>0)$

(3)求抛物线方程常用方法有：(i)利用定义求方程；(ii)利用待定系数法求方程，应先根据焦点位置判定类型，确定方程形式，再根据已知条件，求待定系数 p.

(4)抛物线上任一点与焦点的连线段叫抛物线的焦半径.过焦点的弦叫焦点弦.与焦半径、焦点弦有关的问题，常用定义求解.设 A(x，y)为抛物线$y^2=2px(p>0)$上一点，F为焦点，则$|AF|=x+\frac{p}{2}$.

(5)点与抛物线的位置关系有：点在抛物线上；点在抛物线内(即含焦点的区域)；点在抛物线外.

判定方法为：根据方程或定义判定.

设抛物线 $y^2=2px(p>0)$，F 为焦点，定点 $M(x_0，y_0)$到准线的距离为 d.

①若$|MF|>d$，即 $y_0^2>2px_0$，则点 M 在抛物线外；

②若$|MF|=d$，即 $y_0^2=2px_0$，则点 M 在抛物线上；

③若$|MF|<d$，即 $y_0^2<2px_0$，则点 M 在抛物线内.

(6)直线与抛物线位置关系的判定通常是利用由直线与抛物线方程消元后所得一元二次方程的根的判别式判定.

(7)求直线被抛物线截得的弦长，一般方法有：

①解方程组，求交点的坐标，然后利用两点间距离公式；

②不求出交点的坐标，直接利用一元二次方程韦达定理求.公式为

$$d=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\triangle}}{|a|}$$

③利用焦半径公式.设 PQ 为过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点的弦，$P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，则

$|PQ|=x_1+x_2+p$

例题

例 12-3-1　已知抛物线顶点在原点，焦点在 y 轴上；且抛物线上一点 A(m，-3)到焦点 F 的距离为 5.求此抛物线的方程.

解　设抛物线方程为 $x^2=ay$.因 A(m，-3)在抛物线上，故

$m^2=-3a$　　　　(i)

又焦点F的坐标为$\left(0, \frac{a}{4}\right)$，且$|AF|=5$，故

$$m^2+\left(\frac{a}{4}+3\right)^2=25 \qquad \text{(ii)}$$

将(i)代入(ii)得

$$-3a+\left(\frac{a}{4}+3\right)^2=25 \Leftrightarrow a^2-24a-256=0$$

$\Leftrightarrow a=-8$ 或 $a=32$(舍)

故所求抛物线方程为 $x^2=-8y$.

注　求抛物线标准方程，首先应判定焦点位置，然后确定方程的类型．当焦点在 y 轴上时，有焦点在 y 轴正半轴和负半轴两类，方程分别为 $x^2=2py$ 和 $x^2=-2py(p>0)$，统一形式为 $x^2=ay(a\neq 0)$.

例 12-3-2　顶点在原点，焦点在 x 轴上的抛物线截直线 $y=2x+1$ 所得

弦AB长为$\sqrt{5}$，求此抛物线的方程．

解　因焦点在 x 轴上，故可设抛物线方程为

$y^2=ax(a\neq 0)$

设 A，B 两点的坐标为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)．将 $y=2x+1$ 代入方程 $y^2=ax$ 中，整理得

$4x^2+(4-a)x+1=0$

依题意，其判别式大于 0，即

$\triangle=(4-a)^2-16=a^2-8a>0\Leftrightarrow a>8$ 或 $a<0$

故$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\triangle}}{4}=\frac{\sqrt{a^2-8a}}{4}$，故弦PQ的长为

$$|PQ|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+2^2}|x_1-x_2|=\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{a^2-8a}}{4}$$

由题设知$|PQ|=\sqrt{15}$，则

$$\frac{\sqrt{5\left(a^2-8a\right)}}{4}=\sqrt{15}\Leftrightarrow a=12\text{或}a=-4$$

故所求抛物线方程为 $y^2=12x$ 或 $y^2=-4x$.

注　(i)直线 $y=kx+b$ 与抛物线相交所得弦长 d 的公式可变为

$$d=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$$

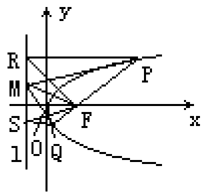
(ii)求$|x_1-x_2|$的方法有二种：求出方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 的二根 x_1，x_2，

然后求$|x_1-x_2|$；或利用求根公式得$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\triangle}}{|A|}$

例 12-3-3　已知PQ是过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的一条弦.由 P,Q 分别作准线 l 的垂线 PR,QS，垂足分别为 R，S，点 M 为 RS 的中点.设 P，Q 两点的坐标分别为 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$．求证：

$(1) y_1 y_2 = -p^2$ $(2) x_1 x_2 = \frac{P^2}{4}$ $(3) RF \perp SF$

(4) $RF \perp PM$ (5) $PM \perp QM$ (6) $PQ \perp MF$



解 抛物线$y^2 = 2px$的焦点为$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，准线为$l$：$x = -\frac{p}{2}$

因PQ不与x轴重合，可设PQ所在直线方程为$ky = x - \frac{p}{2}$，即

$$x = ky + \frac{p}{2} \qquad (i)$$

将(i)代入方程 $y^2=2px$ 中，整理得

$$y^2-2pky-p^2=0 \qquad (ii)$$

(1)方程(ii)的两根为 y_1，y_2．由韦达定理得 $y_1y_2=-p^2$．

(2)因 P，Q 在抛物线上，则 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，故$(y_1y_2)^2=4p^2x_1x_2$．

将$y_1 y_2 = -p^2$代入即得$p^4 = 4p^2 x_1 x_2$，所以，$x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}$．

(3)因为$PR \perp l$，$QS \perp l$，则R，S的坐标分别为$R\left(-\frac{p}{2}, y_1\right)$，$S(-\frac{p}{2}$，$y_2)$．则$RF$，$SF$的斜率分别为$k_{RF} = \frac{y_1}{-p}$，$k_{SF} = \frac{y_2}{-p}$．所以

$$k_{RF} \cdot k_{SF} = \frac{y_1 y_2}{p^2} = \frac{-p^2}{p^2} = -1$$

故 $RF \perp SF$．

(4)因为M为RS的中点，则点M坐标为$\left(-\frac{p}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$，则$PM$的斜率为

$$k_{PM} = \frac{y_1 - \frac{y_1 + y_2}{2}}{x_1 + \frac{p}{2}} = \frac{y_1 - y_2}{2x_1 + p}$$

所以 $k_{RF} \cdot k_{PM} = \frac{y_1}{-p} \cdot \frac{y_1 - y_2}{2x_1 + p} = \frac{y_1(y_1 - y_2)}{-2px_1 - p^2}$

而 $y_1^2=2px_1$，$y_1y_2=-p^2$，故

$$k_{RF} \cdot k_{PM} = \frac{y_1(y_1 - y_2)}{-y_1^2 + y_1 y_2} = -1$$

所以 $RF \perp PM$．

(5)因 $RF \perp PM$．同理可证 $SF \perp QM$，因已证 $RF \perp SF$，即$\angle RFS=90°$，

则∠PMQ=90°，即 PM⊥QM.

(6)因$k_{MF}=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{-p}=-\frac{y_1+y_2}{2p}$，由方程(ii)知$y_1+y_2=2pk$，则$k_{MF}=-k$．当$k=0$时，PQ⊥x轴．MF在x轴上，所以MF⊥PQ；当$k\neq0$时，$k_{PQ}=\frac{1}{k}$，则$k_{PQ}\cdot k_{MF}=-1$．所以MF⊥PQ．故MF⊥PQ.

注 (i)抛物线 $y^2=2px$ 过焦点的弦(即焦点弦)有许多重要性质，此题

所证的仅其中一部分．还有一些性质，如：焦半径$|PF|=x_1+\frac{p}{2}$，$|QF|=x_2+\frac{p}{2}$，弦长$|PQ|=x_1+x_1+p$；以PQ为直径的圆与准线相切等．掌握这些性质对解决有关焦点弦的问题大有益处.

例 12-3-4 已知过抛物线 y2=2px(p＞0)的焦点 F 的弦 AB 被焦点 F 分成长为m，n的两部分，求证：$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}$.

解 设 A，B 两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$、$(x_2，y_2)$.

因焦点$F\left(\frac{p}{2}，0\right)$分AB成定比$\frac{m}{n}$，故

$$\frac{p}{2}=\frac{x_1+\frac{m}{n}x^2}{1+\frac{m}{n}}\Leftrightarrow 2nx_1+2mx_2=(m+n)p \qquad (i)$$

又由抛物线定义得$m=x_1+\frac{p}{2}$，$n=x_2+\frac{p}{2}$，即

$$x_1=m-\frac{p}{2}，x_2=n-\frac{p}{2} \qquad (ii)$$

将(ii)代入(i)得

$$2n\left(m-\frac{p}{2}\right)+2m\left(n-\frac{p}{2}\right)=(m+n)p$$

$$\Leftrightarrow 2mn=(m+n)p\Leftrightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}$$

注 一般涉及抛物线焦半径的问题，通常利用定义求解.

例 12-3-5 已知直线 l_1 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F,与抛物线交于 A，B两点；又AB的中点M到直线l_2：$3x+4y+m=0(m>-3)$的距离为$\frac{1}{5}$．当 l_1 的斜率大于 2 时，求实数 m 的取值范围.

解 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的坐标为(1，0).

设l_1的方程为$ky=x-1$．由题设知$0<k<\frac{1}{2}$.

又设 A，B 及中点 M 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$及$(x_0，y_0)$.

将 $x=ky+1$ 代入方程 $y^2=4x$ 得

$y^2-4ky-4=0$

其判别式$\triangle=16k^2+16>0$恒成立，且$y_1+y_2=4k$，所以$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$ $=2k$．又 $x_0=ky_0+1=2k^2+1$．故 M 到直线 l_2 的距离

$$d=\frac{|3x_0+4y_0+m|}{5}=\frac{|6k^2+8k+m+3|}{5}$$

因已知$d=\frac{1}{5}$，故

$|6k^2+8k+m+3|=1$

又$0<k<\frac{1}{2}$且$m>-3$，所以$6k^2+8k+m+3>0$，故有

$6k^2+8k+m+3=1$

$$\Leftrightarrow m=-6k^2-8k-2=\frac{2}{3}-6\left(k+\frac{2}{3}\right)^2$$

当$0<k<\frac{1}{2}$且$m>-3$时，由函数单调性得

$-3<m<-2$．

注　解直线与抛物线相交的有关问题，利用韦达定理常使得运算简便．

例 12-3-6　正方形 ABCD 的一条边 AB 在直线 $y=x+4$ 上；点 C，D 在抛物线 $y^2=x$ 上．求正方形 ABCD 的面积．

解　设 C，D 两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，CD 边所在直线的方程为 $y=x+b$．

将 $y=x+b$ 代入方程 $y^2=x$，消去 x 得

$y^2-y+b=0$，

当$\triangle=1-4b>0$，即$b<\frac{1}{4}$时，方程有两实根y_1，y_2，则

$$|CD|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{2}|y_1-y_2|=\sqrt{2}\sqrt{1-4b}$$

又 D 到直线 AB 的距离

$$|AD|=\frac{|x_2-y_2+4|}{\sqrt{2}}$$

因为 D 在直线 $y=x+b$ 上，则 $x_2-y_2=-b$，所以

$$|AD|=\frac{|4-b|}{\sqrt{2}}$$

又因为正方形边长相等，即$|AD|=|CD|$，即

$$\frac{|4-b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-4b}\Leftrightarrow b=-2\text{或}b=-6$$

当$b=-2$时正方形边长$|CD|=\sqrt{18}$；当$b=-6$时，正方形边长$|CD|$ $=\sqrt{50}$．

故正方形 ABCD 的面积为 18 或 50．

例 12-3-7　是否存在同时满足下列条件的抛物线：(i)准线是 y 轴；

(ii)顶点在 x 轴上；(iii)点 A(3，0)到此抛物线上的点的距离最小值为 2．若存在，求出抛物线的方程；若不存在，说明理由．

解　设存在满足条件的抛物线，且顶点为(a，0)(a≠0)．设 P(x，y)为抛物线上任一点．

若 a＜0，则抛物线开口向左，此时$|AP|\geq 3-a>2$．与已知$|AP|_{min}=2$矛盾．

若 a＞0，则抛物线开口向右，且因 y 轴为准线，顶点到准线的距离为 a，则抛物线方程为

$y^2=4a(x-a)$

于是$|AP|^2=(x-3)^2+y^2=(x-3)^2+4a(x-a)$

$=x^2+(4a-6)x+9-4a^2$

$=[x-(3-2a)]^2+12a-8a^2$

因 $y^2\geq 0$，故 $x\geq a$．

若 $3-2a\geq a$，即 $0<a\leq 1$，当 $x=3-2a$ 时，

$|AP|^2_{min}=12a-8a^2$

由$12a-8a^2=4$解得$a=1$或$a=\frac{1}{2}$．

若 $3-2a<a$，即 $a>1$，当 $x=a$ 时

$|AP|^2_{min}=(a-3)^2$

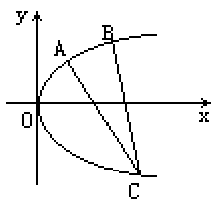
由$(a-3)^2=4$ 解得 $a=5$ 或 $a=1$(舍)．

综上所述，所求抛物线方程为

$y^2=4(x-1)$，或$y^2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$，或$y^2=20(x-5)$

注　用代数方法求最值问题，应先求出函数关系式，并注意对参数分类讨论．

例 12-3-8　如下图．Rt△ABC 的直角顶点 A 的坐标为(1，2)，点 B，C 在抛物线 $y^2=4x$ 上移动．问：直线 BC 是否一定过定点 M(5，-2)？证明你的结论



解　因点 A 的坐标适合方程 $y^2=4x$，故点 A 在抛物线上．又已知点 B，C也在抛物线上，故可设B，C两点的坐标为$B\left(\frac{b^2}{4}，b\right)$，$C\left(\frac{c^2}{4}，c\right)$ $(b\neq c)$．

显然 AB，AC 都不与 x 轴平行或垂直，故$|b|\neq 2$，$|c|\neq 2$．故 AB，AC 所在直线的斜率分别为

$$k_{AB}=\frac{b-2}{\frac{b^2}{4}-1}=\frac{4}{b+2}，k_{AC}=\frac{4}{c+2}$$

因为 AB⊥AC，所以

$$\frac{4}{b+2}\cdot\frac{4}{c+2}=-1,\quad\Leftrightarrow bc+2(b+c)+20=0$$

当$b+c=0$时，$|b|=|c|=2\sqrt{5}$，那么B，C两点的坐标为$(5,\ 2\sqrt{5})$，$(5,\ -2\sqrt{5})$．此时直线BC过点M．

当 $b+c\neq 0$ 时，直线 BC 的方程为

$$y-b=\frac{4}{b+c}\left(x-\frac{b^2}{4}\right)\Leftrightarrow(b+c)y=4x+bc$$

将 $bc=-2(b+c)-20$ 代入上式得

$(b+c)y=4x-2(b+c)-20$

$\Leftrightarrow(b+c)(y+2)=4(x-5)$

此时显然 BC：$(b+c)(y+2)=4(x-5)$过点 M(5，-2)．

综上所述，直线 BC 一定过定点 M(5，-2)．

注　一般地若 $A(x_0,y_0)$为抛物线 $y^2=2px(p>0)$上一点，则抛物线上对 A 张直角的弦 BC 所在直线必过定点$(x_0+2p,\ -y_0)$．

例 12-3-9　过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作直线 l 交抛物线于 P，Q 两点．求弦 PQ 的中点 M 的轨迹．

解　设 P，Q 两点的坐标分别为$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，弦 PQ 的中点 M的坐标为$(x,\ y)$，则$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$，且$F(1,\ 0)$．

[法一] 因P，Q在抛物线上，故$y_1^2=4x_1$，$y_2^2=4x_2$．两式相减得

$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=4(x_1-x_2)$

当 $x_1\neq x_2$ 时，PQ 所在直线的斜率

$$k_{PQ}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{4}{2y}=\frac{2}{y}$$

又$k_{MF}=\frac{y}{x-1}$．因P，Q，M，F在同一直线上，所以$k_{PQ}=k_{MF}$，故$\frac{2}{y}=\frac{y}{x-1}$．于是得M点的轨迹方程

$y^2=2(x-1)\quad(x\neq 1)$

若 $x_1=x_2$，则 PQ⊥x 轴，则 M 点即为焦点 F(1，0)．其坐标适合方程 $y^2=2(x-1)$．

故 PQ 中点 M 的轨迹为抛物线

$y^2=2(x-1)$

[法二]　设 PQ 所在直线的方程为

$ky=x-1$

将 $x=ky+1$ 代入抛物线方程 $y^2=4x$ 得

$y^2-4ky-4=0$

由韦达定理知，$y_1+y_2=4k$，$y_1y_2=-4$．但

$y_1^2=4x_1$，$y_2^2=4x_2$

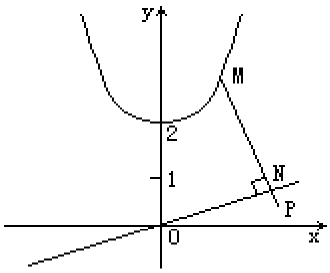
$y_1+y_2=2y$，$x_1+x_2=2x$

故 $$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{8}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{8}=\frac{4y^2+8}{8}$$

即 $$y^2=2(x-1)$$

此即为所求轨迹方程．

例 12-3-10　如下图．由抛物线 $y=x^2+2$ 上的点 $M(x_0，y_0)$ 向直线 $y=\frac{1}{2}x$ 作垂线，垂足为 N；延长 MN 至 P 点，使点 N 分线段 MP 成定比 $\frac{MN}{NP}=4$．求当点 M 沿抛物线移动时，点 P 的轨迹方程．



解　因直线 MN 过点 M 且与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 垂直，则直线 MN 的方程为

$$y-y_0=-2(x-x_0)$$

解方程组 $\begin{cases} y-y_0=-2(x-x_0) \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} x=\frac{4x_0+2y_0}{5} \\ y=\frac{2x_0+y_0}{5} \end{cases}$$

即 N 点坐标为 $\left(\frac{4x_0+2y_0}{5}，\frac{2x_0+y_0}{5}\right)$．

设 P 点坐标为 $(x，y)$．因 N 点分 MP 成定比 $\frac{MN}{NP}=4$．则由定比分点公式得

$$\begin{cases} \frac{4x_0+2y_0}{5}=\frac{x_0+4x}{1+4} \\ \frac{2x_0+y_0}{5}=\frac{y_0+4y}{1+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2y \\ y_0=2x-3y \end{cases}$$

因 M 在抛物线 $y=x^2+2$ 上，所以，$y_0=x_0^2+2$．于是

$$2x-3y=4y^2+2 \Leftrightarrow \left(y+\frac{3}{8}\right)^2=\frac{1}{2}\left(x-\frac{23}{32}\right)$$

此即 P 点的轨迹方程．

注　本题是典型的求相关点的轨迹问题．通过求交点、定比分点等公式的运用，求得相关点 M，N，P 坐标间的关系．将 M 点的坐标用 P 点坐标表示，再用代入法即可求得 P 点的轨迹方程．

例 12-3-11　过抛物线 $y=x^2$ 的顶点 O 作两条互相垂直的弦 OA，OB；

分别以 OA，OB 为直径作圆，两圆的另一交点为 C．求 C 点的轨迹方程．

解　因 OA,OB 分别为两圆直径,C 为两圆一交点.故∠ACO=∠BCO=90°，所以 A，C，B 三点共线，且 OC⊥AB 于 C．

设 OA 所在直线的方程为

$$y=kx(k\neq 0)$$

则 OB 所在直线的方程为

$$y=-\frac{1}{k}x$$

两方程联立解之，得 A 点的坐标为(k,k^2)．

同理得B点的坐标为$\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k^2}\right)$.

所以直线 AB 的方程为

$$y-k^2=\frac{k^2-\frac{1}{k^2}}{k+\frac{1}{k}}(x-k)\Leftrightarrow y-1=\frac{k^2-1}{k}x$$

$k\neq\pm1$ 时，OC 所在直线的方程为

$$y=\frac{kx}{1-k^2}$$

上两方程相乘得

$$y^2-y=-x^2\Leftrightarrow x^2+y^2-y=0\qquad (y\neq 0)$$

当 $k=\pm1$ 时，C 点坐标为(0，1)，适合上述方程．

故 C 点的轨迹方程为 $x^2+y^2-y=0(y\neq 0)$

注　求两条动直线的交点的轨迹是一类特殊的多动点的轨迹问题．为解题方便，本例中引入参数 k，写出两动直线关于 k 的参数方程，然后消去参数，求得交点的轨迹方程．这是一种有用的方法．

例 12-3-12　直线 l 过抛物线 $y^2=2px(p\neq 0)$的焦点 F，并且与抛物线相交于不同的两点 A，B．

求证：对于此抛物线的任意给定的一条弦 CD，直线 l 不是 CD 的垂直平分线．

解　若直线 l 与 x 轴垂直．因 CD 是抛物线 $y^2=2px$ 的弦，所以 CD 不能与 x 轴平行，则 l 不垂直于 CD，即 l 不是 CD 的垂直平分线．

若直线 l 不与 x 轴垂直，则设其斜率为 $k(k\neq 0)$．因 l 过抛物线焦点 $F(\frac{p}{2},0)$，故l的方程为

$$y=k\left(x-\frac{p}{2}\right),\ (k\neq 0)$$

因C，D在抛物线上，则C，D的坐标可设为$\left(\frac{c^2}{2p},c\right)$，$\left(\frac{d^2}{2p},d\right)$

$(c\neq d)$．若 l 是 CD 的垂直平分线，则

$$\begin{cases} k \cdot \dfrac{c-d}{\dfrac{c^2}{2p}-\dfrac{d^2}{2p}} = -1 & \text{(i)} \\ \dfrac{c+d}{2} = k\left(\dfrac{c^2+d^2}{4p}-\dfrac{p}{2}\right) & \text{(ii)} \end{cases}$$

由(i)得$k=-\dfrac{c+d}{2p}$，代入(ii)得

$$\frac{c+d}{2} = -\frac{c+d}{2p}\left(\frac{c^2+d^2}{4p}-\frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow (c+d)(c^2+d^2+2p^2)=0$$

这与 $c+d=-2pk\neq 0$，$c^2+d^2+2p^2\neq 0$ 矛盾．故 l 不是 CD 的垂直平分线．

综上所述，直线 l 不可能是 CD 的垂直平分线．

注　仅当过焦点的直线与抛物线只有一个交点(即为对称轴)时，它才可能是抛物线弦的垂直平分线．

例 12-3-13　已知直线 l 过坐标原点，抛物线 C 的顶点在原点，焦点在 x 轴正半轴上．若点 A(-1，0)和 B(0，8)关于 l 的对称点都在曲线 C 上．求直线 l 的方程和抛物线 C 的方程．

解　依题意，可设抛物线 C 的方程为

$y^2=2px(p>0)$

易知 x 轴和 y 轴不是所求直线，又 l 过原点，故可设直线 l 的方程为

$y=kx(k\neq 0)$　(i)

设 A′，B′分别是 A，B 关于 l 的对称点，则 A′A⊥l，直线 A′A 的方程为

$$y=-\frac{1}{k}(x+1)$$

(ii)

由(i)，(ii)联立解得

$$x=-\frac{1}{k^2+1}，y=-\frac{k}{k^2+1}$$

即AA′与l的交点M的坐标为$\left(-\dfrac{1}{k^2+1}，-\dfrac{k}{k^2+1}\right)$．

同理可求得B′B的方程为$y=-\dfrac{1}{k}x+8$；B′B与l的交点N的坐标为$\left(\dfrac{8k}{k^2+1}，\dfrac{8k^2}{k^2+1}\right)$．

又因为M是AA′的中点，从而点A′的坐标为$\left(\dfrac{k^2-1}{k^2+1}，-\dfrac{2k}{k^2+1}\right)$．

同理得点B′的坐标为$\left(\dfrac{16k}{k^2+1}，\dfrac{8(k^2-1)}{k^2+1}\right)$．

又因为 A′，B′均在抛物线 $y^2=2px$ 上，故

$$\begin{cases}\left(-\dfrac{2k}{k^2+1}\right)^2=2p\cdot\dfrac{k^2-1}{k^2+1}\\ \left[\dfrac{8(k^2-1)}{k^2+1}\right]^2=2p\cdot\dfrac{16k}{k^2+1}\end{cases}$$

（iii）

两式相除，化简得

$k^2-k-1=0$

$\Leftrightarrow k_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$k_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

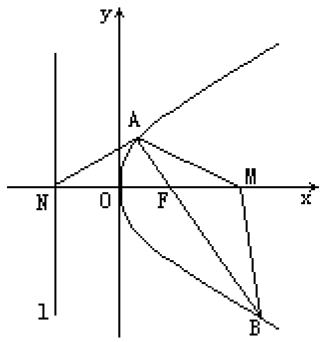
（iv）

但当$k=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$时，$x_{A'}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}<0$，不合，舍去．$k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$符合题意．

将$k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$代入(iii)式，得$p=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

所以，所求直线l的方程为$y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$，抛物线方程为$y^2=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}x$．

例 12-3-14　如下图．已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，准线 l 与 x 轴交于点 N．过焦点 F 作直线与抛物线交于 A，B 两点，且 AB⊥AN．设 M 为点 B 在 x 轴上的射影．求证：|AM|=|BM|．



解　设 A，B 两点的坐标为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则点 M 的坐标为$(x_2,0)$．又准线方程为$x=-\dfrac{p}{2}$，焦点为$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，故N点的坐标为$\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$．

因直线AB过焦点F，故$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$．

由题设可知∠NAB=∠BMN=90°，所以 A，N，B，M 四个点共圆，所以$|AF|\cdot|BF|=|FN|\cdot|MF|$．而$|AF|=x_1+\dfrac{p}{2}$，$|BF|=x_2+\dfrac{p}{2}$，$|NF|=p$，$|MF|=x_2-\dfrac{p}{2}$．所以

$$\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\left(x_2+\frac{p}{2}\right)=p\left(x_2-\frac{p}{2}\right)\Leftrightarrow x_2-x_1=2p$$

从而 $$|AM|^2=y_1^2+(x_1-x_2)^2=y_1^2+4P^2$$

$$=2px_1+4p^2=2p(x_1+2p)=2px_2=y_2^2=|BM|^2$$

即|AM|=|BM|.

注　本题的解题过程中，运用了平面几何的知识.

例12-3-15　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，两焦点为 F_1，F_2；一抛物线的顶点在椭圆中心，焦点在椭圆右焦点 F_2 重合. 设抛物线与椭圆在第一象限的交点为 M. 求 $\cos\angle MF_1F_2\cdot\cos\angle MF_2F_1$ 的值.

解　设 M 点的坐标为(x，y)(x>0，y>0).

因椭圆离心率$e=\frac{1}{2}$，则$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，即$c=\frac{1}{2}a$. 两焦点F_1(-c，0)，F_2(c，0)，右准线为$x=\frac{a^2}{c}$.

由椭圆第二定义知，$\frac{|MF_2|}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=e$，故

$$|MF_2|=e\left|x-\frac{a^2}{c}\right|=a-ex$$

又抛物线顶点在原点，F_2 为其焦点，则抛物线的准线为 x=-c. 过 M 作直线 x=-c 的垂线，垂足为 N. 则$|MF_2|=|MN|$，即 a-ex=x+c. 所以

$$x=\frac{a-c}{1+3}=a\cdot\frac{1-e}{1+e}=\frac{1}{3}a<c$$

$|MF_2|=a-ex=a-\frac{1}{6}a=\frac{5}{6}a$，故

$$|MN|=\frac{5}{6}a$$

又由椭圆第一定义知，

$$|MF_1|=2a-|MF_2|=\frac{7}{6}a$$

设M在x轴上的射影为P，则P点的坐标为$\left(\frac{1}{3}a，0\right)$，于是

$$\cos\angle MF_1F_2=\frac{|F_1P|}{|MF_1|}=\frac{\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}a}{\frac{7}{6}a}=\frac{5}{7}$$

$$\cos\angle MF_2F_1=\frac{|PF_2|}{|MF_2|}=\frac{\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a}{\frac{5}{6}a}=\frac{1}{5}$$

从而 $\cos\angle MF_1F_2 \cdot \cos\angle MF_2F_1 = \frac{1}{7}$

习题

12-3-1 抛物线 $y^2=8x$ 上一点 P 到 x 轴距离为 12，则 P 到抛物线焦点 F 的距离为 [ ]

A．8　　B．20

C．22　　D．24

12-3-2 抛物线顶点在原点，其对称轴是一条坐标轴，且焦点在直线 $2x-y+4=0$ 上，则此抛物线的方程为 [ ]

A．$y^2=-8x$　　B．$x^2=16y$

C．$y^2=-8x$ 或 $x^2=16y$　　D．$y^2=8x$ 或 $x^2=16y$

12-3-3 抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 与直线 $y=kx+b$ 相交于点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$，且该直线与 x 轴交于点 $P_3(x_3，0)$，则 x_1，x_2，x_3 间必有关系 [ ]

A．$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$　　B．$x_3^2=x_1x_2$

C．$x_1=\frac{x_2+x_3}{2}$　　D．$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}$

12-3-4 已知抛物线 $y^2=a(x+1)(a\neq 0)$ 的准线方程为 $x=-3$，那么抛物线焦点的坐标是 [ ]

A．(3，0)　　B．(2，0)

C．(1，0)　　D．(-1，0)

12-3-5 抛物线 $y=4x^2-8x+3$ 的焦点的坐标是 [ ]

A．(1，1)　　B．(1，3)

C．$\left(1，-\frac{15}{16}\right)$　　D．$\left(\frac{17}{16}，-1\right)$

12-3-6 已知抛物线 $y^2=\frac{1}{2}x$ 与圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$ 有且只有两个公共点，则实数 a 的取值范围是 [ ]

A．$a=\frac{17}{8}$　　B．$-1<a<1$

C．$a=\frac{17}{8}$ 或 $-1<a<1$　　D．$a>1$

12-3-7 已知圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线相切，则 p=______．

12-3-8 抛物线 $y^2=4x$ 的弦 $AB\perp x$ 轴．若 $|AB|=4\sqrt{3}$，则焦点 F 到直线 AB 的距离为______．

12-3-9 已知抛物线 C 过定点 A(0，2)，且以 x 轴为准线，则抛物线 C 的顶点 M 的轨迹方程是______．

12-3-10 直线 l 过抛物线 $y^2=a(x+1)$，$(a>0)$ 的焦点，并且与 x 轴垂直．若 l 被抛物线截得的弦长为 4，则实数 a=______．

12-3-11 将抛物线 C：$y^2=2x+3$ 绕其焦点逆时针方向旋转 90°得抛物线 C′，则抛物线 C′的方程为______．

12-3-12　已知抛物线的顶点在原点，焦点在 x 轴上，其准线过双曲

线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a＞0，b＞0)$的一个焦点；又抛物线与双曲线的一个交点为$M(3/2，-\sqrt{6})$．求抛物线和双曲线的方程．

12-3-13　抛物线的顶点在原点，焦点在 y 轴负半轴上；直线 l：3x+2y+8=0 与抛物线交于 A，B 两点；且以 AB 为直径的圆过原点．求此抛物线的方程及圆的方程．

12-3-14　已知抛物线过两定点 A(-1，6)，B(-1，-2)；对称轴平行于x轴；开口向右；直线$y=2x+7$被抛物线截得的弦长为$4\sqrt{10}$．求此抛物线的方程．

12-3-15　过抛物线$y^2=2px$的焦点F、且倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线交抛物线于 A，B 两点．若弦 AB 的中垂线恰过点 Q(5，0)．求此抛物线的方程．

12-3-16　已知直线 l：y=kx-8，抛物线 C：$(y+2)^2=3(x-1)$．问当 k 为何实数时，直线 l 与抛物线 C 有两个公共点？只有一个公共点？无公共点？

12-3-17　已知抛物线 $y^2=2px$ 上任意两点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$．求证：过 A，B 两点的直线 l 与 x 轴交于一定点 M(a，0)的充要条件是 $y_1y_2=-2pa$．

12-3-18　已知直线 y=kx-2 交抛物线 $y^2=8x$ 于 A，B 两点；且 AB 的中点的横坐标为 2．求弦 AB 的长．

12-3-19　求以直线 6x-3y-4=0 被抛物线 $y^2=6x$ 所截得的线段 AB 为直径的圆的方程．

12-3-20　已知抛物线 $y^2=2px(p\neq0)$内一点 A(a，b)，求被 A 点平分的抛物线的弦 BC 所在直线的方程．

12-3-21　已知△ABC 的三顶点 A，B，C 都在抛物线 $y^2=32x$ 上，A 点坐标为(2，8)；且△ABC 的重心 G 在抛物线的焦点处．求 BC 边所在直线的方程．

12-3-22　过抛物线焦点的一条直线与抛物线交于 A，B 两点；过 A 和抛物线顶点的直线交其准线于点 M．

求证：直线 MB 与抛物线的对称轴平行．

12-3-23　已知抛物线 $y^2=4x$，斜率为 2 的直线 l 被此抛物线截得的线

段AB长为$3\sqrt{5}$．

(1)求直线 l 的方程；

(2)在 x 轴上求一点 P，使△PAB 的面积为 39．

12-3-24　已知过原点的直线与抛物线 $y^2=4(x-1)$交于 A，B 两点；且以 AB 为直径的圆恰好过焦点 F．

(1)求直线 AB 的方程；(2)求弦 AB 的长．

12-3-25　已知 A，B 是抛物线 $y=(x-2)^2$ 上的两点，C 为抛物线的顶点，且∠ACB=90°．若线段 AB 的中点 D 到抛物线对称轴的距离为

$\frac{1}{2}$，求A点的坐标．

12-3-26　抛物线$y^2=8x$的焦点为F；倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线l与抛物线交于A，B两点，且$|AB|=8\sqrt{5}$．求∠AFB的大小．

12-3-27　若抛物线 $y=x^2$ 上不存在关于直线 l：kx+y-3=0 对称的不同两点，求 k 的取值范围．

12-3-28　已知直线 l 过定点 Q(0，3)，抛物线 $y^2=4x$ 上存在 P_1，P_2 两点关于直线 l 对称．

(1)求直线 l 的倾斜角的范围；

(2)求直线 l 与弦 P_1P_2 的交点 M 的轨迹方程．

12-3-29　已知抛物线C：$y^2-2px-8y+16+2p=0$过点$M(1+4\sqrt{5}$，0)．又点 A(0，4)关于直线 l：y=kx-(k-4)(k∈R 且 k≠0)的对称点 A′在抛物线 C 上．求 k 的值．

12-3-30　已知点 A(-1，0)，B(0，3)；过 A 作直线 l_1 与抛物线 $y^2=x$ 在第一象限交于 P，Q 两点；PQ 的垂直平分线为 l_2．试问：l_2 能否过 B 点？若能，求出 l_1 的斜率；若不能，说明理由．

12-3-31　设 P 为抛物线 $y=x^2$ 上一动点；定点 A(a，0)关于点 P 的对称点为 Q，其中 a≠0．

(1)求点 Q 的轨迹方程

(2)设点 Q 的轨迹与抛物线 $y=x^2$ 交于 B，C 两点．当 AB⊥AC 时，求 a 的值．

12-3-32　求过点 M(a，b)的动直线被抛物线 $y^2=2px(p>0)$截得的弦 AB 的中点 C 的轨迹方程．

12-3-33　已知 P，Q 为抛物线 $y=ax^2(a>0)$上两点；且 OP⊥OQ．求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程．

12-3-34　已知抛物线 C：$y^2=4x$，其焦点 F 和准线分别与椭圆 E 的左焦点及对应的准线重合，B 为椭圆短轴的一端点．求线段 BF 的中点 P 的轨迹方程．

12-3-35　已知抛物线 $y^2=p(x+2)$与圆$(x-3)^2+y^2=9$ 相交，它们在 x 轴上方的交点为 A，B．

(1)求线段 AB 的中点 M 的轨迹；

(2)当 p 为何值时，线段 AB 的中点 M 在直线 y=x 上．

12-3-36　长为 l(l≥1)的线段 AB 的两端点在抛物线 $y=x^2$ 上移动．

(1)求 AB 的中点 Q 的轨迹方程；

(2)求 Q 点离 x 轴最近时的坐标．

12-3-37　直线 y=mx 与抛物线 $y=x^2-2x+2$ 相交于 P_1，P_2 两点，

(1)求线段 P_1P_2 的中点 M 的轨迹方程；

(2)Q点在线段P_1P_2上，且满足$\frac{1}{|OP_1|}+\frac{1}{|OP_2|}=\frac{2}{|OQ|}$，求Q点的轨迹方程．

12-3-38　一动直线 l 过定点 A(2，0)且与抛物线 $y=x^2+2$ 相交于不

同的两点 B 和 C；点 B，C 在 x 轴上的射影分别是 B′、C′；点 P 是线段 BC 上的一点，且满足关系 $\frac{BP}{PC}=\frac{|BB'|}{|CC'|}$．求△POA 的重心 Q 的轨迹．

12-3-39 已知抛物线 C：$y^2=8x$．设抛物线上一点 P 到顶点 O 与到焦点 F 的距离之比为 k．求 k 的最大值，并求 k 取最大值时，P 点的坐标．

12-3-40 求过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的弦 AB 的长的最小值，并求此时 AB 所在直线的方程．

12-3-41 在△ABC 中，A 点的坐标为(3，0)，BC 边长为 2，且 BC 在 y 轴上的区间[-3，3]上滑动，

(1)求△ABC 外心 P 的轨迹方程；

(2)设直线 l：$y=3x+b$ 与 P 点的轨迹交于 E，F 两点．原点 O 到直线 l 的距离为 d．试求 b 的值，使 $\frac{|EF|}{d}$ 取最大值，并求出这个最大值．

12-3-42 已知半圆的直径 AB 长为 2R，半圆外的的直线 l 与 BA 的延长线垂直相交于 T，且 $|AT|=2a\left(2a<\frac{R}{2}\right)$；半圆上相异两点 M，N 到直线 l 的距离分别为 d_1,d_2，且 $d_1=|MA|,|d_2|=|NA|$．求证：$|MA|+|NA|=2R$．

12-3-43 已知抛物线 C_1：$y^2=x+7$ 与圆 C_2：$x^2+y^2=5$．

(1)求证：抛物线 C_1 与圆 C_2 无交点；

(2)过点 P(a，0)作不与 x 轴垂直的直线 l 交 C_1 于 A，D 两点，交 C_2 于 B，C 两点(从上至下依次为 A，B，C，D)，且|AB|=|CD|．求 a 的取值范围．

12-3-44 已知抛物线 C 的顶点在坐标原点；焦点 F 与圆 $x^2+y^2-4x=0$ 的圆心重合；直线 l 过焦点 F，且斜率为 2；直线 l 与抛物线相交于 A，D 两点，与圆相交于 B，C 两点．求|AB|+|CD|的值．

12-3-45 已知抛物线 $x^2=4y$ 与圆 $x^2+y^2=32$ 相交于 A，B 两点；圆与 y 轴正半轴交于点 C．

(1)求 A，B，C 三点的坐标；

(2)若一直线 l 与圆相切，切点在 $\overset{\frown}{ACB}$ 上；而且 l 与抛物线交于点 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$两点；M，N 两点到抛物线的焦点的距离之和为 d．求 d 取最大值时，直线 l 的方程．

12-3-46 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的内接三角形的一个顶点在原点，且焦点为此三角形的垂心．求此三角形外接圆的方程．

12-3-47 已知圆 C_1：$x^2+y^2=1$，抛物线 C_2：$y=x^2-2$．是否存在△$P_1P_2P_3$ 内接于抛物线 C_2，且外切于圆 C_1？

12-3-48 求使椭圆 $(x-a)^2+2y^2=2$ 与抛物线 $y^2=\frac{1}{2}x$ 有公共点的实数 a 的取值范围．

12-3-49 已知直线 l：$x=-\frac{p}{2}(p>0)$．椭圆 E 的焦点在 x 轴上，且椭圆的长半轴长为 2，短半轴长为 1，左顶点为 $A\left(\frac{p}{2}，0\right)$．求 P 的取值

范围，使椭圆 E 上存在四个不同的点，它们中每一个点到点 A 的距离都等于该点到直线 l 的距离.

12-3-50　已知抛物线 C 的顶点在原点，焦点 F 与双曲线 E：$2x^2-y^2=2m^2(m>0)$的右焦点重合.

(1)求证：曲线 C 与 E 总有两个不同的交点；

(2)过点 F 作直线 l 与抛物线 C 相交于 A、B 两点，试问：是否存在使△OAB 的面积为 6 的直线 l？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，说明理由.

第十三部分　参数方程与极坐标

（一） 参数方程

提要

(1)在直角坐标平面上，曲线可用曲线上点的坐标(x，y)所满足的方程 f(x，y)=0 表示，称为曲线的普通方程．此外，曲线还可用参数方程表示．参数方程的基本特征是用同一参数的两个函数分别表示曲线上点的坐标．同一曲线的普通方程和参数方程是该曲线在同一直角坐标系里两种不同的解析表达式，存在着内在的联系，因而可以互相转化．

(2)求曲线的参数方程或化曲线的普通方程为参数方程时，应注意恰当选择参数．一般与运动有关的问题中常选时间为参数，与旋转有关的问题中常选角度为参数．同一曲线，参数的选择不同，所得的方程也不同，因此同一曲线的参数方程不惟一．

化曲线的参数方程为普通方程一般有代数消参法和三角消参法两种方法．在消参过程中，一定要注意 x，y 的取值范围应保持不变(即必须是在 x，y 的取值范围内的同解变形)．

(3)直线的参数方程：

①过点 $P_0(x_0，y_0)$且倾斜角为α的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

直线上任一点 P(x，y)对应的参数 t 的几何意义是：t 表示从定点 P_0 到点 P 所连有向线段的数量．t＞0 时，点 P 在 P_0 的上方；t＜0 时，点 P 在 P_0 的下方．|t|表示 P_0 到 P 的距离，即$|t|=|P_0P|$．

②过点$P_0(x_0，y_0)$且斜率为$\frac{b}{a}$的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

设直线上任一点 P(x，y)对应的参数为 t，则点 P_0 到点 P 的距离$|P_0P|=\sqrt{a^2+b^2}|t|$．

(4)圆$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\alpha \\ y = y_0 + r\sin\alpha \end{cases} \quad (\alpha\text{为参数})$$

α为圆上点的旋转角，0≤α＜2π．

应用圆的参数方程，使圆上的点的坐标用同一参数α表示，减少了变元．有利于计算；在求与圆心角有关的轨迹问题、最值问题时，用圆的参数方程较简单．

(5)圆锥曲线的参数方程：

①椭圆$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1(a＞0，b＞0)$的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos\alpha \\ y = y_0 + b\sin\alpha \end{cases} \quad (\alpha\text{为参数})$$

②双曲线$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+a\sec\alpha\\ y=y_0+b\tg\alpha\end{cases}\quad(\alpha为参数)$$

③抛物线 $y^2=2px(p>0)$的参数方程为

$$\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}\quad(t为参数)$$

应用圆锥曲线的参数方程，可将曲线上点的坐标用同一参数的解析式表示，减少了变元，对解有关轨迹问题、最值问题较为有利．

例题

例 13-1-1　化下列参数方程为普通方程：

$$(1)\begin{cases}x=p(t^2+\frac{1}{t^2})\\ y=2p(\frac{1}{t}-t)\end{cases}\quad(p\neq0，t为参数)$$

$$(2)\begin{cases}x=\frac{3t^2}{1+t^2}\\ y=\frac{5-t^2}{1+t^2}\end{cases}\quad(t为参数)$$

$$(3)\begin{cases}x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}\\ y=\frac{2bt}{1+t^2}\end{cases}\quad(t为参数，a>b>0)$$

$$(4)\begin{cases}x=\frac{(t+1)^2}{t^2+t+1}\\ y=\frac{t^2}{t^2+t+1}\end{cases}\quad(t为参数)$$

解　(1)将已知第二等式平方得

$$y^2=4p^2(\frac{1}{t^2}+t^2-2)$$

由已知第一等式得$t^2+\frac{1}{t^2}=\frac{x}{p}$．代入上式得普通方程

$$y^2=4p(x-2p)$$

(2)将已知第一等式 2 倍与第二等式相加得

$$2x+y=5$$

因为$x=\frac{3t^2}{1+t^2}=3-\frac{3}{1+t^2}$，所以$0\leq x<3$．故普通方程为

$$2x+y-5=0\quad(0\leq x<3)$$

$$(3)\begin{cases} x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \text{(i)} \\ \dfrac{y}{b}=\dfrac{2t}{1+t^2} & \text{(ii)} \end{cases}$$

[**法一**] $(\mathrm{i})^2+(\mathrm{ii})^2$，**得** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

又 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2}{1+t^2}-1$，**而** $0<\dfrac{2}{1+t^2}\leq 2$，

所以，$-1<\dfrac{x}{a}\leq 1$，**即** $-a<x\leq a$．**故普通方程为**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (-a<x\leq a)$$

[**法二**] **设** $t=\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}$，**则**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}=\cos\theta \\ \dfrac{y}{b}=\sin\theta \end{cases}$$

两式分别平方后相加得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

因为 $\dfrac{\theta}{2}\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，**则** $\theta\neq 2k\pi+\pi$，

所以$-1<\cos\theta\leq 1$，则$-a<x\leq a$，故普通方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (-a<x\leq a)$$

$$(4)\begin{cases} x=\dfrac{(t+1)^2}{t^2+t+1} & \text{(i)} \\ y=\dfrac{t^2}{t^2+t+1} & \text{(ii)} \end{cases}$$

由(i)得

$$x-1=\frac{t}{t^2+t+1}$$

(iii)

当 $t\neq 0$ 时，(ii)÷(iii)得

$$\frac{y}{x-1}=t$$

(iv)

又由(ii)得

$$y-1=-\frac{t+1}{t^2+t+1}$$

(v)

(i)÷(v)得

$$\frac{x}{y-1}=-t-1$$

(vi)

(iv)+(vi)得

$$\frac{x}{y-1}+\frac{y}{x-1}=-1$$

整理得

$$x^2+y^2+xy-2x-2y+1=0$$

(vii)

又由(iii)得 $x-1=\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}+1}$．因 $t+\dfrac{1}{t}\geq 2$ 或 $t+\dfrac{1}{t}\leq -2$．故 $-1\leq x-1<0$ 或 $0<x-1\leq\dfrac{1}{3}$，即 $0\leq x<1$ 或 $1<x\leq\dfrac{4}{3}$．当 $t=0$ 时，$x=1$，$y=0$ 适合(vii)．

综合上述，普通方程为

$$x^2+y^2+xy-2x-2y+1=0$$

其中 $0\leq x\leq\dfrac{4}{3}$，且不含点(1，1)．

注　(i)除第(3)题的方法二外，此组题均采用代数消参法．在消参过程中，要注意分析式子特征，采用代入消参、加减消参等方法消参．

(ii)必须注意 x，y 的取值范围应保持不变．

例 13-1-2　化下列参数方程为普通方程：

(1) $\begin{cases}x=\cos^2\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$　(θ为参数)

(2) $\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\,\mathrm{tg}\,\theta\end{cases}$　(θ为参数，a＞0，b＞0)

(3) $\begin{cases}x=\cos\theta+1\\y=\cos 2\theta-2\end{cases}$　(θ为参数)

(4) $\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta\\y=\sin^3\theta+\cos^3\theta\end{cases}$　(θ为参数)

(5) $\begin{cases}x=r(3\cos\theta+\cos 3\theta)\\y=r(3\sin\theta-\sin 3\theta)\end{cases}$　(θ为参数)

解　(1)由已知第一等式加第二等式的平方得所求普通方程为

y2=-(x-1)　$(0\leq x\leq 1)$

(2) $\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\,\mathrm{tg}\,\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{a}=\sec\theta & \text{(i)}\\[2mm]\dfrac{y}{b}=\mathrm{tg}\,\theta & \text{(ii)}\end{cases}$

$(i)^2-(ii)^2$ 得所求普通方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$$(3)\begin{cases}x=\cos\theta+1\\ y=\cos 2\theta-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\cos\theta\\ y+2=\cos 2\theta\end{cases}$$

因 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，故 $y+2=2(x-1)^2-1$，即

$$(x-1)^2=\frac{1}{2}(y+3)$$

又 $-1\leq x-1=\cos\theta\leq 1$，所以 $0\leq x\leq 2$.

故普通方程为

$$(x-1)^2=\frac{1}{2}(y+3)\quad (0\leq x\leq 2)$$

$$(4)\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta & \text{(i)}\\ y=\sin^3\theta+\cos^3\theta & \text{(ii)}\end{cases}$$

$(i)^2$ 得

$$x^2=1+2\sin\theta\cos\theta\Leftrightarrow\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}$$

(iii)

又由(ii)得

$y=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

(iv)

将(i)，(iii)代入(iv)得 $y=x(1-\frac{x^2-1}{2})$，即

$$y=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x$$

又由(i)得 $x=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，所以 $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$. 故普通方程为

$$y=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x(-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2})$$

$$(5)\begin{cases}x=r(3\cos\theta+\cos 3\theta)\\ y=r(3\sin\theta-\sin 3\theta)\end{cases}$$

因为

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

代入已知方程得

$$\begin{cases}x=4r\cos^3\theta\\ y=4r\sin^3\theta\end{cases}\Leftrightarrow(\frac{x}{4r})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{4r})^{\frac{2}{3}}=1$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(4r)^{\frac{2}{3}}$$

注　当 x，y 的函数解析式均是含参数的三角函数式时，常利用三角函数有关公式消去参数.

例 13-1-3　化下列普通方程为参数方程：

(1) $4x^2+y^2-16x+12=0$

$(2) y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2} \quad (a>0)$

(3) $5y^3-4y^2+x^2=0$

解　(1)方程 $4x^2+y^2-16x+12=0$ 可化为

$$(x-2)^2+\frac{y^2}{4}=1$$

令 $x-2=\cos\theta$，则 $y=2\sin\theta$．故得参数方程

$$\begin{cases} x=2+\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\text{为参数})$$

(2)方程 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 可化为 $\frac{y}{2a}=\frac{1}{1+(\frac{x}{2a})^2}$．

令 $x=2a\text{tg}\theta$，则 $y=2a\cos^2\theta$，故得参数方程

$$\begin{cases} x=2a\text{tg}\theta \\ y=2a\cos^2\theta \end{cases} \quad (\theta\text{为参数})$$

(3)显然曲线 $5y^3-4y^2+x^2=0$ 过原点．设 $x=ty$，代入原方程得

$$y^2(5y-4+t^2)=0$$

由此知 $y=0$，$x=0$ 或 $y=\frac{4-t^2}{5}$，$x=\frac{4t-t^3}{5}$．又注意到 $t=2$ 时，

$$x=\frac{4t-t^3}{5}=0,\ y=\frac{4-t^2}{5}=0$$

故所求参数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{4t-t^3}{5} \\ y=\frac{4-t^2}{5} \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

注　化普通方程为参数方程，通常有直接法和间接法二种．(1)，(2)两题是用直接法解，其特征是：直接选择参数函数 $x=f(t)$（或 $y=g(t)$），进而

得到参数方程 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$． (3)小题是用间接法解的．其过程是：不是直接设参数或 $x=f(t)$ 或 $y=g(t)$，而是先给出一个 x,y,t 的关系式 $y=h(x,t)$，再代入 $F(x,y)=0$ 中，消去 y，得 $x=f(t)$，$y=g(t)$．

例13-1-14　已知过点 $P(1,5)$ 的直线 l_1 的参数方程是 $\begin{cases} x=1-t \\ y=5+\sqrt{3}t \end{cases}$

(t为参数)，l_1 与直线 l_2：$x+y-2\sqrt{3}=0$ 的交点为 Q，求线段 PQ 的长．

解　将直线 l_1 的方程代入 l_2 方程中得

$$1-t+5+\sqrt{3}t-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow t=-2\sqrt{3}$$

由 t 的几何意义得 $|PQ|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}\,|t|=4\sqrt{3}$．

注　把直线 l 上有关点的位置、有关线段长等问题的研究转化为对

参数 t 的研究，是直线参数方程的优越之处．但在利用直线参数方程中参数 t 的几何意义时，一定要看清方程的形式．

例 13-1-5　已知椭圆的中心在原点，焦点在 y 轴上且长轴长为 4，短轴长为 2，直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t \\ y = m + 2t \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

当 m 为何值时，直线 l 被椭圆截得的弦长为 $\sqrt{6}$．

解　由题设知，椭圆方程 $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$．

化直线参数方程 $\begin{cases} x = t \\ y = m + 2t \end{cases}$ 为 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}t' \\ y = m + \frac{2\sqrt{5}}{5}t' \end{cases}$．将后者代入椭圆方程得

$$(m + \frac{2\sqrt{5}}{5}t')^2 + 4(\frac{\sqrt{5}}{5}t')^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 8t'^2 + 4\sqrt{5}mt' + 5m^2 - 20 = 0$$

当 $\Delta = 80m^2 - 160m^2 + 640 = 640 - 80m^2 > 0$，即 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ 时，方程有两不等实根 t'_1，t'_2，则

$$\text{弦长} = |t'_1 - t'_2| = \sqrt{(t'_1 + t'_2)^2 - 4t'_1 t'_2} = \frac{\sqrt{640 - 80m^2}}{8}$$

依题意知 $\frac{\sqrt{640 - 80m^2}}{8} = \sqrt{6}$，解得 $m = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$．

注　利用直线的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$ 求直线被二次曲线截得的弦长时，先将参数方程代入二次曲线的普通方程得关于 t 的二次方程 $At^2+Bt+C=0$，则弦长为

$$|t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{|A|}$$

例13-1-6　过点 $M(2，1)$ 作直线 l 交椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 于 A，B，且 M 为弦 AB 的一个三等分点，求直线 l 的方程．

解　设直线 l 的倾角为 θ，l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + t\cos\theta \\ y = 1 + t\sin\theta \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

A，B 两点对应的参数为 t_1，t_2．

将直线的参数方程代入已知椭圆方程得

$$(3\sin^2\theta+1)t^2+4(\cos\theta+2\sin\theta)t-8=0$$

方程两根为 t_1，t_2．由参数 t 的几何意义知，$t_1=MA$，$t_2=MB$．由韦达定理知，

$$t_1+t_2=-\frac{4(\cos\theta+2\sin\theta)}{3\sin^2\theta+1}，t_1t_2=-\frac{8}{3\sin^2\theta+1}$$

因 M 为 AB 的一个三等分点，不妨设|MB|=2|MA|．则 $t_2=-2t_1$，所以 $t_1+t_2=-t_1$，$t_1t_2=-2t_1^2$．故

$$t_1t_2=-2(t_1+t_2)^2$$

从而 $$-\frac{8}{3\sin^2\theta+1}=-2\cdot\frac{16(\cos\theta+2\sin\theta)^2}{(3\sin^2\theta+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 12\sin^2\theta+16\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta=0$$

$$\Leftrightarrow 12\mathrm{tg}^2\theta+16\mathrm{tg}\theta+3=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}\theta=\frac{-4\pm\sqrt{7}}{6}$$

故直线 l 的方程为

$$y-1=\frac{-4\pm\sqrt{7}}{6}(x-2)$$

注　恰当地运用韦达定理，对简化解题过程很重要．

例 13-1-7　已知曲线

$$C：\begin{cases}x=-1+4\cos\alpha\\ y=1+2\cos2\alpha\end{cases}\quad(\alpha为参数)$$

直线 l 过点 A(-5，-1)，倾斜角为θ，直线 l 与曲线 C 交于不同两点 P，Q，求|AP|·|AQ|的值的范围．

解　化曲线 C 的参数方程为普通方程得

$$(x+1)^2=4(y+1)\quad(-5\le x\le 3)$$

(i)

又直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases}x=-5+t\cos\theta\\ y=-1+t\sin\theta\end{cases}\quad(t为参数)$$

(ii)

将(ii)代入(i)得

$$t^2\cos^2\theta-4(2\cos\theta+\sin\theta)t+16=0$$

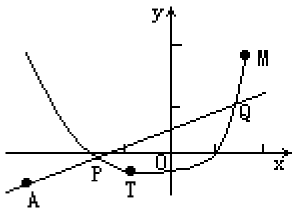
点P，Q对应的参数t_1，t_2为此方程的二根，且$t_1t_2=\frac{16}{\cos^2\theta}$，故

$$|AP|\cdot|AQ|=\frac{16}{\cos^2\theta}$$

题设曲线 C 的顶点为 T(-1，-1)，右端点是 M(3，3)，若直线 l 与曲线 C 有两不同交点，则 l 必与弧 TM 相交(包括 M，不包括 T)，所以

$$0<\mathrm{tg}\theta\le\frac{3-(-1)}{3-(-5)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{4}{5}\le\cos^2\theta<1$$

故　　$$16<|AP|\cdot|AQ|\le 20$$



例13-1-8　已知圆C与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有四个不同的交点，它们依次为A，B，C，D，若直线AC，BD的倾斜角分别为α，β（α≠β）．求证：α+β=π．

解　设AC，BD相交于$P_0(x_0，y_0)$．

直线AC，BD的参数方程分别为：

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}x=x_0+t\cos\beta\\y=y_0+t\sin\beta\end{cases}$$

将AC方程代入双曲线方程中，整理得

$(b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha)t^2+2(b^2x_0\cos\alpha-a^2y_0\sin\alpha)t+b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2=0$

设方程两根为t_1、t_2，则

$$PA\cdot PC=t_1\cdot t_2=\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha}$$

同理得

$$PB\cdot PD=\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\beta-a^2\sin^2\beta}$$

因为A，B，C，D四点共圆，所以PA·PC=PB·PD，于是

$b^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\alpha=b^2\cos^2\beta-a^2\sin^2\beta$

$\Leftrightarrow b^2-(a^2+b^2)\sin^2a=b^2-(a^2+b^2)\sin^2\beta$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha=\sin^2\beta$

因α、β∈(0，π)，且α≠β，故α=π-β，即α+β=π．

例13-1-9　已知双曲线$x^2-y^2=a^2(a>0)$的左准线与x轴交于点D，过D点的直线l_1与双曲线交于M，N两点；又过右焦点F的直线l_2垂直于l_1且与双曲线交于P，Q两点．

求证：|FP|·|FQ|=2|DM|·|DN|．

解　双曲线$x^2-y^2=a^2$为等轴双曲线，其半焦距$c=\sqrt{2}a$，左准线$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}a$，右焦点为$F(\sqrt{2}a，0)$，而D的坐标为$(-\frac{\sqrt{2}}{2}a，0)$．

设直线l_1的倾角为θ，因$l_1\perp l_2$，则l_2的倾角为$\theta+\frac{\pi}{2}$．故直线l_1、l_2的参数方程分别为：

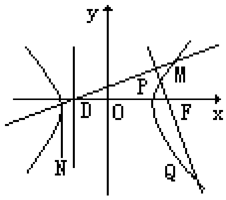
$$l_1：\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+t\cos\theta \ (t\text{为参数}) \\ y=t\sin\theta \end{cases}$$

$$l_2：\begin{cases} x=\sqrt{2}a-t\sin\theta \ (t\text{为参数}) \\ y=t\cos\theta \end{cases}$$

将它们分别代入双曲线方程得

$$t^2\cos2\theta-\sqrt{2}at\cos\theta-\frac{1}{2}a^2=0 \qquad \text{(i)}$$

$$t^2\cos2\theta+2\sqrt{2}at\sin\theta-a^2=0 \qquad \text{(iii)}$$



设方程(i)的两根为t_1，t_2，则$|t_1|=|DM|$，$|t_2|=|DN|$．由韦达定理知$t_1t_2=-\dfrac{a^2}{2\cos2\theta}$，则

$$|DM|\cdot|DN|=\frac{a^2}{2|\cos2\theta|}$$

同理，由方程(ii)可得

$$|FP|\cdot|FQ|=\frac{a^2}{|\cos2\theta|}$$

故|FP|·|FQ|=2|DM|·|DN|.

例 13-1-10　已知线段BB'=2b(b＞0)，直线l垂直平分BB'，垂足为O．在l上任取两点P，P'，P．P'在点O的同侧，且OP·OP'=a^2(a＞0)．求直线BP与B'P'的交点M的轨迹.

解　以O为坐标原点，l为x轴，BB'所在直线为y轴建立平面直角坐标系，则B，B'坐标为B(0，b)，B'(0，-b)．又设P点坐标为(t，0)则由$OP\cdot OP'=a^2$得点P'坐标为$(\dfrac{a^2}{t}，0)$(t为参数，$t\neq0$)．则直线BP，B'P'的方程分别为

$$y=-\frac{b}{t}x+b，\ y=\frac{bt}{a^2}x-b$$

联立解之，得BP与B'P'的交点M的坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a^2t}{t^2+a^2} \\ y=\dfrac{b(t^2-a^2)}{t^2+a^2} \end{cases}$$

消去参数t得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (x\neq0)$$

故点 M 的轨迹为以 a，b 为长、短半轴的椭圆(除 B，B'两点)．

例13-1-11　过定点A(-2，0)作直线l依次交椭圆E：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$于B，C 两点；P 为弦 BC 上一点，且满足 BP∶PC=AB∶AC．求 P 点的轨迹方程．

解　设直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=-2+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases} \quad (t\text{为参数}) \qquad \text{(i)}$$

将(i)代入椭圆方程 $x^2+2y^2=2$ 中得

$(1+\sin^2\alpha)t^2-4t\cos\alpha+2=0$

其两根 t_1，t_2 分别为 B，C 两点对应的参数．由韦达定理有

$$\begin{cases} t_1+t_2=\dfrac{4\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha} \\ t_1\cdot t_2=\dfrac{2}{1+\sin^2\alpha} \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

设P(x，y)对应参数为t．由$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}$知，

$$\frac{t-t_1}{t_2-t}=\frac{t_1}{t_2} \Leftrightarrow t=\frac{2t_1t_2}{t_1+t_2} \qquad \text{(iii)}$$

将(ii)代入(iii)得

$$t=\frac{1}{\cos\alpha} \qquad \text{(iv)}$$

将(iv)代入(i)得

$$\begin{cases} x=-2+1=-1 \\ y=\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

将$x=-1$代入$x^2+2y^2=4$得$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．考虑到点P在椭圆内，应有

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<y<\frac{\sqrt{2}}{2}$

故P点轨迹方程为

$x=-1(-\frac{\sqrt{2}}{2}<y<\frac{\sqrt{2}}{2})$

例13－1－12　过原点作互相垂直的两直线，被椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0$，b＞0)截得的弦分别为 AC，BD．求四边形 ABCD 的面积的最大值和最小值．

解　设直线AC的倾角为α$(0\leq\alpha<\frac{\pi}{2})$．因AC⊥BD，则直线BD的倾斜角为$\frac{\pi}{2}+\alpha$．

直线 AC，BD 的参数方程分别为：

$$AC：\begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases} \qquad BD：\begin{cases} x = -t\sin\alpha \\ y = t\cos\alpha \end{cases}$$

将前者代入椭圆方程得

$$b^2t^2\cos^2\alpha + a^2t^2\sin^2\alpha = a^2b^2 \Leftrightarrow t = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

所以 $|AC| = \dfrac{2ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$

同理 $|BD| = \dfrac{2ab}{\sqrt{b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha}}$

故四边形 ABCD 的面积为

$$S = \frac{1}{2}|AC|\cdot|BD| = \frac{2a^2b^2}{\sqrt{(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha)(b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha)}}$$

因为

$$\sqrt{(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha)(b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha)}$$
$$\leq \frac{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}$$

且 $\sqrt{(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha)(b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha)}$

$\geq(b\cos\alpha\cdot a\cos\alpha + a\sin\alpha\cdot b\sin\alpha) = ab$

所以 $\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2} \leq S \leq 2ab$

故当 $\alpha = 0$ 时，$S_{max} = 2ab$；$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ 时，$S_{min} = \dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$。

注　本例运用了柯西不等式：$(x^2+y^2)(a^2+b^2)\geq(ax+by)^2$。

习题

13-1-1　参数方程 $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = 2 \end{cases}$ （t为参数）所表示的曲线是 [　　]。

A．一条直线　　B．一条射线

C．两条射线　　D．抛物线

13-1-2　α是锐角三角形的一个内角，那么直线

$$l：\begin{cases} x = x_0 + t\cos(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}) \\ y = y_0 + t\sin(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}) \end{cases} \quad (t为参数)$$

的倾斜角为 [　　]。

A．$\alpha + \dfrac{3\pi}{2}$　　B．α

C．$\alpha - \dfrac{\pi}{2}$　　D．$\alpha + \dfrac{\pi}{2}$

13-1-3　椭圆$\begin{cases}x=3+3\cos\varphi\\y=-1+5\sin\varphi\end{cases}$ (φ为参数)的两焦点的坐标是 [　　].

A．(-3，5)，(-3，-3)　　B．(3，3)，(3，-5)

C．(1，1)，(-7，1)　　D．(7，-1)，(-1，-1).

13-1-4　抛物线$y=x^2-2x\sec\alpha+\dfrac{2+\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$的顶点轨迹是_______.

13-1-5　点 P(x，y)在单位圆上以角速度ω、按逆时针方向运动，则点 Q(-2xy，y^2-x^2)的运动轨迹的方程是_______.

13-1-6　已知直线l：$\begin{cases}x=4+t\\y=-1-t\end{cases}$ (t为参数)与圆$(x+3)^2+(y+1)^2=25$相交于A，B两点．则A，B两点到点P(4，－1)的距离之和为______.

13-1-7　已知过点 P(1，1)的直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases}x=1-3t\\y=1-4t\end{cases}\quad (t为参数)$$

则直线 l 上到点 P 的距离为 4 的点的坐标为________.

13-1-8　化下列参数方程为普通方程，并指出它们分别表示什么曲线：

(1)$\begin{cases}x=t\\y=1-t\end{cases}$ (t为参数)　　(2)$\begin{cases}x=\sin\theta\\y=1-\sin\theta\end{cases}$ (θ为参数)

(3)$\begin{cases}x=\tan\theta\\y=1-\tan\theta\end{cases}$ (θ为参数)　　(4)$\begin{cases}x=1-\sqrt{t}\\y=\sqrt{t}\end{cases}$ (t为参数)

(5)$\begin{cases}x=\cos^2\theta\\y=\sin^2\theta\end{cases}$ (θ为参数)

13-1-9　化下列参数方程为普通方程：

(1)$\begin{cases}x=2t-1\\y=3t^2-2t+1\end{cases}$ (t为参数)　　(2)$\begin{cases}x=t-\dfrac{2}{t}-1\\y=t+\dfrac{2}{t}-1\end{cases}$ (t为参数)

(3)$\begin{cases}x=\dfrac{4\cos\theta}{1+\cos\theta}\\y=\dfrac{4\sin\theta}{1+\cos\theta}\end{cases}$ (θ为参数)

13-1-10　过双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$的右焦点F作倾斜角为45°的弦AB，求弦 AB 的中点 C 到右焦点 F 的距离．

13-1-11　已知直线l：$\begin{cases}x=2+t\\y=4-t\end{cases}$与抛物线C：$y^2=4x$相交于P，Q两点，求 P，Q 两点到点 A(2，4)的距离之和．

13-1-12　过点M（3，2）作直线l与椭圆$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$交于A，B两点．

(1)若M为弦AB的中点，求直线l的方程；(2)若直线l的倾斜角不大于90°，且M到弦AB的中点的距离为1，求直线l的方程．

13-1-13　过抛物线$y^2=4x$焦点的直线l与抛物线相交于M,N两点，且满足(i)弦MN的长不超过8；(ii)直线l与椭圆$3x^2+2y^2=2$有公共点．求直线l的倾斜角α的范围．

13-1-14　过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a＞b＞0)$的长轴左端点A的弦AQ（或其）延长线)交y轴于R；过原点O作OP∥AQ交椭圆于P．求证：

$|OP|^2=\frac{1}{2}|AQ|\cdot|AR|$

13–1–15　过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a＞0，b＞0)$的右焦点$F_2(c，0)$作直线交双曲线右支于P，Q两点．求证：$\frac{1}{|PF_2|}+\frac{1}{|QF_2|}=\frac{2a}{b^2}$．

13-1-16　从抛物线$y^2=2px(p\neq0)$外一点A（-2，4）作倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线l与抛物线相交于P_1，P_2两点．若AP_1，P_1P_2，AP_2成等比数列，求此抛物线的方程．

13-1-17　已知直线l：$Ax+By+C=0$与半圆$y=\sqrt{1-x^2}$交于M，N两点；OM，ON的倾斜角分别为α、β(α+β≠π)．求sin(α+β)的值．

13-1-18　直线l：$\begin{cases}x=t\\y=b+mt\end{cases}$(t为参数)，曲线E：$\begin{cases}x=1+a\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$(θ为参数，a≠0)．若对m∈R，直线l与曲线E恒有公共点，求a、b所满足的条件．

13-1-19　已知椭圆C_1：$\begin{cases}x=m+2\cos\theta\\y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$(θ为参数)与抛物线$C_2$：$\begin{cases}x=\frac{3}{2}+t^2\\y=\sqrt{6}t\end{cases}$(t为参数)有交点，求m的取值范围．

13-1-20　已知定点P与定直线l，且P到l的距离为a(a＞0)；动点Q在l上；连结PQ，以PQ为边作正三角形PQR(按逆时针顺序)．求当点Q在l上移动时，点R的轨迹方程．

13-1-21　抛物线$y=x^2-2x+2$交直线$y=mx(m＞0)$于P_1，P_2两点；点Q在线段P_1P_2上，且满足$\frac{1}{|OP_1|}+\frac{1}{|OP_2|}=\frac{2}{|OQ|}$．求Q点的轨迹方程．

13-1-22　设0＜a＜b．过两定点A(a，0)B(b，0)分别作直线l，m；l与抛物线$y^2=x$交于不同两点A_1，A_2；m与抛物线交于B_1，B_2两点．若A_1，A_2，B_1，B_2四点共圆，求直线l与m的交点的轨迹．

13-1-23　已知直线l：$y=x+m$与椭圆$\frac{x^2}{3}+\frac{2(y+1)^2}{3}=1$交于A，B两点；P是直线l上的点，且|PA|·|PB|=2．求当m变化时，点P的轨迹．

13-1-24　若点P（x，y）在曲线$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$上移动，求$u=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}$的最大值和最小值．

13-1-25　已知点P（x_0，y_0）是曲线$\frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$上的点，分别求$x_0^2+y_0^2$与x_0+y_0的最大值和最小值．

13-1-26　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，求以它的长轴为一底边且内接于这个椭圆的梯形的最大面积．

13-1-27　已知圆$x^2+y^2=4$，点A，P，Q为圆上三点(按逆时针方向排列），且点A的坐标为（-1，$-\sqrt{3}$），$\angle QAP=30°$．求△APQ的面积最大值．

13-1-28　已知椭圆$x^2+16y^2=16$和圆$x^2+y^2=16$．过第一象限圆周上的一点A作AC⊥x轴于C；线段AC交椭圆于B．求∠AOB的最大值．

13-1-29　过原点作互相垂直的两条直线，分别交抛物线$y^2=4(x+1)$于A，B和C，D．求|AB|+|CD|的最小值．

13-1-30　已知点P为椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$在第一象限的弧上一点；点A，B分别为右顶点和上顶点．求四边形OAPB的面积的最大值和P点的坐标．

(二)极坐标

提要

(1)极坐标系是用长度和角度来确定平面内点的位置的一种坐标系，通常点的极坐标(ρ，θ)中，ρ取非负值，表示极点 O 到点 A 的距离，极角θ采用弧度制．必要时，ρ也可取负值．极坐标平面上同一点的极坐标有无数种表示法，即若(ρ，θ)是一个点的极坐标，则(ρ，2kπ+θ)，[-ρ，(2k+1)π+θ](k∈Z)都是此点的极坐标．

(2)在极坐标系中，由于曲线上同一点有不同的坐标，故对于一条曲线的同一极坐标方程，点的坐标中有的满足该方程，有的则不一定满足；但曲线上点的极坐标中应至少有一个满足此曲线的这一方程．同一曲线的极坐标方程也可能不止一种形式．

(3)由于极坐标是用长度和角度来表示的，故在求曲线的极坐标方程时，常构造三角形，利用三角形中的边角关系及三角函数的有关公式求出ρ和θ的关系式，即曲线的方程．

求曲线的极坐标方程的基本方法有：

①直接法：建立极坐标系，根据动点的运动规律，列出动点的极径ρ与极角θ间的关系式，化简整理得出极坐标方程ρ=f(θ)．同时应注意θ的取值范围．

②代入法：若已知 Q 点的轨迹方程和动点 P 与 Q 点的相关关系，则可先求出 P，Q 的极坐标间的关系式，再将关系式代入 Q 点满足的极坐标方程中，求出 P 点的轨迹的极坐标方程．

③先求曲线的普通方程，再转化为极坐标方程．

(4)在同一平面内建立的一个极坐标系和一个直角坐标系，当极点与坐标原点重合，极轴与 x 轴正半轴重合时，平面上任一点 P 的极坐标(ρ，θ)与直角坐标(x，y)之间存在下列关系：

$$x=\rho\cos\theta，y=\rho\sin\theta，\rho^2=x^2+y^2，\mathrm{tg}\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0)$$

(5)常见曲线的极坐标方程：

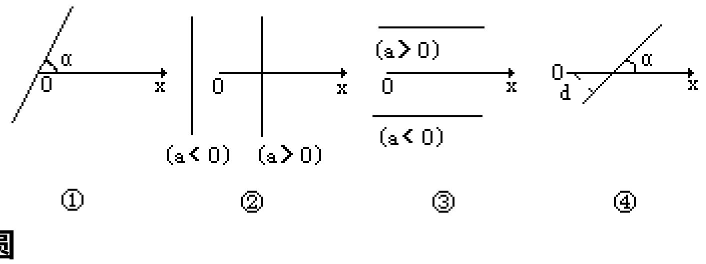
(i)直线

①过极点、倾斜角为α的直线：θ=α(ρ∈R)

②与极轴垂直的直线：ρcosθ=a

③与极轴平行的直线：ρsinθ=a

④倾斜角为α、极点到它的距离在 d 的直线：ρsin(α-θ)=d



(ii)圆

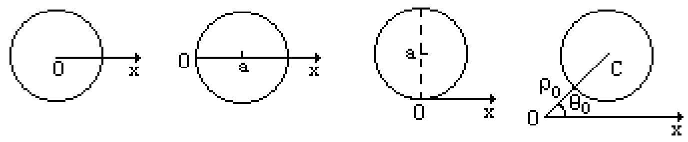
①圆心在极点、半径为 a 的圆：ρ=a

②过极点、圆心为(a，0)、半径为|a|的圆：ρ=2acosθ

③过极点、圆心为（a，$\frac{\pi}{2}$）、半径为$|a|$的圆：$\rho=2a\sin\theta$

④圆心为$C(\rho_0，\theta_0)$，半径为 r 的圆：

$\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)=r^2$



(iii)圆锥曲线的统一的极坐标方程

$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$

其中 e 为离心率，p 为焦点到对应准线的距离．

①当 0＜e＜1 时，方程表示极点为左焦点，极轴所在直线为对称轴的椭圆；

②当 e=1 时，方程表示极点为焦点，开口向右的抛物线；

③当 e＞1 时，方程表示极点为右焦点，极轴所在直线为对称轴的双曲线．ρ＞0 时，为右支；ρ＜0 时，为左支．

(6)根据圆锥曲线统一的极坐标方程$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$求椭圆、双曲线中有关几何量一般有两种方法：

①由$e=\dfrac{c}{a}$，$p=\dfrac{b^2}{c}$，求出a、b、c；

②令$\theta=0$和π，求出曲线在极轴上的截距ρ_1，ρ_2，则

$a=\dfrac{|\rho_1+\rho_2|}{2}$，$b=\sqrt{|\rho_1\rho_2|}$，$c=\dfrac{|\rho_1-\rho_2|}{2}$

例题

例13-2-1　(1)把点M的极坐标$(5，\dfrac{4\pi}{3})$化成直角坐标；

(2)把点 N 的直角坐标(-3，4)化成极坐标；

(3)化曲线 E 的极坐标方程：$k\rho\cos^2\theta+3\rho\sin^2\theta-6\cos\theta=0$为直角坐标方程，并说明曲线的形状．

解　(1)设 M 的直角坐标为(x，y)，则

$x=\rho\cos\theta=5\cos\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{5}{2}$　　$y=\rho\sin\theta=5\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

故M点的直角坐标为$(-\dfrac{5}{2}，-\dfrac{5\sqrt{3}}{2})$．

(2)设N点的极坐标为（ρ，θ），则$\rho=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$，$\mathrm{tg}\theta=-\dfrac{4}{3}$，且θ为第二象限角，所以，$\theta=\pi-\mathrm{arctg}\dfrac{4}{3}$．

故N点极坐标为$(5，\pi-\mathrm{arctg}\dfrac{4}{3})$．

(3)在方程 $k\rho\cos^2\theta+3\rho\sin^2\theta-6\cos\theta=0$ 两边同乘以ρ得

$k\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta-6\rho\cos\theta=0$

用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入得

$kx^2+3y^2-6x=0$

因极点在曲线上，则原点也满足方程．

当 $k=0$ 时，曲线为抛物线 $y^2=2x$；

当 $k>0$ 时，曲线为椭圆 $\dfrac{(x-\frac{3}{k})^2}{\frac{9}{k^2}}+\dfrac{y^2}{\frac{3}{k}}=1$；

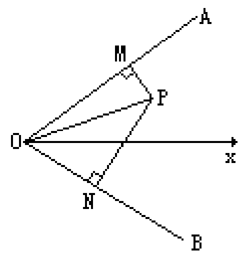
当 $k<0$ 时，曲线为双曲线 $\dfrac{(x-\frac{3}{k})^2}{\frac{9}{k^2}}-\dfrac{y^2}{-\frac{3}{k}}=1$.

注　(i)点的极坐标与直角坐标互化时，如无特别说明，一般认为两坐标系具备公式适用的条件．在由（x，y）确定θ的值时，先求 $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{y}{x}$ 的值，再由(x，y)所在象限确定θ为第几象限角，得出θ的值．

(ii)化极坐标方程为直角坐标方程时，通常在方程两边乘以ρ，使方程中出现 ρ^2，$\rho\cos\theta$，$\rho\sin\theta$．以便直接代入公式转化．但应考查 $\rho=0$ 时的点是否在曲线上．

例 13-2-2　已知锐角∠AOB=2α内一动点 P，过 P 向角的两边 OA，OB 作垂线，PM⊥OA 于 M，PN⊥OB 于 N．当四边形 PMON 面积为定值 a^2 时，求 P 点的轨迹．

解　如右图，以 O 为极点，∠AOB 的平分线为极轴建立极坐标系．设 P 点坐标为(ρ，θ)($-\alpha<\theta<\alpha$，$\rho>0$)．则∠MOP=α-θ，∠PON=α+θ．所以



$OM=\rho\cos(\alpha-\theta)$，$PM=\rho\sin(\alpha-\theta)$

$ON=\rho\cos(\alpha+\theta)$，$PN=\rho\sin(\alpha+\theta)$

于是　$S_{PMON}=S_{\triangle POM}+S_{\triangle PON}$

$$=\frac{1}{2}\rho^2\cos(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta)+\frac{1}{2}\rho^2\cos(\alpha+\theta)\sin(\alpha+\theta)$$

$$=\frac{\rho^2}{4}[\sin(2\alpha-2\theta)+\sin(2\alpha+2\theta)]=\frac{\rho^2}{2}\sin2\alpha\cos2\theta$$

由题设知

$$\frac{\rho^2}{2}\sin 2\alpha \cdot \cos 2\theta = a^2 \Leftrightarrow \rho^2 \cos 2\theta = \frac{2a^2}{\sin 2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta = \frac{2a^2}{\sin 2\alpha}.$$

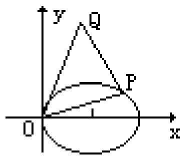
用$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入得P点轨迹的普通方程

$$x^2-y^2=\frac{2a^2}{\sin 2\alpha}$$

故 P 点轨迹为以 O 为中心，∠AOB 的平分线所在直线为对称轴，长、短半轴长均为$\sqrt{\frac{2a^2}{\sin 2\alpha}}$的等轴双曲线夹在∠AOB内的部分．

注　与到定点距离与角有关的轨迹问题，建立极坐标系用直接法求轨迹方程较方便．在判定曲线形状时，则化为直角坐标方程较容易．

例 13-2-3　已知椭圆$(x-2)^2+4y^2=4$．P 为椭圆上一动点，O 为原点，以 OP 为直角边，P 为直角顶点向上作等腰直角△OPQ．求 Q 点轨迹方程．



解　以 O 为极点，Ox 为极轴建立极坐标系．

化椭圆方程$(x-2)^2+4y^2=4$为

$x^2+4y^2-4x=0$

用$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入得椭圆的极坐标方程

$\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta=0$

设 Q，P 两点的极坐标分别为(ρ,θ)，(ρ',θ')．

因△OPQ为等腰直角三角形，故$\rho=\sqrt{2}\rho'$，$\theta=\theta'+\frac{\pi}{4}$，即$\rho'=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho$，$\theta'=\theta-\frac{\pi}{4}$．

因点 P 在椭圆上，故

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho)^2\cos^2(\theta-\frac{\pi}{4})+4(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho)^2\sin^2(\theta-\frac{\pi}{4})$$

$$-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)^2+(\rho\sin\theta-\rho\cos\theta)^2-2(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)=0$$

用$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入上式得

$$\frac{1}{4}(x+y)^2+(y-x)^2-2(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+5y^2-6xy-8x-8y=0$$

这就是点 Q 的轨迹方程．

注　因 Q 点的运动随 P 点的运动而运动，所以用代入法求轨迹方程．又 P 点的位置与长度和角有关，则用极坐标较方便．

例13-2-4　已知椭圆的极坐标方程为$\rho=\frac{5}{3-2\cos\theta}$，求其长轴长、短轴长及焦距．

解　[法一]设长轴两端点为 A_1，A_2，其极坐标为$(\rho_1, 0)$，(ρ_2, π)，则

$$\rho_1=\frac{5}{3-2}=5,\quad \rho_2=\frac{5}{3+2}=1$$

故长轴长$2a=\rho_1+\rho_2=6$，焦距$2c=\rho_1-\rho_2=4$，短轴长$2b=2\sqrt{\rho_1\rho_2}=2\sqrt{5}$．

[法二]化$\rho=\frac{5}{3-2\cos\theta}$为$\rho=\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{2}{3}\cos\theta}$，于是

$$\begin{cases} ep=\frac{5}{3} \\ e=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\frac{5}{2} \\ e=\frac{2}{3} \end{cases}$$

因$e=\frac{c}{a}$，$p=\frac{b^2}{c}$，故

$$\begin{cases} \frac{b^2}{c}=\frac{5}{2} \\ \frac{c}{a}=\frac{2}{3} \\ c^2=a^2-b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ c=2 \\ b=\sqrt{5} \end{cases}$$

故长轴长、短轴长、焦距分别为6，$2\sqrt{5}$，4．

例13-2-5　过椭圆$\frac{x^2}{9}+y^2=1$的左焦点F_1作直线交椭圆于M，N两点；F_2为右焦点；$\angle MF_1F_2=\alpha$．若$|MN|$等于椭圆短轴长，求$\alpha(0\leq\alpha<\pi)$．

解　由椭圆方程$\frac{x^2}{9}+y^2=1$得$a=3$，$b=1$，$c=2\sqrt{2}$．则离心率$e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，焦参数$p=\frac{b^2}{c}=\frac{\sqrt{2}}{4}$．

以左焦点 F_1 为极点，射线 F_1F_2 为极轴，建立极坐标系，则椭圆的极坐标方程为$\rho=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\theta}$，即

$$\rho=\frac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\theta}$$

设 M 点的极坐标为(ρ_1, α)则 N 点极坐标为$(\rho_2, \pi+\alpha)$．于是

$$|MN|=\rho_1+\rho_2=\frac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}\cos\alpha}=\frac{6}{9-8\cos^2\alpha}$$

由题设知$|MN|=2b=2$，所以

$$\frac{6}{9-8\cos^2\alpha}=2\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因$0\leq\alpha<\pi$，故$\alpha=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$.

注　对与焦半径、焦点弦有关的圆锥曲线的问题，常以焦点为极点，建立极坐标系，利用圆锥曲线统一的极坐标方程求解.

例 13-2-6　对双曲线 E 的右焦点 F 的直线与双曲线右支交于 M，N 两点；过 MN 的中点 H 作 MN 的垂线与实轴交于点 Q．求|FQ|：|MN|的值.

解　以 F 为极点，Fx 为极轴建立极坐标系．设双曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-ecox\theta}(e>1)$$

点 M 的极坐标为(ρ_1，θ)，则 N 点极坐标为(ρ_2，$\pi+\theta$)．则

$$|MN|=\frac{ep}{1-e\cos\theta}+\frac{ep}{1+e\cos\theta}=\frac{2ep}{1-e^2\cos^2\theta}.$$

$$|FH|=\frac{1}{2}|\rho_1-\rho_2|=\frac{e^2p|\cos\theta|}{1-e^2\cos^2\theta}$$

所以　$$|FQ|=\frac{|FH|}{|\cos\theta|}=\frac{e^2p}{1-e^2\cos^2\theta}$$

所以　$$|FQ|:|MN|=\frac{e}{2}$$

注　因 M、N 在双曲线右支上，所以ρ_1，ρ_2均为正，从而 1-ecosθ，1+ecosθ均为正.

例13-2-7　已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$．过右焦点F作双曲线一、三象限的渐近线的垂线 l，垂足为 D；若 l 与双曲线左、右两支分别交于点 A，B，且|AD|=3|DB|，求双曲线的离心率 e.

解　以 F 为极点，Fx 为极轴建立极坐标系．设双曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

其中$e=\frac{c}{a}$，$p=\frac{b^2}{c}$，则$ep=\frac{b^2}{a}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$，所以，双曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}$$

设一、三象限渐近线的倾斜角为α，则$\mathrm{tg}\alpha=\frac{b}{a}$，所以，$\sin\alpha=\frac{b}{c}$，所以

|FD|=csinα=b

设B点坐标为（ρ_1，φ），则A点坐标为$(\rho_1，\pi+\varphi)$．因B，A分别在双曲线右

支和左支上，故$\rho_1>0$，$\rho_2<0$.

又$\cos\varphi=-\cos\angle DFO=-\frac{b}{c}$，所以

$$|FB|=\rho_1=\frac{b^2}{a-c\cos\varphi}=\frac{b^2}{a+b}，|FA|=-\rho_2=\frac{b^2}{b-a}$$

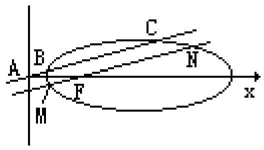
于是 $$|AD|=|FA|-|FD|=\frac{b^2}{b-a}-b=\frac{ab}{b-a}$$

$$|DB|=|FD|-|FB|=b-\frac{b^2}{a+b}=\frac{ab}{a+b}$$

由已知，$|AD|=3|DB|$，所以$\frac{ab}{b-a}=\frac{3ab}{a+b}$，解得$b=2a$，所以$c^2=a^2+b^2=5a^2$，则$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

例 13-2-8　在离心率为 e(e>0)的圆锥曲线中，过焦点 F 的对称轴与相应的准线交于点 A；过 F 的弦交曲线于 M，N；过 A 与 MN 平行的直线交曲线于 B，C 两点.

求证：$|FM|\cdot|FN|=e^2|AB|\cdot|AC|$.



解　以 F 为极点，FA 的反向延长线为极轴建立极坐标系．设圆锥曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

设直线 MN 的倾角为α，由 BC∥MN 知 BC 的倾角也为α.

设 N 点坐标为$(\rho_1，\alpha)$，则 M 点坐标为$(\rho_2，\pi+\alpha)$．所以

$$|FM|=\frac{ep}{1+e\cos\alpha}，|FN|=\frac{ep}{1-e\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow|FM|\cdot|FN|=\frac{e^2p^2}{1-e^2\cos^2\alpha}$$

又以 F 为坐标原点，Fx 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，则曲线的直角坐标方程为

$$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$$

点 A 的坐标为(-p，0)，则 BC 的参数方程为

$$\begin{cases}x=-p+t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$$

将直线方程代入圆锥曲线方程中，得

$$(1-e^2\cos^2\alpha)t^2-2pt\cos\alpha+p^2=0$$

点 B 与 C 对应的参数 t_1，t_2 为此方程二根，故

$$|AB|\cdot|AC|=|t_1t_2|=\frac{p^2}{1-e^2\cos^2\alpha}$$

故$|FM|\cdot|FN|=e^2|AB|\cdot|AC|$.

注　(i)若不知圆锥曲线具体形状，则用统一的极坐标方程，可避免分类讨论；

(ii)等式的左、右两边分别涉及到两焦半径的积和到定点 A 的两线段的积，分别利用极坐标和直线参数方程求解，充分利用了二者的优点.

例13-2-9　过椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左焦点$F_1$作直线$l$交椭圆于A，B两点；$F_2$为右焦点；连 AF_2，BF_2．求$|AF_2|\cdot|BF_2|$的最大值和最小值.

解　由题设知$a=2$，$b=\sqrt{3}$，故$c=1$，$e=\frac{1}{2}$，$p=\frac{b^2}{c}=3$．以F_1为极点，F_1x 为极轴建立极坐标系，则椭圆的极坐标方程为

$$\rho=\frac{3}{2-\cos\theta}$$

设 A 点极坐标为(ρ_1,α)，则 B 点极坐标为$(\rho_2,\pi+\alpha)$$(\rho_1,\rho_2>0)$．则

$$|AF_1|+|BF_1|=\rho_1+\rho_2=\frac{3}{2-\cos\alpha}+\frac{3}{2+\cos\alpha}=\frac{1^2}{4-\cos^2\alpha}$$

$$|AF_1|\cdot|BF_1|=\rho_1\rho_2=\frac{3}{2-\cos\alpha}\cdot\frac{3}{2+\cos\alpha}=\frac{9}{4-\cos^2\alpha}$$

因$|AF_2|=4-|AF_1|$，$|BF_2|=4-|BF_1|$，所以

$$|AF_2|\cdot|BF_2|=(4-|AF_1|)\cdot(4-|BF_1|)$$

$$=16-4(|AF_1|+|BF_1|)+|AF_1|\cdot|BF_1|$$

$$=16-\frac{48}{4-\cos^2\alpha}+\frac{9}{4-\cos^2\alpha}$$

$$=16-\frac{39}{4-\cos^2\alpha}$$

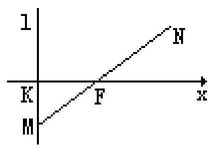
故当$\cos\alpha=0$时，$|AF_2|\cdot|BF_2|$取最大值$\frac{25}{4}$；当$\cos\alpha=\pm1$时，$|AF_2|\cdot|BF_2|$取最小值 3.

注　本题利用点的极径的特点和椭圆定义把$|AF_2|\cdot|BF_2|$的最值问题转化为余弦函数的最值问题，简化了解题过程.

例 13-2-10　如图．设 F 为定点，l 为定直线，点 F 到直线 l 的距离

为$p(p>0)$，点M在直线l上，动点N在MF的延长线上，且满足$\frac{|FN|}{|MN|}=\frac{1}{|MF|}$.

(1)求动点 N 的轨迹；(2)求$|MN|$的最小值.



解　(1)作 FK⊥l 于 K．以 F 为极点，FK 的反向延长线为极轴建立极坐标系．设N点坐标为(ρ,θ)，$(\rho>0,-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$．则$|MF|=\frac{p}{\cos\theta}$，$|FN|=\rho$，故$|MN|=\rho+\frac{p}{\cos\theta}$．

由$\frac{|FN|}{|MN|}=\frac{1}{|MF|}$得$|FN|\cdot|MF|=|MN|$，所以

$$\rho+\frac{p}{\cos\theta}=\rho\cdot\frac{p}{\cos\theta}\Leftrightarrow\rho=\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}\cos\theta}$$

因$\rho>0$，所以$0<\cos\theta<p$．

当$\frac{1}{p}>1$即$0<p<1$时，N点轨迹为双曲线在l右边的部分；

当 $p=1$ 时，N 点轨迹为抛物线在 l 右边的部分；

当 $p>1$ 时，N 点轨迹为椭圆在 l 右边的部分；

(2)因$|MN|=\rho+\frac{p}{\cos\theta}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}\cos\theta}+\frac{p}{\cos\theta}=\frac{p^2}{\cos\theta(p-\cos\theta)}$，故

$$|MN|=\frac{p^2}{-(\cos\theta-\frac{p}{2})^2+\frac{p^2}{4}}$$

因$0<\cos\theta<p$且$0<\cos\theta\le1$，所以，若$0<p\le2$，则当$\cos\theta=\frac{p}{2}$时，$|MN|_{min}=4$；若$p>2$，则当$\cos\theta=1$时，$|MN|_{min}=\frac{p^2}{p-1}$．

习题

13-2-1　已知点 P 的直角坐标为(-3，4)，则 P 点的极坐标不可能是　[　　]．

A．$(-5,-\mathrm{arctg}\frac{4}{3})$　　B．$(5,-\mathrm{arctg}\frac{4}{3})$

C．$(-5,2\pi-\mathrm{arctg}\frac{4}{3})$　　D．$(5,\pi-\mathrm{arctg}\frac{4}{3})$

13-2-2　已知曲线C的极坐标方程为$\rho=\frac{\theta}{\pi}+\cos\theta$．审查下列各点：$M(\frac{1}{2},\frac{5\pi}{2})$，$N(-\frac{3}{2},\frac{\pi}{2})$，$P(1,2\pi)$，$Q(\frac{1}{2},3\pi)$．其中在曲线C上的点是　[　　]．

A．M，N，P　　B．M，N，Q

C．M，P，Q　　D．N，P，Q

13-2-3　极坐标方程$\rho^2-(1+\cos\theta)\rho+\cos\theta=0$表示的图形是　[　　]．

A．直线　　B．射线

C．一个圆　　　　　　　　　　D．两个圆

13-2-4　极坐标方程ρsinθ=sin2θ表示的曲线是　　[　　]．

A．一个圆　　　　　　　　　　B．两条直线

C．一条射线及一个圆　　　　　D．一条直线及一个圆

13-2-5　极坐标方程$4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=5$表示的曲线是　　[　　]．

A．圆　　　　　　　　　　B．椭圆

C．双曲线　　　　　　　　D．抛物线

13-2-6　曲线$\rho=8\cos(\theta-\frac{\pi}{3})$关于　　[　　]．

A．直线$\theta=\frac{\pi}{3}$成轴对称图形　　B．极点成中心对称图形

C．极轴成轴对称图形　　D．直线$\theta=\frac{\pi}{6}$成轴对称图形

13-2-7　双曲线$\rho=\frac{9}{4-5\cos\theta}$($\rho\in R$)的两焦点的极坐标是 [　　]．

A．(0，0)，(10，π)　　　　B．(0，0)，(8，π)

C．(0，0)，(10，0)　　　　D．(0，0)，(-6，0)

13-2-8　椭圆的极坐标方程为$\rho=\frac{3}{2-\cos\theta}$，则它的短轴两端点的极坐标是　　[　　]．

A．$(3,0)$，$(1,\pi)$　　　B．$(\sqrt{3},\frac{\pi}{2})$，$(\sqrt{3},\frac{3\pi}{2})$

C．$(2,\frac{\pi}{3})$，$(2,\frac{5\pi}{3})$　　D．$(\sqrt{7},\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2})$，$(\sqrt{7},2\pi-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2})$

13-2-9　在极坐标系中，椭圆的两焦点分别在极点和点(2c，0)，离心率为e，则它的极坐标方程为　　[　　]．

A．$\rho=\frac{c(1-e)}{1-e\cos\theta}$　　B．$\rho=\frac{c(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$

C．$\rho=\frac{c(1-e)}{e(1-e\cos\theta)}$　　D．$\rho=\frac{c(1-e^2)}{e(1-e\cos\theta)}$

13-2-10　抛物线$\rho=\frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$上一点M，它的极径等于M到准线的距离，则点M的极坐标为_________．

13-2-11　已知P是圆ρ=2acosθ上的一动点，O为极点，Q点分OP为1∶2，则Q点的轨迹方程为_______．

13-2-12　若A，B两点的极坐标分别为$(-3,\frac{4\pi}{3})$，$(5,-\frac{5\pi}{6})$，则$|AB|$=_______，△AOB的面积S=_________．

13-2-13　化下列直角坐标方程为极坐标方程：

(1)$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$(e＞0，p＞0)

(2)$x^3=(2a-x)y^2$(a＞0)

13-2-14　把下列极坐标方程化成直角坐标方程：

(1) $\rho=a\sin 2\theta$　　　　(2) $\rho=2+\cos\theta$

13-2-15　已知椭圆$\rho=\dfrac{2}{3-2\cos\theta}$，求其通径长及两准线的极坐标方程．

13-2-16　求双曲线$\rho=\dfrac{6}{1-2\cos\theta}$($\rho\in R$)的两渐近线的极坐标方程．

13-2-17　已知圆 $x^2+y^2=4$ 与直线 l：$x=4$．过原点作射线交圆于点 A，交直线 l 于点 B．当射线以原点为中心转动时，求 AB 的中点 M 的轨迹方程．

13-2-18　过原点作圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 的割线 OQ；在割线 OQ 上取一点 P，使 P 到直线 $y=2$ 的距离等于$|PQ|$．求 P 点的轨迹．

13-2-19　已知圆锥曲线$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，求过极点的弦AB的中点M的轨迹方程．

13-2-20　已知椭圆$\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{16}=1$，直线$l$：$\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{8}=1$．P是$l$上一点，射线 OP 交椭圆于点 R，又点 Q 在 OP 上且满足$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$．当点 P 在直线 l 上移动时，求点 Q 的轨迹方程，并说明是什么曲线．

13-2-21　已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$．过焦点 F 作两条互相垂直的弦 PQ，RS．若 P，R，Q，S 四点共圆，求此圆的方程．

13-2-22　已知过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点 F 的弦 MN 长为 18，求△OMN 的面积．

13-2-23　过椭圆$\dfrac{(x-10)^2}{100}+\dfrac{y^2}{50}=1$与抛物线$y^2=12(x-7+5\sqrt{2})$的公共焦点 F 作直线 l 交抛物线、椭圆依次为 A，B，C，D(A，D 在抛物线上)．若$|AB|$，$|BC|$，$|CD|$成等差数列，求直线 l 的方程．

13-2-24　已知双曲线$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$．F_1为左焦点．直线l过右焦点F_2与双曲线右支交于不同两点 A，B．连 F_1A，F_1B．若$|F_1A|\cdot|F_1B|=84$，求直线 l 的倾斜角．

13-2-25　过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 F 作两条互相垂直的弦 AB，

CD．求证：$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}$为定值．

13-2-26　设有一颗彗星，沿一抛物线轨道运动，地球恰好位于这抛物线的焦点处．当此彗星离地球为 d(万公里)时，经过地球和彗星的直线与抛物线的轴的夹角为 30°．求此彗星与地球的最短距离．

13-2-27　过椭圆 $x^2+5y^2=5$ 的左焦点 F_1 作直线 l 交椭圆于 A，B 两点．又椭圆长轴左端点为 M．求△ABM 的面积的最大值．

13-2-28　已知P_1，P_2，…，P_n为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上n个点，且 OP_1，OP_2，…，Op_n 将以 O 为顶点的圆周角 n 等分，试求

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{OP_i^2}=\frac{1}{OP_1^2}+\frac{1}{OP_2^2}+\cdots+\frac{1}{OP_n^2}$$

的值．

第十四部分　其他

(一)命题、充要条件

提要

数学知识常常用命题来表达，数学中处处涉及命题之间的逻辑联系和推理论证．一个命题可能是正确的，也可能是错误的．正确的命题叫真命题(真命题称为定理)，错误的命题叫假命题．学习和研究数学的重要工作之一就是判断一个命题的真假，或者证明一个命题为真．如何判断或者证明一个命题为真呢？

首先，是把命题具体化，即把命题分成题设和结论两部分，表达成“若 A 则 B”的形式．

其次，是把命题简单化，即把比较复杂的命题分解成比较简单的命题，找出其中的逻辑联结词(或、且、非)，研究如何由比较简单的命题决定原命题的真假，其依据如下：

(1)复合命题“p 或 q”，在 p，q 中至少有一个为真(包括两个同时为真)时，它是真命题；只有在 p，q 都为假时，它才是假命题．

(2)复合命题“p 且 q”，只有在 p，q 都为真时，它才是真命题；p，q 中有一个为假(包括两个同时为假)时，它是假命题．

(3)复合命题“非 p”，当 p 为真时，它是假命题；当 p 为假时，它是真命题．

其三，命题的等价转化．如果证明某个命题不方便，可以用转而证明它的逆否命题来代替．由一个命题(不妨称为原命题)可以构造出另外三个命题：把命题的前提与结论互换，构成它的逆命题；把命题的前提与结论分别换成它们的否定，构成它的否命题；逆命题的否命题，也就是否命题的逆命题，就是逆否命题．在命题的这四种形式中，原命题和逆否命题是等价的；同样，逆命题和否命题也是等价的．

在研究命题时，要特别注意“所有”、“某个”、“至多”、“至少”、“都”、“不都”、“都不”等词的含义。

最后，对命题进行判断、推理和证明。当“若 A 则 B”是真命题时，称 A 是 B 的充分条件。如果原命题成立，它的逆命题不成立，那么原命题的条件是结论的充分非必要条件；如果原命题不成立，它的逆命题成立，那么原命题的条件是结论的必要非充分条件；如果原命题和它的逆命题都成立，那么原命题的条件是结论的充要条件；如果原命题和它的逆命题都不成立，那么原命题的条件既不是结论的充分条件，也不是必要条件。

例题

例 14-1-1　指出下列命题的真假：

(1)$2\leq3$　(2)$2\geq2$(3)$3\leq2$

解　(1)“$2\leq3$”的含意是“$2<3$ 或 $2=3$”，其中“$2<3$”是真命题，所以“$2\leq3$”是真命题。

(2)“$2\geq2$”的含意是“$2>2$ 或 $2=2$”，其中“$2=2$”是真命题，所以“$2\geq2$”是真命题。

(3)“$3\leq2$”的含意是“$3<2$ 或 $3=2$”，其中“$3<2$”和“$3=2$”都是假命题，所以“$3\leq2$”是假命题。

例 14-1-2　写出下列命题的否定：

(1)不论 m 取什么实数，$x^2+x-m=0$ 必有实根。

(2)存在一个实数 x，使得 $x^2+x+1\leq0$。

解　(1)原命题相当于“对所有的实数 m，$x^2+x-m=0$ 都有实根”，它的否定是“对所有的实数 m，$x^2+x-m=0$ 不都有实根”，即“至少有一个实数 m，使得 $x^2+x-m=0$ 没有实根”。

(2)原命题的否定是指“不存在使得 $x^2+x+1\leq0$ 的实数 x”，即“对所有的实数 x，$x^2+x+1>0$”。

注　(i)“命题的否定”和“否命题”是两回事。所谓命题的否定，就是把一个命题的结论改为与它相矛盾的判断；而否命题包含了“前提”和“结论”两部分的否定。

(ii)“对所有的 $x\in I$，$p(x)$”的否定的一般形式是“存在某一个 $x\in I$，非 $p(x)$”。“存在一个 $x\in I$，$p(x)$”的否定的一般形式是“对所有的 $x\in I$，非 $p(x)$”。

例 14-1-3　“如果三角形的两角相等,那么这三角形为等腰三角形。”这是一个定理。审查下列四个命题：

(1)如果一个三角形的两角不相等，那么这三角形非等腰三角形；

(2)一等腰三角形的两角相等；

(3)如果一个三角形不是等腰三角形，那么其角中有二个不等；

(4)一个三角形的两角相等的必要条件是这个三角形是等腰三角形。

上述哪些命题是与定理等价的？

解　命题(1)是已给定理的“否命题”; 命题(2)是已给定理的“逆命题”; 命题(3)是已给定理的“逆否命题”; 命题(4)是已给定理的改述或重述。由此可见，命题(3)、(4)与已给定理是等价的。

例 14-1-4　设原命题是“已知 a，b，c，d 是实数。若 a=b，c=d，则 a+c=b+d。”写出它的逆命题、否命题和逆否命题，并分别说明它们的真假。

解　逆命题：“已知 a，b，c，d 是实数，若 a+c=b+d，则 a=b，c=d。”

否命题：“已知 a，b，c，d 是实数，若 a≠b 或 c≠d，则 a+c≠b+d。”

逆否命题：“已知 a，b，c，d 是实数，若 a+c≠b+d，则 a≠b 或 c≠d。”

由等式的性质知，原命题为真。

由 3+5=2+6，但 3≠2，5≠6，说明逆命题为假。

由 5≠7，但 5+4=7+2，说明否命题为假。

由原命题为真，可知逆否命题为真。

注　(i)“已知 a，b，c，d 是实数”是大前提，在写逆命题等时保持不动；

(ii)“a=b，c=d”是“p 且 q”的形式，它的否定是“(非 p)或(非 q)”。

例 14-1-5　设“x，y 为有理数，若和 x+y 与积 xy 都是整数，则 x 和 y 也是整数。”

试问此命题是否正确？正确的话证明之；若不正确，则用反例说明。

解　假设x，y不都是整数，但是x，y为有理数，不妨设$x=\frac{b}{a}$(既约分数，a≠1)。根据命题的假设，有 x+y=p，xy=q，其中 p，q 都是整数，从而 x，y 为方程 t^2-pt+q=0 的根，因此

$$\frac{b^2}{a^2}-p\cdot\frac{b}{a}+q=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{b^2}{a^2}=p\cdot\frac{b}{a}-q\Leftrightarrow\frac{b^2}{a}=pb-aq$$

由于 p，q，a，b 都是整数，因而 pb-aq 也是整数。这就意味着 b^2 可被 a 整除，但这是与 a，b 互质相矛盾的。所以 x 必为整数。同理 y 也是整数。因此，命题正确。

注　本题利用的是反证法，即通过证明逆否命题正确来证明原命题正确。

例 14-1-6　设甲、乙、丙是三个命题。如果甲是乙的必要条件；丙是乙的充分条件，但不是乙的必要条件。那么　　　　[　　]

A．丙是甲的充分条件，但不是甲的必要条件

B．丙是甲的必要条件，但不是甲的充分条件

C．丙是甲的充要条件

D．丙不是甲的充分条件，也不是甲的必要条件

解　甲是乙的必要条件，即“乙 ⇒ 甲”(i)。丙是乙的充分条件，但不是必要条件，即“丙 ⇒ 乙，且丙 $\not\Leftarrow$ 乙”(ii)。把(i)，(ii)联系起来，得“丙 ⇒ 甲”。

现在只须判断是否有“甲 ⇒ 丙”。假设“甲 ⇒ 丙”，结合(ii)得“甲 ⇒ 乙”；再结合(i)得“甲 ⇔ 乙”。从而得“乙 ⇒ 丙”，这与(ii)矛盾。故丙是甲的充分条件，但不是甲的必要条件，故选 A。

例 14-1-7　求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$。

分析　由于本题约定，命题的条件是 $a+b+c=0$，结论是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1。故必要性即证明："若 $x=1$ 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $a+b+c=0$。"充分性即证明："若 $a+b+c=0$，则 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根。"

解　(i)先证必要性。

因为 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，所以

$$a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0\Leftrightarrow a+b+c=0$$

(ii)再证充分性。

把 $x=1$ 代入方程 $ax^2+bx+c=0$ 的左边，得

左边$=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c$

依题设 $a+b+c=0$，所以 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根。

由(i)，(ii)可知，原命题成立。

注　命题中的条件和结论是相对的。即：若 p 是 q 的必要条件，那么 q 是 p 的充分条件；若 p 是 q 的充分条件，那么 q 是 p 的必要条件；若 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件。

习题

14-1-1　举出满足下列条件的数学命题的例：

(1)原命题和逆命题都正确；

(2)原命题正确，但逆命题不正确；

(3)原命题和否命题都正确；

(4)否命题正确，但原命题不正确。

14-1-2　能不能举出原命题正确，但逆否命题不正确的例？为什么？

14-1-3　能不能举出逆命题正确，但否命题不正确的例？为什么？

14-1-4　以下列命题为原命题，分别写出其逆命题、否命题、逆否命题，并分别指出它们的真假。

(1)a，b 都是实数，若 a，b 都是 0，则 $a^2+b^2=0$；

(2)若 $m=4$ 或 $n=3$，则 $m^2+n^2=25$；

(3)两条异面直线不相交。

14-1-5　判别下列命题的真假：

(1)对所有的正实数 p，$\sqrt{p}$ 为正，且 $\sqrt{p}>p$。

(2)不存在实数 x，$x<4$ 且 $x^2+5x=24$。

(3)存在实数 x，$|x+1|\leq 1$ 且 $x^2<4$。

(4)对一个实数 x，若 $x^2-6x-7=0$，则 $x^2-6x-7\geq 0$。

14-1-6　写出下列命题的否定：

(1)$a\geq 0$ 且 $b>0$。

(2)x，y 都不是 0。

(3)$a=0$ 或 $b=0$。

(4)a，b 之中至少有一个是正数。

14-1-7　说出下列命题的逆否命题：

(1)如果 $x^2-5x+6=0$，则 $x=2$ 或 $x=3$。

(2)如果 a，b 为实数，且 $a+b>0$，则 a，b 中至少有一个是正数。

(3)若 a，b 是偶数，则 a+b 是偶数。

14-1-8　指出下列各题中“p 或 q”,“p 且 q”,“非 p”的真假：

(1)p：2+2=5；　　　q：3＞2。

(2)p：9 是质数；　　q：8 是 12 的约数。

(3)p：$1\in\{1，2\}$；　　q：$\{1\}\subset\{1，2\}$。

(4)p：$\varnothing\subset\{0\}$；　　q：$\varnothing=\{0\}$。

14-1-9　写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判断它们的真假：

(1)若 xy=0，则 x=0 或 y=0。

(2)若 x＞0，y＞0，则 xy＞0。

14-1-10　写出下列各命题的否定：

(1)满足条件 C 的点都在图形 F 上。

(2)不满足条件 C 的点都不在图形 F 上。

(3)在图形 F 上存在不满足条件 C 的点。

(4)在图形 F 外存在满足条件 C 的点。

14-1-11　判定下列各题中的 p 是 q 的什么条件①TBJX0060：

(1)p：整数 a 的个位数字是 2；q：整数 a 是偶数。

(2)p：x＞2；q：x＞5。

(3)p：c=0；q：直线 ax+by+c=0 过坐标原点。

(4)p：x 是第一象限角；q：函数 y=sinx 是增函数。

14-1-12　按上题的要求回答下列问题：

(1) $\alpha\neq\frac{\pi}{6}$ 是 $\sin\alpha\neq\frac{1}{2}$ 的什么条件？

(2) $|3x|<3$ 的什么条件是 $0.1^{1gx^2}>1$。

14-1-13　已知抛物线 C：$y=-x^2+mx-1$ 及点 A(3，0)，B(0，3)，求 c 与线段 AB 有两个不同交点的充要条件。

14-1-14　在△ABC 中，∠A＞∠B 是 sinA＞sinB 的什么条件？

14-1-15　回答下列各题中“命题 A”是“命题 B”的什么条件。

(1)A：$1gx^2=0$；B：x=1。

(2)A：$f(x_1，y_1)=0$；B：点 $P(x_1，y_1)$在曲线 f(x，y)=0 上。

14-1-16　已知曲线 C：$x^2-y^2+Gx+Ey+F=0(G^2-E^2-4F\neq0)$，求曲线 C 在 x 轴上截得的线段长为 1 的充要条件。

14-1-17　(1)“取任意点 x，如 x 在圆 P 中，则 x 也在圆 Q 中。”可写成“$P\subseteq Q$”。将 $P\subseteq Q$ 不成立的情况用图表示出来。

(2)设“x 在圆 P 中”为命题 p,“x 在圆 Q 中”为命题 q，试将“不是 $P\subseteq Q$”意义下的命题，用 p 和 q 的语言表示之，但不许使用“所有的”。

14-1-18　就下列命题，回答以下各问题：

使点(x,y)属于集合 M 的条件是,对某实数 t,不等式 $y^2-4\geq t(t-2x)$

成立。

(1)作以上命题的逆否命题；

(2)将 M 的补集用 x，y 表示之。

14-1-19　求证：实系数的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个异号实根的充要条件是 $ac<0$。

14-1-20　下列各小题中 p 是 q 的什么条件？

(1)p：$a^2>2b$；q：$x^2+ax+b=0$ 有不相等实根。

(2)p：a，b 是整数；q：$x^2+ax+b=0$ 有整数根。

(3)p：$a+b=1$；q：$a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$。

(4)p：$ab<0$；q：$a^2-ab+\frac{b^2}{4}>0$。

14-1-21　$ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负的实根的充要条件是

[　　]

A．$1\geq a>0$

B．$a<1$

C．$1\geq a$

D．$1\geq a>0$ 或 $a<0$

14-1-22　对于满足 $x\geq y\geq z\geq 0$ 的任意的 x，y，z，总有 $ax+by+cz\geq 0$ 的充要条件是 $a\geq 0$，$a+b\geq 0$，$a+b+c\geq 0$ 同时成立。试作证明。

14-1-23　求 $3x^2-10x+k=0$ 有两个同号且不相等的实根的充要条件。

14-1-24　指出下列各小题中，p 是 q 的什么条件？

(1)p：$x=1$或$x=2$　　q：$x-1=\sqrt{x-1}$

(2)p：$|x-2|\leq 3$　　q：$x\geq -1$ 或 $x\leq 5$

(3)p：$x\sqrt{2x+3}=x^2$　　q：$2x+3=x^2$

(4)p：$x=3$或$x=2$　　q：$x-3=\sqrt{3-x}$

14-1-25　在下列从(1)到(6)的论断中，正确的用“√”，错误的用“×”，不能肯定正确与否的用“△”表示。

(1)$2\leq 3$。

(2)因为 $2=3$ 不成立，所以 $2\leq 3$ 的写法是错误的，如用大小关系表示，必须写作 $2<3$。

(3)对于不大于 3 的变数 x，写作 $x\leq 3$，这是正确的，但 $2\leq 3$ 是错误的。

(4)定理“若 $a=b$，则 $a^2=b^2$”的逆命题“若 $a^2=b^2$，则 $a=b$”不一定成立，但是，例如 $a=2$，$b=2$ 时成立。

(5)定理“若 $a=b$ 则 $a^2=b^2$”的逆命题“若 $a^2=b^2$，则 $a=b$”不成立。

(6)所谓‘定理的逆命题不一定成立’这种说法是对定理的总的说法，至于一个定理的逆命题，要么成立，要么不成立，只能是其中一种。

14-1-26　回答下列问题：

(1)下列命题是否正确？正确的用“√”，不正确的用“×”表示。

①若 $|x-2|+|1-x|>2$，则 $x>3$ 或 $x<0$。.

②若 $x\leq 3$，则 $|x-2|+|1-x|\leq 3$ 或 $x\leq 0$。

③若$|x-2|<1$或$x<0$，则$|1-x|>2$。

④若$|1-x|\geq 1$成立，则$|x-2|+|1-x|<2$或$x\geq 3$不成立。

⑤前面①中的命题的逆否命题是“若$x\leq 3$或$x\geq 0$，则$|x-2|+|1-x|\leq 2$”。

⑥前面②中的命题的逆命题是“若$|x-2|+|1-x|\leq 3$或$x\leq 0$，则$x\leq 3$”。

⑦前面③中的命题的否命题是“若$|x-2|\geq 1$且$x\geq 0$，则$|1-x|\leq 2$”。

(2)写出前面④中的命题的否命题。

(3)写出前面③中的命题的逆否命题。

(二)探索性问题

提要

这里所指的探索性问题是相对于有明确而完整的条件，又有确定结论的题型而言的。常见题型及其解题思路如下：

(1)归纳型问题　未给出问题结论，需要由特殊情况入手，猜想、证明一般性结论的问题，称为归纳型问题。它的解题思路是，从所给条件出发，通过观察、试验、归纳、猜想，探索出结论，然后再对归纳、猜想的结论进行证明。

(2)存在型问题　结论不确定的问题，称为存在型问题。一般有肯定型、否定型和讨论型三种。即在数学命题中，常以适合某种性质的对象“存在”、“不存在”、“是否存在”等形式出现。“存在”就是有适合某种条件或符合某种性质的对象；对于这类问题无论用什么方法只要找出一个，就说明存在。“不存在”就是无论用什么方法都找不出一个适合某种已知条件或性质的对象；这类问题一般需要推理论证。“是否存在”型问题的结论有两种可能：若存在，需要找出来；若不存在，则须说明理由。这类题目的解题思路是，先假设结论是肯定存在的，若推证无矛盾，即成立；若推证出矛盾，即可否定结论。反证法在解此类题时起着重要的作用。

(3)分析型问题　对于已有结论，需探求其结论成立的条件的问题，一般称为分析型问题。它的解题思路是，把产生的条件一一分析列出，分别推导；也可以利用分析的思想，追寻其充分条件。

还可分出其它类型。探索性问题的核心是要求解题者去独立的探究。一般需要通过观察、试验、类比、归纳，猜想出结论或条件，然后严格证明。这就不但要用到演绎法，还要用到归纳法；不但要严密的逻辑推理，也要合情推理。

1．归纳型问题

例题

例 14-2-1　由

$$1>\frac{1}{2}，1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>1$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7}>\frac{3}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{15}>2$$

……

你能得到怎样的结论，并进行证明。

解　由观察知第 n 式的第一项 $a_1=1$；各式的最后一项分别是：1，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{15}$，…，因此第n式的最后一项是$\frac{1}{2^n-1}$；第n式的右端是$\frac{n}{2}$。

猜想：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$$

证明如下：

(i)当$n=1$时，左边$=1$，右边$=\frac{1}{2}$，不等式成立。

(ii)假设 n=k 时不等式成立，即

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}$$

当 n=k+1 时，由于不等式左边增添了下列各项之和：

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

共 2^k 项。因此只须证明

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k+1}{2}$$

$$\because\ \frac{1}{2^k}>\frac{1}{2^{k+1}}，\frac{1}{2^k+1}>\frac{1}{2^{k+1}}，\cdots，\frac{1}{2^k+2^k-1}>\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+\left(2^k-1\right)}$$

$$>\underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k\text{项}}=2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

$$>\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$$

由(i)，(ii)知，对一切自然数 n，结论成立。

注　一般规律的探索可按照下面三个步骤进行。

第一步：观察分析各式的第一项各个数字间的变化规律，求出第 n 式的第一项 f(n)。

第二步：观察分析各式的最后一项各个数字间的变化规律(或归纳出第 n 式的项数及其数字变化规律)，求出第 n 式的最后一项 g(n)。

第三步：观察分析各式右端的数字的变化规律，写出第 n 式右端的通项 q(n)。

例 14-2-2　已知数列$\{a_n\}$前 n 项的和 $S_n=1-na_n(n\in N)$，试推测 a_n 的通项，并证明你的结论。

分析　不妨先求出 a_1，a_2，a_3，a_4，从中归纳出 a_n 的通项。

解　由$S_1=1-a_1$，且$S_1=a_1$，得$a_1=1-a_1$，即$a_1=\frac{1}{2}$。

又 $a_2=S_2-S_1$，所以

$$a_2=(1-2a_2)-a_1\Leftrightarrow 3a_2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a_2=\frac{1}{6}$$

同法可求得$a_3=\frac{1}{12}$，$a_4=\frac{1}{20}$。

所以$\{a_n\}$的前四项是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$。将这四项改写为$\frac{1}{1\times 2}$，$\frac{1}{2\times 3}$，$\frac{1}{3\times 4}$，$\frac{1}{4\times 5}$。于是我们猜想

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

现在用数学归纳法证明：

当 n=1 时，结论显然成立。

假设$n=k$时，结论成立，即$a_k=\frac{1}{k(k+1)}$。那么，由

$$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=[1-(k+1)a_{k+1}]-(1-ka_k)$$
$$=ka_k-(k+1)a_{k+1}$$

知　$a_{k+1}=\frac{k}{k+2}a_k=\frac{k}{k+2}\cdot\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

也就是说 n=k+1 时结论也成立。

故数列$\{a_n\}$的通项公式是

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}\quad(n\in N)$$

注　这里的关键在于归纳和猜想。由 S_n 的表达式写出的$\{a_n\}$的前四项为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$，它既不是等差数列也不是等比数列，规律不明显。如果退到“原始状态”，如$3a_2=\frac{1}{2}$，则易写出$a_2=\frac{1}{2\times 3}$。这对寻求规律好处很大。这种保持形成过程的“自然状态”是观察形成规律时值得注意的一种方法。

例 14-2-3　设 n 为自然数，

$$f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

(1)试证：若 m，n∈N，m<n，则

$$f(n)\geq f(m)+\frac{n-m}{n}$$

并指出取等号的条件；

(2)由计算知$f(2)=\frac{3}{2}$，$f(4)>2$，$f(8)>\frac{5}{2}$，$f(16)>3$，$f(32)>\frac{7}{2}$。观察上述结果，推测出一般的不等式，并用数学归纳法证明。

解 (1)由 m<n 知

$$f(n)-f(m)=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$$

$$=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\geq\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{(n-m)\text{个}}=\frac{n-m}{n}$$

所以 $f(n)\geq f(m)+\frac{n-m}{n}$ (i)

其中的等号当且仅当 n-m=1 时成立。

(2)推测 n≥2 时，

$$f(2^n)>\frac{n+2}{2} \qquad \text{(ii)}$$

下面给出证明：

当$n=2$时，$f(2^2)=\frac{25}{12}>\frac{2+2}{2}$，不等式(ii)成立。

假设当 n=k(k≥2)时不等式成立，即

$$f(2^k)>\frac{k+2}{2}$$

那么，当 n=k+1 时，由不等式(i)知

$$f(2^{k+1})\geq f(2^k)+\frac{2^{k+1}-2^k}{2^{k+1}}>\frac{k+2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{(k+1)+2}{2}$$

也就是说，不等式(ii)当 n=k+1 时也成立。

从而不等式(ii)对任何不小于 2 的自然数都成立。

例14-2-4 已知函数$f(x)=\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$，x为正实数，n为非零有理数。

(1)判断 f(x)在(0，+∞)上是增函数还是减函数，并证明你的结论；

(2)当n∈N时，试比较$f(\sqrt{2})$与$\frac{n^2-1}{n^2+1}$的大小，并说明理由。

解 (1)设 $0<x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2^n-x_2^{-n}}{x_2^n+x_2^{-n}}-\frac{x_1^n-x_1^{-n}}{x_1^n+x_1^{-n}}$$

$$=\frac{2(x_1^{-n}x_2^{-n}-x_1^n x_2^{-n})}{(x_2^n+x_2^{-n})(x_1^n+x_1^{-n})}=\frac{2(x_2^{2n}-x_1^{2n})}{x_1^n x_2^n(x_2^n+x_2^{-n})(x_1^n+x_1^{-n})}$$

$$=\frac{2(x_2^n+x_1^n)(x_2^n-x_1^n)}{x_1^n x_2^n(x_2^n+x_2^{-n})(x_1^n+x_1^{-n})}$$

根据幂函数的单调性，当$n>0$时，$x_2^n-x_1^n>0$；当$n<0$时，$x_2^n-x_1^n<0$。从而知当 $n>0$ 时，$f(x)$是$(0，+\infty)$上的增函数；当 $n<0$ 时，$f(x)$是$(0，+\infty)$上的减函数。

(2)由于

$$f(\sqrt{2})=\frac{2^n-1}{2^n+1}=1-\frac{2}{2^n+1}，\quad \frac{n^2-1}{n^2+1}=1-\frac{2}{n^2+1}$$

要比较$f(\sqrt{2})$与$\frac{n^2-1}{n^2+1}$的大小，只须比较2^n与n^2的大小。注意到$2^1>1^2$，$2^2=2^2$，$2^3<3^2$，$4^2=2^4$，$2^5>5^2$，$2^6>6^2$。我们猜想：

当 $n\geq5$ 时，$2^n>n^2$

下面用数学归纳法证明：

当 $n=5$ 时，不等式成立。

假设 $n=k\geq5$ 时，结论成立。则当 $n=k+1$ 时，因为 $k\geq5$，所以$(k-1)^2-2>0$，所以

$$2^{k+1}=2\cdot2^k>2\cdot k^2=2[(k+1)^2-2(k+1)+1]$$
$$=(k+1)^2+[(k-1)^2-2]>(k+1)^2$$

即当 $n\geq5$ 时，$2^n>n^2$。

因此，

当$n=1$或$n\geq5$时，$f(\sqrt{2})>\frac{n^2-1}{n^2+1}$；

当$n=2$，4时，$f(\sqrt{2})=\frac{n^2-1}{n^2+1}$；

当$n=3$时，$f(\sqrt{2})<\frac{n^2-1}{n^2+1}$。

习题

14-2-1　考察下表：

1=1，3+5=8，7+9+11=27

13+15+17+19=64，……

用适当的式子表示此表所提供的一般法则，并进行证明。

14-2-2 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{3}$，且前n项的算术平均值等于第n项的 $2n-1$ 倍($n\in N$)，试确定它的前 n 项和公式。

14-2-3　观察下左表，问：这个表第 n 行里的最后一个数是多少？第 n 行各个数之和是多少？

1　　　　　　　　　　　　　　　　1　1

2，3，4　　　　　　　　　　　　1　2　1

3，4，5，6，7　　　　　　　　1　3　3　1

4，5，6，7，8，9，10　　　　1　4　6　4　1

…………………　　　　　　　……………………

14-2-4　观察杨辉三角数。问：第 n 行各数之和是多少？

14-2-5　已知数列

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 3\times 2^{n-2} \quad (n\geq 2) \end{cases}$$

(1)计算 S_1，S_2，S_3，S_4，由此推测计算数列前 n 项和 S_n 的公式；

(2)用数学归纳法证明，对一切自然数 n，上述计算 S_n 的公式成立。

14-2-6　已知三个不等式

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<1，\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}<\sqrt{2}，\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{12}}<\sqrt{3}$$

由此能得到怎样的一般不等式，并加以证明。

14-2-7　已知$f(1)=\lg\frac{1}{2}$，$f(n-1)=f(n)-\lg 2^{n-1}(n\in N，n\geq 2)$**，先计算出 f(2)，f(3)，f(4)的值，再推测 f(n)(n∈N)的计算公式，并用数学归纳法加以证明。**

14-2-8　已知数列

$$\frac{8\times 1}{1^2\times 3^2}，\frac{8\times 2}{3^2\times 5^2}，\cdots，\frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}，\cdots$$

S_n**为其前**n**项和，计算得**$S_1=\frac{8}{9}$，$S_2=\frac{24}{25}$，$S_3=\frac{48}{49}$，$S_4=\frac{80}{81}$**。观察上述结果，推测出计算 S_n 的公式，并用数学归纳法加以证明。**

14-2-9　已知 a_n=2+4+6+…+2n，b_n=1+2+4+…+2^{n-1}(n∈N)，试判断 a_n 与 b_n 的大小关系。

2．存在型问题

例题

例 14-2-5　设实数 $a\neq 0$，数列$\{a_n\}$是首项为 a，公比为(-a)的等比数列，记：$b_n=a_n\cdot \lg|a_n|(n=1，2，\cdots)$，请问：当 $0<a<1$ 时，是否存在自然数 M，使得对任意自然数 n 都有 $b_n\leq b_M$？证明你的结论。

解　存在所要求的自然数 M。证明如下：

因为 $0<a<1$，所以 $\lg|a|=\lg a<0$。

当 n 是奇数时，$b_n=(-1)^{n-1}na^n\lg a<0$；

当 n 是偶数时，$b_n=(-1)^{n-1}na^n\lg a>0$。

设 k 是自然数，因 $1-a^2\neq 0$，故

$$b_{2k+2}-b_{2k}=-(2k+2)a^{2k+2}\lg a+2ka^{2k}\lg a$$

$$=(2a^{2k}\lg a)[-(k+1)a^2+k]=(2a^{2k}\lg a)[(1-a^2)k-a^2]$$

$$=2a^{2k}\lg a\cdot(1-a^2)(k-\frac{a^2}{1-a^2})$$

因为$2a^{2k}\lg a<0$，$1-a^2>0$，所以$(b_{2k+2}-b_{2k})$与$(k-\frac{a^2}{1-a^2})$异号或同时为0。记k是不大于$\frac{a^2}{1-a^2}$的最大整数，则有

$$b_2<b_4<\cdots<b_{2k}\leq b_{2k+2}$$

$$b_{2k+2}>b_{2k+4}>b_{2k+6}>\cdots$$

而对任何自然数 k，又有 $b_{2k-1}<0<b_{2k+2}$，所以取 $M=2k+2$，则对任何自然数 n，都有 $b_n\leq b_M$。

例 14-2-6　是否存在 a，b，c，使得等式

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$$

对一切自然数 n 都成立？并证明你的结论。

分析　不妨假设存在这样的 a，b，c。欲确定它，即求出这三个未知数，需要有相应的三元方程组。题设所给等式对任意自然数 n 都成立，故可给定 n 三个确定的值而得出含 a，b，c 为元的方程组。

解　假设存在 a，b，c 使题设中等式成立。这时，分别令 n=1，2，3 得

$$\begin{cases}4=\frac{1}{6}(a+b+c)\\22=\frac{1}{2}(4a+2b+c)\\70=9a+3b+c\end{cases}$$

整理得$\begin{cases} a+b+c=24 \\ 4a+2b+c=44 \\ 9a+3b+c=70 \end{cases}$

解得 a=3，b=11，c=10。于是对 n=1，2，3，下面等式成立：

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$$

设

$$S_n=1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2$$

假设当 n=k 时上式成立，即

$$S_k=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)$$

则 $S_{k+1}=S_k+(k+1)(k+2)^2$

$$=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)+(k+1)(k+2)^2$$

$$=\frac{k(k+1)}{12}(k+2)(3k+5)+(k+1)(k+2)^2$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{12}(3k^2+5k+12k+24)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{12}[3(k+1)^2+11(k+1)+10]$$

即等式对 n=k+1 也成立。

综上所述，当 a=3，b=11，c=10 时题设的等式对一切自然数都成立。

注　此例系“存在型”问题，运用了解“归纳型”问题的一般方法。当然如能记住自然数立方和及平方和公式，用恒等变形的方法也可直接得到 a，b，c。

例 14-2-7　设 a，b 是两个实数，又

A={(x，y)|x=n，y=na+b，n 是整数}

B={(x，y)|x=m，y=3m^2+15，m 是整数}

C={(x，y)|x^2+y^2≤144}

是平面xOy内的集合。讨论是否存在a和b，使得(1)A∩B≠∅(∅表示空集)；(2)(a，b)∈C 同时成立。

解　[法一]　设存在这样的 a，b。

考虑下面的关于 x，y 的方程组

$$\begin{cases} y=ax+b \\ y=3x^2+15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow ax+b=3x^2+15\Leftrightarrow 3x^2-ax+(15-b)=0 \qquad \text{(i)}$$

由条件(1)，即A∩B≠∅，知

$$\triangle=a^2-12(15-b)\geq 0 \qquad \text{(ii)}$$

又由(2)得

$$a^2+b^2\leq 144 \qquad \text{(iii)}$$

由条件(1)，(2)同时成立，即

$$\begin{cases}a^2-12(15-b)\geq 0\\ a^2+b^2\leq 144\end{cases}$$

有解，消去 a 得

$$180-12b\leq a^2\leq 144-b^2 \Leftrightarrow 180-12b\leq 144-b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2-12b+36\leq 0 \Leftrightarrow (b-6)^2\leq 0 \Leftrightarrow b=6$$

代入(ii)和(iii)得 $a^2=108$。

把a^2及b代入$3x^2-ax+(15-b)=0$，解得$x=\sqrt{3}$。

由已知 x=n，n 是整数，所以不存在 a，b 使得(1)、(2)同时成立。

注　解决问题的过程也就是等价转换的过程。在解法一中，作等价变换时，把(i)看成以 x 为未知数的方程。若换个角度，把(i)看成 a，b 为未知数的方程

$$xa+b-(3x^2+15)=0$$

该方程表示为含参变量 x 的直线方程，从而可得解法二。

[法二]　假设存在 a，b。

考虑下列关于 a，b 的方程组：

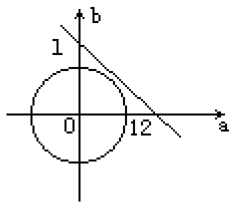
$$\begin{cases}y=ax+b\\ y=3x^2+15\end{cases}\Leftrightarrow ax+b=3x^2+15$$

$$\Leftrightarrow xa+b-(3x^2+15)=0 \qquad \text{(iv)}$$

由条件(2)得

$$a^2+b^2\leq 144 \qquad \text{(v)}$$

因为题设(1)，(2)同时成立，所以点 P(a，b)在直线(iv)上，且满足 $a^2+b^2\leq 144$。即要求圆心 O 到直线(iv)的距离 d≤12。



由(iv)，(v)知

$$d=\frac{3x^2+15}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=3\cdot\left(\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}\right)=3\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=6\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)\geq 12$$

当且仅当$\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$时，即$x=\pm\sqrt{3}$时取等号，这与$x=n\in Z$矛盾。

所以不存在 a，b 使得(1)、(2)同时成立。

例 14-2-8　设抛物线过定点 A(0，2)，且以 x 轴为准线。

(1)求抛物线顶点 M 的轨迹 C 的方程；

(2)问过定点$B(-\frac{5}{2}，1)$是否存在一对互相垂直的直线同时都与轨迹 C 有公共点？证明你的结论。

解　(1)设抛物线的顶点是 M(x，y)，则其焦点 F 为 F(x，2y)(y＞0)。由点 A(0，2)在抛物线上，抛物线以 x 轴为准线，据抛物线的定义，得$|AF|=|AO|$，即$\sqrt{x^2+(2y-2)^2}=2$，所以

$$x^2+4(y-1)^2=4\quad(y>0)$$

为所求轨迹 C 的方程。

(2)设l为过点$B\left(-\frac{5}{2}，1\right)$且与轨迹$C$有公共点的直线。

若l的斜率不存在，则过点$B\left(-\frac{5}{2}，1\right)$的一对互相垂直的直线为$x=-\frac{5}{2}$，$y=1$。显然直线$x=-\frac{5}{2}$与轨迹$C$无交点。故这两条互相垂直的直线不符合题意。

若 l 的斜率存在，令其方程为

$$y-1=k\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

将$y=k\left(x+\frac{5}{2}\right)+1$代入$x^2+4(y-1)^2=4$得

$$x^2+4k^2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=4$$

$$\Leftrightarrow(4k^2+1)x^2+20k^2x+(25k^2-4)=0\qquad\text{(i)}$$

为保证直线 l 与轨迹 C 有公共点，上述方程的判别式应非负，即△≥0，由此得$|k|\leq\frac{2}{3}$。

现假设存在一对过定点 B 且与轨迹 C 有公共点的互相垂直的直线 l_1 和 l_2，令它们的斜率分别为 k_1 和 k_2，则 k_1 和 k_2 满足

$$k_1\cdot k_2=-1$$

另一方面，这里的k_1，k_2是(i)中的k的两个值，故应有$|k_1|\leq\frac{2}{3}$，$|k_2|\leq\frac{2}{3}$，推知

$$|k_1k_2|\leq4/9$$

这与 $k_1k_2=-1$ 矛盾。

故符合题意的两条互相垂直的直线不存在。

注　应用反证法解“是否存在”的问题，一般是先假设所求的数学对象存在，然后用正确的推理导出矛盾的结果，从而否定假设。

例 14-2-9　设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，S_n 是其前 n 项和。

(1) 证明：$\frac{\lg S_n + \lg S_{n+2}}{2} < \lg S_{n+1}$

(2) 是否存在常数 c＞0 使得

$$\frac{\lg\left(S_n - c\right) + \lg\left(S_{n+2} - c\right)}{2} = \lg\left(S_{n+1} - c\right)$$

成立？并证明你的结论。

解　(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题设知 $a_1 > 0$，$q > 0$。

当 q=1 时，$S_n = na_1$，从而

1-3-5 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$　　**1-3-6** $A \subseteq R$ 且 $-1 \notin A$

1-3-7 (1) 因为 $y = \frac{2\times 4-1}{2\times 4+1} = \frac{7}{9}$，所以 4 的象为 $\frac{7}{9}$。

(2) 令 $= \frac{9}{11} = \frac{2x-1}{2x+1}$，解之得 $x = 5$，所以 $\frac{9}{11}$ 的原象为 5。

当 $q \neq 1$ 时，$S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$，从而

$$S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 = \frac{a_1^2\left(1-q^n\right)\left(1-q^{n+2}\right)}{\left(1-q\right)^2} - \frac{a_1^2\left(1-q^{n+1}\right)^2}{\left(1-q\right)^2}$$

$= -a_1^2 q^n < 0$

综上所述，得

$$S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2$$

根据对数函数的单调性，知 $\lg(S_n S_{n+2}) < \lg S_{n+1}^2$，即

$$\frac{\lg S_n + \lg S_{n+2}}{2} < \lg S_{n+1}$$

(2) 不存在。

[法一]　要使

$$\frac{\lg\left(S_n - c\right) + \lg\left(S_{n+2} - c\right)}{2} = \lg\left(S_{n+1} - c\right)$$

成立，则有

$$\begin{cases} \left(S_n - c\right)\left(S_{n+2} - c\right) = \left(S_{n+1} - c\right)^2 & \text{(i)} \\ S_n - c > 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

分两种情况讨论：

当 q=1 时，

$(S_n - c)(S_{n+2} - c) - (S_{n+1} - c)^2$

$= (na_1 - c)[(n+2)a_1 - c] - [(n+1)a_1 - c]^2$

$= -a_1^2 < 0$

可知，不满足条件 (i)，即不存在常数 c＞0，使结论成立。

当 q≠1 时，若条件 (i) 成立，因则

$(S_n - c)(S_{n+2} - c) - (S_{n+1} - c)^2 = 0$

即 $$\left[\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}-c\right]\left[\frac{a_1\left(1-q^{n+2}\right)}{1-q}-c\right]-\left[\frac{a_1\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}-c\right]^2=0$$

即 $-a_1q^n[a_1-c(1-q)]=0$

且 $a_1q^n\neq 0$，故只能有 $a_1-c(1-q)=0$，即

$$c=\frac{a_1}{1-q}$$

此时，因为 $c>0$，$a_1>0$，所以 $0<q<1$。但 $0<q<1$ 时，

$$S_n-\frac{a_1}{1-q}=-\frac{a_1q^n}{1-q}<0$$

不满足条件(ii)，即不存在常数 $c>0$，使结论成立。

综合上述可知，同时满足条件(i)，(ii)的常数 $c>0$ 不存在。即不存常数 $c>0$，使

$$\frac{\lg\left(S_n-c\right)+\lg\left(S_{n+2}-c\right)}{2}=\lg\left(S_{n+1}-c\right)$$

[法二] 用反证法。假设存在常数 $c>0$，使

$$\frac{\lg\left(S_n-c\right)+\lg\left(S_{n+2}-c\right)}{2}=\lg\left(S_{n+1}-c\right)$$

则有

$$\begin{cases} S_n-c>0 & \text{(iii)} \\ S_{n+1}-c>0 & \text{(iv)} \\ S_{n+2}-c>0 & \text{(v)} \\ \left(S_n-c\right)\left(S_{n+2}-c\right)=\left(S_{n+1}-c\right)^2 & \text{(vi)} \end{cases}$$

由(vi)得

$$S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=c\left(S_n+S_{n+2}-2S_{n+1}\right) \qquad \text{(vii)}$$

根据平均值不等式及(iii)，(iv)，(v)，(vi)知

$$\begin{aligned} & S_n+S_{n+2}-2S_{n+1} \\ &=\left(S_n-c\right)+\left(S_{n+2}-c\right)-2\left(S_{n+1}-c\right) \\ &\geq 2\sqrt{\left(S_n-c\right)\left(S_{n+2}-c\right)}-2\left(S_{n+1}-c\right)=0 \end{aligned}$$

因为 $c>0$，故(vii)式右端非负，而由(1)知，(vii)式左端小于 0。矛盾。

故不存在常数 $c>0$，使

$$\frac{\lg\left(S_n-c\right)+\lg\left(S_{n+2}-c\right)}{2}=\lg\left(S_{n+1}-c\right)$$

例 14-2-10 已知函数 $f(x)$是定义在$(-\infty，1]$上的减函数。问是否存在实数 k，使不等式

$$f(k-\sin x)\geq f(k^2-\sin^2x)$$

对于任意 $x\in R$ 都成立。

解 由于函数 $f(x)$是定义在$(-\infty，1]$上的减函数，因此，不等式 $f(k-\sin x)\geq f(k^2-\sin^2x)$对于任意 $x\in R$ 都成立，得

$$\begin{cases} k-\sin x \le 1 \\ k^2-\sin^2 x \le 1 \\ k-\sin x \le k^2-\sin^2 x \end{cases}$$ **对于任意**$x\in R$**成立**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2-\sin^2 x \le 1 \\ k-\sin x \le k^2-\sin^2 x \end{cases}$$ **对任意**$x\in R$**成立**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2-1 \le \sin^2 x \\ k^2-k \ge \sin^2 x-\sin x \end{cases}$$ **对任意**$x\in R$**成立**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2-1 \le \sin^2 x(x\in R)\text{的最小值} \\ k^2-k \ge \sin^2 x-\sin x(x\in R\text{的最大值}) \end{cases}$$

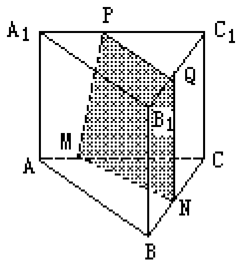
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2-1 \le 0 \\ k^2-k \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le k\le 1 \\ k\le -1\text{或}k\ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k=-1$$

因此，存在实数 k 使题中命题成立。

注　上面的证明保证了 k=-1 是给定不等式成立的充要条件，当然就不必另行证明所求出的条件的充分性了。

例 14-2-11　正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的各棱长都为 1；P∈A_1C_1，且$A_1P=\frac{1}{3}PC_1$**；**Q**为**B_1C_1**的中点。那么，在**AC**上能否确定一点**M**，使得过 P，Q，M 的平面把该三棱柱分成等体积的两个几何体？**



解　若 M 存在。设过 P，Q，M 的截面为四边形 PQNM。

因为平面 PQC_1∥平面 MNC，又易证 PQ≠MN，且 MP，NQ，CC_1 延长后交于一点，故多面体 PQC_1-MNC 为棱台。

设 CM=x(x＜1)，可求得棱台 PQC_1-MNC 的上底面积 S_1，下底面积 S_2 分别为

$$S_1=\frac{3\sqrt{3}}{32}，S_2=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$$

所以
$$V_{PQC_1-MNC}=\frac{1}{3}h\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{32}+\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{32}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}x^2}\right)$$

又$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．由$V_{PQC_1-MNC}=\dfrac{1}{2}\cdot V_{ABC-A_1B_1C_1}$解得

$$x=\frac{3}{8}(\sqrt{13}-1)\quad(\text{负根已舍去})$$

因为 $x<1$，故满足条件的 M 点存在．

例 14-2-12　设$\{a_n\}$为正数等差数列，$\{b_n\}$为正数等比数列．问是否存在常数 a，使 $a_n-a_1=\log_a b_n-\log_a b_1$，对一切自然数 n 都成立？并证明你的结论．

解　设$\{a_n\}$的公差为 d，$\{b_n\}$的公比为 q，这里 $d\geq0$，$q>0$，d，q 都为常数．

∵　$a_n-a_1=(n-1)d$，$b_n=b_1q^{n-1}$

∴　$\log_a b_n-\log_a b_1=\log_a\dfrac{b_n}{b_1}=(n-1)\log_a q$

如果满足要求的常数 a 存在，则

$$(n-1)d=(n-1)\log_a q \qquad (*)$$

对任何自然数 n 都成立．

下面分情况讨论满足(*)的 a 是否存在：

当 n=1，$a>0$ 且 $a\neq1$ 时，$a_n-a_1=\log_a b_n-\log_a b_1$ 成立．

当 $n>1$，则(*)式变为

$$d=\log_a q$$

(i)当 d=0 且 q=1 时，a 存在，可取大于 0 不等于 1 的任何正数；

(ii)当 d=0，$q\neq1$ 或 $d\neq0$，q=1 时，a 不存在．

(iii)当$d\neq0$且$q\neq1$时，a存在，由$d=\log_a q$，可取$a=q^{\frac{1}{d}}$．

注　存在性问题中往往隐含着复杂的逻辑关系．这就要求我们根据不同的约束条件，将复杂的问题通过恰当的逻辑划分，使其成为相对简单的问题，从而判定各类情形下的相应结论．

例14-2-13　已知幂函数$f(x)=x^{\frac{3}{2}+k-\frac{1}{2}k^2}$$(k\in Z)$为偶函数，且在(0，+∞)上是增函数．

(1)求 f(x)的解析式；

(2)设 g(x)=f[f(x)]-(λ-2)f(x)+2-λ．问是否存在实数λ，使 g(x)在(-∞，

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$内是减函数，在$[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}，0]$内是增函数？若存在，请求出λ；若不存在，请说明理由．

解　(1)因为 f(x)在(0，+∞)上是增函数，所以

$$\frac{3}{2}+k-\frac{1}{2}k^2>0\Leftrightarrow k^2-2k-3<0\Leftrightarrow -1<k<3$$

但 $k\in Z$，故 k=0，1，2．

当$k=0$或2时，$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$不是偶函数，不符合题意．

当$k=1$时$f(x)=x^2$符合题意．所以所求函数解析式为

$f(x)=x^2$

(2)因为 $f[f(x)]=x^4$，所以

$g(x)=x^4-(\lambda-2)x^2+2-\lambda$

(i)若$g(x)$在$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$内为减函数，则任取$x_1 < x_2 \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$，有$g(x_1)-g(x_2) > 0$，于是

$$g(x_1)-g(x_2)=(x_1^4-x_2^4)-(\lambda-2)(x_1^2-x_2^2)$$
$$=(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2+2-\lambda)$$

由$x_1 < x_2 \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$得$x_1^2-x_2^2 > 0$．而

$$x_1^2+x_2^2+2-\lambda > \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2-\lambda=3-\lambda$$

故要使 $g(x_1)-g(x_2) > 0$，必须且只须 $3-\lambda \ge 0$，即$\lambda \le 3$．

(ii)若$g(x)$在$[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$内为增函数，类似地可得$\lambda \le 3$．

综合(i)，(ii)可知，当$\lambda=3$时，$g(x)$在$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$内是减函数，在$[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$内是增函数．

例 14-2-14　已知数列$\{a_n\}$满足条件

$(n-1)a_{n+1}=(n+1)(a_n-1)$，$a_2=6$

令　　$b_n=a_n+n$　$(n\in N)$

(1)写出数列$\{b_n\}$的前 4 项；

(2)求数列$\{b_n\}$的通项公式(写出推证过程)；

(3)是否存在非零常数p，q，使得数列$\{\frac{a_n}{pn+q}\}$成等差数列？若存在，求出 p，q 应满足的关系式；若不存在，说明理由．

解　(1)$b_1=2$，$b_2=8$，$b_3=18$，$b_4=32$

(2)猜想 $b_n=2n^2$．可用数学归纳法证明．这里从略．

(3)[法一]　由(2)知

$a_n=2n^2-n$

假设存在非零常数p，q，使$\{\frac{a_n}{pn+q}\}$成等差数列，设其公差为d．

令$c_n=\frac{a_n}{pn+q}=\frac{2n^2-n}{pn+q}$．则

$c_n=c_1+(n-1)d=dn+(c_1-d)$

所以 $\dfrac{2n^2-n}{pn+q}=dn+(c_1-d)$

$\Leftrightarrow 2n^2-n=dpn^2+[dq+p(c_1-d)]n+q(c_1-d)$

这是关于 n 的恒等多项式，故

$$\begin{cases} dp=2 & \text{(i)} \\ dq+p(c_1-d)=-1 & \text{(ii)} \\ q(c_1-d)=0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

由于 $q\neq0$，由(iii)得 $c_1-d=0$，将它代入(ii)得

$dq=-1$

(i)÷(iv)得

$$\frac{p}{q}=-2$$

所以，存在满足关系式 $p=-2q$ 的非零常数 p，q，使 $\{\dfrac{a_n}{pn+q}\}$ 成等差数列．

[法二] 假设存在非零常数 p，q，使数列 $\{\dfrac{a_n}{pn+q}\}$ 成等差数列，则

$$2\cdot\frac{a_2}{2p+q}=\frac{a_1}{p+q}+\frac{a_3}{3p+q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{2p+q}=\frac{1}{p+q}+\frac{15}{3p+q}\Leftrightarrow pq+2q^2=0$$

因为 $q\neq0$，由上式得 $p+2q=0$．

令 $p=-2q\neq0$，则

$$\frac{a_n}{pn+q}=\frac{2n^2-n}{-2qn+q}=\frac{n}{-q}\quad(q\neq0)$$

由此式可知 $\{\dfrac{a_n}{pn+q}\}$ 成等差数列(公差为 $-\dfrac{1}{q}$)．

所以，存在满足关系式 $p=-2q$ 的非零常数 p，q，使 $\{\dfrac{a_n}{pn+q}\}$ 成等差数列．

注 本例(1)，(2)问为归纳性问题，(3)问为存在性问题．

例 14-2-15 是否存在同时满足下列条件的抛物线？若存在，求出其方程；若不存在，试证明之．

(i)准线是 y 轴；

(ii)顶点在 x 轴上；

(iii)点 A(3，0)到此抛物线上的动点 P 的距离的最小值为 2．

解 设存在这样的抛物线，且顶点为(a，0)．

若 $a<0$，则抛物线开口向左．这时 $|AP|\geq3-a>2$，与已知 $|AP|_{min}=2$ 矛盾．故 $a<0$ 不可能，必有 $a>0$．这时，焦点到准线的距离 $p=2a$，故抛物线方程为 $y^2=2p(x-a)$，即

$y^2=4a(x-a)$

设 P 的坐标为(x，y)，则

$|AP|^2=(x-3)^2+y^2=(x-3)^2+4a(x-a)$

$=x^2+4ax-6x+9-4a^2$

$=[x-(3-2a)]^2+9-4a^2-(3-2a)^2$

$=[x-(3-2a)]^2+12a-8a^2$

若 3-2a≥a，即 a≤1，则

$|AP|^2_{min}=12a-8a^2=4 \Leftrightarrow 2a^2-3a+1=0$

$\Leftrightarrow a=1$或$\frac{1}{2}$

若$3-2a$＜a，即a＞1．记$f(x)=|AP|^2_{min}$，则

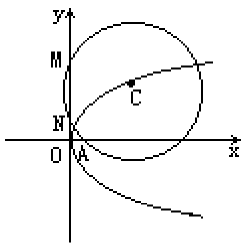
$|AP|^2_{min}=f(a)=4 \Leftrightarrow a^2-6a+9=4$

$\Leftrightarrow a=1$(舍去)或$a=5$

综合上述，可知存在同时满足题设三个条件的抛物线，且有三条，其方程分别是：

$y^2=4(x-1)$，$y^2=2(x-\frac{1}{2})$，$y^2=20(x-5)$

例 14-2-16　已知⊙C 过定点 A(p，0)，其中 p＞0，圆心 C 在抛物线 $y^2=2px$ 上运动，MN 为⊙C 在 y 轴上所截得的弦．



(1)试问|MN|是否随圆心 C 的运动而变化？证明你的结论．

(2)当|OA|恰为|OM|与|ON|的等差中项时，试判定抛物线的准线和⊙C 的位置关系，并说明理由．

解　[法一]　(1)设点 C 的坐标为(x_0，y_0)，则

$$y_0^2=2px_0 \qquad \text{(i)}$$

所以⊙C 的方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x_0-p)^2+y_0^2$$

即　$$x^2-2x_0x+y^2-2y_0y+(2px_0-p^2)=0 \qquad \text{(ii)}$$

把(i)代入(ii)得

$$x^2-2x_0x+y^2-2y_0y+(y_0^2-p^2)=0$$

令 x=0 得

$$y^2-2y_0y+(y_0^2-p^2)=0 \qquad \text{(iii)}$$

设方程(iii)的两根为 y_1，y_2，则 y_1，y_2 分别为点 M，N 的纵坐标，所以

$$|MN|=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=\sqrt{(2y_0)^2-4(y_0^2-p^2)}=2p(\text{定值})$$

所以当 C 点在抛物线 $y^2=2px$ 上运动时，|MN|不变．

(2)依题意得

$$|OM|+|ON|=2|OA|=2p$$

因为|OM|+|ON|≥|MN|=2p，当且仅当点 O 落在线段 MN(包括端点)上时取等号，这时 M，N 两点落在原点 O 的两侧或 M，N 的其中一点与 O 点重合．故$y_1 \cdot y_2 \leq 0$，即$y_0^2-p^2\leq 0$．将$y_0^2=2px_0$代入得$2px_0\leq p^2$，所以

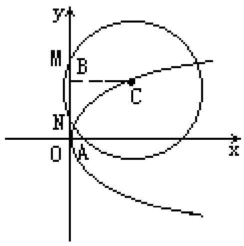
$$0\leq x_0\leq \frac{p}{2}$$

因为抛物线焦点为$F(\frac{p}{2}，0)$，所以

$$|CF|=\sqrt{(\frac{p}{2}-x_0)^2+y_0^2}<\sqrt{(p-x_0)^2+y_0^2}=|CA|$$

而|CF|是圆心 C 到准线的距离，|CA|是⊙C 的半径，所以，抛物线的准线与⊙C 相交．

［法二］ (1)设 C 点坐标为$(x_0，y_0)$．取 MN 中点 B，连结 CB，则 CB⊥MN，故$|CB|=x_0$．于是



$$|MN|=2|MB|=2\sqrt{|CM|^2-|CB|^2}$$

$$=2\sqrt{|CA|^2-|CB|^2}$$

$$=2\sqrt{(x_0-p)^2+y_0^2-x_0^2}$$

$$=2\sqrt{y_0^2-2px_0+p^2}=2p(\text{定值})$$

所以当 C 点在抛物线 $y^2=2px$ 上运动时，|MN|不变．

(2)由解法一知，原点 O 落在线段 MN(包括它的端点) 上，所以$|OB|\leq\frac{1}{2}|MN|=p$，故$y_0^2\leq p^2$．将$y_0^2=2px_0$代入，得$2px_0\leq p^2$，所以

$$0\leq x_0\leq \frac{p}{2}$$

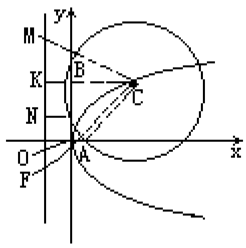
(以下同解法一．)

［法三］ (1)设 F 为抛物线 $y^2=2px$ 的焦点．作 CB⊥MN 于 B，交抛物线的准线于 K，则 B 为 MN 中点．

以 F 为极点，射线 FA 为极轴建立坐标系，则抛物线 $y^2=2px$ 的极坐标方程为

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$$

设圆心 C 的极坐标为(ρ，θ)，($\rho>0$，$0<\theta<2\pi$)．



由勾股定理知，

$$|MB|^2=|MC|^2-|BC|^2$$

而 $$|BC|=|KC|-\frac{p}{2}=|FC|-\frac{p}{2}$$

$$=\rho-\frac{p}{2}$$

$$|MC|=|AC|$$

又在△FCA 中，

$$|AC|^2=|FC|^2+|FA|^2-2|FC|\cdot|FA|\cdot\cos\theta$$

$$=\rho^2+(\frac{p}{2})^2-\rho p\cos\theta$$

将(i)，(iii)，(iv)代入(i)得

$$|MB|^2=[\rho^2+(\frac{p}{2})^2-\rho p\cos\theta]-(\rho-\frac{p}{2})^2$$

$$=\rho p(1-\cos\theta)=p^2$$

所以 $|MN|=2|MB|=2p$(定值)

(2)因为$|OM|+|ON|=2|OA|$，又 $OB=\rho\sin\theta$，所以

$$OM=\rho\sin\theta\pm p,\ ON=\rho\sin\theta\mp p$$

所以 $|\rho\sin\theta+p|+|\rho\sin\theta-p|=2p$

所以 $$|\frac{p\sin\theta}{1-\cos\theta}+p|+|\frac{p\sin\theta}{1-\cos\theta}-p|=2p$$

所以 $$|\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}+1|+|\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}-1|=2$$

当$\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\geq 1$时，上式化简为$\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}=1$，得$\theta=\frac{\pi}{2}$；

当$-1<\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}<1$时，上式为恒等式，得$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$；

当$\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\leq -1$时，上式为$\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}=-1$，得$\theta=\frac{3\pi}{2}$．

综上所述知$\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$，故$\cos\theta\leq 0$．

另一方面，

$$|AC|^2-|CK|^2=|AC|^2-|CF|^2=\frac{p^2}{4}-\rho p\cos\theta$$

$$=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2\cos\theta}{1-\cos\theta}=\frac{p^2(1-5\cos\theta)}{4(1-\cos\theta)}>0$$

所以|AC|>|CK|，即此时⊙C 半径大于 C 到抛物线的准线的距离，故抛物线的准线与⊙C 相交．

习题

14-2-10　设数列$\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\}$是以1为首项，公差为1的等差数列，是否存在等差数列$\{b_n\}$，使

$$a_n=b_1C_n^1+b_2C_n^2+b_3C_n^3+\cdots+b_nC_n^n$$

对一切自然数 n 成立？

14-2-11　函数$y=\begin{cases}x^2, & x\in(-\infty, 0]\\ 1-x, & x\in(0, +\infty)\end{cases}$是否存在反函数？若存在，求出它的反函数；若不存在，说明理由．

14-2-12　除 x=2 外，方程 $3^x+4^x=5^x$ 是否存在其他实根？

14-2-13　设

$A=\{(x, y)|x=m, y=3m+1, m\in N\}$

$B=\{(x, y)|x=n, y=a(n^2-n+1), n\in N\}$

是否存在非0整数a，使$A\cap B\neq\varnothing$？证明你的结论．

14-2-14　命题“设 A，B 是坐标平面上的两个点集，$C=\{(x, y)|x^2+y^2\leq r^2\}$，若对于任何$r\in R^+$，都有$C\cup A\subseteq C\cup B$，则有$A\subseteq B$”是否正确？若正确给予证明，否则举出反例．

14-2-15　是否存在定义在自然数集 N 上的函数 f(x)，使得 $f(n)>0(n\in N)$，且

$f(n_1+n_2)=f(n_1)f(n_2)$，$f(2)=4$

若存在，求出 f(x)的解析式；若不存在，说明理由．

14-2-16　设 x，y 都为实数，集合

$A=\{(x, y)|y^2-x-1=0\}$

$B=\{(x, y)|16x^2+8x-2y+5=0\}$

$C=\{(x, y)|y=kx+b\}$

问是否存在自然数k，b，使$(A\cup B)\cap C=\varnothing$？

14-2-17　若两个三角形的三边分别为 a，b，c，及 lga，lgb，lgc，且 a，b，c 两两不等．试判断这两个三角形能否相似？

14-2-18　是否存在实数 a，使得

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+an}{4(n+1)(n+2)}$$

对一切自然数 n 都成立，并证明你的结论．

14-2-19　给定自然数 a≥2，集合

$A=\{y|y=a^x, x\in N\}$

$B=\{y|y=(a+1)x+b, x\in N\}$

在区间$[1,a]$上是否存在b，使$C=A\cap B\neq\emptyset$．如果存在，试求b的一切可能的值及相应的集合C；如果不存在，试说明理由．

14-2-20　是否存在实数 a，b，c，使得 $a_n=an^2+bn+c$ 满足 $a_1=1$，并且$3S_n=(n+2)a_n$对于任意$n\in N$成立(其中$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$)，并证明你的结论．

14-2-21　已知$f(x)\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=(a>0, a\neq1)$．

(1)证明：$f(\alpha+\beta)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{1+f(\alpha)f(\beta)}$；

(2)如果$\{x_n\}$是等差数列，公差 d 不为 0．问$\{f(x_n)\}$是否是等比数列？为什么？

14-2-22　满足$z+\dfrac{5}{z}\in R$，且$\arg(z+3)=\dfrac{3\pi}{4}$的虚数$z$是否存在？若存在，求出虚数$z$；若不存在，说明理由．

14-2-23　设 f 是实数集到复数集的一个映射，对于任一个 $t\in R$，都有

$$f(t)=t+(4n^2+tn+14)i\quad(n\in Z)$$

问是否存在实数t，使得复数$f(t)\in A$？其中$A=\{z||z+2i|\leq8\sqrt{3}, z\in C\}$

14-2-24　设 $0<\theta<2\pi$，复数 $z=1-\cos\theta+i\sin\theta$，$u=a^2+ai$ 且 zu 是纯虚数(a 是实数)．问$\omega=z^2+u^2+2zu$ 可能是正实数吗？为什么？

14-2-25　已知复数 z 和ω满足以下两个条件：(i)$z+\omega+3=0$，(ii)$|z|$，2，$|\omega|$成等差数列．问 $\cos(\arg z-\arg\omega)$是否存在最大值？如果存在，把它求出来．

14-2-26　设z_1，z_2，z_3为两两不等的三个复数．若$z_1^2=mz_2z_3$，$z_2^2=mz_1z_3$，是否存在 $m\in R$，使 z_1，z_2，z_3 在复平面内所对应的点为正三角形的三个顶点？

14-2-27　是否存在常数α，β$(0<\alpha<\beta<\pi)$，使得函数

$$f(x)=\sin^2x+\sin^2(x+\alpha)+\sin^2(x+\beta)$$

为常数函数？

14-2-28　已知 a 为常数，$x\in R$，且

$$f(x+a)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$$

问 f(x)是否为周期函数？若是则求出它的一个周期；若不是，说明理由．

14-2-29　函数 f(x)的定义域为 R，并且对于任意的 $a, b\in R$，有

$$f(a+b)+f(a-b)=2f(a)f(b)$$

且存在$c>0$，使$f(\dfrac{c}{2})=0$．试问函数$f(x)$是不是周期函数；如果是，找出它的一个周期；如不是，说明理由．

14-2-30　是否存在实数 x，y，使得

$$\sin x=\cos y \text{ 和 } \arcsin x=\arccos y$$

能同时成立？证明你的结论．

14-2-31　已知函数

$$f(x)=3\sin x+2\cos x+1$$

是否存在常数 a，b，c 使得对任意实数 x，有

$$af(x)+bf(x-c)=1$$

恒成立，并说明理由．

14-2-32　设函数 f(x)是奇函数，对任意 x，y∈R，都有 f(x+y)=f(x)+f(y)，且 x＞0，f(x)＜0，f(1)=-2．f(x)在 x∈[-3，3]上有最值吗？若有，求出最值；若没有，说明理由．

14-2-33　将 120 个大小相同的球，紧紧地堆叠在一起．问是否可以堆成一个正三棱锥的形状？若能，给出堆叠方案；不能，说明理由．

14-2-34　底面是正三角形、侧面是等腰三角形的棱锥一定是正棱锥吗？若是，给出证明；若不是，请举出反例，并画出示意图．

14-2-35　“一个二面角的两个半平面分别垂直于另一个二面角的两个半平面，则这两个二面角相等或互补．”这个命题是真命题吗？若是，证明之；若不是，举出反例．

14-2-36　过锐角△ABC 的重心 H 作平面 ABC 的垂线，P 为垂线上一点，∠APB=90°，那么△ABC 和△APC 的形状如何？又若∠APB≠90°，PA 与 BC 是否垂直？为什么？

14-2-37　在三棱锥 P-ABC 中，底面△ABC 是锐角三角形；PA⊥平面 ABC，A 在平面 PBC 内的射影是 H．问点 H 能否成为△PBC 的垂心？

14-2-38　下底面在同一平面内的一个圆柱与一个圆锥有公共的内切球．它们的体积能否相等？

14-2-39　在棱长为 1 的正方体内能放置两个棱长为 1 的正四面体吗？证明你的结论．

14-2-40　给定双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$．过点 B(1，1)能否作直线 m，使 m 与已知双曲线交于 Q_1，Q_2 两点，且 B 是线段 Q_1Q_2 的中点？这样的直线 m 如果存在，求出它的方程；如果不存在，说明理由．

14-2-41　抛物线 $y^2=4x$ 的焦点在直线 y=x-1 上滑动，对称轴作平行移

动．试问能否滑到使抛物线截直线$y=\frac{1}{2}x+4$所得的弦长与截 y 轴所得弦长相等？若能，求出此时的抛物线方程；若不能，说明理由．

14-2-42　已知直线 ax-y=1 与曲线 $x^2-2y^2=1$ 相交于 P，Q 两点．

(1)是否存在整数 a，使得$|PQ|=2\sqrt{1+a^2}$；

(2)是否存在实数 a，使得以 PQ 为直径的圆经过原点 O？若存在，试求出 a 值；若不存在，请说明理由．

14-2-43　是否存在圆锥曲线 C，同时满足下列两个条件：(1)以点 F(-1，0)为焦点，对应的准线为直线 x=-4；(2)与抛物线 $x=y^2+2$ 有且只有一个公共点．若存在，求出曲线 C 的方程；若不存在，说明理由．

14-2-44　求以直线$x+2=0$为准线，离心率为$\frac{1}{2}$，且恒过定点M(1，0)的椭圆长半轴 a 的取值范围．判定是否存在这样的 a，使椭圆的中心在原点．如果存在，写出椭圆的方程；如果不存在，请说明理由．

14-2-45　过抛物线$y^2=2\sqrt{3}x$的焦点F，引一条倾斜角为60°的直线 l 与抛物线交于 A，B 两点．试问：在抛物线上是否存在点 C，使△ABC 是一个以 AB 为斜边的直角三角形？若存在，求出 C 点的坐标；若不存在，说明理由．

14-2-46　已知抛物线 C：$y^2=4x$ 和定点 R(0，-2)．是否存在过定点 R 的直线 l，交抛物线 C 于 P，Q 两点，使|PQ|是|RP|与|RQ|的等比中项？若存在，求其方程；若不存在，说明理由．

14-2-47　过点A(2，2)的动直线l与双曲线$x^2-\frac{y^2}{9}=1$交于两点P_1及P_2．

(1)求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程，并说明它表示什么曲线？

(2)设上述曲线的左、右焦点分别为 F_1，F_2，左准线为 l_1．能否在曲线上求一点 Q，使$|QF_1|$是 Q 到 l_1 的距离 d 与$|QF_2|$的等比中项？若能，则求出 Q 点的坐标；若不能，则说明理由．

14-2-48　抛物线 $y^2=4ax(a>0)$的焦点为 A，以 B(a+4，0)为圆心，以|AB|为半径在 x 轴上方的半圆与抛物线交于 M，N 不同两点，P 是 MN 的中点．

(1)求|AM|+|AN|的值；

(2)是否存在这样的 a，使|AM|，|AP|，|AN|成等差数列．

14-2-49　已知数列$\{x_n\}$中，

$$x_1=1,\ x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}\quad (n\in N)$$

(1)求证：$0<x_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$；

(2)是否存在正整数 M，使对一切自然数 n，总有 $x_M\geq x_n$？

14-2-50　设圆 C 的方程为

$$x^2+y^2-2x\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)-2y\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2=0$$

式中θ是实数，且 0＜θ＜π．

(1)当θ在区间(0，π)内变动时，求圆 C 的圆心的轨迹方程；

(2)又设θ_1，θ_2，θ_3都是区间(0，π)内的实数，且θ_1，θ_2，θ_3成为公差不为 0 的等差数列．当θ依次取θ_1，θ_2，θ_3时，所对应的圆 C 的半径依次为 r_1，r_2，r_3．试问：r_1，r_2，r_3是否为等比数列？为什么？

3．分析型问题

例题

例 14-2-17　已知二次项系数为负值的二次函烽 f(x)，对于任何 x∈R，f(2-x)=f(2+x)总成立．试问：$f(1-2x^2)$与 $f(1+2x-x^2)$满足什么关系时，才有-2＜x＜0．

分析　由于结论是关于 x 的不等式，故猜想 $f(1-2x^2)$与 $f(1+2x-x^2)$应满足不等关系．由二次函数 f(x)的二次项系数为负，其对应的抛物线开口向下．又由 f(2-x)=f(2+x)知，抛物线对称轴为 x=2．故在(-∞，2]内函数 f(x)单调递增，在(2，+∞)内函数 f(x)单调递减．又 $1-2x^2\le 1$，$1+2x-x^2=-(x-1)^2+2\le 2$．所以对于任意一个实数 x，都有

$$1-2x^2\in(-\infty,\ 2],\ 1+2x-x^2\in(-\infty,\ 2]$$

在区间(-∞，2]内只有当 x=0 或 x=-2 时，

$$f(1-2x^2)=f(1+2x-x^2)$$

因此只需考虑两种情况，

$$f(1-2x^2)>f(1+2x-x^2)$$

与 $$f(1-2x^2)<f(1+2x-x^2)$$

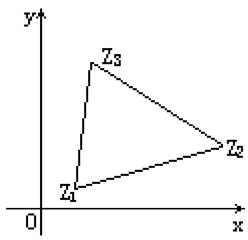
由 $f(1-2x^2)>f(1+2x-x^2)$得

$$1-2x^2>1+2x-x^2\Leftrightarrow x^2+2x<0$$

故只有 $f(1-2x^2)>f(1+2x-x^2)$时，才能-2＜x＜0．

解　(略)

例 14-2-18　三个不同的复数 z_1，z_2，z_3 在复平面上对应的三点组成正三角形的充要条件有哪些？(列举不少于 5 种)



分析　如图．z_1，z_2，z_3 三复数对应的三个点组成正三角形，则有

$$z_3-z_1=(z_2-z_1)(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_2-z_3=(z_1-z_3)(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

所以 $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}$，即

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 \qquad \text{(i)}$$

反过来，若 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$，则有

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}$$

两边取模得

$$|z_1-z_3|^2=|z_1-z_2||z_2-z_3|$$

同理，有

$$|z_1-z_2|^2=|z_1-z_3||z_2-z_3|$$

$$|z_2-z_3|^2=|z_1-z_3||z_1-z_2|$$

从而 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

即 z_1，z_2，z_3 在复平面上对应的三点组成正三角形.

因此，(i)是符合题意的条件之一.

进一步地探索还有：

$$\text{(ii)}z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3=0\quad (\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$\text{(iii)}(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_3-z_1)^2=0$$

$$\text{(iv)}\frac{1}{z_1-z_2}+\frac{1}{z_2-z_3}+\frac{1}{z_3-z_1}=0$$

$$\text{(v)}\frac{z_1-z_2}{(z_2-z_3)(z_3-z_1)}+\frac{z_2-z_3}{(z_3-z_1)(z_1-z_2)}+\frac{z_3-z_1}{(z_1-z_2)(z_2-z_3)}=0$$

联想到平面几何中的结论：“若一个三角形的重心到三个顶点的距离相等，则这个三角形是一个等边三角形.”则有

(vi) $|z_1-z_0|=|z_2-z_0|=|z_3-z_0|$

(其中 $z_0=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$)

例14-2-19 要使函数 $f(x)=g(x)\frac{2^x+1}{2^x-1}$ 为奇函数，还需增加什么条件？

解 要使 f(-x)=-f(x)，只须

$$g(-x)\cdot\frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}=-g(x)\cdot\frac{2^x+1}{2^x-1}$$

即 g(-x)= g(x).所以还需增加条件是：g(x)是偶函数.

例14-2-20 “已知数列 $\{a_n\}$”满足 $a_1=\frac{5}{6}$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+(\frac{1}{2})^{n+1}$ $(n\geq 1)$，并且数列 $a_2-\frac{1}{2}a_1$，$a_3-\frac{1}{2}a_2$，…，$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$，…是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.求通项公式 a_n.”试找出命题中使结论成立的最少条件.

分析 此题暗示了命题中条件过剩，因此，寻找使命题结论成立的最少条件，实际是排除多余条件.

解 比较两个条件.由 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+(\frac{1}{2})^{n+1}(n\geq 1)$，得 $a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+(\frac{1}{2})^n$，所以

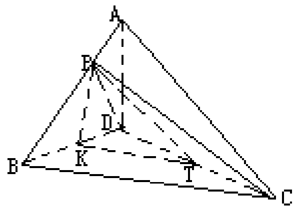
$$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{3}(a_n-\frac{1}{2}a_{n-1})$$

同样由$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{3}(a_n-\frac{1}{2}a_{n-1})$可推得

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+(\frac{1}{2})^{n+1}(n\geq 1)$$

故原命题中两个条件等价，保留其中之一即可．

例 14-2-21　两等腰直角三角形△ABD，△CBD 中，∠ADB=∠CBD=90°，且它们所在的平面互相垂直．在 AB 上取一点 P，当 P 在什么位置时，△PCD 所在平面与△BCD 所在平面构成 60°的角？



解　如右图．在△ADB 中，过 P 作 PK⊥BD．由平面 ADB⊥平面 CBD，则 PK⊥平面 CBD.在△CBD 中,作 KT⊥CD.连 PT,则∠PTK 为二面角 A-BD-C 的平面角．设 AD=1，并设满足要求的 PA=x，则

$$KD=\frac{\sqrt{2}}{2}x，PK=1-\frac{\sqrt{2}}{2}x，KT=\frac{1}{2}x$$

在$Rt\triangle PKT$中，由$tg60°=\frac{PK}{KT}$可得，$x=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$．

因此，当$PA=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$时，平面PCD与平面BCD构成60°的角．

例 14-2-22　已知直线 l 过定点(3，0)，倾角为α，试求α的值，使得抛物线 $y=x^2$ 的所有弦都不能被直线 l 所垂直平分．

解　欲求适合这种否定式结论的条件，可以先找出与之相应的肯定结论所需的条件．其“补集”即为所求．

当α=0，或α=90°时，曲线 C 上任一弦均不能被 l 所平分．

当α≠0，且α≠90°时，设 l 的方程为

$y=k(x-3)$　$(k=tg\alpha)$

按肯定式的结论，则被 l 垂直平分的弦 BC 所在直线的方程为

$$y=-\frac{1}{k}x+m$$

由方程组$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x+m\\ y=x^2\end{cases}$　可得

$kx^2+x-km=0$

该关于 x 的一元二次方程应有两个不等实根，则

$\triangle=1+4k^2m>0$

令 B，C 的坐标分别为 $B(x_1，y_1)$，$C(x_2，y_2)$，BC 的中点为 $M(x_0，y_0)$，故

$$x_1+x_2=-\frac{1}{k}，\ x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{1}{2k}$$

又$y_1+y_2=-\frac{1}{k}(x_1+x_2)+2m=\frac{1}{k^2}+2m$，所以

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{2k^2}+m$$

即点M的坐标为$(-\frac{1}{2k}，\ \frac{1}{2k^2}+m)$，点M应在l上，故有

$$\frac{1}{2k^2}+m=k(-\frac{1}{2k^2}-3)\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2k^2}-3k-\frac{1}{2} \qquad \text{(ii)}$$

将(ii)代入(i)可得$12k^3+2k^2+1<0$，即

$$(2k+1)(6k^2-2k+1)<0$$

但$6k^2-2k+1>0$，所以$2k+1<0$，即$k<-\frac{1}{2}$.

故适合原题结论的条件应是$k\geq -\frac{1}{2}$(包括k不存在)，即l的倾角范围应是

$$0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}\text{或}\pi-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\leq\alpha<\pi$$

习题

14-2-51　m为何实数时，方程

$$x^2+(m-2)x+5-m=0$$

的两个根都大于2？

14-2-52　已知模相等的两个复数

$$z_1=2-\sqrt{3}a+ai\text{与}z_2=\sqrt{3}b-1+(\sqrt{3}-b)i$$

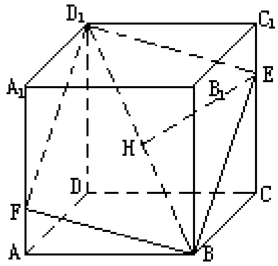
问实数a，b取什么值时，才能满足$\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{\pi}{2}$？

14-2-53　设x，y，z∈R，$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$．问变量x，y，z满足什么条件时函数f(x，y，z)的最小值等于$\frac{1}{3}$？

14-2-54　方程$x^2-4x+\frac{1}{m}=0$的两个正数解为α，β，它们满足不等式$|\lg\alpha-\lg\beta|\leq 1$，求实数m的范围．

14-2-55　已知α为非等边三角形的最小角，问m为何值时，式子$\cos\alpha=\frac{m+1}{m-1}$成立？

14-2-56　如右图．过单位正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的一条对角线BD_1，作截面BED_1F，问如何作才能使截面面积最小？



14-2-57　由一点 S 引不共面的三条射线 SA，SB，SC．设∠ASB=θ_1，∠BSC=θ_2，∠CSA=θ，其中θ_1，θ_2，θ均为锐角．试求出平面 ASB⊥平面 BSC 的充要条件(用θ_1，θ_2，θ的关系式表示)．

14-2-58　设$\alpha\cap\beta=EF$，AB⊥α于B，CD⊥α于D．由此是否能推出 BD⊥EF？若不能，须如何改变条件？

14-2-59　用平行于四面体一组对棱的平面去截此四面体，求截面积最大时截面的位置．

14-2-60　数列$\{a_n\}$中，$a_1=a$，$a_2=b(a\neq b)$，并且$a_n\sin\theta+a_{n+1}\cos\theta=1$．欲使$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=0$，θ必须满足什么条件？

14-2-61　k 为什么实数时，关于 x 的方程

$$x^2-(k+2i)x+2+ki=0$$

有实数解？

14-2-62　已知 tgα=a，tgβ=b，tgγ=c，其中α，β，γ都是锐角．问α+β+γ满足什么条件时，ab+bc+ca＜1？

14-2-63　把椭圆$(x-1)^2+\dfrac{(y-1)^2}{2}=1$绕它的中心旋转90°后作左右平移．如何平移能使椭圆被直线$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$截得的弦长为$\sqrt{3}$．

(三)应用性问题

提要

所谓应用性问题是指问题有实际背景或问题有实际意义的数学问题.

一般说来，解决应用问题可分两步. 第一步，先分析问题，抓住实际问题中的数量关系，并用数学语言表述，将其转化成一般数学问题；第二步，利用所学知识和方法解决这个数学问题. 其中的关键在于如何将实际问题数学化，也就是说如何等价转化成一个数学问题. 通常把这种“等价转化”的过程称为建立数学模型.

就应用性问题的来源而言，可分为生活应用性问题、生产应用性问题和科技应用性问题. 建立数学模型时，要善于联想与题意有关的数学知识和物理、化学、生物、地理等其他学科知识以及日常生活经验.

就应用性问题的数学模型而言，按中常数学内容可分为代数应用问题，三角应用问题，立体几何应用问题和解析几何应用问题. 其中代数应用问题又可分为函数模型、不等式(组)模型、数列模型等. 解应用题就是要将这些基础知识(如前述函数、不等式、数列)融合在解题过程中. 这就要求解题者不仅懂得数学的概念，还要懂得这些概念的背景、形成过程以及应用场合.

1．代数应用题(函数、不等式、数列)

例题

例 14-3-1　某商人如果将进货单价为 8 元的商品按每件 10 元售出，每天可销售 50 件．现在他采用提高售出价，减少进货量的办法增加利润．已知这种商品每件提高 1 元，其销售量就要减少 5 件．问他将售出价每件定为多少元时，才能使每天所赚得的利润最大？并求出最大利润．

解　设每件提高 x 元，则每件所获利润为(2+x)元，每天销售量将减少到(50-5x)件，从而每天所获利润为

$$f(x)=(2+x)(50-5x)$$

现在我们来求这个二次函数在区间[0，10]内的最大值．

注意到 $f(x)=(2+x)(50-5x)$，当 $x=4$ 时，取得最大值 180，而 $x=4\in[0，10]$．所以每件售出价提高 4 元时利润最大，也即将售出价定义 14 元时，每天可赚得最大利润 180 元．

例 14-3-2　要建造一个容积为定值的无盖圆柱水池．

(1)问水池尺寸如何选取，才能使所用材料最省；

(2)若池底材料成本 30 元/米 ^{2}，池壁材料成本 20 元/米 ^{2}，问怎样的尺寸，使水池造价最低？

分析　第一问不区别池底和池壁的材料，所以可将用料最省转换为水池的全面积 S 最小．

解　(1)设底面半径为 r 米，高为 h 米，根据题意

$$V=\pi r^2h \quad (V\text{为定值})$$

所以 $r^2h=\dfrac{V}{\pi}$(定值)

另一方面，

$$S_{\text{全面积}}=\pi r^2+2\pi rh=\pi(r^2+2rh)=\pi(r^2+rh+rh)$$

$$\geq 3\pi\sqrt[3]{r^2\cdot rh\cdot rh}=3\pi\sqrt[3]{(r^2h)^2}=3\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^2}$$

当且仅当 $r^2=rh$，即 $r=h$ 时，$S_{\text{最小值}}=3\sqrt[3]{\pi V^2}$．

答：当水池底半径与池高相等，即 $r=h=\dfrac{1}{\pi}\sqrt[3]{\pi V^2}$，用料最省．

(2)设水池造价为 y 元，根据题意，有

$$y=30\pi r^2+20\times 2\pi rh=10\pi(3r^2+4rh)$$

$$=10\pi(3r^2+2rh+2rh)\geq 30\pi\sqrt[3]{3r^2\cdot 2rh\cdot 2rh}$$

$$=30\pi\sqrt[3]{12(r^2h)^2}$$

当且仅当 $3r^2=2rh$ 时，即 $\dfrac{r}{h}=\dfrac{2}{3}$ 时，$y_{\min}=30\sqrt[3]{12\pi V^2}$．

答：池底半径 $r=\dfrac{1}{3\pi}\sqrt[3]{18\pi^2V}$，$h=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt[3]{18\pi^2V}$，建造成本最低．

注　在实际生活中，有关用料最省、造价最低、利润最大、容积(面积)最大等问题，往往可以通过建立函数模型，转化为求函数最值的问题．

例 14-3-3　某市 1996 年底人口为 20 万，人均住房面积 8㎡，计划 2000 年底人均住房面积达到 10㎡．如果该市将每年人口平均增长率控制在 1%，那么要实现上述计划，这个城市每年要平均新增住房面积多少万㎡？(结果以万㎡为单位，保留两位小数)．

解　设每年平均新增住房面积 d 万㎡．

由题意，从 1996 年底起，这个城市每年底的住房面积组成一个以 160 万为首项，d 为公差的等差数列；每年底的人口组成一个以 20 万为首项，(1+1%)为公比的等比数列．2000 年底对应的项数 n=5，于是得

$$20\times(1+1\%)^4\times10=160+4d$$

$$\Leftrightarrow 208.120802=160+4d$$

$$\Leftrightarrow d\approx12.03(\text{万 }m^2)$$

答：为实现 2000 年底人均住房面积达 10㎡的计划，每年要平均新增住房面积 12.03 万 ㎡．

注　用数列知识来解有关经济生活中，诸如增长率、降低率、利率(复利)等问题，是数学应用题的典型范例．解题的关键是在正确理解有关概念的基础上，分清是等差数列问题，还是等比数列问题，是求某一项还是求和，以及怎样确定首项和项数．

例 14-3-4　某地现有耕地 10000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%，人均粮食占有量比现在提高 10%．如果人口年增长率为 1%，那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷(精确到 1 公顷)？

解　设耕地平均每年至多只能减少 x 公顷，又设该地区现有人口为 p 人，粮食单产为 m 吨/公顷．

依题意得不等式

$$\frac{m\times(1+22\%)\times(10^4-10x)}{p\times(1+1\%)^{10}}\geq\frac{m\times10^4}{p}\times(1+10\%)$$

解之得

$$x\leq10^3\times[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}]$$

$$=10^3\times[1-\frac{1.1}{1.22}\times(1+C_{10}^1\times0.01+C_{10}^2\times0.01+\cdots)]$$

$$\approx10^3\times[1-\frac{1.1}{1.22}\times1.1045]\approx4.1$$

答：按规划该地区耕地平均每年至多只能减少 4 公顷．

注　把实际问题存在的数量关系用方程或不等式表示出来，再解这个方程或不等式，是中学数学与实际相联系的重要窗口．在解由应用问题列出的不等式和方程时，一般都要运用近似计算的方法．这里用二项式定理进行近似计算的方法值得注意，有时也会用到对数计算．

例 14-3-5　某渔场，由于改进饲养技术，预计鱼产量第一年的增长率为 200%，以后每年的增长率是前一年的一半．设原来的产量为 a．

(1)写出改进饲养技术后的第一年、第二年、第三年的产量，并写出第 n 年与第(n-1)年(n≥2，n∈N)的产量之间的关系式；

(2)由于存在池塘老化及环境污染等因素，估计每年将损失年产量的

10%，照这样下去，以后每年的产量是否始终是逐年提高的？若是，请给予证明；若不是，请说明从第几年起，产量将不如上一年．

解　(1)设改进饲养技术后第 n 年的产量为 a_n(n=1，2，3，…)，则

$$a_1=a(1+200\%)=3a$$

$$a_2=a(1+200\%)(1+100\%)=6a$$

$$a_3=a_2(1+50\%)=6a\times\frac{3}{2}=9a$$

由题意得，第 n 年与第(n-1)年的产量间的关系式

$$a_n=a_{n-1}\cdot(1+\frac{1}{2^{n-2}})\quad(n\geq 2，n\in N)$$

(2)若考虑损失因素，则第 n 年的产量与第(n-1)年的产量之间的关系是

$$a_n=a_{n-1}(1+\frac{1}{2^{n-2}})(1-10\%)=0.9a_{n-1}(1+\frac{1}{2^{n-2}})\quad(n\geq 2)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_n}{a_{n-1}}=0.9(1+\frac{1}{2^{n-2}})$$

令$a_n\leq a_{n-1}$，则

$$1+\frac{1}{2^{n-2}}\leq\frac{10}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{2^{n-2}}\leq\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-2}\geq 9\Leftrightarrow n-2\geq\frac{2\lg 3}{\lg 2}\Leftrightarrow n\geq 5.17\Leftrightarrow n\geq 16$$

所以，以后每年产量不是始终逐年提高，从第 6 年起，产量将不如上一年．

例 14-3-6　学校餐厅每天供应 1000 名学生用餐，每星期一有两样配餐 A，B 可供选择(每人选一份配餐)．调查资料表明：凡是在星期一选 A 配餐的，下星期一会有 20%改选 B；而选 B 的，下星期一则有 30%改选 A．问：学校餐厅如何安排 A，B 配餐的数量，使得学生满意？

解　设 A_n，B_n 分别表示在第 n 个星期一分别选 A 或 B 的人数．因第 n 个星期有 A_n 个人选 A，则其中在第 n+1 个星期一选 A 的只有 80%

即$\frac{4}{5}A_n$，而选B的B_n中有30%(即$\frac{3}{10}B_n$)选A，从而第$n+1$个星期一选

A的共有$\frac{4}{5}A_n+\frac{3}{10}B_n$，即

$$A_{n+1}=\frac{4}{5}A_n+\frac{3}{10}B_n$$

注意到 $A_n+B_n=1000$，代入上式得

$$A_{n+1}=\frac{1}{2}A_n+300$$

因此，第 n 星期一选 A 餐的人数为前一星期一选 A 餐人数的一半加 300，余下的选 B 餐，按此方式配餐可使学生满意．

例 14-3-7　一轮船航海时燃料费与航速之立方成正比．已知当航速为每小时 a 海里时，每小时燃料费为 b 元；此外，该轮船每小时其它经

费为 c 元(与航速无关)．问航行速度如何才能使航行 l 海里的总费用最省．

解　设航速为每小时 x 海里时，燃料费为每小时 y 元，则

$y=kx^3$　(k 为定比值)．

当 $x=a$ 时，$y=b$，故 $k=\frac{b}{a^3}$．于是轮船航行 l 海里的总费用是

$$F=\frac{l}{x}\left(\frac{bx^3}{a^3}+c\right)=3l\left[\frac{1}{3}\left(\frac{bx^2}{a^3}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{c}{2x}\right)\right]$$

$$\geq 3l\sqrt[3]{\frac{bx^2}{a^3}\cdot\frac{c}{2x}\cdot\frac{c}{2x}}=3l\sqrt[3]{\frac{bc^2}{4a^3}}=\frac{3l}{2a}\sqrt[3]{2bc^2}$$

当且仅当 $\frac{bx^2}{a^2}=\frac{c}{2x}$ 即 $x=a\sqrt[3]{\frac{c}{2b}}$ 时，上述不等式中的等号成立，此时 F 达到最小值．故当航速为 $a\sqrt[3]{\frac{c}{2b}}$ 时，航行 l 海里的总费用最省．

例 14-3-8　一家庭(父亲、母亲和孩子们)去某地旅游．甲旅行社说："如果父亲买全票一张，其余人可享受半票优待"；乙旅行社说："家庭集体旅行票价六折优惠"．这两家旅行社的原价是一样的，试就家庭里的孩子数，为了家庭选择旅行社进行决策．

解　设该家庭有 x 个小孩，甲、乙两旅行社的原一张全票价为 a．该家庭收费总金额分别为 y_1 和 y_2，那么

$$y_1=a+\frac{1}{2}(x+1)a，\ y_2=\frac{6}{10}(x+2)a$$

若 $y_1\leq y_2$，即

$$a+\frac{1}{2}(x+1)a\leq\frac{6}{10}(x+2)a$$

$\Leftrightarrow x\geq 3$

故当 x＞3 时，即家庭小孩超过 3 个，则选择甲旅行社更优惠；当 x=3，即家庭有三个孩子，甲、乙两旅行社收费相等，任选一家即可；当 x＜3，即家庭孩子不足 3 人，则选择乙旅行社更优惠．

例 14-3-9　小王和小李既是同学，又是邻居．在每一个月里，他们总是相约到一家小铺去买若干次白糖．假设白糖的价格是变化的，而他们的购买方式又不一样，小王每一次总是买 1 公斤白糖，小李每一次只拿 1 元钱来买白糖，而不管买多少．试问这两种买糖的方式哪一种合算？

分析　所谓"合算"，单看谁买的糖多或单看谁花的钱少都不对，应当计算各人平均每公斤糖花多少钱，谁少谁合算．

解　假设小王、小李一共买了 n(n＞1)次糖，而各次白糖的单价分别为 a_1，$a_2\cdots$，a_n(a_i＞0)(元/公斤)．

小王每一次买 1 公斤白糖，共花去 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 元，买得 n 公斤白糖，因此平均每公斤白糖的价格为

$$\alpha=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

小李每一次只用 1 元钱买白糖，共花了 n 元，每次买得的白糖数分

别为 $\frac{1}{a_1}$，$\frac{1}{a_2}$，…，$\frac{1}{a_n}$ 公斤，平均每公斤白糖的价格为

$$\beta=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

问题转化为比较两个平均数α，β的大小．

当 n=1 时，α=β；

当 n=2 时，

$$\alpha=\frac{(a_1+a_2)^2}{2(a_1+a_2)}=\frac{a_1^2+a_2^2+2a_1a_2}{2(a_1+a_2)}$$

$$\geq\frac{2a_1a_2+2a_1a_2}{2(a_1+a_2)}=\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}=\beta$$

我们猜想：α≥β．下面给出证明．

作二次三项式

$$f(x)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)x^2+2nx+(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})$$

$$=(\sqrt{a_1}x+\frac{1}{\sqrt{a_1}})^2+(\sqrt{a_2}x+\frac{1}{\sqrt{a_2}})^2+\cdots+(\sqrt{a_n}x+\frac{1}{\sqrt{a_n}})^2$$

$$\geq 0$$

由于其首项系数为正，故得判别式非正，即

$$\Delta=4n^2-4(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})\leq 0$$

即 $$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

（当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号）

由此可知，除非价格稳定不变，小李的购糖方式总比小王的购糖方式合算．

注　本例既是应用题，也是探索题，在证明α≥β时，可以应用平均值不等式，也可运用数学归纳法．

例 14-3-10　某农科站原有一块长方形试验地．为扩大试验，计划增加一块周长和面积都分别是原试验地的周长和面积的 2 倍．试问：符合计划条件的长方形是否存在？如果存在，求出它的长和宽；如果不存在，请说明理由．

解　设原长方形试验地二邻边的长为 m，n．又设适合计划条件的长方形试验地的长和宽分别为 x，y(x≥y)，依题设，有

$$x+y=2(m+n),\ xy=2mn$$

于是，x，y 是关于 t 的二次方程

$$t^2-2(m+n)t+2mn=0 \qquad (i)$$

的两个实根．

我们来研究这个方程的判别式：

$$\Delta=4(m+n)^2-8mn=4(m^2+n^2)>0$$

又 $x+y=2(m+n)>0$，$xy=2mn>0$．故方程(*)确有二正实根，即符合计划要求的长方形存在．解方程(i)，得

$$x=m+n+\sqrt{m^2+n^2}，y=m+n-\sqrt{m^2+n^2}$$

注　本例也是应用与探索相结合的问题，其理论背景是一元二次方程的根与系数的关系．为了深化这道题的实际意义，读者可考虑：如果将原题中的“2倍”改为“$\frac{1}{2}$”，其结果将会怎样？[答：$n\geq(3+2\sqrt{2})m$ 或 $0<n\leq(3-2\sqrt{2})m$ 时，存在；$(3-2\sqrt{2})m<n<(3+2\sqrt{2})m$ 时，不存在]

习题

14-3-1　某厂生产某种产品，每天固定费用为 3000 元，每天的生产能力是 10000 件．若以每件 2 元的单价销售时，可全部卖掉．如果生产每件产品需要支出 0.8 元．问该厂每天至少要生产多少件产品，才不会亏损？

14-3-2　某厂生产某种产品的最大生产能力为 b 个单位，至少要生产 a 个单位，固定费用为 c．另外，每生产 1 个单位产品．变动费用增加 d．试求总成本函数．

14-3-3　某批发站批发一万只某种牌号的手表给零售商．目前该种手表订价为 70 元．若批发站每次多批发 3000 只该种手表，市场上该种手表的价格就相应的降低 3 元．现批发站最多只能批发 2 万只手表给零售商，最小销量为 1 万只．试求价格函数．

14-3-4　上题的条件改为：手表的价格为 70 元时，销售量为 10000 只；若手表价格每提高 3 元，需求量就减少 3000 只．求需求量函数．

14-3-5　某水泥厂生产水泥 1000 吨，每吨定价为 80 元．总销售在 800 吨以内，按原订价出售；超过 800 吨时，超过部分按 9 折出售．试写出销售总收入与总销售量的函数关系．

14-3-6　某产品最少年产量为 a 件，每件收益 200 元．当年产量在 500 件以内时，可以全部售出；当年产量超过 500 件时，经广告宣传后又可多售出 200 件，多售部分每件平均广告费为 20 元．试将本年的销售纯收益 y(即利润)表为年产量 x 的函数．

14-3-7　已知某种皮鞋的需求函数 Q=5000-10p(其中 p 为皮鞋价格)，总成本函数为 C(Q)=5000+3Q，求使总利润最大的价格及最大总利润．(单位：元)

14-3-8　将进货单价为 40 元的商品按 50 元一个售出时，能卖出 500 个，已知这种商品每个涨价 1 元，其销售额就减少 10 个．问为了赚得最大利润，售价应定为多少？

14-3-9　某商品在最近的 100 天内的价格 f(x)与时间 t 的函数关系是

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}t+22 & (0\leq t\leq 40，t\in N)\\ -\frac{1}{2}t+52 & (40<t\leq 100，t\in N)\end{cases}$$

销量 g(t)与时间 t 的函数关系是

$$g(t)=-\frac{1}{3}t+\frac{109}{3}(0\leq t\leq 100，t\in N)$$

求这种商品的日销售金额的最大值．

14-3-10　某商场以每台 2500 元的价格进了一批彩电．市场调查预测，若每台以 2700 元的定价售出，则可卖出 400 台；又根据市场经济信息的综合分析来认定，每台再将定价每提高 100 元，则销售量将减少 50 台．为取得最大利润，商场应将每台彩电的售价定为多少元，可获得最大利润？最大利润为多少？

14-3-11　20 个劳力种 50 亩地．可以种选蔬菜、棉花或水稻，种这些农作物每亩所需劳力和预计产值如下：

品种	每亩所需劳力	每亩预计产值
蔬菜	$\frac{1}{2}$	2200 元
棉花	$\frac{1}{3}$	1500 元
水稻	$\frac{1}{4}$	1200 元

能否经过适当安排(每亩地都种上农作物，每个劳力都有工作)，使农作物的预计产值最高？最多可达多少元？

14-3-12　一个人喝少量酒后，血液中酒精含量将速升 0.3㎎/㎖；在停止喝酒以后，血液中酒精量就以每小时 50%的速度减少．假定法律规定，驾驶员血液中的酒精含量不得超过 0.08㎎/㎖．问喝酒后至少多少小时才能驾驶？

14-3-13　某杂志能以每本 1.20 元的价格发行 12 万本．设定价每降低 0.1 元，发行量就增加 4 万本．要使总销售收入不低于 20 万元，求杂志的最高定价？

14-3-14　在测量某个物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 a_1，a_2，a_3，…，a_n，共 n 个数据．我们规定所测量物理量的最佳近似值 a 是这样一个量　：与其它近似值比较，a 与各数据的差的平方和最小．依此规定，试从 a_1，a_2，a_3，…，a_n 推出 a 的值．

14-3-15　行驶中的汽车，在刹车后由于惯性的作用，要继续往前滑行一段距离后才会停下，这段距离叫做刹车距离．试验表明，在某种路面上，某种型号汽车的刹车距离 S(米)与汽车的车速 x(千米/时)有如下关系：

$$S = 0.055x + \frac{x^2}{160}$$

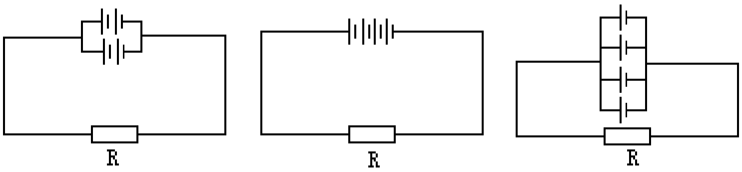
在某次交通事故中，测得刹车距离大于 12.2 米．问这辆汽车的车速每小时大于多少千米？

14-3-16　已知汽车从刹车到停车所滑行的距离与时速的平方及汽车总重量成正比例．设某辆卡车不装货物以时速 50 千米行驶时，从刹车到停车走了 20 米．如果这辆卡车装着等于车重的货物行驶时，发现前面 20 米处有障碍物．这时为了能在离障碍物 5 米以外处停车，最大限制时速应是多少？(答案只要求保留整数部分，设卡车司机发现障碍物到刹车需经过一秒钟．)

14-3-17　建筑学规定，民用住宅的窗户面积必须小于地板面积．但

按采光标准，窗户面积与地板面积的比应不小于10%；并且这个比越大，住宅的采光条件越好．问同时增加相等的窗户面积和地板面积，住宅的采光条件是变好了还是变坏了？请说明理由．

14-3-18　有四个相同的电池，每个电动势都是ε，内阻都是r．把它们按下图的甲、乙、丙三种方法连接，对同一负载R供电．如果要使负载R得到的功率，用甲种方法连接时比按另两种方法连接时都要大，那么R的阻值应在什么范围内？



14-3-19　跃进化工厂制定明年某化工产品的生产计划，已有如下数据：

(i)生产此产品的工人数不超过200人；

(ii)每个工人年工时约计2100工时；

(iii)预计此产品明年销售量至少80000袋；

(vi)每袋产品需用4工时；

(v)每袋产品需用料20千克；

(vi)目前库存料800吨，今年还需用200吨，明年可补充1200吨．

试根据上述数据决定明年可能的产量．

14-3-20　某人有人民币若干，拟作股票投资或长期储蓄．若存入银行年利率为6%，若购某种股票年红利24%．不考虑物价变化因素，且银行年利率及该种股票年红利不变．股份公司不再发行新股票，但每年的利息和红利可存入银行．

(1)求此人储蓄或购股票x年后拥有的人民币总额y．

(2)问经过几年，购股票与储蓄所拥有的人民币相等．

14-3-21　从边长为2a的正方形铁皮的四角各截去一小块边长为x的正方形，再将四边向上折起做成一个无盖的方铁盒．问x取何值时，盒的容积最大，这时的容积为多少？

14-3-22　有一份印刷品，其排版面积(矩形)为A，它的两边都留有宽为a的空白，顶部和底部留有宽为b的空白．问如何选择纸张的尺寸，才能使纸的用量最小？

14-3-23 某工厂要制造一个无盖的圆柱形发酵池，其容积是$\frac{3}{2}\pi$立方米，池底的材料每平方米3元，池侧面的材料每平方米2元．问如何设计这个发酵池，才能使成本最低，最低成本是多少？

14-3-24　木梁的强度与梁宽成正比，与梁高的平方成正比．从圆柱形的木材截取横截面是矩形的木梁，问如何截法能使梁的强度最大？

14-3-25　根据总的经济发展战略，第一阶段，我国工农业年总产值从1980年到2000年间要翻两番．问这20年间，每年平均增长率至少要多少，求能完成这一段设想．

14-3-26　设1980年底我国人口以10亿计算．

(1)如果我国人口每年比上年平均递增2%，那么到2000年将达到多

少人？

(2)要使 2000 年我国人口不超过 12 亿，那么每年比上年平均递增率最高是多少？

14-3-27　某工厂 1996 年生产某种产品 2 万件，计划从 1997 年开始，每年的产量比上一年增长 20%．问从哪一年开始，这家工厂生产这种产品的年产量超过 12 万件．

14-3-28　某煤矿从开始建设到出煤共需 5 年．每年国家投资 100 万元．如果按年利率 10%来考虑，那么到出煤时，国家实际投资总额是多少？

14-3-29　从材料工地运送电线杆到 500 米以外的公路旁埋栽，每隔 50 米在路边栽一根．又知每次只能运三根．要完成运栽 20 根电线杆，并返回材料工地，问运输卡车共行路多少千米？

14-3-30　某市 1994 年底人口为 20 万，人均住房面积 8 米^2，计划 1998 年底人均住房面积达到 10 米^2．如果该市将每年人口平均增长率控制在 1%．那么要实现上述计划，这个城市每年平均至少要新增住房面积多少万米^2？(结果以万米^{2}为单位．保留两位小数．)

14-3-31　有一批货，如果月初售出可获利 100 元，再将本利都存入银行，已知银行月息为 2.4%；如果月末售出，可获利 120 元，但要付保管费 5 元．问：这批货是月初售出，还是月末售出利润大？

14-3-32　某饲养场去年底养猪 422 头．若猪的养殖数量每年增长的百分率为 x，但每年年终要向外出售 m 头猪．

(1)经过 5 年该饲养场猪的存栏数是多少？

(2)若 x=50%，为实现经过 5 年猪的存栏数是原来 4 倍的目标，问 m 的最大值是多少？

14-3-33　某林场原有森林木材存量为 a．木材每年以 25%的增长率生长，而每年冬天要砍伐的木材量为 x．为了实现经过 20 年达到木材存量翻两番，求每年砍伐量 x 的最大值．(本题中取 lg2≈0.3．)

14-3-34　某农民攒钱供女儿上大学．从女儿上初中起，每年省下一笔固定数额存入村办企业，按年利率 x%计息．这样，到第七年至第十年，他就可以每年从村办企业取出一笔存款，加上当年省下的固定数额钱共 3000 元作为女儿上大学的当年学费．

(1)若该农民第十年正好将存款本息取用完，试将他每年省下的固定数额钱 y(单位：元)表示为 x 的函数；

(2)当 x=20 时，计算 y 的值．(精确到元．以下数据供选用：lg1.2=0.0792，lg1.728=0.2376，lg2.074=0.3168，lg5.162=0.7128，lg6.194=0.7920．)

14-3-35　某地要建一个水库，设计最大容水量 128000m^3．在山洪暴发时，预测注入水库的水量 S(n)(单位：m^3)与天数 n(n∈N，n≤10)的关系是

$$S(n)=5000\sqrt{n(n+24)}$$

此水库原有水量为 80000m^3，泄水闸每天泄水量为 4000m^3．若山洪暴发的第一天就打开泄水闸，问这十天中堤坝会发生危险吗？若会，计算第几天发生危险；若不会，说明理由(水库水量超过最大容水量时，堤坝就

会发生危险)．

14-3-36　某地为促进淡水鱼养殖业的发展，将价格控制在适当范围内，决定对淡水鱼养殖提供政府补贴．设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克，政府补贴为 t 元/千克．根据市场调查，当 $8\leq x\leq 14$ 时，淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系

$$P=1000(x+t-8)\quad (x\geq 8,\ t\geq 0)$$

$$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}\quad (8\leq x\leq 14)$$

当 P=Q 时的市场价格称为市场平衡价格．

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数，并求出函数的定义域；

(2)为使市场平衡价格不高于每千克 10 元，政府补贴至少为每千克多少元？

14-3-37　某工厂生产的商品为 A．若每件定价为 80 元，则每年可销售 80 万件．政府税务部门对在市场销售的商品 A 要征收附加税，为了增加国家收入又要有利于生产发展与市场活跃，必须合理地确定征税的税率．根据调查分析，若政府对商品 A 征收附加税率为 p%(即每销售 100 元时应征收 p 元)时，每年销售量将减少 10p 万件．

(1)若税务部门对商品 A 每年所收的税金不少于 96 万元，求 p 的范围．

(2)在所收税金不少于 96 万元的前提下，要让厂家获最大销售金额，则应如何确定 p 值？

(3)若税务部门仅仅考虑每年所获的税金最高，求此时 p 的值．

14-3-38　由沿河城市 A 运货到城市 B,B 离河岸最近点 C 为 30 千米，C 和 A 的距离为 40 千米．如每吨千米的运费水路比公路便宜一半，应该怎样从 B 筑一条公路到河岸，才能使 A 到 B 的运费最省？

2．代数应用题(集合、排列组合、复数)

例题

例 14-3-11　为了解城市居民的生活状况，就电话、音响、空调的拥有量调查了某市若干个家庭．经统计有电话的 92 家，有音响的 86 家，有空调的 83 家．

(1)若电话与音响两样都有的共计 45 家，问音响与电话至少有一种的有多少家？

(2)若音响和空调中至少有一种的共 106 家，问音响与空调两样都有的有多少家？

解　设集合 A={拥有电话的家庭}，B={拥有音响的家庭}，C={拥有空调的家庭}．

如果用 n(x)表示集合 x 中元素的个数，则由题设知

$n(A)=92，n(B)=86，n(C)=83$

(1)∵$n(A\cap B)=45$

∴　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=92+86-45=133$

即电话与音响至少有一种的有 133 家．

(2)∵$n(B\cup C)=106$

∴　$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$

$=86+83-106=63$

即音响和空调两样都有的共 63 家．

例 14-3-12　在 11 位工人中，有钳工 5 人，车工 4 人，还有 2 位工人既会钳工又会车工．现在要从这 11 位工人中选出 4 名钳工和 4 名车工去从事一件工程，选派时有多少种不同的调派方案？

分析　这是有条件的排列、组合问题，它给纯数学问题以实际背景．解时，清晰地分清排列与组合的基本概念，及正确的分类方法是关键．

解　以 2 位既会钳工又会车工的工人为主进行分类：

这 2 名工人以钳工身份参入的方案种数为

$$C_2^0C_5^4C_4^4+C_2^1C_5^3C_4^4+C_2^2C_5^2C_4^4$$

这 2 名工人以车工身份参入的方案种数为

$$C_2^0C_5^4C_4^4+C_2^1C_4^3C_5^4+C_2^2C_4^2C_5^4$$

注意上述两类中，2 位既会钳工又会车工的工人均不被选派的情形被重复计算了两次，应删除一个$C_2^0C_5^4C_4^4$种。

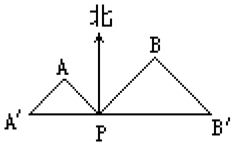
这2名工人，一名以车工，一名以钳工参入有$2C_5^3C_4^3$种方案．

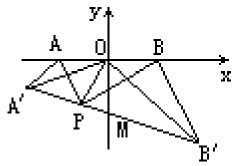
根据加法原理，共有 185 种不同调派方案．

例 14-3-13　(荒岛探宝问题)皮克在其曾祖遗物中发现一张羊皮上面记载着：“乘船至北纬××度，西经××度有一荒岛，长一株松(P)，从松树面北向左前方(45°)行若干步，有一红石(A)，然后左拐 90°行同样步数，打桩 A′；再从松树面北向右前方(45°)行若干步，有一白石(B)，然后右拐 90°行同样步数打桩 B′；在两桩中点处埋藏着宝物．”因为记载明确，皮克便乘船前往，在岛上找到了红石(A)及白石(B)，但由于年代久远，树已无处可寻，只能徒劳而返．你能帮助皮克找到宝物吗？

解　设松树 P 依然存在，便可得 P，A，B，A′，B′位置关系如下左图．建立以 AB 为实轴，AB 中垂线为虚轴的复平面(如下右图)．

设 A，B，P 的坐标分别为 A(-1，0)，B(1，0)，P(x，y)，则





$$\overline{AP}=(x+yi)+1=x+1+yi$$

$$\overline{BP}=(x+yi)-1=x-1+yi$$

所以
$$\overline{OA'}=-1+(x+1+yi)\cdot(-i)=-1+y-(x+1)i$$

$$\overline{OB'}=1+(x-1+yi)\cdot i=1-y+(x-1)i$$

则埋藏宝物之地 M 所对应复数

$$\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA'}+\overline{OB'})=-i$$

由此可知，宝藏应在红石(A)及白石(B)连线段中垂线上，向南与 AB 中点(O)的距离等于 O 与 A(或 B)的距离处(右上图)．

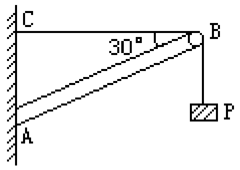
习题

14-3-39　某地对 100 户农户的生活情况进行调查，统计表称：有彩电的 65 户，有自行车的 84 户，二者都有的 53 户，二者全无的 2 户．试问这一统计数据正确吗？

14-3-40　在 100 名学生中，有篮球爱好者 53 人，排球爱好者 73 人(并非任何一个学生都必须有两种爱好或其一)．求对篮球、排球都爱好的人数的最小值和最大值．

14-3-41　甲、乙两队各出 7 名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛，双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方 2 号队员比赛，…，直到有一方队员全被淘汰为止，另一方获得胜利．求所有可能出现的比赛过程的种数．

14-3-42　工程机械厂设计起重机起吊最大重量为 1000 千克，如图所示．问梁 AB 和链条 BC 设计承受力最少为多大？

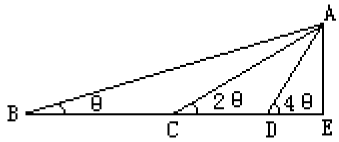


3．三角函数应用题

例题

例 14-3-14　在某个位置测得某山峰仰角为θ；对着山峰在地面前进$600m$后测得其仰角为原来的2倍；继续在地面前进$200\sqrt{3}m$后测得山峰仰角变为原来的 4 倍．求山峰的高度．

解　视山峰为平面(地面)的一条垂线段，三次测量点均在过垂足的一条直线上．原来的问题抽象成下图．



设 AE=xm，则 BE=xctgθ，CE=xctg2θ，DE=xctg4θ，所以

$BC=BE-CE=x(ctg\theta-ctg2\theta)=600$

$CD=CE-DE=x(ctg2\theta-ctg4\theta)=200\sqrt{3}$

所以 $\frac{BC}{CD}=\frac{ctg\theta-ctg2\theta}{ctg2\theta-ctg4\theta}=\frac{\frac{\sin(2\theta-\theta)}{\sin\theta\sin2\theta}}{\frac{\sin(4\theta-2\theta)}{\sin2\theta\sin4\theta}}$

$=\frac{\sin4\theta}{\sin2\theta}=2\cos2\theta=\frac{600}{200\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

即$\cos2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，而$0°<4\theta<90°$，所以$2\theta=30°$，即$\theta=15°$，所以

$$x=\frac{200\sqrt{3}}{ctg2\theta-ctg4\theta}=\frac{200\sqrt{3}}{ctg30°-ctg60°}=300(m)$$

答：山峰的高度为 300m．

例 14-3-15　外国船只除特许者外，不得进入离我海岸线 D 海里以内的区域．设 A 及 B 是我们的观察点，A 及 B 之间的距离为 S 海里．海岸线是过 A，B 的直线．一外国船在 P 点．在 A 站测得∠BAP=α，同时在 B 站测得∠ABP=β．问α及β满足什么简单的三角函数不等式，就应当向此未经特许的外国船发出警告，命其退出我海域？

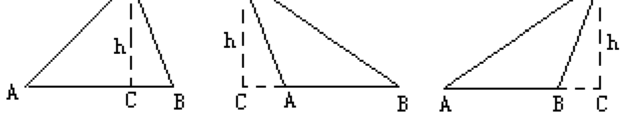
解　如下图．设外国船只距海岸线的距离为 h＞0，则“发出警告”转化为如下不等式成立：

$h\le D$

自 P 向直线 AB 作垂线 PC，垂足为 C，有

$h=PC>0$

$0<\alpha，\beta<\pi，\alpha+\beta<\pi$



(ⅰ)当α，β均不为钝角时，α，β不同时为直角，有

$AC=h\cdot ctg\alpha\ge0，BC=h\cdot ctg\beta\ge0$

得　　$S=AC+BC=h(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)>0$

(ii)当α为钝角时，β为锐角，

$\beta<\pi-\alpha$

$AC=h\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)=-h\mathrm{ctg}\alpha$

$BC=h\mathrm{ctg}\beta>h\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)=-h\mathrm{ctg}\alpha$

得　　$S=BC-AC=h(\mathrm{ctg}\beta+\mathrm{ctg}\alpha)>0$

(3)当β为钝角时，α为锐角，

$\alpha<\pi-\beta$

$AC=h\mathrm{ctg}\alpha>h\mathrm{ctg}(\pi-\beta)=-h\mathrm{ctg}\beta$

$BC=h\mathrm{ctg}(\pi-\beta)=-h\mathrm{ctg}\beta$

得　　$S=AC-BC=h(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)$

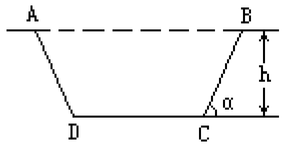
可见，在一切情况下均有

$S=h(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)\le D(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)$

于是　　$\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta\ge\frac{S}{D}$

这就是所求．

例 14-3-16　水渠横断面为等腰梯形，如图所示，渠深为 h，梯形面积为 S．为了使渠道的渗水量达到最小，应使梯形两腰及下底边长之和最小．问：此时腰与下底夹角α应该是多少？



解　设$CD=a$，梯形腰与底边的夹角为α，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}]$则

$AB=a+2h\mathrm{ctg}\alpha$

由梯形面积$S=\frac{1}{2}(2a+2h\mathrm{ctg}\alpha)\cdot h$得

$$a=\frac{S}{h}-h\cdot\mathrm{ctg}\alpha$$

又$BC=\frac{h}{\sin\alpha}$．设梯形两腰及下底的和为l，则

$$l=a+\frac{2h}{\sin\alpha}=\frac{S}{h}-h\mathrm{ctg}\alpha+\frac{2h}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{S\cdot\sin\alpha-h^2\cos\alpha+2h^2}{h\sin\alpha}$$

所以　　$lh\cdot\sin\alpha=S\cdot\sin\alpha-h^2\cos\alpha+2h^2$

即　　$(hl-S)\sin\alpha+h^2\cos\alpha=2h^2$

所以　　$\sin(\alpha+\varphi)=\frac{2h^2}{\sqrt{(h\cdot l-S)^2+h^4}}\le1$（其中$\mathrm{tg}\varphi=\frac{h^2}{hl-S}$）

即　　$h^2l^2-2hSl+S^2-3h^4\ge0$

解这个不等式得$l \geq \frac{S}{h}+\sqrt{3}h$或$l \leq \frac{S}{h}-\sqrt{3}h$(舍去)，从而知$l$的最小值为$\frac{S}{h}+\sqrt{3}h$.

当$l=\frac{S}{h}+\sqrt{3}h$时，

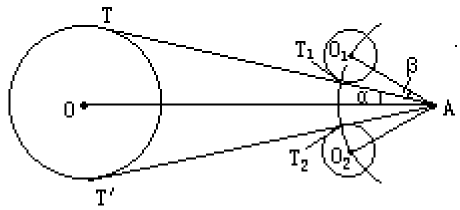
$$\frac{S}{h}-h\text{ctg}\alpha+\frac{2h}{\sin\alpha}=\frac{S}{h}+\sqrt{3}h$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2 \Leftrightarrow \sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=1$$

但$\alpha \in (0，\frac{\pi}{2}]$，故$\alpha=\frac{\pi}{3}$.

答：当$\alpha=\frac{\pi}{3}$时，两腰及下底边长之和取最小值$\frac{S}{h}+\sqrt{3}h$，此时渗水量最小.

例 14-3-17　设月球与太阳的半径分别为 r 和 R，地球表面到月球和太阳表面的最短距离分别为 s 和 l，月球绕地球运动的角速度为ω，试计算日蚀持续的时间.



解　如图．以 A 表示观察点，圆 O 表示太阳．AT、AT′分别切圆 O 于 T，T′，圆 O_1 与圆 O_2 表示月球的两个特殊位置，它们分别与 AT，AT′相切于 T_1 与 T_2，不落在∠TAT′内．容易看出，当月球中心落在以 A 为圆心，以 s+r 为半径的圆孤$\overset{\frown}{O_1O_2}$内时，即发生日蚀．

记∠OAT=α，$\angle T_1AO_1=\beta$，则

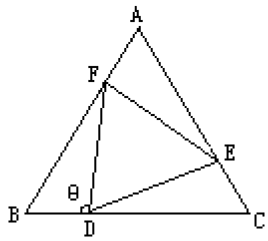
$$\alpha=\arcsin\frac{R}{R+l}，\ \beta=\arcsin\frac{r}{r+s}$$

故日蚀持续的时间为

$$t=\frac{2\alpha+2\beta}{\omega}$$

$$=\frac{2}{\omega}(\arcsin\frac{R}{R+l}+\arcsin\frac{r}{r+s})$$

例 14-3-18　下料的工人要将一块正三角形的钢板截成四块小钢板，其中一块正三角形的小钢板内接于原正三角形，且面积为原三角形面积的一半(如下图)，应当怎样截？



解　设原三角形边长为 a，截得的小正三角的边长为 b，且∠BDF=θ．

由假设，有$\frac{a^2}{b^2}=2$，所以$a=\sqrt{2}b$。

在△BDF 与△CED 中，

DE=DF=b，∠B=∠C=60°

∠DFB=∠CDE=120°-θ

所以　△BFD≌△CDE

所以　BD+BF=BD+CD=a　　　　(i)

在△BFD 中，由正弦定理，有

$$\frac{BD}{\sin(120°-\theta)}=\frac{BF}{\sin\theta}=\frac{b}{\sin 60°}=\frac{2b}{\sqrt{3}}$$

于是，$BD=\frac{2b\sin(120°-\theta)}{\sqrt{3}}$，$BF=\frac{2b\sin\theta}{\sqrt{3}}$，将它们代入(i)，得

$$\frac{2b\sin(120°-\theta)}{\sqrt{3}}+\frac{2b\sin\theta}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}b$$

$$\Leftrightarrow 2[\sin(120°-\theta)+\sin\theta]=\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin 60°\cos(60°-\theta)=\sqrt{6}\Leftrightarrow\cos(60°-\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

由于-60°＜θ-60°＜120°，有

$$60°-\theta=\pm 45°\Leftrightarrow\theta=15°\text{或}\theta=105°$$

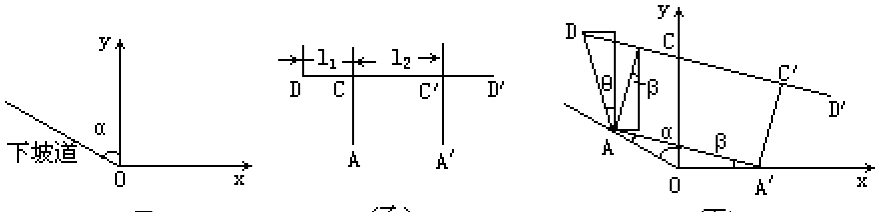
这时有

$$BD=\frac{2b\sin(120°-15°)}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}a=\frac{3+\sqrt{3}}{6}a$$

或　$$BD=\frac{2b\sin(120°-105°)}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}a=\frac{3-\sqrt{3}}{6}a$$

于是下料的方法在：在$BD=\frac{3+\sqrt{3}}{6}a$处，使$\angle BDF=15°$，或在$BD=\frac{3-\sqrt{3}}{6}a$处，使$\angle BDF=105°$．

例 14-3-19　某一集体到普陀朱家尖旅游，沈家门和朱家尖之间，汽车要靠轮渡跨海．归途中，汽车从岸上顺着水泥斜坡下行，然后再沿从渡船上放下的甲板上爬．但不一会，忽听到一声怪响．探头一看，原来汽车壳体的尾部触到了下坡道造成损伤，垫上木块后，才安全上船．这是一个设计是否合理的问题，当渡船和甲板选定后，应如何选取下坡道的坡度，才能使大众型的车辆安全轮渡？



(甲)　　　　(乙)　　　　(丙)

解　把甲板放在 x 轴上，建立图(甲)所示的直角坐标系．图(乙)中，DD′为汽车外壳下缘，A，A′分别为车轮与地面的切点，记|AC|=h．把图(乙)放到图(甲)上去得到图(丙)．容易看出，汽车能安全上渡的充要条件为θ＜α对定义域内的一切θ恒成立，即θ_{max}＜α．

下面我们来建立θ的函数，为此引进辅助角β，(0≤β≤90°-α)．设 A 点到原点的距离为 l，则 A 点坐标(-lsinα，lcosα)，C 点的坐标为(-lsinα+hsinβ，lcosα+hcosβ)，D 点的坐标为(-lsinα+hsinβ-$l_1$cosβ，lcosα+hcosβ+$l_1$sinβ)．所以

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{l_1-h\mathrm{tg}\beta}{h+l_1\mathrm{tg}\beta}$$

由于$f(\beta)$在定义域$\beta\in[0，90°-\alpha]$内是减函数，所以$\mathrm{tg}\theta\leq f(0)=\frac{l_1}{h}$，

从而$\theta\leq\mathrm{arctg}\frac{l_1}{h}$，即

$$\theta_{max}=\mathrm{arctg}\frac{l_1}{h}$$

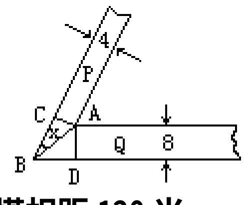
故下坡道的设计应考虑使大众型汽车满足关系

$$\alpha>\mathrm{arctg}\frac{l_1}{h}(\text{坡角度小于}90°-\mathrm{arctg}\frac{l_1}{h})$$

习题

14-3-43　距离船只 A 的正北方向 100 海里处有一船只 B，以每小时 20 海里速度，沿北偏西 60°角的方向行驶；A 船只以每小时 15 海里速度向正北方向行驶．两船同时出发．问几小时后，两船距离最近？

14-3-44　如图．P，Q 分别是宽为 4cm 和 8cm 的钢板，现在要把它们焊接成 60°角，下料时，角 x 应为多大？



14-3-45　平地上的两塔相距 120 米．一人分别在两塔的底部测得一塔顶的仰角是另一塔顶仰角的 2 倍；又在两塔底的连线中点测得两塔顶的仰角互为余角，求两塔的高．

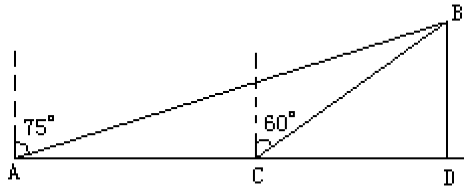
14-3-46　发电厂发出的电是三相交流电，它的三根导线上的电流强度分别是时间 t 的函数：

$$I_A=I\sin\omega t，I_B=I\sin(\omega t+120°)，I_C=I\sin(\omega t+\beta)$$

已知 $I_A+I_B+I_C=0$，若 0°≤β＜360°，求β．

14-3-47　教室的的墙壁上挂着一块黑板，它的上、下边缘在学生的水平视线上方 a 米和 b 米．问学生距墙壁多远时看见黑板上下边缘的视角最大？

14-3-48　如图．海中有一小岛，周围 3.8 海里内有暗礁，军舰由西向东航行，望见岛在北偏东 75°，航行 8 海里后望见岛在北偏东 60°．若此舰不改变航行方向继续前进，有没有触礁的危险？



14-3-49　一滚球轴承的内、外圈的半径分别为 R 和 R+d，问滚球轴承里最多可放多少颗滚球？

14-3-50　为测量建造中的上海东方明球电视塔已达的高度，小明在学校操场某一直线上选择三点 A，B，C，且 AB=BC=60 米；分别在 A，B，C 三点观察塔的最高点，测得仰角为 45°，54.2°，60°；小明身高为 1.5(米)．试问建造中的电视塔现在已达的高度(结果保留一位小数)．

14-3-51　用一块长为 a，宽为 b(a＞b)的矩形木板，在二面角为 α 的墙角处围出一个直三棱柱的谷仓．试问应怎样围才能使谷仓的容积最大？并求出谷仓容积的最大值．

14-3-52　在一张半径为 R 的圆桌的正中央上空挂一盏电灯，桌子边缘一点处的照度 I 和灯光射到桌子边缘的光线与桌面夹角 θ 的正弦成正比，而和这一点到光源的距离r的平方成反比，即$I = k \cdot \frac{\sin\theta}{r^2}$，其中k是一个和灯光强度有关的常数．那么怎样选择电灯悬挂的高度 h，才能使桌子边缘处最亮？

14-3-53　在足球比赛中，甲方边锋从乙方所守球门附近带球过人沿直线向前推进．试问：边锋在何处射门命中率最大(人高、球门高、球员射门力度等因素不计)？

14-3-54　在南北方向的一条公路上，一辆汽车由南向北行驶，速度为 100 千米/小时；一架飞机在一定高度上的一条直线上飞行，速度为$100\sqrt{7}$千米/小时。从汽车里看飞机，在某个时刻看见在正西方向，仰角为 30°；在这以后的 36 秒，又看见飞机在北偏西 30°，仰角为 30°．问飞机的飞行高度是多少？

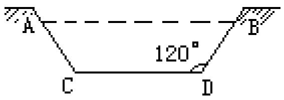
14-3-55　有一小船 S 在一条东西向的海岸线的南方，距海岸线上的最近点 P 是 5 千米；在 P 的正东，岸上有一小镇 Q 离 P 也是 5 千米．摇船的人想用最短时间到达 Q．已知他每小时能步行 6 千米，但每小时只能摇 4 千米．他应朝什么方向驶船登岸？

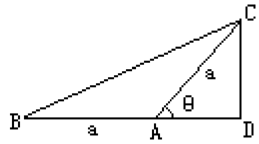
14-3-56　甲船自某港出发时，乙船在离港 7 海里的海上驶向该港，已知两船的航向成 60°角，甲、乙两船航速之比为 2∶1．求两船最靠近时，各离该港多远？

14-3-57　将一块半径为 a 的圆形铁片剪成具有最大面积的十字形铁片．这铁片的最大面积是多少？

14-3-58　一水渠的截面是等腰梯形，其一个底角是 120°．如果要

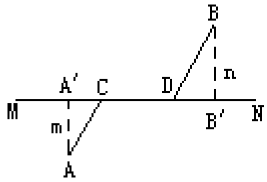
使过水面积 ACDB 为 S 平方米，那么底边 CD 应取多少米才能使水渠的湿周最小？(湿周就是指水渠截面遇水的周长，即如下左图中的 AC+CD+DB．湿周较小，就能使渗漏减少，同时也能使水流的阻力减小)





14-3-59　在某机械设计中，点 C 可绕 A 转动(如上右图)．已知 AB=AC=a，CD⊥BD，∠CAD=θ．问当θ为何值时，三角形 BDC 的面积最大？求出这最大值．

14-3-60　某矿石基地 A 和冶炼厂 B 在铁路 MN 的两侧．A 距铁路 m 千米，B 距铁路 n 千米．在铁路上要建造两个火车站 C 与 D，并修两条公路 AC 与 BD．A 地的矿石先用汽车由公路运至火车站 C，然后用火车运至 D，再用汽车运到冶炼厂 B(如图)．A、B 在铁路 MN 上的投影 A′，B′距离为 l 千米．若汽车每小时行 u 千米，火车每小时 v 千米(v＞u)，要使运输矿石的时间最短，火车站 C，D 应建在什么地方？

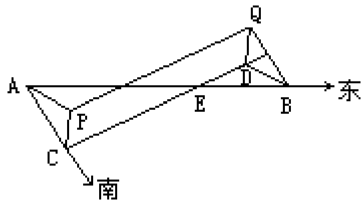


4．立体几何应用题

例题

例 14-3-20　B 地在 A 地正东 6 千米处，一架飞机保持一定的高度，以一定速度往东北方向飞行．从地面上对飞机进行观测，先得知它在 A 点正南,仰角为 30° 过了一分钟时间,又测得 B 点西北,仰角为 45°.假设 A，B 两地的高度相同，求飞机飞行的高度和时速．

分析　因为在 A，B 两地观测的时间差恰好是飞机的飞行时间，所以要求飞机时速的关键在于求出两次观测的时间差(1 分)内飞机飞行的距离．又由于题目中给出了两次观测的仰角，所以可以通过建立如图所示的立体几何模型，将求飞机飞行的高度和距离，转化为立体几何图形的线段长度的计算问题．



解　设从 A，B 观测到飞机位置分别为 P，Q，且 P，Q 在地面上的射影分别为 C，D，又设飞机的高度 PC=QD=x 千米，∠PAC=30°，所以

$$AC = PC\cdot ctg30° = \sqrt{3}x$$

∠QBD=45°，BD=QD=x

因为 C 点在 A 点正南方，所以∠CAB=90°．

又因为飞机向东北方向飞，D 在 B 的西北方向，所以

∠BDC=90°，∠EBD=45°，∠AEC=45°

在$Rt\triangle AEC$中，可求得$AE = \sqrt{3}x$，$CE = \sqrt{6}x$，

在$Rt\triangle BEC$中，可求得$BE = \sqrt{2}x$，$DE = x$。

由 AB=6 知

$$\sqrt{3}x + \sqrt{2}x = 6 \Leftrightarrow x = 6(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \approx 1.9(\text{千米})$$

所以　$CD = CE + DE = (\sqrt{6} + 1)x = 6(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$

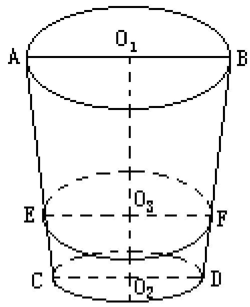
于是$PQ = 6(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$。因为飞机由P点飞到Q点用了一分钟时间，所以飞机时速为

$$v = PQ\cdot 60 = 360(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) \approx 395(\text{千米}/\text{时})$$

故飞机飞行高度约为 1900 米，时速约为 395 千米/时．

例 14-3-21　用一个上口直径为 34㎝，底面直径为 24㎝，深为 35㎝的水桶来测降雨量．如果一次下雨过程中，用此水桶盛得的雨水正好是桶深的五分之一．问此次的降雨量是多少(精确到 0.1㎜)？

分析　在此问题中，所求的降雨量应该等于桶内积水的体积与桶口的面积之比．



解　如图．设水桶上口圆直径为 AB，中心为 O_1；下口圆直径为 CD，中心为 O_2；水面圆直径为 EF，中心为 O_3，则由题设知 AO_1=17cm，

$CO_2=12cm$，桶内积水深$O_2O_3=\frac{35}{5}=7(cm)$。水面半径

$$EO_3=[12+\frac{1}{5}(17-12)]=13cm$$

因此，桶内积水的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi(12^2+12\times13+13^2)\times7=\frac{3283}{3}\pi(cm^3)$$

桶口面积为

$$S=\pi\times17^2=289\pi(cm^2)$$

故降雨量为

$$k=\frac{V}{S}=\frac{\frac{3283}{3}\pi}{289\pi}=\frac{3283}{867}\approx3.79(cm)$$

答：此次的降雨量大约是 37.9㎜．

例 14-3-22　硫磺具有一定的杀菌效力，这种杀菌效力的大小取决于硫磺蒸气产生的多少．而在其他条件相同的条件下，硫磺蒸气产生的数量又决定于硫磺的球状颗粒的大小．试说明，为什么同样重量的硫磺，研磨的球状颗粒越小时，杀菌效力越大．

分析　依题意，硫磺的杀菌效力取决于硫磺蒸气产生的多少．结合一般常识，在相同条件下，蒸气产生于物体的表面．所以同样重量的硫磺研磨的球状颗粒越小，总的表面积越大时，硫磺蒸气产生的数量也越大，越能提高杀菌效力．下面来证明这个估计．

解　设一定重量的硫磺的体积是 V．当球状颗粒的半径是 r_1 时，每个球状颗粒的体积为$\frac{4}{3}\pi r_1^3$，这时的颗粒数是$\frac{V}{\frac{4}{3}\pi r_1^3}$，全部颗粒的表面积为

$$S_1=\frac{V}{\frac{4}{3}\pi r_1^3}\cdot4\pi r_1^2=\frac{3V}{r_1}$$

当球状颗粒的半径为 r_2 时，同时可得，全部颗粒的表面积为

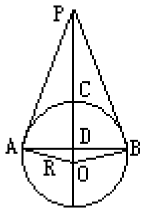
$$S_2=\frac{3V}{r_2}$$

当$r_2 < r_1$时，由于V为正的常量，r_1，r_2均为正数，所以$\frac{3V}{r_2} > \frac{3V}{r_1}$，即$S_2 > S_1$.

例 14-3-23　电视通信卫星距离地面高度为 h，其电波覆盖到的地面面积为 S．设地球半径为 R．

(1)写出 S 关于 h 的函数式；

(2)要使卫星的电波覆盖地球表面的$\frac{1}{3}$，卫星至少要发射多高？



解　(1)如图。卫星电波覆盖地面的区域为球冠，球冠高为 CD。因为$Rt\triangle AOD \backsim Rt\triangle POA$，由此得 $AO^2=OD\cdot OP$，所以

$$R^2 = (R - CD)\cdot(R + h)$$

$$\Leftrightarrow R - CD = \frac{R^2}{R + h}$$

$$\Leftrightarrow CD = \frac{Rh}{R + h}$$

所以 $S_{球冠} = 2\pi R\cdot CD = \frac{2\pi R^2 h}{R + h}$

(2)当$S = \frac{1}{3}\cdot 4\pi R^2$时，有

$$\frac{2\pi R^2 h}{R + h} = \frac{4\pi R^2}{3} \Leftrightarrow h = 2R$$

即卫星高度等于地球直径。

例 14-3-24　在商店中买一种商品，大包装的比小包装的合算，如蓝天牙膏 60 克装的每支 1.15 元，150 克装的每支 2.50 元，二者单位重量的价格比是 1.15：1。牙膏的价格是由生产牙膏的成本、包装成本及运输成本等决定的。假设忽略运输成本，并假设生产成本与牙膏(不包括牙膏皮)重量成正比,包装成本与牙膏皮的表面积成正比,请你制定一支 180 克装的蓝天牙膏的合理价格。

分析　同一牌子不同大小的牙膏，可以认为是相似的。相似体的对应长度之比为相似比，对应面积之比是相似比的平方，对应体积之比是相似比的立方，对应重量之比等于体积比。

解　设牙膏每克价格为 x 元, 则 60 克装与 150 克装的每支包装价格分别为 1.15-60x 元和 2.50-150x 元。所以

$$\sqrt{\frac{1.15 - 60x}{2.50 - 150x}} = \sqrt[3]{\frac{60}{150}} \Leftrightarrow x \approx 0.0095$$

由此知 60 克装牙膏每支包装价格为 1.15-60x=0.58(元)，设 180 克装牙膏每支包装价格为 v 元，则

$$\sqrt{\frac{y}{0.58}}=\sqrt[3]{\frac{180}{60}}\Leftrightarrow y\approx 1.21(\text{元})$$

所以，180 克牙膏价格应为 180x+y=2.92(元)。

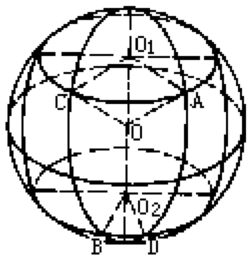
例 14-3-25　假设某君从北京(靠近北纬 40°，东经 120°，以下经纬度均取近似值)飞往南非首都约翰内斯堡(南纬 30°，东经 30°)处理紧急商务。现有两条航空线供其选择：

甲航空线：从北京沿纬度弧向西飞到希腊首都雅典(北纬 40°，东经 30°)，然后向南飞到目的地；

乙航空线：从北京向南飞到澳大利亚的珀斯(东经 120°，南纬 30°)，然后向西飞到目的地。

请问：在正常情况下，该君选择哪一航空线飞行时间较短？(设两班机航速相同，地球视为半径 R=6370㎞ 的球)

分析　解答本题的关键是依题作出图示，将实际问题转化为数学模型。因地球视为半径为 R=6370㎞ 的球，故过某一纬线的平面与赤道平面平行，且与球面的交线为一圆。而沿经线飞行则是沿地球的某一大圆的弧飞行(飞机高度略去不计)。比较哪一航线便捷即比较两航程之长短。



解　把北京、约翰内斯堡、雅典、珀斯分别看作球面上的 A，B，C，D点(如图)，则甲航程为A，C两地间的纬度线长$\overset{\frown}{AC}$ AC与C，B两地间的球面距离$\overset{\frown}{BC}$之和。乙航程是A，D两地间的球面距离$\overset{\frown}{AD}$加上D，B两地间的纬度线长。

设球心为 O，而 O_1，O_2 分别是北纬 40°与南纬 30°圆的圆心，则$\angle AO_1C=\angle DO_2B=120°-30°=90°$，从而

$$\overset{\frown}{AC}=\frac{\pi}{2}\cdot O_1C=\frac{\pi}{2}R\cos 40°$$

$$\overset{\frown}{BD}=\frac{\pi}{2}\cdot O_2B=\frac{\pi}{2}R\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi R$$

$$\overset{\frown}{CB}=R\cdot\angle COB=R\cdot(40+30)\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{7}{18}\pi R$$

$$\overset{\frown}{AD}=R\cdot\angle AOD=R\cdot(40+30)\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{7}{18}\pi R$$

于是得

甲航程$s_1=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=\frac{\pi}{2}R\cos 40°+\frac{7}{18}\pi R$，

乙航程$s_2=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DB}=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi R+\frac{7}{18}\pi R$。

易知 $s_2 > s_1$，故选甲航空线较便捷。

习题

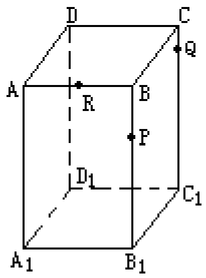
14-3-61　有一批木料，形状为正三棱柱，长 2 米，底面边长为 12 厘米。现要加工 1000 个木球，木球要尽量的大，至少需要木料多少根？

14-3-62　将一正方体形的木块锯成最大的一个正四面体形的木块，则四面体形木块的体积为正方体形木块体积的几分之几？

14-3-63　有一电视塔，在其东南方 A 处看塔高时仰角为 45°；在其西南方 B 处着塔顶，仰角为 60°；A，B 两地相距 120 米。求电视塔的高度。

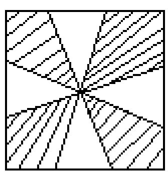
14-3-64　有一个实心圆锥体的零部件，它的轴截面是边长为 10 厘米的等边三角形。现要在它的整个表面镀上一层防腐材料。已知每平方米的工料价为 0.10 元，则需要费用为多少元(π取 3.2)？

14-3-65　如图。$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是一个封闭的长方体水箱。已知 AA1=70㎝， AB=50㎝， BC=40㎝。因为使用过久，在棱 BB_1，CC_1，AB 上各出现了一个小孔 P，Q，R，且量得 BP=20㎝，CQ=10㎝，BR=30㎝。问这水箱最多还能盛多少水(水箱不必平放)？

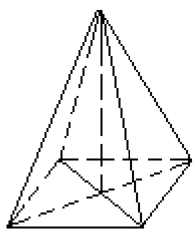


14-3-66　倒圆锥形容器的轴截面是正三角形,内盛水的深度为 6㎝，水面距容器口距离为 1㎝；现放入一个棱长为 4㎝ 的正方体实心铁块，让正方体的一个面与水平面平行。问容器中的水是否会溢出？

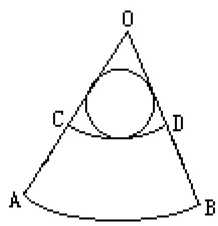
14-3-67　要用一块边长为 10㎝ 的正方形铁片，按下甲图将阴影部分裁下，然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个四棱锥形容器(如下乙图)。怎样裁才能使加工成的容器容积最大？最大容积是多少？



(甲)



(乙)



14-3-68　有一扇形铁皮 AOB，半径 OA=72㎝，∠AOB=60°。现要剪下一个扇环 ABCD 作圆台形容积的侧面，并且从剩下的扇形 COD 内剪下一个最大的圆，使它作容器的下底面(此圆台容器下底面大于上底面)。问 OC 应取多少厘米？(如上右图。)

14-3-69　一个圆锥形灯罩高 6㎝，底面半径 10㎝。一用户需将一盏有此灯罩的电灯装在一间长 4m、宽 3m 的房间的中心，问此灯距地面多高

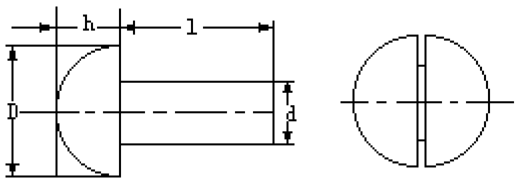
的地方，灯光可以集中照亮房内墙壁 lm 高以下的各处？(设灯光从圆锥形灯罩的顶点处射出。)

14-3-70　有两只一模一样的正方体箱子，里面装着同一种材料制成的球。其中 A 箱中装有半径为 R 的大球 27 只，B 箱中装有半径为 r 的小球 64 只。每个箱子都刚好装满，球与球相切，球与箱壁也相切，问哪个箱子重。

14-3-71　在半径为 30 米的圆形广场中央上空，设置一个照明光源，射向地面的光呈圆锥形，且其轴截面顶角为 120°。若要光源恰好照亮整个广场，则其高度为多少米？

14-3-72　将一实心地球仪浸入水中，令北极朝上，其北纬 30°的纬线恰好与水面平齐。问浮出水面部分的体积占全球体积的几分之几？

14-3-73　某铁路工程需要生产一批铆钉，铆钉的头部是球缺形，钉杆是圆柱形，形状如下左图所示，其中 D=64㎜，h=24㎜，d=36㎜。现要把铆钉铆过 20㎜ 厚的钢板以后，使钉杆剩余部分恰好能打成和头部形状大小一样的球缺(如下右图)。那么这批铆钉的钉杆应做多长为宜？



14-3-74　在一个直径是 50㎜ 的球形器材中，嵌进一根圆轴，为了使圆轴不易脱出，应使它与球有最大的接触面积。问圆轴的直径应是多少？

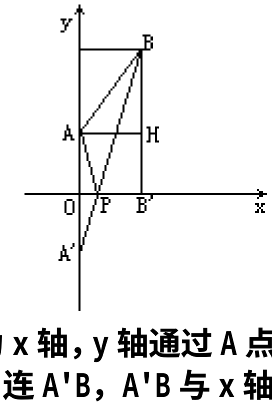
14-3-75　把地球看成是半径为 6378 公里的球体。设 A，B 两点是同在北纬 45°圈上而经度相差 90°的海上两地。由 A，B 和球心 O 决定的平面截球面成球的大圆，沿着这个大圆上从 A 到 B 的劣弧航行，比沿着 45°纬度圈上的劣孤航行，可以缩短多少千米的航程？

5．解析几何应用题

例题

例 4-3-26　小河同侧有两个村庄 A，B。两村庄计划于河上共建一水电站发电供两村使用。已知 A,B 两村到河边垂直距离分别为 300m 和 700m，且两村相距 500m。问水电站建于何处，送电到两村电线用料最省？

分析　视两村庄为两点 A，B，小河为一条直线 l，原问题便转化成：在直线 l 上找一点 P，使 P 点到 A，B 两点距离之和最小。



解　以 l 所在直线为 x 轴，y 轴通过 A 点建立直角坐标系(如图)。作 A 关于 x 轴对称的点 A'。连 A'B，A'B 与 x 轴交于点 P。由平面几何知，

点 P 即为所求。

据已知条件，A，A'的坐标分别为 A(0，300)，A'(0，-300)。过 B 作 BB'⊥X 轴于点 B'，过 A 作 AH⊥BB'于点 H，则|BB'|=700，|BH|=700-300=400，|AB|=500，所以

$$|AH|=\sqrt{500^2-400^2}=300$$

所以 B 的坐标为(300，700)。于是直线 A'B 的方程为

$$\frac{y-700}{-300-700}=\frac{x-300}{0-300}$$

即 $y=\frac{10}{3}x-300$

所以 P 点的坐标即为 A'B 与 x 轴的交点(90，0)。

答：水电站应建在河边两村间且离 A 村距河边的最近点 90 米处。

例 4-3-27　在气象台 A 处向西 300 千米处有一台风中心。已知台风以每小时 40 千米的速度向东北方向移动，距台风中心 250 千米以内的地方都在台风圈内。问：从现在起，大约多长时间后，气象台 A 处进入台风圈？气象台 A 处在台风圈内的时间大约多长？

分析　本题的关键是台风中心的移动带动了台风圈的平移，气象台 A 处进入台风圈即指气象台 A 在以台风中心为圆心，以 250 千米为半径的圆上或圆内。所以可以考虑建立平面直角坐标系。同时又注意到坐标系内台风中心点的坐标变化与台风风速和时间有关。当题设的台风风速恒定为每小时 40 千米时，时间 t 就成了一个重要变量，这正是本题所求。

解　以气象台 A 处为坐标原点，正东方向为 x 轴的正方向，正北方向为 y 轴的正方向建立平面直角坐标系，则台风中心现在的坐标是(-300，0)。

注意东北方向与正东方向夹角为 45°，则 t 小时后，台风中心到达点的坐标为(-300+40t·cos45°，40tsin45°)，即

$$(-300+20\sqrt{2}t，20\sqrt{2}t)$$

所以 t 小时后的台风圈是

$$(x+300-20\sqrt{2}t)^2+(y-20\sqrt{2}t)^t\leq 250^2$$

将气象台 A 处的坐标(0，0)代入上式，得

$$(300-20\sqrt{2}t)^2+(20\sqrt{2}t)^2\leq 250^2$$

解这个关于 t 的不等式，得

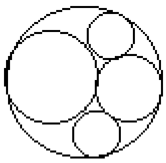
$$\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{7}}{4}\leq t\leq\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{7}}{4}$$

即约为 1.99≤t≤8.61，

8.61-1.99=6.62(时)≈6 时 37 分

答：气象台大约在两小时后进入台风圈，处在台风圈内时间大约为 6 时 37 分。

例 4-3-28　某检验员通常用一个直径为 2㎝ 和一个直径为 1㎝ 的标准圆柱检测一个直径为 3㎝ 的圆洞。为保证质量，有人建议再插入两个合适的同号标准圆柱(如图)。问这两个标准圆柱的直径应该是多大？

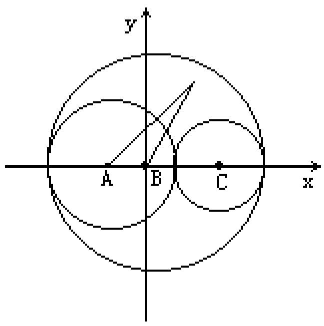


解　如图。以过三圆心的直线为 x 轴建立直角坐标系。设所求圆 D 的半径为m，因为$|DA|=1+m$，$|DB|=\frac{3}{2}-m$，所以$|DA|+|DB|=\frac{5}{2}$。即点D在以A，B为焦点，长轴为$\frac{5}{2}$的椭圆上，其方程是

$$\frac{(x+\frac{1}{4})^2}{\frac{25}{16}}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$$

同理点 D 也在以 B，C 为焦点，长轴为 2 的椭圆上，其方程是

$$\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$$

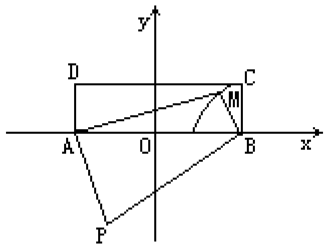


联立上述两椭圆方程，得交点为(9/14，6/7)或-(9/14，-6/7)。从而可得圆 D 的半径为

$$m=\frac{3}{2}-\sqrt{(\frac{9}{14})^2+(\frac{6}{7})^2}=\frac{3}{7}$$

因此两个标准圆柱的直径应该是$\frac{6}{7}$cm。

例 4-3-29　如图。某村在 P 处有一个肥堆，今把这堆肥料沿道路 PA 或 PB 送到大田 ABCD 中去。已知 PA=100 米，PB=150 米，BC=60 米，∠APB=60°。能否在大田中确定一条界线，使位于界线一侧的点沿道路 PA 送肥较近，位于界线另一侧的点沿 PB 送肥较近。如果能，请说出这条界线是什么曲线，并求其方程。



解　设 M 是界线上一点，则

|PA|+|MA|=|PB|+|MB|

即　|MA|-|MB|=|PB|-|PA|=50

故所求界线是以 A，B 为焦点的双曲线的一支。

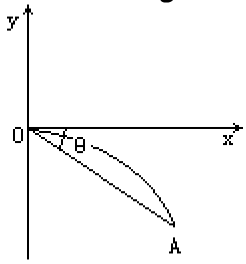
以直线 AB 为 x 轴，线段 AB 的中点 O 为坐标原点，建立坐标系，则所求双曲线具有标准形

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

其中$a=25$，$2c=|AB|=50\sqrt{7}$，所以$c=25\sqrt{7}$。从而$b^2=3750$。故双曲线方程为

$$\frac{x^2}{625}-\frac{y^2}{3750}=1 \qquad (25\leq x\leq 35)$$

例 4-3-30　在一次投弹演习中，一架飞机在离地面 490 米的上空以 100 米/秒的速度作水平飞行。问在飞机上观测预定目标的俯角多大时投弹，才能准确地命中目标(重力加速度 g=9.8 米/秒 ^{2})？



解　如图。建立直角坐标系。炸弹下落的路线是抛物线，其参数方程为

$$\begin{cases} x=10t \\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

消去 t 得抛物线的普通方程为

$$y=-\frac{g}{20000}x^2$$

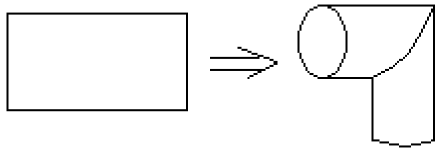
设目标 A 的坐标为(x，-490)，此点坐标满足上式。以 y=-490 代入，求得$x=1400\sqrt{5/9.8}$

设所求俯角为θ，则

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{490}{1400\sqrt{\frac{5}{9.8}}}=\frac{7}{20}\sqrt{\frac{9.8}{5}}\approx\frac{7}{20}\times 1.4=0.49$$

查表得θ≈26°6′。故所求俯角为 26°6′。

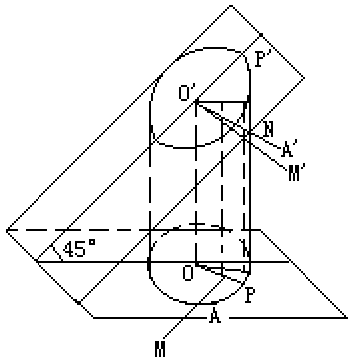
例 4-3-31　烟筒弯头是由两个马蹄形的烟筒咬在一起做成的(如下图)。现在要用长方形铁片做成一个直角弯头。



(1)应将铁片按照什么样的曲线剪开，才能既省工，又节约？

(2)若弯头直径 9㎝，最短母线长 6㎝，应选择长和宽各为多少的铁片？

解　(1)如下图，马蹄形的斜面与底面成 45°角。



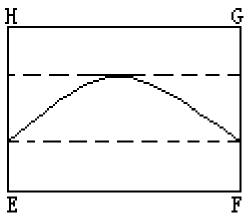
令 $OP=l$，$AP=x$，则$\angle AOP=x$。令 $OO'=a$，于是 $PN=OO'=a$，$\angle M'NP'=90°$，$\angle P'M'N=45°$，$NP'=M'N=MP=\sin x$，所以

$y=PP'=PN+NP'=a+\sin x$

即展开面的截口是正弦曲线。

若以最短母线为柱面的咬口，则展开图如右图中曲线及其以下的部分；若以最长母线为柱面的咬口，则展开如右图中曲线及其以上的部分。这样将长方形铁片按照右图所示的正弦曲线剪开，则既省工，又节约。

(2)据图，



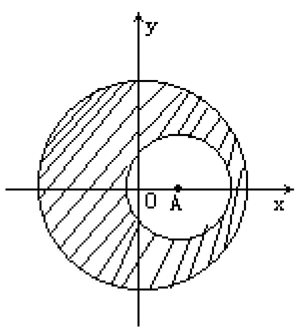
$EF=9\pi\approx 9\times 3.1416\approx 28.29$(㎝)

$EH=9+6\times 2=21$(㎝)

即所选长方形的长和宽分别为 28.27㎝ 和 21㎝。(注意到咬口还要用一小部分铁板，实际的长和宽须稍大一些。)

习题

14-3-76　如图。一个均匀薄圆片，挖去了一个圆孔，均匀薄片的直径为 100，圆孔的直径为 50，圆片的圆心与圆孔的圆心相距 18。在所给坐标系中，求剩余部分重心的位置。

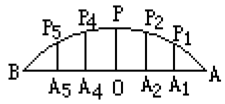


14-3-77　一条光线从点 A(-3，5)射到直线 l：$3x-4y+4=0$ 以后，再

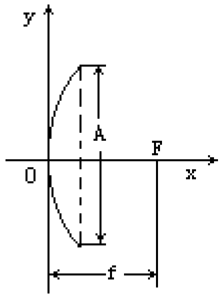
反射到一点 B(2，15)，求这条光线从 A 到 B 的长度。

14-3-78　一辆卡车高 3 米，宽 1.6 米，欲通过抛物线形隧道。拱口宽恰好是抛物线的正焦弦长，若拱口宽为 a 米。求能使卡车通过的 a 的最小整数值。

14-3-79　右图是某圆拱桥的一孔圆拱的示意图。这孔圆拱的跨度|AB|是 30 米，拱高|OP|是 5m。在建造时，每隔 5m 需要用一个支柱支撑。求支柱 A_2P_2 的长(精确到 0.0lm)。

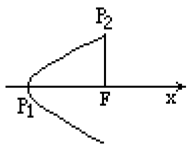


14-3-80　雷达站的抛物线反射面有几个重要的特征数：焦距 f，开口直径A，深度d，焦距开口比$\frac{f}{A}$。如右图建立坐标系，使反射面的抛物线方程为 $y^2=2px$。显然，FO=f，p=2f，且方程中 $0\le x\le d$，$|y|\le$。现雷达站需装置一个侦察人造卫星用的抛物线反射面，要求其焦距开口比$\frac{f}{A}=0.25$，焦距$f=7.5$米，那么这个反射面应有多大的开口和深度？



14-3-81　设有一颗彗星，围绕地球沿一抛物线轨道运行，地球恰好位于这抛物线轨道的焦点处，当此彗星离地球为 d 时经过地球和彗星的直线与抛物线的轴的夹角为 30°。求该彗星与地球的最近距离。

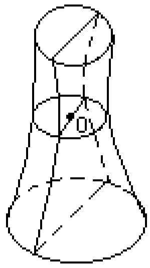
14-3-82　一个彗星的轨道是以太阳为焦点 F 的圆锥曲线。在彗星的轨道平面内，彗星在点 P_1 的位置时，与太阳的最短距离 FP1=2 亿千米；当彗星运行到点 P_2 位置时，FP_1 垂直于 FP_2，且 FP_2=3.6 亿千米(如右图)。这个彗星还会再回来吗？



14-3-83　有一种商品在 A，B 两地都有出售，且两地的价格相同。但是某地区的居民从两地往回运时，每单位距离从 A 地运的运费是从 B 地运的 3 倍。已知 A，B 两地的距离是 10 千米。顾客购买这种商品时选择从 A 地买或从 B 地买的标准是：使包括运费在内的总费用比较便宜。求从 A，B 两地购买此种商品运费相等的点的轨迹图形，并指出在轨迹图形上、图形内、图形外的居民如何选择从 A 地或 B 地购买最合算。

14-3-84　已知双曲线型自然通风塔的外形是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面(如图)。现要制造一最小半径为 12 米，下口半径为

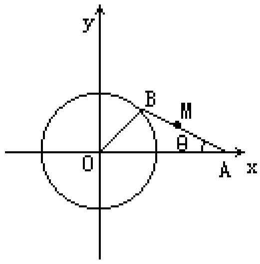
25 米，下口到最小半径圆面的距离为 45 米，高为 55 米的双曲线自然通风塔，问上口半径应为多少米？



14-3-85　在相距 3400 米的 A，B 两地，听到炮弹爆炸声的时间相差 6 秒，且 B 处的声强是 A 处的 4 倍。试求炮弹爆炸点 P 到 A 的距离(声速 340 米/秒，声强与距离的平方成反比)。

14-3-86　在不考虑空气阻力、风向等因素的条件下，炮弹的飞行轨道是一条抛物线。现测得我炮位 A 与目标 B 的水平距离为 6000 米，而当射程为 6000 米时，炮弹最大高度为 1200 米。在 A，B 之间距炮位 A 点 500 米处有一个高度为 350 米的障碍物。试计算炮弹能否越过障碍物而击中目标？

14-3-87　如图，OB 是机器上的曲柄，长为 r，绕点 O 转动，AB 是连杆，M 是 AB 上一点，|MA|=a，|MB|=b。当 A 在直线 Ox 上往返运动时，点 B 绕着点 O 作圆周运动。求点 M 轨迹的参数方程。



习题答案

第一部分　幂函数、指数函数和对数函数

(一)集合

1．集合的概念、子集

1-1-1　B　1-1-2　C　1-1-3　D

l-l-4　$\{x|x=(-1)^{n+1}(2n-1), n\in N\}$

1-1-5　{-6，-4，-2，0，2，4，6}

1-1-6　因为 x∈A，x 为正整数，所以 x≥1。类似地，8-x≥1，所以 1≤x≤7。所以 A 只能是由 1，2，3，4，5，6，7 中某些数组成的集合。由此可得如下答案：

(1)有 1 个，是{4}；

(2)有 3 个，是{1，7}，{2，6}，{3，5}；

(3)有 15 个(除有 1 个一元集合、3 个二元集合外，三、四、五元集各有 3 个，六、七元集各有 1 个。

1-1-7 由题设，得$1<\frac{y-1}{y}<3$。解得$y<-\frac{1}{2}$。所以y的取值范围是集合$\{y|y<-\frac{1}{2}\}$。

1-1-8 (1)当$m=a$，$n=0$时，有$m+n\sqrt{2}=a$，所以$a\in S$。

(2)令$x_1=m_1+n_1\sqrt{2}$，$x_2=m_2+n_2\sqrt{2}$，m_1，m_2，n_1，$n_2\in Z$，有

$$x_1+x_2=(m_1+m_2)+(n_1+n_2)\sqrt{2}$$

$$x_1x_2=(m_1m_2+2n_1n_2)+(m_1n_2+m_2n_1)\sqrt{2}$$

这里 m_1+m_2，n_1+n_2，$n_1m_2+2n_1n_2$，$m_1n_2+m_2n_1\in Z$，所以

$x_1+x_2\in S$，$x_1\cdot x_2\in S$

(3)$0<m+n\sqrt{2}<1\Leftrightarrow -\sqrt{2}n<m<-\sqrt{2}n+1$

若 n=0，S 中不含满足所给条件的元素；若 n≠0，在相差为 1 的两个无理数之间恰有一个整数，此时 S 中满足所给条件的元素恰有一个。

l-1-9　D　1-1-10　B　1-1-11　C

1-1-12　$x\in A$，$y\notin A$

1-1-13　x=y

1-1-14　有8个，它们是∅，{l}，{2}，{(l，2)}，{1，2}，{1，(l，2)}，{2，(l，2)}，{1，2，(l，2)}。

1-1-15　假设 $a+d=aq$，$a+2d=aq^2$，解得 q=1。于是有 $a=aq=aq^2$，与集合元素的互异性矛盾。故只能有$a+d=aq^2$，$a+2d=aq$，解得$q=-\frac{1}{2}$(q=1 舍去)。

l-l-16　令

$2x^2-ay^2-(2a-1)xy+4ay-2=(2x+y-2)(x-ay+b)$

展开后比较系数得$a=\frac{1}{2}$。

l-1-17　因为 A 的元素都是 210 的因数，而 210=2·3·5·7，故 A 的元素只能是 2，3，5，7 及其中某几个的乘积，且乘积中的每一个因数的次数都不超过 1。

若 2∈A，则 A 中其他元素也应是偶数。满足上述条件的偶数共有 8 个：2，2·3=6，2·5=10，2·7=14，2·3·5=30，2·3·7=42，2·5·7=70，2·3·5·7=210。因 A 的元素个数大于 7，故 A={2，6，10，14，30，42，70，210}，但它们的

乘积$2^8\cdot 3^4\cdot 5^4\cdot 7^4$是完全平方数，不合题意，故$2\notin A$。

因为 $1920=2^7\cdot 3\cdot 5$，故 A 的元素中至少应有 7 个偶数。因此 6，10，14，30，42，70，210 都属于 A，此外 A 中至少还应有一个奇数。设 a∈A，a 是奇数，则 a 与 b 的公约数是 3，与 10 的公约数是 5，与 14 的公约数是 7，于是 a 是 3·5·7 的倍数。因为 a≤210，得 a=3·5·7=105。并且这样的 a 是惟一的，因此 A={6，10，14，30，42，70，105，210}。易知它的元素之积不是完全平方数，满足要求。

2．交集，并集，补集

1-1-18　C　1-1-19　C　1-1-20　B　1-1-21　1988

1-1-22　{x|-b≤x≤b，x∈R}；{x|a≤x≤-a，x∈R}。

l-1-23　因为$A\cup B=A$，所以$B\subseteq A$。又$A=\{1,2\}$，它的子集有$\varnothing$，{1}，{2}，{1，2}，而方程 $x^2-ax+(a-1)=0$ 的根为 1 和 a-l，所以 B 的可能情形只有 a-1=1 或 a-1=2，即 a=2 或 a=3。

因为$A\cap C=C$，所以$C\subseteq A$。易知当$m=3$时，$C=A$；当$C=\varnothing$时，因为$\triangle=m^2-8<0$，故$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$。

1-1-24　(A∪B)∩C=(A∩C)∪(B∩C)。A∩C 与 B∩C 分别为

$$(\mathrm{I})\begin{cases}ax+y=1\\x^2+y^2=1\end{cases}\text{和}\qquad(\mathrm{II})\begin{cases}x+ay=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$$

的解集。解之得：(Ⅰ)的解为$(0,1)$，$(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2})$；(Ⅱ)的解为$(1,0)$，$(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2})$。

(1)使(A∪B)∩C 恰有两个元素的情况只有两种可能：

$$\begin{cases}\frac{2a}{1+a^2}=0\\\frac{1-a^2}{1+a^2}=1\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\frac{2a}{1+a^2}=1\\\frac{1-a^2}{1+a^2}=0\end{cases}$$

解得 a=0 或 a=1。

(2)使$(A\cup B)\cap C$恰有三个元素的情况是$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$，解得

$$a=-1\pm\sqrt{2}$$

1-1-25　D　1-1-26　A　1-1-27　C

1-1-28　{b，d，f，h}；{c，d，g}

1-1-29　20

1-1-30 因为$A\cup\overline{A}=I$，所以$\{|a+1|，2，5\}=\{2，3，a^2+2a-3\}$。所以|a+1|=3，且 $a^2+2a-3=5$，解得 a=2 或 a=-4。

1-1-31　由已知得 P=(-∞，0]，Q=[-1，+∞)。于是 P∩Q=[-1，0]，$P\cup Q=R$，$\overline{P\cup Q}=\overline{R}=\varnothing$，$\overline{P}\cap Q=(0，+\infty)$。

1-1-32　(1)因为 28m+20n=4(7m+5n)，所以 A 的元素是 4 的倍数。因为 12m+18n=6(2m+3n)，所以 B 的元素是 6 的倍数。因此，A∩B 的元素是 12 的倍数。当 m=4，n=-5 时，28m+20n=12∈A；当 m=1，n=0 时，12m+18n=12∈B。所以 12∈A∩B 是所求的最小正整数。

(2)A={0，1，4}，B={0，1，3，4}。A∩B={0，1，3，4}，$\overline{A}\cap B=\{3\}$。

(二)一元二次不等式

1．|ax+b|＜c，|ax+b|＞c(c＞0)型不等式

1-2-1　A　1-2-2　B　1-2-3　D

1-2-4　(1)x=2　(2){x|x＞9}　1-2-5　6

1-2-6　{x|0≤x≤3}。对|2x+3|≥|4x-3|两边平方可得。

1-2-7 当$a>0$时，$|x-1|>\frac{2}{a}+1$，解得$x<-\frac{2}{a}$或$x>\frac{2}{a}+2$；当$a=0$时，解集为$\varnothing$；当$-2\le a<0$时，$|x-1|<\frac{2}{a}+1$，因$\frac{2}{a}+1<0$，不等式的解集为$\varnothing$；当$a<-2$时，$|x-1|<\frac{2}{a}+1$，但$\frac{2}{a}+1>0$，解得$-\frac{2}{a}<x<\frac{2}{a}+2$。

1-2-8 (i)当$x<3$时，原不等式化为$-x+4-x+3<a$，所以$x>\frac{7-a}{2}$，此时$\frac{7-a}{2}<x<3$，故$\frac{7-a}{2}<3$，所以$a>1$。

(ii)当 3≤x＜4 时，原不等式化为-x+4+x-3＜a，所以 a＞1。

(iii)当$x\ge 4$时，原不等式化为$x-4+x-3<a$，所以$x<\frac{7+a}{2}$，此时$4<x<\frac{7+a}{2}$，故$4<\frac{7+a}{2}$，所以$a>1$。

综上可知，使原不等式在 R 上的解集不为空集的 a 的取值范围是 a＞1。

2．一元二次不等式

1-2-9　B　1-2-10　D

1-2-11　D　由已知条件可得 p=5，q=-6

1-2-12　C

1-2-13 (1)$\{x|x\ne\sqrt{5}，x\in R\}$

(2)$\{x|x\in(-\infty，-\frac{1}{3})\cup[3，+\infty)\}$

$$\frac{4x-2}{3x+1}-1\ge 0\Leftrightarrow\frac{x-3}{3x+1}\ge 0\Leftrightarrow x\ge 3\text{或}x<-\frac{1}{3}$$

1-2-14　(-∞，-2]∪(-1，0)∪(4，+∞)；(-2，-1]

1-2-15　[0，1]

1-2-16　-5＜m≤4。由已知条件得

$$\begin{cases}\triangle=(m+2)^2-4(m+5)\ge 0\\ x_1x_2=m+5>0,\\ x_1+x_2=-(m+2)>0\end{cases}$$

解之即得：

1-2-17　易知 A=[-2，5]。

(i)当$B\ne\varnothing$时，即$p+1\le 2p-1$，解得$p\ge 2$。因为$B\subseteq A$，所以$-2\le p+1$

且 $2p-1\le 5$，所以 $-3\le p\le 3$，所以 $2\le p\le 3$。

(ii)当 $B=\varnothing$ 时，即 $p+1>2p-1$，故 $p<2$。因为 $\varnothing\subset A$，所以 $p<2$。

综合(i)，(ii)得 $p\le 3$。

1-2-18　由题设，知

$$\begin{cases} k-1\neq 0 \\ \triangle=(2k-3)^2-4(k-1)(k-7)>0 \\ x_1x_2=(k-7)/(k-1)<0 \\ x_1+x_2=-(2k-3)/(k-1)<0 \end{cases}\Leftrightarrow \frac{3}{2}<k<7$$

1-2-19　$A\cap B$ 的端点必是 $x^2-ax-8=0$ 或 $x^2-2ax-b=0$ 的解，并且因为 $5\notin A\cap B$，故 5 不是 $x^2-ax-8=0$ 的解（这个方程的解是属于 A 的）。在 $x^2-ax-8=0$ 中，令 $x=4$，得 $a=2$。因为 5 不是 $x^2-2x-8=0$ 的解，故必是 $x^2-4x-b=0$ 的解，由此得 $b=5$。解 $x^2-2x-8\ge 0$ 得 $A=\{x|x\le -2，x\ge 4\}$。解 $x^2-4x-5<0$ 得 $B=(-1，5)$。故 $A\cup B=(-\infty，-2)\cup(-1，+\infty)$。

1-2-20 $\begin{cases} x^2+mx+1>2x+m \\ |m|<2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (x-1)(x-1+m)>0 \\ -2<m<2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x-1>0 \\ x-1+m>0 \\ -2<m<2 \end{cases}$或$\begin{cases} x-1<0 \\ x-1+m<0 \\ -2<m<2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x>3$ 或 $x<-1$。

(三)映射与函数

1．映射

1-3-1 D 1-3-2 B 1-3-3 B 1-3-4 D

1-3-5 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ 1-3-6 $A\subseteq R$且$-1\notin A$

1-3-7 (1)因为$y=\frac{2\times4-1}{2\times4+1}=\frac{7}{9}$，所以4的象为$\frac{7}{9}$。

(2)令$=\frac{9}{11}=\frac{2x-1}{2x+1}$，解之得$x=5$，所以$\frac{9}{11}$的原象为5。

(3)任取x_1，$x_2\in N$，若$\frac{2x_1-1}{2x_1+1}=\frac{2x_2-1}{2x_2+1}$，易知$x_1=x_2$。这表明集B中任一元素y在集A中只有惟一的一个原象。

1-3-8 由题意得

$uv-xy=39$ (i)

$uy-xv=66$ (ii)

(i)+(ii)得

$(u-x)(v+y)=3\cdot5\cdot7$ (iii)

(ii)-(i)得

$(y-v)(u+x)=3\cdot3\cdot3$ (iv)

由于$0<u-x<9$，$v+y\leq18$，$0<y-v<9$，$u+x\leq18$，所以由(iii)、(iv)可得$u-x=7$，$v+y=15$，$y-v=3$，$u+x=9$，解得

$u=8$，$v=6$，$x=1$，$y=9$

2．函数

1-3-9 D

1-3-10 D 分别考虑截距和直线倾斜的方向是否相容。

1-3-11 D

1-3-12 B 由二次函数的顶点坐标和边界值确定其值域。

1-3-13 $-x^2$ 因$x<0$，所以$f(x)=-x^2$。又$-x^2<0$，所以

$\varphi[f(x)]=\varphi(-x^2)=-x^2$

1-3-14 A

1-3-15 [0，4] 由$2y^2=6x-3x^2\geq0$得

$0\leq x\leq2$，$x^2+y^2=x^2+\frac{1}{2}(6x-3x^2)=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}$

易知$0\leq x^2+y^2\leq4$。

1-3-16 $a<-1$或$a>1$ 原题意即$a|x|=x+a$有两个解。当$x>0$时，有$x=\frac{a}{a-1}>0$，则$a>1$或$a<0$；当$x<0$时，有$x=\frac{-a}{a+1}<0$，则$a<-1$或$a>0$。综合得$a>1$或$a<-1$。

1-3-17 要使$x\in R$，须$kx^2+4kx+3\neq0$。

(1)当$k\neq0$时，只须$\triangle=(4k)^2-4\cdot k\cdot3<0$，则$0<k<\frac{3}{4}$；

(2)当 k=0 时，$kx^2+4kx+3\neq0$。

综上，k的取值范围是[，$\frac{3}{4}$)。

1-3-18　(1)$|2x-1|+5x-2\geq0\Leftrightarrow|2x-1|\geq2-5x$

$\Leftrightarrow$ 或$2x-1\leq-2(2-5x)$或$2x-1\geq2-5x\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{3}$

所以，所求定义域为[$\frac{1}{3}$，$+\infty$]。

(2)$x^2-|x|\neq0\Leftrightarrow|x|(|x|-1)\neq0$

$\Leftrightarrow|x|\neq0$ 且$|x|-1\neq0\Leftrightarrow0$，$\pm1$

定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$。

(3)$\begin{cases}1-|x-a|\geq0\\1-|x+a|\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-a|\leq1\\|x+a|\leq1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a-1\leq x\leq a+1\\-a-1\leq x\leq-a+1\end{cases}$

当$a>1$时，$-a+1<x<a-1$，上述不等式组的解集为$\varnothing$；当$0<a\leq1$ 时，解集为$[a-1,1-a]$。故当 $0<a\leq1$ 时，定义域为$[a-1,1-a]$；当$a>1$ 时，函数不存在。

1-3-19　(1)因为 f(x)的定义域为[a，b]，所以

$\begin{cases}a\leq x\leq b\\a\leq-x\leq b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\leq x\leq b\\-b\leq x\leq-a\end{cases}$

又因为 $b>-a>0$，所以$-b<a<0$。所以所求定义域为$\{x|a\leq x\leq-a\}$。

(2)由题设，有

$\begin{cases}a\leq x+c\leq b\\a\leq x-c\leq b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c\leq x\leq b-c\\a+c\leq x\leq b+c\end{cases}(c>0)$

令$b-c\geq a+c$，得$0<c\leq\frac{1}{2}(b-a)$。所以，当$c>\frac{1}{2}(b-a)$时，函数不存在；当$0<c\leq\frac{1}{2}(b-a)$时，$g(x)$的定义域为$\{x|a+c\leq x\leq b+c\}$。

1-3-20　令$-x^2+ax+b\geq0$，得

$\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\leq x\leq\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}(a^2+4b\geq0)$。

$y=a+\sqrt{-x^2+ax+b}=a+\sqrt{-(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2+4b}{4}}$

所以 $a\leq y\leq a+\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}$

令$a=4$，$a+\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}=7$，解得$a=4$，$b=5$。

1-3-21　因为

$$2f(x)-f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x} \qquad \text{(i)}$$

所以 $$2f(\frac{1}{x})-f(x)=x \qquad \text{(ii)}$$

由(i)，(ii)**消去**$f(\frac{1}{x})$**得**$f(x)=\frac{x}{3}+\frac{2}{3x}$。

(四)幂函数

1．分数指数幂与根式

1-4-1　A　1-4-2　B　注意$(a^m)^n=a^{mn}$成立的条件。

1-4-3 A **1-4-4** A **注意：**$\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}=\sqrt[6]{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

1－4－5 $(1)\dfrac{1}{a}\quad(2)\dfrac{3}{2}$

1－4－6 $\dfrac{4}{343}$ **原式**$=a^{-4}b^6$

1-4-7 $\because\dfrac{x+y}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$，$\dfrac{x^{\frac{4}{3}}-y^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$，

∴原式$=-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$。

1-4-8 原式$=\left[(\dfrac{x+a}{x-a})^{\frac{1}{3}}+(\dfrac{x-a}{x+a})^{\frac{1}{3}}-2\right]^{-\frac{1}{2}}$

$$=\left[\left(\frac{\frac{2am^3}{m^3-n^3}}{\frac{2an^3}{m^3-n^3}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{\frac{2an^3}{m^3-n^3}}{\frac{2am^3}{m^3-n^3}}\right)^{\frac{1}{3}}-2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}-2)^{-\frac{1}{2}}=\left[\frac{(m-n)^2}{mn}\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{mn}}{m-n}$$

1-4-9 因为$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$**，所以**$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=-z^{\frac{1}{3}}$**。两边立方得**

$$x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=-z$$

所以　$3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=-(x+y+z)$

即　$3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(-z^{\frac{1}{3}})=-(x+y+z)$

两边再立方得

$$(x+y+z)^3=27xyz$$

2．幂函数

1-4-10　B　1-4-11　C　1-4-12　C

1-4-13　B　1-4-14　A

1-4-15 B $2^{-\alpha}=(\dfrac{1}{2})^{\alpha}$**，**$(0.2)^{\alpha}=(\dfrac{1}{5})^{\alpha}$**，又**$-1<\alpha<0$**，所以**

$$(\frac{1}{5})^{\alpha}>(\frac{1}{2})^{\alpha}>2^{\alpha}$$

1-4-16　＞；＜；＜；＞。

1－4－17 $\pm\sqrt{3}$**；**-1**；**2 **若**$f(x)$**为正比列函数，则**

$$\begin{cases} m-1\neq 0 \\ m^2-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}$$

若 f(x)为反比例函数，则

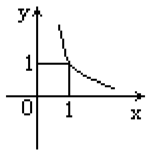
$$\begin{cases} m-1\neq 0 \\ m^2-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m=\pm 1 \end{cases}$$

若 f(x)为幂函数，则

$$m-1=1\Leftrightarrow m=2$$

1－4－18 $3^{-\frac{2}{3}}<(\frac{2}{3})^{-\frac{2}{3}}<2^{\frac{2}{3}}$ **由**$\frac{1}{3}<\frac{3}{2}<2$**得**$(\frac{1}{3})^{\frac{2}{3}}<(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{2}{3}}$**，即**$3^{-\frac{2}{3}}<(\frac{2}{3})^{-\frac{2}{3}}<2^{\frac{2}{3}}$**。**

1－4－19 $y=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$**，函数的定义域**$(0,\ +\infty)$**，值域为**$(0,$ **+∞)图象如下。由图象可知，在区间(0，+∞)上函数值 y 随 x 的增加而减小。**



1-4-20 (1)

$\because\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=8^{\frac{1}{6}}$**，**$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=6^{\frac{1}{6}}$

$\therefore\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

$\because\sqrt{2}=32^{\frac{1}{10}}$**，**$\sqrt[5]{5}=25^{\frac{1}{10}}$

$\therefore\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$

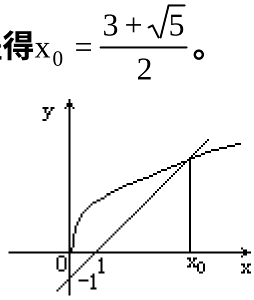
$\because\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}$

$\therefore\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$

(2) **在同一坐标系中作幂函数**$y=\sqrt{x}$**与一次函数**$y=x-1$**的图象。设两图象相交于 A 点，设 A 点横坐标为 x_0，则**

$$\sqrt{x_0}=x_0\Rightarrow x_0^2-3x_0+1=0$$

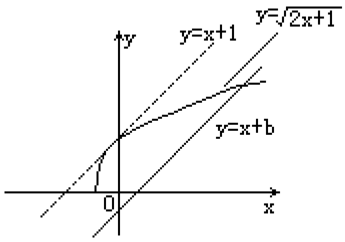
因为$x_0>1$**，由上方程得**$x_0=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$**。**



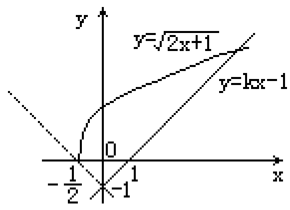
所以不等式的解为$\{0|0\leq x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$**。**

1-4-21

(1)作$y=\sqrt{2x+1}$的图象如图甲，从$\sqrt{2x+1}=x+b$，可得$x2+2(b-1)x-b^2-1=0$。当$b=1$时，判别式$\Delta==2-2b=0$。当$b=\frac{1}{2}$时，直线$y=x+\frac{1}{2}$通过点($\frac{1}{2}$，0)(曲线$y=\sqrt{2x+1}$的端点)，结合图甲可见，b＞1时没有交点；b = 1或b＜$\frac{1}{2}$时有一个交点；$\frac{1}{2}\le b$＜1时有两个交点。



甲



乙

(2)直线族$y=kx-1$总经地点(0， -1)，其中，经过点($-\frac{1}{2}$，0)的直线方程是 y=-2x-1。由图乙可见，当-2＜k≤0 时没有交点；对 k 的其他值有一个交点。

(五)函数的性质、反函数

1．函数的单调性

1-5-1 C 1-5-2 C

1－5－3 A 因f(x)的增区间是[$\frac{m}{8}$， +∞]，故[−2， +∞]⊆[$\frac{m}{8}$，+∞]。反以$-2\ge\frac{m}{8}$，所以$m\le-16$。又$f(1)=9-m$，所以$f(1)\ge25$。

1－5－4 C 1－5－5 (1)[2， +∞] (2)[$-\frac{1}{2}$，0]

1-5-6 13

1-5-7 设 x_1，x_2∈[1，+∞]，且 $x_1<x_2$ 则

$$f(x_2)-f(x_1)=\sqrt{x_2^2-1}-\sqrt{x_1^2-1}=\frac{x_2^2-x_1^2}{\sqrt{x_2^2-1}+\sqrt{x_1^2-1}}。$$

因为$x_2>x_1\ge1$，所以$x_2^2-x_1^2>0$，于是$f(x_2)>f(x_1)$。故f(x)在[1，+∞]上递增。

1-5-8 设$-1<x_1<x_2<1$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{ax_1}{x_1^2-1}-\frac{ax_2}{x_2^2-1}=a[\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}]$$

因为$-1<x_1<x_2<1$，所以

$$x_2-x_1>0，x_1x_2+1>0，x_1^2-1<，x_2^2-1<0。$$

当 $a>0$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$，$f(x)$在$(-1, 1)$上是减函数；

当 $a<0$ 时，$f(x_2)<f(x_2)$，$f(x)$在$(-1, 1)$上是增函数；

当 $a=0$ 时，$f(x)=0$，$f(x)$在$(-1, 1)$上不增不减。

1-5-9

(1)$a+b>0$ 时，$a>-b$，$b>-a$，由 $f(x)$是 R 上的增函数，有

$$f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$$

若 $a+b=0$ 时，上述不等式取等号。

(2)用反证法可证明逆命题正确。事实上，如果 $a+b\geq 0$ 不成立，则 $a+b<0$，故 $a<-b$，$b<-a$，从而

$$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-bs)$$

这与已知矛盾。

1-5-10

(1)在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中令 $x=y=1$，得 $f(1)=f(1)+f(1)$，所以 $f(1)=0$。

(2)$2=1+1=f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{3})=f(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3})=f(\frac{1}{9})$。由$f(x)+f(2-x)<2$得$f[x(2-x)]<f(\frac{1}{9})$，由于$f(x)$是定义在$R^+$上的减函数，所以$x>0$，$2-x>0$，$x(2-x)>\frac{1}{9}$，联立解得$1-\frac{2\sqrt{2}}{3}<x<1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

1-5-11

(1)设$x_1>x_2\geq 0$，则$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2-x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}>0$，所以$f(x_1)<f(x_2)$，所以$f(x)$在$[0, +\infty]$上的增函数。

(2)因为$f(x)=\frac{x}{1+x}(x\geq 0)$是增函数，又$0\leq|a+b|\leq|a|+|b|$，所以

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

又$\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$，所以

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

2．函数的奇偶性

1-5-12　B　1-5-13　D　1-5-14　C　1-5-15　A

1-5-16　A　1-5-17　0　1-5-18　偶函数

1-5-19　$f(-3/4)\geq f(a^2-a+1)$

因为$f(-\frac{3}{4})=f(\frac{3}{4})$，而$a^2-a+1\geq\frac{3}{4}$。

1－5－20　$(-\infty, m]\cup[-m, +\infty)$

1－5－21　$(-\infty, -\pi)\cup(\pi, +\infty)$

1-5-22

(1)非奇非偶函数。

(2)当 k=4m(m∈Z)时，f(x)是偶函数；当 k=4x+2(m∈Z)时，f(x)是奇函数；当 k=4m+1 或 k=4m+3(m∈Z)时，f(x)是非奇非偶函数。

(3)当 x＞0 时，-x＜0，所以

$f(-x)=-(-x)^2(-x+1)=x^2(x-1)=f(x)$

当 x=0 时，-x=0，所以 f(-x)=0=f(x)；

当 x＜0 时，-x＞0，所以

$f(-x)=(-x)^2(-x-1)=-x^2(x+1)=f(x)$

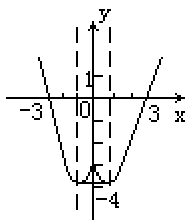
综上所述，恒有 f(-x)=f(x)，故 f(x)为偶函数。

1-5-23

(1)所求表达式为

$$y=\begin{cases}x^2-2x-3，x\in[0，+\infty)\\x^2+2x-3，x\in(-\infty，0)\end{cases}$$

(2)图象如下图所示。



(3)[-1，0]，[1，+∞]各是递增区间(-∞，-1]，[0，1]各是递减区间。

(4)当 x＜-3 或 x＞3 时，y＞0；

当-3x＜x＜3 时，y＜0。

(5)当 x=±1 时，y_{min}=-4。f(x)无最大值。

1-5-24　f(7)=27

1-5-25　只须证明函数 f(x)为奇函数。易知 f(x)的定义域为 R。f(0)=0=-f(0)。当时 x≠0，有

$$f(x)=\frac{(\sqrt{1+x^2}+x-1)[\sqrt{1+x^2}-(x+1)]}{(\sqrt{1+x^2}+x+1)[\sqrt{1+x^2}-(x+1)]}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)-(x+1)^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

显然 f(-x)=-f(x)，所以 f(x)为奇函数。从而 f(x)的图象关于原点对称。

1-5-26　令 $x_1=0$，$x_2=x$，得

$$f(x)+f(-x)=2f(0)f(x) \qquad (i)$$

再令 $x_1=x$，$x_2=0$，得

$$f(x)+f(x)=2f(0)f(x) \qquad (ii)$$

(i)-(ii)得，f(-x)-f(x)=0，即 f(-x)=f(x)。故 f(x)为偶函数。

3．所函数

1-5-27　D

1－5－28　B　由$f(2x-1)=\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}$得$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$。易知$f^{-1}(x)=2x-3$。

1-5-29　A　1-5-30　C

1-5-31

$(1)f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}(0\leq x\leq 2)$

$(2)f^{-1}(x)=-x^{-\frac{1}{4}}(x>0)$

1－5－32　$[\sqrt{2}，+\infty)$　1－5－33　$f^{-1}(1)<f^{-1}(3)$

1-5-34

$(1)f^{-1}(x)=\frac{1+\sqrt{8x-7}}{4}(x\geq 2)$

$(2)f^{-1}(x)=\begin{cases}x，x\in(-1，0]\\ \sqrt{x}，x\in(0，4)\end{cases}$

1-5-35　设 $y=f^{-1}(x)$的定义域为 M。任取 x_1，$x_2\in M$，且 $x_1<x_2$。令 $y_1=f^{-1}(x_1)$，$y_2=f^{-1}(x_2)$，则 y_1，y_2 一定在原函数的定义域内，由反函数可知 $f(y_1)=x_1$，$f(y_2)=x_2$。因为 $x_1<x_2$，而 $y=f(x)$在其定义域内为增函数，所以 $y_1<y_2$，即 $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$，所以 $f^{-1}(x)$在其定义域内也是增函数。

同理可证，当 $y=f(x)$为减函数时，其所函数也是减函数。

1-5-36　D　1-5-37　B　1-5-38　D

1-5-39　$y=x^2+1(x\leq 0)$　1-5-40　1

1-5-41

(1)由已知，得 $x(y-2)=1-ay$。

若$y=2$，则$2x+2a=2x+1$，由此得$a=\frac{1}{2}$，与已知$a\neq\frac{1}{2}$矛盾。所以$y\neq 2$，从而$x=\frac{1-ay}{y-2}$，于是有

$$f^{-1}(x)=\frac{1-ax}{y-2}(x\in R，x\neq 2)$$

(2)由题设有$\frac{2x+1}{x+a}=\frac{1-ax}{x-2}$在它们都有意义的$x$值范围内恒成立，即

$$(a+2)x^2+(a^2-4)x-(a+2)=0$$

在上述 x 值范围内恒成立。所以

$$\begin{cases}a+2=0\\ a^2-4=0\\ a+2=0\end{cases}\Leftrightarrow a=-2$$

(3)由(1)知$f^{-1}(x)=\frac{1-ax}{x-2}(x\in R且x\neq 2)$，所以

$$\frac{1-3a}{3-2}=-\frac{2}{a}\Rightarrow 3a^2-a-2=0$$

$$\Rightarrow a=1\text{或}a=-\frac{2}{3}$$

(六)指数函数和对数函数

1．指数函数

1-6-1　A

1-6-2　C　由 $y=(-a)^x$ 知 a＜0。由指数函数、二次函数的图象的性质易知应选 C。

1-6-3　C　因为原函数必过(1，4)点，所以所函数必过(4，1)点。

1－6－4 C **1－6－5** A **1－6－6** $P\subset N\subset M$

1-6-7　2^x+1　因为 $f^{-1}(x)$的图象过点(2，0)，所以 f(x)的图象过点(0，

2)。**从而有**$\begin{cases}a^0+k=2\\a^1+k=3\end{cases}$，**由此得**$a=2$，$k=1$。

1－6－8 $\{x|-1<x<-\frac{1}{3}\}$

1-6-9　当 0＜a＜1 时，m＜n；当 a＞1 时，m＞n。

1－6－10 $3^x+2^{2y+1}=3^x+2(a^2-9^x)=-2(3^x-\frac{1}{4})^2+2a^2+\frac{1}{8}$

所以当$3^x=\frac{1}{4}$**时，**3^x+2^{2y+1}**有最大值为**$2a^2+\frac{1}{8}$。

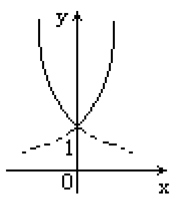
1-6-11

$(1)\because y^2-1=\frac{1}{4}(a^x+a^{-x})^2-1=\frac{1}{4}(a^x-a^{-x})^2$

$\therefore z=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})+\frac{1}{2}|a^x-a^{-x}|$

$\because a>1$，$\therefore z=\begin{cases}a^x, & x\geq 0\\a^{-x}, & x\leq 0\end{cases}$

(2)设 z=f(x)，易知 f(-x)=f(x)，故 f(x)为偶函数。图象如下。



1-6-12　a^x 与$-a^{-x}$(a＞0 且 a≠1)有相同的增减性.当 0＜a＜1 时，
$\frac{a}{a^2-2}<0$，**而**a^x**递减，所以此时**$f(x)$**递增；当**$a>\sqrt{2}$**时，**$\frac{a}{a^2-2}>0$，**而递**a^x**增，所以此时**$f(x)$**递增。故**a**的范围为**$(0，1)\cup(\sqrt{2}，+\infty)$。

2．对数

1-6-13　B　1-6-14　A　1-6-15　C　1-6-16　D

1－6－17　B　因为$f(x)$在$(-\infty，0]$上递减，而$-\sqrt{2}>-\frac{\pi}{2}$，所以$a=f(-\sqrt{2})<f(-\frac{\pi}{2})=c$；又$\log_2\frac{1}{4}=-2<-\frac{\pi}{2}$，所以$b=f(\log_2\frac{1}{4})>f(-\frac{\pi}{2})=c$。于是有$a<c<b$。

1-6-18　$(\frac{1}{2}，1)\cup(1，\frac{3}{2})$　1-6-19　$\lg 3$

1-6-20

$(1)x=-\frac{2}{3}$

$(2)y=1/2$　原式可化为$\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=10^y$，两边平方，得$10=10^{2y}$，所以$2y=1$，即$y=\frac{1}{2}$。

1-6-21

$$(1)原式=\lg 2\cdot\lg(\frac{100}{2})+\mathrm{lo}(\frac{10}{2})\cdot\lg(10\cdot 2)-2\lg(\frac{10}{2})\lg 2$$
$$=\lg 2(2-\lg 2)+(1-\lg 2)(1+\lg 2)-2(1-\lg 2)\lg 2=1$$

(2)原式 $2\lg 5+2\lg 2+(1-\lg 2)(1+\lg 2)+(\lg 2)^2=3$

1-6-22　设 $t=10^x$，则 $x=\lg t$，所以 $f(t)=2\lg t-3$，即 $f(x)=2\lg x-3$。

1-6-23　因为方程有等根，所以

$$\Delta=4-4\log_2(c^2-b^2)+8\log_2 a-4=0$$

$\Leftrightarrow\log_2(c^2-b^2)=\log_2 a^2\Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$

由勾股定理之逆定理即证。

1-6-24　在 $y=d^{1/(1-\log_a x)}$两边取以 d 为底的对数，得

$$\log_d y=\frac{1}{\log_a x}\tag{i}$$

同理，得

$$\log_d z=\frac{1}{1-\log_a y}\tag{ii}$$

将(i)代入(ii)，化简即得。

1－6－25　用反证法。若$\lg 3$不是无理数，则是有理数。设$\lg 3=\frac{m}{n}$，(这里m，n为互质整数，且$n\geq 1$。)则$10^{\frac{m}{n}}=3$，即$10^m=3^n$。若$m\geq 1$，则$10^m=3^n$左端的个位数为0，而右端因，其个位数只能是3，9，7，1之一，此为矛盾；若，则，而，故也不可能成立。

故 lg3 必为无理数。

3．对数函数

1-6-26　C　1-6-27　A　1-6-28　D　1-6-29　C

1-6-30　A　1-6-31　C　1-6-32　＞；＜；＞；＜。

1－6－33　$0<x\leq\frac{1}{2}$　定义域决定于不等式组

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x-1\geq 0\\ \sqrt{2^x}\neq\sqrt[3]{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x\geq 1\\ 2^{\frac{x}{2}}\neq 2^{\frac{1}{3}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\leq\frac{1}{2}\\ 2^{3x}\neq 2^2\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leq\frac{1}{2}$$

1－6－34　$(\frac{1}{2}，+\infty)$　原式$\Leftrightarrow(\frac{1}{2})^x<2^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow(\frac{1}{2})^x<(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$

1－6－35　$\frac{1}{3}<a<\sqrt[3]{3}$

$$f(x)=[(\log_3a)^2-6\log_3a+1]x-(\log_3a)^2+1$$

因为 f(x)在区间[0，1]上的值恒为正，故

$$\begin{cases}f(0)=-(\log_3a)^2+1>0\\ f(1)=(\log_3a)^2-6\log_3a+1-(\log_3a)^2+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{3}<a<\sqrt[3]{3}$$

1－6－36　$(0，\frac{2}{5})\cup(1，+\infty)$

1-6-37

(1)当 0＜a＜1 时，定义域为(-∞，0)；当 a＞1 时，定义域为(0，+∞)。

(2)当 a＞1 时，设 $0<x_1<x_2$，则

$$(a^{x_1}-1)-(a^{x_2}-1)=a^{x_1}-a^{x_2}<0$$

故 $f(x_1)><f(x_2)$，于是 f(x)为增函数。

当 0＜a＜1 时，同理 f(x)显增函数。

(3)$f^{-1}(x)=\log_a(a^x+1)$，由 $f(2x)=f^{-1}(x)$ 得 $a^{2x}-1=a^x+1$，解得 $x=\log_a2$。

1－6－38　由题设知$-3\leq x\leq 0$，所以$y=(\log_3\sqrt{t})^2-1=\frac{1}{4}x^2-1$，且$-1\leq y\leq\frac{5}{4}$，则$f^{-1}(x)=-2\sqrt{x+1}(-1\leq x\leq\frac{5}{4})$。

1－6－39　$\log_a\frac{t+1}{2}-\frac{1}{2}\log_a t=\log_a\frac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}$

当$t=1$时，$\log_a\frac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}=0$，所以$\log_a\frac{t+1}{2}=\frac{1}{2}\log_a t$。

当$t\neq 1$时，若$0<a<1$，则$\log_a\frac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}<\log_a 1=0$，所以$\log_a\frac{t+1}{2}<\frac{1}{2}\log_a t$；若$a>1$，则$\log_a\frac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}>\log_a 1=0$，$\therefore\log_a\frac{t+1}{2}>\frac{1}{2}\log_a t$。

$1-6-40$ 设$y=f(x)$，则$3^y=\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$，即

$$(3^y-m)x^2-8x+3^y-n=0$$

由 $x\in R$，得$\Delta=64-4(3^y-m)(3^y-n)\geq 0$。即

$$3^y-(m+n)\cdot 3^y+mn-16\leq 0$$

又由 $0\leq y\leq 2$，得 $1\leq 3^y\leq 9$。由根与系数的关系，得

$1-6-41$ 易知$f(x)$的定义域为$x\geq\sqrt{2}$。所以，

当时$b>1$时，$\log_b(x+\sqrt{x^2-2})\geq\log_b\sqrt{2}$；

当$0<b<1$时，$\log_b(x+\sqrt{x^2-2}\leq\log_b\sqrt{2})$。

又设$y=f(x)$，则$b^y=x+\sqrt{x^2-2}$，所以$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(b^x+2b^{-x})$。所以，

当$b>1$时，$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(b^x+2bH-x)$，$x\in[\log_b\sqrt{2}，+\infty]$；

当$0<b<1$时，$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(b^x+2b^{-x})$，$x\in[-\infty，\log_b\sqrt{2}]$。

1-6-42 (1)函数的定义域由下面的不等式组确定：

$$\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}>0\\ x-1>0\\ p-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-1\text{或}x>1\\ x>1\\ x<p\end{cases}$$

因函数的定义域是非空集合，故，所以 f(x)的定义域是

$\{x\mid 1<x<p\}$

(2)$f(x)=\log_2[(x+1)(p-x)]$

$=\log_2[-(x-\frac{p-1}{2})^2+\frac{(p+1)^2}{4}]\quad(1<x<p)$

令$\frac{p-1}{2}\leq 1$，得$p\leq 3$，所以当$1<p\leq 3$时，$f(x)$在区间$(1，p)$上无最大值和最小值。

令$1<\frac{p-1}{2}<p$，得$p\leq 3$。所以，当$p>3$，而时$x=\frac{p-1}{2}$，$f(x)$有最大值$\log_2\frac{(p+1)^2}{4}$；$f(x)$无最小值。

4．换底公式

1-6-43 B 1-6-44 C 1-6-45 C 1-6-46 B

$1-6-47$ C $|\log_a 2-\log_a\pi|=1\Leftrightarrow\left|\log_a\frac{2}{\pi}\right|=1$

1-6-48

(1)a $\log_{12}3=\frac{\log_{\sqrt{3}}3}{\log_{\sqrt{3}}12}=\frac{2}{2\log_{\sqrt{3}}2+2}=\frac{2}{\frac{2(1-a)}{a}+2}=a$

(2)1　$a^{\lg(ax)} = b^{\lg(bx)} \Rightarrow \lg(ax)\lg a = \lg(bx)\lg b$

$\Rightarrow \lg x = \lg\frac{1}{ab} \Rightarrow x = \frac{1}{ab} \Rightarrow abx = 1 \Rightarrow (ab)^{\lg(abx)} = (ab)^0 = 1$

1-6-49　c＞a＞b　因为 $\log_2 4=2$，所以 c＞2。

又$\log_3\frac{1}{9} < \log_3\frac{1}{4} < \log_3\frac{1}{3}$**，所以**

$$-2 < \log_3\frac{1}{4} < -1 \Rightarrow 1 < \left|\log_3\frac{1}{4}\right| = a < 2。$$

又$\frac{1}{2} < \frac{3}{2} < 2$**，则**$\log_{\frac{1}{2}} 2 < \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$**，于是**$-1 < \log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{2} < 1$**，所以**b

＜1。**从而**c＞a＞b。

1-6-50　$\log_b a$

$\because\ \log_b a - 1 = \log_b\frac{a}{b} > \log_b\frac{a+1}{b+1} > \log_{(a+1)}\frac{a+1}{b+1}$

$\qquad = \log_{(b+1)}(a+1) - 1$

$\therefore$　**$\log_b a > \log_{(a+1)}(a+1)$**

1－6－51　$\log_4 45 = \frac{2+\log_3 5}{2\log_3 2}$

(i)

$\because\ \log_3 10 = \log_3 2 + \log_3 5$

$\therefore\ \log_3 2 + \log_3 5 = a$

(ii)

$\because \log_6 25 = \frac{2\log_3 5}{1+\log_3 2}$

$\therefore\ \frac{2\log_3 5}{1+\log_3 2} = b$

(iii)

解由(ii)，(iii)组成的关于 $\log_3 5$，$\log_3 2$ 的方程组，得

$\log_3 2 = \frac{2a-b}{b+2}$，$\log_3 5 = \frac{ab+b}{b+2}$

将它们代入(i)**，得**$\log_4 45 = \frac{ab+3b+4}{2(2a-b)}$。

$1-6-52\ \ \log_{3a} 2a = y \Rightarrow (3a) \Rightarrow (3a)^{xy} = (2a)^x = a$

$\Rightarrow xy\cdot\ \log_2(3a) = \log_2 a \Rightarrow xy = \frac{\log_2 a}{\log_2(3a)}$

还有　$2^{1-xy} = 2^{1-\frac{\log_2 a}{\log_2(3a)}} = 2^{\frac{\log_2 3}{\log_2(3a)}} = 2^{\log_{3a}3}$

及　$3^{y-xy} = 3^{\log_{3a}2a - \log_2 a/\log_2(3a)}$

$\quad = 3^{\log_{3a}(2a) - \log_{3a}a = 3\log_{3a}2}$

而$2^{\log_{3a}3} = 3^{\log_{3a}2}$**，所以**$2^{1-xy} = 3^{y-xy}$。

1－6－53 $\log_{\frac{1}{2}}[a^{2x}+2(ab)^{x}-b^{2x}+1]<0$

$\Leftrightarrow a^{2x}+2(ab)^{x}-b^{2x}+1>1\Leftrightarrow a^{2x}+2(ab)^{x}-b^{2x}>0$

$\Leftrightarrow (\frac{a}{b})^{2x}+2(\frac{a}{b})^{x}-1>0\Leftrightarrow (\frac{a}{b})^{x}>-1+\sqrt{2}$

所以，当$\frac{a}{b}>1$**时，**$x>\log_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1)$**；当**$\frac{a}{b}=1$**时，**$x\in R$**；当**$0<\frac{a}{b}<1$**时，**$x<\log_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1)$**。**

1－6－54 $\log_{m}a>\log_{m}a\Leftrightarrow\frac{\lg a}{\lg m}>\frac{\lg a}{\lg n}$

而$a>1$**，所以**$f\frac{1}{\lg m}>\frac{1}{\lg n}$**。**

当 lgm＞0，lgn＞0 时，则 lgm＜lgn，所以 n＞m＞1；
当 lgm＜0，lgn＜0 时，则 lgm＜lgn，所以 1＜n＜m＜0。
当 lgm＞0，lgn＜0 时，则 m＞1＞n＞0。
综上可知，n＞m＞1 或 1＞n＞m＞0 或 m＞1＞n＞0。

1－6－55 $f(x)=5(\log_{3}x-\frac{6}{5})^{2}-\frac{31}{5}$

令$\log_{3}x=\frac{6}{5}$**，则**$x=3^{\frac{6}{5}}$**，由**$3^{6}=769<1024=4^{5}$**，得**$3<3^{\frac{6}{5}}<4$**。**

$3^{\frac{6}{5}}-3>4-3^{\frac{6}{5}}\Leftrightarrow 2\times3^{\frac{6}{5}}>7\Leftrightarrow 2^{5}\times3^{6}>7^{5}\Leftrightarrow 23328>16807$

所以$f(4)<f(3)$**。所以当**$x=4$**时，**$f(x)$**取最小值。**

5．指数方程和对数方程

1-6-56　A　1-6-57　C　1-6-58　D

1－6－59 $(1)\{\log_{2}\sqrt{3}\}$　$(2)\{0\}$　$(3)\{\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\}$

1-6-60　{1}　注意：$f[f^{-1}(3^{x}+6)]=3^{x}+6$

1-6-61　-3＜a＜1

1-6-62　(1)$\log_{2}7-1$　**(2)2 或** $\log_{3}5-2$

1－6－63　因为$x=2$**是方程的解，所以**$2a^{2}-7a+3=0$**，解得**$a=\frac{1}{2}$**或**$a=3$**。当**$a=\frac{1}{2}$**时，原方程化为**

$$2\cdot(\frac{1}{2})^{2x-2}-7\cdot3^{x-1}+3=0$$

易知其另一根为$x=1+\log_{\frac{1}{2}}3$**；当**$a=3$**时，原方程化为**

$$2\cdot3^{2x-2}-7\cdot3^{x-1}+3=0$$

易知其另一根为$x=1+\log_{3}\frac{1}{2}$**。**

1-6-64　设 $a^{x}=y$**，则原方程化为**

$$y^3+2py^2+(p+1)y+p=0$$

所以 $y=-p$ 或 $y^2+py+1=0$

因为 $y=a^x>0$，故 $y=-p$ 有正根的充要条件是 $p<0$；方程 $y^2+py+1=0$ 有正根的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=p^2-4>0\\ -p>0\end{cases}\Leftrightarrow p\leq -2$$

综上可知，当 $p<-2$ 时，原方程有三个实根；当 $p=-2$ 时，原方程有两个实根；当 $-2<p<0$ 时，原方程有一个实根；当 $p\geq 0$ 时，原方程没有实根。

1-6-65 B 1-6-66 B 利用图象法。

1-6-67 D 1-6-68 (1)x=10 (2){4}

1-6-69 $\{\frac{1}{a}，a^2\}$ $(2)\{5\sqrt[3]{5}，\frac{1}{25}\}$

1-6-70 (1)x=2 (2)x=9990 或 x=-9.9 (3)x=0

1-6-71 显然，$a>0$。当 $a>0$ 时，原方程等价于

$$\begin{cases}x>1\\ x^2=a(x-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x^2-ax+a=0\end{cases}$$

方程 $x^2-ax+a=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-4a$。

当 $0<a<4$ 时，$\Delta<0$，原方程无实根；

当 $a=4$ 时，$\Delta=0$，原方程有根 $x=2$；

当 $a>4$ 时，$\Delta>0$，方程 $x^2-ax+a=0$ 有二根

$$x_1=\frac{a+\sqrt{a^2 4a}}{2}，x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2}$$

由 $a>4$ 知 $x_1>1$，又 $x_1+x_2=x_1x_2$，即 $(x_1-1)(x_2-1)=1>0$，故 $x_2>1$。因此，这时 x_1，x_2 都是原方程的两个根。

1-6-72 由题设，有

$$\begin{cases}6x^2+x-1>0\\ 3x-1>0\\ a+2>0\\ a^2\neq 1，a\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{3}\\ a>-2\text{且}a\neq\pm 1，a\neq 0\end{cases}$$

原方程可化为 $2x+1=\frac{a+2}{|a|}$，即 $x=\frac{a-|a|+2}{2|a|}$。但 $x>\frac{1}{2}$，故

$$\frac{a-|a|+2}{2|a|}>\frac{1}{3}$$

当 $-2<a<0$ 且 $a\neq -1$ 时，有 $\frac{a+a+3}{-2a}>\frac{1}{3}$，从而 $-\frac{3}{4}<a<0$；

当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，有 $\frac{a-a+2}{2a}>\frac{1}{3}$，从而 $0<a<1$ 且 $a\neq 1$。

综上所述，$a\in(-\frac{3}{4}，0)\cup(0，1)\cup(1，3)$。

第二部分　三角函数

(一)任意角的三角函数

1．终边相同的角、弧度制

2-1-1　原点；x 轴的正半轴；第三象限。

2-1-2　D　注意象限角在坐标平面上具有特定的位置。

2-1-3　320°，-40°；四。

2-1-4　C

2-1-5　{α｜α=2kπ，k∈Z}；{α｜α=(2k+1)π，k∈Z}

{α｜α=kπ，k∈Z}

2-1-6　A　任给$\alpha \in M$，则$\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} = k'\pi + \frac{\pi}{6}(k' - 2k \in Z) \in N$，故$M \subset N$(易知M≠N)；任给$\beta \in N$，则$\beta = k\pi + \frac{\pi}{6} = k' \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}(k' = 2k \in Z) \in P$，显然N≠P。故$N \subset P$。

2-1-7　C　将 M 中 k 按被 3 除的余数划分，可以并且只可以分为 3m-1，3m，3m+1(m∈Z)三类。那么，

当$k = 3m - 1$时，$k \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = (3m-1)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = m\pi - \frac{\pi}{6}$；

当$k = 3m$时，$k \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = 3m \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = m\pi + \frac{\pi}{6}$；

当 k=3m+1 时，

3-1-95　原式$= \frac{\sin 20°}{\cos 20°} - \frac{\cos 20°}{\sin 20°} + 2tg40° + 4tg10°$

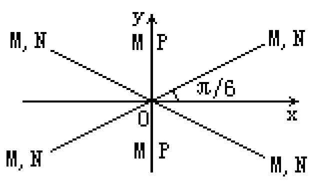
$$= \frac{\sin^2 20° - \cos^2 20°}{\cos 20° \sin 20°} + 2tg40° + 4tg(90° - 80°)$$

$$= 2\frac{-\cos 40°}{\sin 40°} + 2\frac{\sin 40°}{\cos 40°} + 4ctg80°$$

所以

$$M = \{\alpha | \alpha = m\pi + \frac{\pi}{6}，k \in Z\} \cup \{\alpha | \alpha = 2m'\pi \pm \frac{\pi}{2}\} = N \cup P$$

也可采用图解法：在直角坐标系中分别画出集合 M，N，P 的角的终边位置，如下图所示。由图中可以看出 M=N∪P。



2-1-8

(1) α=(2kπ+β(k∈Z))

(2) α=(2k+1)π+β(k∈Z)

(3) α=(2kπ-β(k∈Z))

(4) $\alpha=(2k+1)\pi-\beta\ (k\in Z)$

2-1-9　D

2－1－10　$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha<4k\pi+\frac{7\pi}{4}$，$k\in Z\}$

注　$-\frac{\pi}{4}$与$\frac{7\pi}{4}$是终边相同的角。如下答案都是错误的：

$2k\pi-\frac{\pi}{4}<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$　(不表示阴影部分)

或　$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha<3k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in Z)$　(不等式不成立)

2－1－11　-15；$-\frac{5}{4}\pi$；$\frac{47}{720}\pi$

2－1－12　1；$\frac{\pi}{3}$　当圆弧长$l=R$时，由$l=R\theta$得$\theta=1$。弦长公式为$b=2R\sin\frac{\theta}{2}$，故$b=R$时，$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$，对应的锐角$\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}$，即$\theta=\frac{\pi}{3}$。

2-1-13　6π；12π　弧长 $l=R\theta=4\times1.5\pi=6\pi$；扇形面积

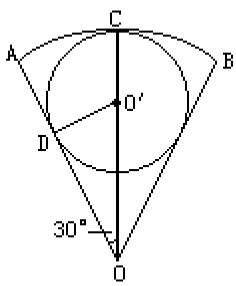
$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\times4^2\times1.5\pi=12\pi$

2－1－14　$\frac{6}{5}$；$(\frac{216}{\pi})^\circ$

2－1－15　-2π；-120π；$-\frac{\pi}{6}$　2－1－16　$2\pi\text{cm}/$秒

2-1-17　如下图，设扇形的内切圆 O′的半径为 r′。因为∠AOC=$\frac{1}{2}\angle AOB=30^\circ$，所以$OO'=2O'D=2r'$，从而$3r'=r$，即$r'=\frac{r}{3}$。所以

$$\frac{\text{扇形}OAB\text{的面积}}{\text{内切圆}O'\text{的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times r^2}{\pi\times(\frac{r}{3})^2}=\frac{3}{2}$$



2-1-18　两圆的公共部分的面积

S=2(扇形 OAB 的面积-△OAB 的面积)

$$=(\frac{\pi}{2}+\theta)r^2-r^2\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=(\frac{\pi}{2}+\theta)r^2-r^2\cos\theta$$

依题意有

$$(\frac{\pi}{2}+\theta)r^2-r^2\cos\theta=\frac{1}{2}\pi r^2$$

从而　$\theta=\cos\theta$

注　满足本题条件的锐角θ是存在的。在学了余弦函数的图象后，可通过图象法求出θ=cosθ中的θ。

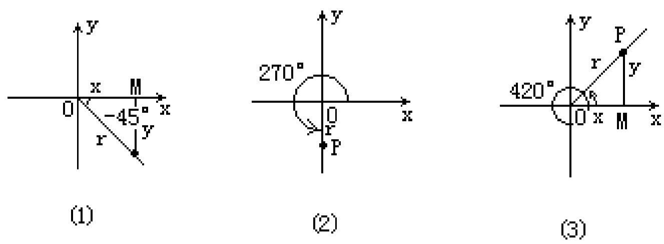
2．任意角的三角函数，诱导公式

2-1-19　(1)如下图(1)，在-45°角的终边上任取一点P(x，y)，设$|OP|=r$，过P作$PM\perp x$轴，垂足为M，则$\angle POM=45°$。点P位于第四象限，于是有$x=\frac{\sqrt{2}}{2}r$，$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}r$。因此

$$\sin(-45°)=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}；\cos(-45°)=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(-45°)=\frac{y}{x}=-1；ctg(-45°)=\frac{x}{y}=-1$$

$$\sec(-45°)=\frac{r}{x}=\sqrt{2}；\csc(-45°)=\frac{r}{y}=-\sqrt{2}$$



(2)如上图(2)，$x=0$，$y=-r$，故$\sin270°=\frac{y}{r}=-1$；$\cos270°=\frac{x}{r}=0$；$tg270°=\frac{y}{x}$无意义；$ctg270°=\frac{x}{y}=0$；$\sec270°=\frac{r}{x}$无意义，$\csc270°=\frac{r}{y}=-1$。

(3)如上图(3)，$420°=360°+60°$，即$420°$与$60°$有相同的终边。于是$x=\frac{1}{2}r$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}r$。故

$$\sin420°=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}；\cos420°=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$tg420°=\frac{y}{x}=\sqrt{3}；ctg420°=\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec420°=\frac{r}{x}=2；\csc420°=\frac{r}{y}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2-1-20

(1)$\sin\alpha=-\frac{5}{13}$；$\cos\alpha=-\frac{12}{13}$；$tg\alpha=\frac{5}{12}$；$ctg\alpha=\frac{12}{5}$；$\sec\alpha=-\frac{13}{12}$；$\csc\alpha=-\frac{13}{5}$。

(2)$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$；$tg\alpha=-\sqrt{3}$；$ctg\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$；$\sec\alpha=-2$；

$\csc\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

2-1-21 因为 k＞0，故直线 y=kx 经过第一、三象限。当α是第一象限角时，终边经过点$(1，k)$，$r=\sqrt{1+k^2}$**；当α是第三象限角时，终边经过点**$(-1，-k)$，$r=\sqrt{1+k^2}$。**(下略)。**

2－1－22 C **因为**$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$**，所以终边在**$y=-\frac{3}{4}x$**上，且位于第四象限，从而经过点**$(1，-\frac{3}{4})$。

2－1－23 设$P(x，y)$**为终边上的点，**$|OP|=r$**，则**$tg\alpha=\frac{y}{x}$**，从而**

$$tg^2\alpha+1=(\frac{y}{x})^2+1=\frac{x^2+y^2}{x^2}=(\frac{r}{x})^2=\sec=\sec^2\alpha$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=1/\frac{x}{r}=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha=\frac{x}{y}=\frac{x}{r}/\frac{y}{r}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

2-1-24 C 角 A=90°时，D，B 无意义；90°＜A＜180°时，A 不成立。

2-1-25 因θ是第二象限角,故-π/2＜-1＜cosθ＜0,从而 sin(cosθ)＜0。类似地，0＜sinθ＜1＜π/2，从而 cos(sinθ)＞0。于是，

sin(cosθ)·cos(sinθ)＜0

2－1－26 原式$=\frac{\sin\alpha}{-\sin\alpha}+\frac{-\cos\alpha}{\cos\alpha}+1=-1$

2－1－27 A **由**$|tg\alpha|=-tg\alpha$，$|\cos\alpha|=\cos(-a)=\cos\alpha$**知**$\alpha$**是第四象限角或**$\alpha=2k\pi$**，故**$k\pi-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}\leq k\pi$。

2－1－28 $(1)y=\frac{20}{3}$ $(2)x=8$ $(3)r=\frac{9}{2}$ $(4)r=5$

2-1-29 A 把 150°视为“锐角”时，180°+150°为第三象限角，其正弦为负；又 180°=2×90°属于“偶不变”，故选 A。

2-1-30

(1)k·360°+180°-α(k∈Z)

(2)k·360°+180°+α(k∈Z)

(3)k·360°-(180°-α)(k∈Z)

2－1－31 原式$=-\sin60°tg30°+ctg45°=\frac{1}{2}$

2-1-32

(1) **原式**$=\frac{-\csc\alpha+\sin\alpha}{\csc\alpha-\sin\alpha}=-1$

(2)分别就 k 为奇数或偶数进行讨论，都有原式=-1。

(3)注意 sin540°=sin180°=0，原式=…=0。

2-1-33 椐由 A+B=180°-C 及诱导公式各式即可获证。

2－1－34　由$\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$及诱导公式各式即可获证。

2-1-35　(1)∵β=90°-α，∴cosβ=cos(90°-α)=sinα=a。

(2)∵36°+α+54°-α=90°，∴cos(54°-α)=sin(36°+α)=a。

2-1-36　cos54°=sin60°=-0.5878

$$\sin 54° = \sqrt{1-\sin^2 36°} = \sqrt{1-0.5878^2} = 0.8090$$

2－1－37　原式$=\sin\frac{2n+3}{4}\pi+\sin\frac{2n-1}{4}\pi=2\sin\frac{2n+1}{4}\pi\cos\frac{\pi}{4}=0$也可在原式中令$n=4k-1$，$4k$，$4k+1$，$4k+2$获解。

2-1-38　因为 ctg(153°-α)=-ctg(207°+α)，tg(140°+α)=-ctg(50°+α)，代入原式即得

tg(50°+α)·[-ctg(207°+α)]·tg(207°+α)·[-ctg(50°+α)]=1

3．同角三角函数的基本关系

2-1-39

(1)原式$=\sqrt{1-\sin^2 60°}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{2}$

(2)当α∈[2kπ，(2k+1)π]时，原式=sinα；当α∈[(2k-1)π，2kπ]时，原式=-sinα，其中 k∈Z。

(3)原式$=\sqrt{(\sin\alpha-1)}=1-\sin\alpha$

(4)原式$=\sqrt{tg(300°-1)^2}=\sqrt{(tg60°)^2}=tg60°+1=\sqrt{3}+1$

2-1-40　B　原式=-sin280°csc280°+cos280°sec280°=-1+1=0

2-1-41

(1)∵$tg\alpha+ctg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}=\sec\alpha\csc\alpha$

∴　原式=1

(2)∵$\sin\alpha+ctg\alpha=\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$，$tg\alpha+\csc\alpha=\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$

∴　原式=cosα

2-1-42　(1)因为(secα+tgα)(secα-tgα)=$\sec^2$α-tg^2α=1故原式成立。

(2)∵(2+5sinα)(3-5sinα)=9-25$\sin^2$α=25$\cos^2$α-16

=(4+5cosα)·(5cosα-4)

∴　原式成立。

2-1-43　原式=lg[(tg1°tg89°)·(tg2°tg88°)…(tg44°tg46°)·tg45°]=lg1=0

2-1-44　(1)右边=$(1-\sin\alpha)^2$+2(1-sinα)cosα+$\cos^2$α

=$(1-\sin\alpha)^2$+2(1-sinα)cosα+(1-sinα)(1+sinα)

=(1-sinα)(1-sinα+2cosα+1+sinα)=左边

(2)$\sec^2$A=1+tg^2A 用即可获证。

2-1-45　(1)切化弦并利用

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$$

(2)利用公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 将原式左边分解因式。

2－1－46 B　α**为第二象限角，故** $\cos\alpha=-\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=-\frac{5}{13}$

2－1－47 D　**原式** $=\sin^2\alpha(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=\sin^2\alpha\frac{1}{\cos^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{k^2}$

2－1－48 D **因为**α**第二、三象限角，所以** $\sec\alpha<0$**，从而** $\sec\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$**。于是，** $\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sec\alpha}=-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$**。**

2－1－49 (1)**由** $(\sin\theta-\cos\theta)^2=m^2$ **可得** $\sin\theta\cos\theta=\frac{1-m^2}{2}$**。于是，**

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin\theta-\cos\theta)^4+4\sin\theta\cos\theta-6\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=m^4+2(1-m^2)-6\times\frac{(1-m^2)^2}{4}=\frac{1+2m^2-m^4}{2}$$

(2) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$$=m^3+3\times\frac{1-m^2}{2}\times m=\frac{3m-m^2}{2}$$

(3) $\mathrm{tg}^2\theta+\mathrm{ctg}^2\theta=(\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta)^2-2=m^2-2$

(4) $\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta=\pm\sqrt{\mathrm{tg}^2\theta+\mathrm{ctg}^2\theta+2}=\pm\sqrt{m+2}$(**当**θ**为第一、三象限角时，取“＋”；当**θ**为第二、四象限角时，取“－”。**

2－1－50 **因** $\sin A>0$**，由** $\sin A\cos A=-\frac{1}{8}$ **知** $\cos A<0$**，从而**A**为钝角。于是由** $(\cos A-\sin A)^2=1-2\times(-\frac{1}{8})=\frac{5}{4}$ **得**

$$\cos A-\sin A=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

2－1－51 $\because a=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$**，** $b=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$**，** $\therefore ab=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=1$。

2－1－52 $\frac{1}{4}$　**原式左边的分子、分母同除以** $\cos\alpha$ **并将** $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ **代入即得。**

2－1－53 $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$　**由题设知** $a\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$**，** $\mathrm{tg}\alpha=\frac{n}{m}$**。故**

$$\text{原式}=\frac{m-n\mathrm{tg}\alpha}{m+n\mathrm{tg}\alpha}=\frac{m-\frac{n^2}{m^2}}{m+\frac{n^2}{m^2}}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

2-1-54　(1)B 的坐标为(ccosα，csinα)；AC 边上的高 h=csinα。

(2) $|BC|=\sqrt{(c\cos\alpha-b)^2+(c\sin\alpha)^2}=\sqrt{b^2+c^2 2bc\cos\alpha}$

2－1－55 (1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\sec^2\theta-tg^2\theta=1$

2-1-56　已知等式通过移项、能分可化为

$$\frac{\cos^2\beta\sin^2x+\sin^2\alpha\cos^2x-2\cos\beta\sin x\sin\alpha\cos x}{2\sin x\cos x}=0$$

$\Rightarrow(\sin\beta\sin x-\sin\alpha\cos x)^2=0$

由此得$tgx=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}$。

2-1-57　当 m，n，a，b 互不相等时，

$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m\Rightarrow atg^2\theta+b=m(1+tg^2\theta)\Rightarrow tg^2\theta=\dfrac{m-b}{a-m}$

$b\sin^2\varphi+a\cos^2\varphi=n\Rightarrow tg^2\varphi=\dfrac{n-a}{b-n}$

$atg\theta=btg\varphi\Rightarrow\dfrac{tg^2\theta}{tg^2\varphi}=\dfrac{b^2}{a^2}$

于是，$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{(m-b)(n-b)}{(m-a)(n-a)}$**，化简得**$(a+b)mn=ab(m+n)$**即**

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

当$m=a$**或**$n=b$**时，结论显然成立。**

4．已知三角函数的值求角

2-1-58　(1)45°　(2)45°或 135°　(3)k·360°+45°(k∈Z)　(4)k·360°+45°或 k·360°+135°(k∈Z)　(5)45°或 135°

2-1-59　(1)$\dfrac{5\pi}{6}$　(2)$\dfrac{5\pi}{6}$**或**$\dfrac{7\pi}{6}$　(3)$2k\pi\pm\dfrac{5\pi}{6}(k\in Z)$　(4)$2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}$ $(k\in Z)$　(5)$\dfrac{5\pi}{6}$

2-1-60　(1)60°**或**240°　(2)$x=k\cdot\dfrac{\pi}{3}(k\in Z$**且**$-6\leq k<6)$

2－1－61　(1)30°**或**150°　(2)60°

2-1-62　cos(B+C)=cos(180°-A)=-cosA=-0.3764

2-1-63　D 在区间[0，2π)内，x=α或 x=π-α。

2-1-64　A**在区间**(0，π)**内，**$A=\dfrac{\pi}{6}$**或**$A=\dfrac{5\pi}{6}$。

2-1-65　4；$-\dfrac{5\pi}{3}$，$-\dfrac{4\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{3}$

2-1-66　由$\cos(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)=\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}$**，得**$\alpha-\dfrac{\pi}{3}=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$**，则**$\alpha=2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$**或**$\alpha=2k\pi$**。令**$0\leq2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\leq2\pi$**，得**$k=0$**；令**$0\leq2k\pi\leq2\pi$**，得**$k=0，1$**。故**$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}，0，2\pi$。

2-1-67 由$\frac{\pi}{2}+\alpha=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$或$\frac{\pi}{2}+\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{3}$，得

$$\alpha=2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}\quad(k\in Z)$$

2-1-68 由$\cos(\frac{\pi}{3}+2\alpha)=-\frac{1}{2}$，得$\frac{\pi}{3}+2\alpha=2k\pm\frac{2\pi}{3}$，故

$$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{6}\text{或}\alpha=k\pi-\frac{\pi}{2}\quad(k\in Z)$$

2-1-69 A因0＜x＜180°，故A正确。对于B，仅有x=60°；对于C，仅当0＜a＜1时才成立；对于D，a取任何实数均不成立。

2-1-70 由$\alpha=2m\pi+\frac{\pi}{6}$或$\alpha=2m\pi+\frac{5\pi}{6}$，且$\alpha+\beta=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$解得

$$\begin{cases}\alpha=2m\pi+\frac{\pi}{6}\\ \beta=2n\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\alpha=2m\pi+\frac{\pi}{6}\\ \beta=2n\pi-\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases}\alpha=2m\pi+\frac{5\pi}{6}\\ \beta=2n\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\alpha=2m\pi+\frac{5\pi}{6}\\ \beta=2n\pi-\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

(其中m，k，n∈Z)。

2-1-71 由sinx=-sinα=sin(-α)知

x=2kπ-α或x=(2k+1)π+α (k∈Z)

2-1-72 由题设，cosx=-cosα=cos(π-α)，故

x=2kπ±(π-α) (k∈Z)

但-2π≤x＜2π，故x=π±α，或x=-π±α。

2-1-73 (1)由题设，$\alpha+2\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}$，从而

$$\alpha+\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}-\beta\quad(k\in Z)$$

故 $\cos(\alpha+\beta)=\cos(k\pi+\frac{\pi}{2}-\beta)=\pm\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\pm\sin\beta$

(2)由题设，$\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，从而

$$2\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\quad(k\in Z)$$

故 $\sin(2\alpha+\beta)=\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)$

$=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha=\sin\beta$

2-1-74 由已知得$\cos^2x+\cos x-2=0$，解得cosx=1，故

$x=2k\pi \quad (k\in Z)$

(二)三角函数的图象和性质

1．三角函数的图象

2-2-1 1；$\frac{1}{2}$。因为$A>0$，所以在$y=A\sin x+k$中令$x=\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}$，分别得$A+k=\frac{3}{2}$，$-A+k=-\frac{1}{2}$，联立解之即得所求结果。

2-2-2 A 令$\sin(2x+\frac{\pi}{3})=1$知$x=k\pi+\frac{\pi}{12}$，仅A适合。

2-2-3 A 由曲线经过点(0，1)可知仅 A 满足。

2-2-4 2；2；$\frac{\pi}{3}$；1 易知

$$k=\frac{3+(-1)}{2}=1\text{；}A=\frac{3-(-1)}{2}=2\text{；}$$

$$\frac{2\pi}{\omega}=T=2(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12})=\pi\text{，}\omega=2$$

由$2\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)+1=3$，或者$2\sin(2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi)+1=-1$，解得$\varphi=\frac{\pi}{3}$ (注意，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$)。

2-2-5 C 当$\omega x+\varphi=0$即$x=-\frac{\varphi}{\omega}$时，$y=0$。对于A，当$A<0$时，不正确；对于 B，当ω＜0 时不正确；对于 D，当ω＜0 时不正确。

2-2-6 (1)由 y=sinx 作相反的变换：先把 y=sinx 的图象上所有的点向左平移$\frac{\pi}{6}$得到$y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$；再把$y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$的图象上所有的点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)即得

$$y=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$$

此即所求的表达式。

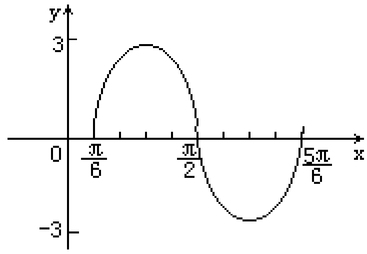
(2)作相反变换：先把 y=sinx 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，得$y=\sin(\frac{1}{2}x)$；再$y=\sin(\frac{1}{2}x)$的图象上所有的点向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得$y=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$。

故所求表达式为$y=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12})$。

2-2-7 因图象上最高点的纵坐标为 3，且 A＞0，故 A=3。由题设及周期的概念知$\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$，故$T=\frac{2\pi}{3}$。于是，$\omega=\frac{2\pi}{T}=3$。故有

$$y=3\sin(3x+\varphi)$$

又图象过点$(\frac{\pi}{3}, 3)$和$(\frac{\pi}{2}, 0)$，故有



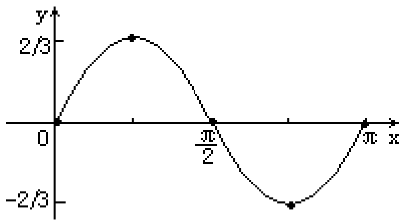
$$\begin{cases} 3\sin(3\times\frac{\pi}{3}+\varphi)=3 \\ 3\sin(3\times\frac{\pi}{2}+\varphi)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\pi+\varphi)=1 \\ \sin(\frac{3\pi}{2}+\varphi)=0 \end{cases}$$

所以可取$\varphi=-\frac{\pi}{2}$。函数的一个表达式为$y=3\sin(3x-\frac{\pi}{2})$。

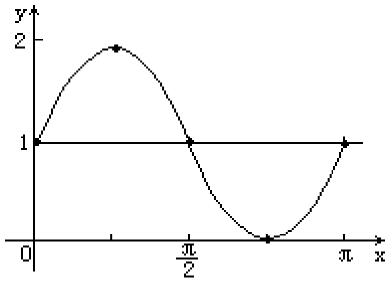
函数的图象如上图所示。

2-2-8　作出图象如下图所示：

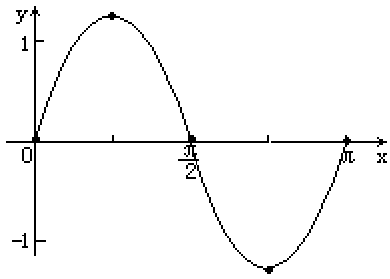
(1)



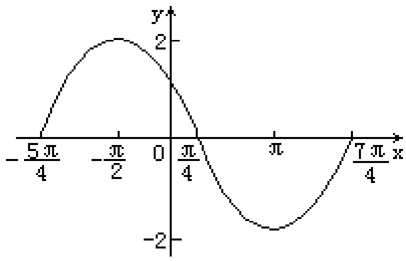
(2)



(3)

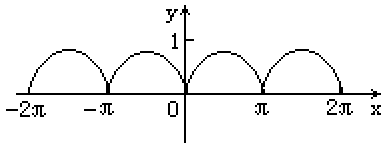


(4)

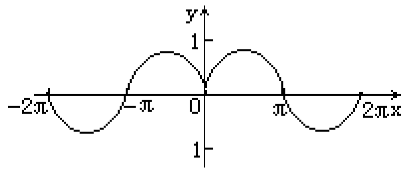


2-2-9　所作图象如下图所示：

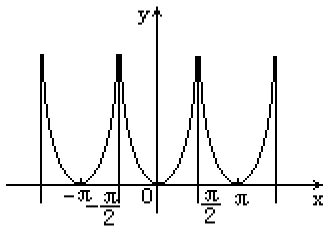
(1)y=|sinx|



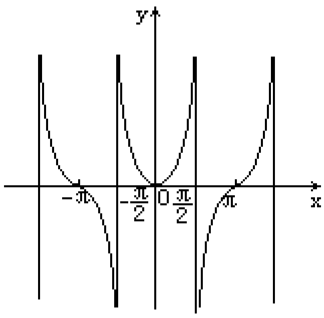
(2)y=sin|x|



(3)y=|tgx|



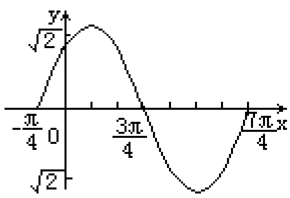
(4)y=tg|x|



2-2-10　先化简，再作图：

(1)y=sinx+cosx

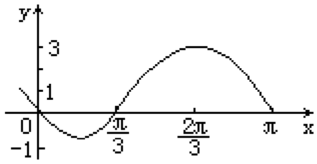
$= \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$



$(2)y = 2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x$

$= 1 - \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$

$= 1 - 2\sin(2x + \dfrac{\pi}{6})$

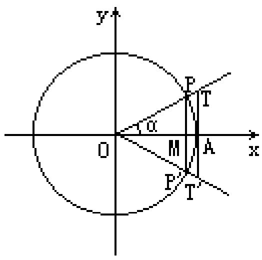


2-2-11 **由**$y = \mathrm{ctg}x = -\mathrm{tg}(x - \dfrac{\pi}{2})$**可知：先将**$y = \mathrm{tg}x$**的图象向右平移** $\dfrac{\pi}{2}$**个单位，得到**$y = \mathrm{tg}(x - \dfrac{\pi}{2})$**的图象；再作**$y = \mathrm{tg}(x - \dfrac{\pi}{2})$**图象上的所有点关于**x**轴的对称点，便得到**$y = -\mathrm{tg}(x - \dfrac{\pi}{2})$**即**$y = \mathrm{ctg}x$**的图象。**

2-2-12 $(1)T = 2\pi / \sqrt{\dfrac{g}{l}} = \dfrac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$**；**$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

(2)**由**$2\pi / \sqrt{\dfrac{g}{l}} = 1$**，得**$\sqrt{\dfrac{g}{l}} = 2\pi$**，故**$s = \sqrt{3}\cos(2\pi t + \dfrac{\pi}{6})$**；**$s_0 = \dfrac{3}{2}$**；令**$2\pi t + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$**，得**$t = \dfrac{1}{6}$**(秒)。**

2-2-13　如下图。在单位圆中作角α的正弦线 MP，余弦线 OM，正切线 AT。



(1)**若**$\alpha = \dfrac{k\pi}{2}(k\in Z)$**，则**MP**和**OM**必有一个为**0**，另一个为**1**，这时**

|sinα|+|cosα|=1

若$\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}(k\in Z)$**，则在△**OMP**中，必有**|OM|+|MP|＞|OP|**，即**

|sinα|+|cosα|＞1

因此，总有|sinα|+|cosα|≥1。

(2)**反向延长**MP**，使与单位圆交于点**P′**，显然，**PP′＜$\overset{\frown}{PP'}$**，即 2MP＜2α，所以 sinα＜α。又扇形 OAP 的面积＜直角三角形 OAT 的面积，于是**$\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AP}\cdot 1 < \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot AT$**，即**$\overset{\frown}{AP} < AT$**，也就是α＜tgα。**

综上所述，sinα＜α＜tgα。

2．三角函数的性质(一)

2-2-14 (1)$x\in R$ (2)$x\in R$ (3)$k\pi\leq x\leq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$

(4)$x\in R$且$x\neq k\pi+\frac{\pi}{3}$ $(k\in Z)$

2-2-15 (1)$x\in R$且$x\neq k\pi+\frac{\pi}{6}$ $(k\in Z)$

(2)$k\pi<x\leq k\pi+\frac{3\pi}{4}$ $(k\in Z)$

(3)$x\in(k\pi-\frac{\pi}{4}，k\pi+\frac{\pi}{4})\cup(k\pi+\frac{\pi}{4}，k\pi+\frac{\pi}{4})$

$\cup(k\pi+\frac{\pi}{2}，k\pi+\frac{3\pi}{4})$ $(k\in Z)$

(4)$x\in[2k\pi-\frac{\pi}{6}，2k\pi+\frac{\pi}{2}]\cup(2k\pi+\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{7\pi}{6})$ $(k\in Z)$

(5)$x\in(k\pi，k\pi+\frac{\pi}{4})\cup(k\pi-\frac{\pi}{2}，k\pi-\frac{\pi}{4})$ $(k\in Z)$

2-2-16 (1)$x\in(k\pi，k\pi+\frac{\pi}{12})\cup(k\pi+\frac{5\pi}{12}，k\pi+\frac{\pi}{2})$ $(k\in Z)$

(2)$2k-\frac{1}{6}\leq x\leq 2k+\frac{5}{6}$ $(k\in Z)$

2-2-17 (1)$x\geq 0$；$-1\leq y\leq 1$

(2)$2k\pi\leq x\leq 2k\pi+\pi(k\in Z)$，$y\leq 0$

2-2-18 D **因为**$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\leq\sqrt{2}$**，否定**A**；因为**$\sin x$ **=2+cosx≥1，所以只能是 sinx=1 且 cosx=-1，这不可能，否定 B；因为** $\mathrm{tg}x\,\mathrm{ctg}x=1\neq 0$**，否定**C。**当**$x=\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$**时，**D**成立。**

2-2-19 C **由**$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$**及**$0<\sin x\leq 1$**即知**C**正确。**

2-2-20 (1)**原式可化为**$y=1+\frac{3}{\sin x-1}$**。因为**$-2\leq\sin x-1<0$**，所以** $\frac{1}{\sin x-1}\leq-\frac{1}{2}$**，从而**$1+\frac{3}{\sin x-1}\leq-\frac{1}{2}$**。所求值域为**$(-\infty，-\frac{1}{2})$**。**

(2)**因为**$0\leq\frac{x}{2}\leq\frac{\pi}{2}$**，所以**$0\leq\cos\frac{x}{2}\leq 1$**。当**$\cos\frac{x}{2}=0$**时，**$y_{max}=1$**；** **当**$\cos\frac{x}{2}=1$**时，**$y_{min}=\frac{1}{3}$**。故所求值域为**$[\frac{1}{3}，1]$**。**

2-2-21 当 b＞0 时，值域为[a-b，a+b]；

当 b＜0 时，值域为[a+b，a-b]。

2-2-22 显然，$k\neq\frac{1}{2}$**，又这时**

$$|\frac{3k+1}{1-2k}|\leq 1\Leftrightarrow|3k+1|\leq|1-2k|$$

$\Leftrightarrow (3k+1)^2 \leq (1-2k)^2 \Leftrightarrow k^2+2k \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq k \leq 0$

2-2-23　作为 sinx 的二次方程，其判别式

$$\triangle=(a^2+2a)^2-4(a^3+a^2)=a^4 \geq 0$$

解所给方程得 sinx=a 或 sinx=a^2+a。由前者得-1≤a≤1；由后者得 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$。**故a的取值范围为二者的并集，即** $[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}，1]$。

2-2-24 由$k=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$**知**

$$-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2} \qquad (i)$$

又由$\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=\frac{k(3-k^2)}{2}<0$**得**

$$-\sqrt{3} \leq k \leq 0 \text{或} k \geq \sqrt{3} \qquad (ii)$$

由(i)**与**(ii)**得** $-\sqrt{2} \leq k \leq 0$。

2-2-25　(1)原式可化为

$$y=\sqrt{1+\cos x}+\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{1+\cos x}\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}}=2$$

当且仅当$\sqrt{1+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}$**，即**$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k \in Z)$**时取等号，这时函数取最小值 2。**

(2)**因为**$x \in (0，\frac{\pi}{2})$**，所以**$tgx>0$，$ctgx>0$。**从而**

$$y=tgx+ctgx \geq 2\sqrt{tgxctgx}=2$$

当且仅当$x=\frac{\pi}{4}$**时取等号，这时**$y_{min}=2$。

2-2-26　(1)由 0≤sinx≤1 知 0≤y≤1 即函数值域为[0，1]。

(2)因为-1≤sinx≤1，所以当 M>0 时，y_{max}=|M+1|，y_{min}=|M-1|；当 M<0 时，y_{max}=|M-1|，y_{min}=|M+1|。于是，当 0<M<1 时，函数值域为[1-M，M+1]；当 M≥1 时，函数值域为[M-1，M+1]；当-1≤M<0 时，函数值域为[M+1，1-M]；当 M<-1 时，函数值域为[-M-1，1-M]。

2-2-27 (1)**原式可化为**$y=-2(\cos x+\frac{1}{4})^2+\frac{17}{8}$。**由此可知，当**$\cos x=-\frac{1}{4}$**时，**$y_{max}=\frac{17}{8}$**；当**$\cos x=1$**时，**$y_{min}=-1$。

(2)原函数可化为

$$y=(\sin x-2)^2+1$$

当 sinx=-1 时，y_{max}=10；

当 sinx=1 时，y_{min}=2。

2-2-28　(1)原式可化为 y=(ctgx-1)^2+1，所以当 ctgx=1，即 x=kπ

+

$\frac{\pi}{4}$(k∈Z)时，$y_{min}=1$；无最大值。

(2)原式可化为$y=-(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{1}{4}$，故当$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$x=2k\pi-\frac{\pi}{3}$或$x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{3}$(k∈Z)时，$y_{max}=-\frac{1}{4}$；当$\sin x=1$，即$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$(k∈Z)时，$y_{min}=-2-\sqrt{3}$。

(3)原式可化为$y=(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}$，故$\cos x=-1$，即$x=(2k+1)\pi$(k∈Z)时，$y_{max}=2+\sqrt{2}$；当$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$(k∈Z)时，$y_{min}=\frac{1}{2}$。

(4)原式可化为$y=(\sin x-\sqrt{2})^2+1$，故当$\sin x=-1$，即$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$(k∈Z)时，$y_{max}=4+2\sqrt{2}$；当$\sin x=1$即$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$(k∈Z)时，$y_{min}=4-2\sqrt{2}$。

2-2-29　原式可化为 $y=-2(\cos x-b^2)^2+b^4+2$。故

当 $b^2\leq 1$ 时，$y_{max}=b^4+2$，$y_{min}=-2(-1-b^2)^2+b^4+2=-b^4-4b^2$；

当 $b^2>1$ 时，$y_{max}=-b^4+4b^2$，$y_{min}=-b^4-4b^2$。

2-2-30　因为$\tan x\neq 0$，所以原式可化为$\cos x=\frac{n-2}{4}$。故$-1\leq\frac{n-2}{4}\leq 1$，解得$-2\leq n\leq 6$，n∈Z。

2-2-31　因为 cos(A-B)，cos(B-C)，cos(C-A)的绝对值都小于或等于 1，易知它们都不等于-1，所以当且仅当它们都等于 1，即 A=B=C 时，它们的积

$$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=1$$

这时△ABC 为等边三角形。

2-2-32　原式两边平方并整理后，得

$$(y^2+3)\cos^2x+4y^2\cos x+4y^2-3=0\quad (y\geq 0)$$

由于 $y^2+3>0$，$-1\leq\cos x\leq 1$，又

$$\triangle=(4y^2)^2-4(y^2+3)(4y^2-3)=36(1-y^2)$$

故方程有解的充要条件是

$$\begin{cases}\triangle=36(1-y^2)\geq 0\\ -1\leq\dfrac{-4y^2-\sqrt{\triangle}}{2(y^2+3)}\leq 1\end{cases}\text{或}\begin{cases}\triangle=36(1-y^2)\geq 0\\ -1\leq\dfrac{-4y^2+\sqrt{\triangle}}{2(y^2+3)}\leq 1\end{cases}\quad (y\geq 0)$$

解得 $0\leq y\leq 1$，即函数的值域为[0，1]。

3．三角函数的性质(二)

2-2-33 $[2k\pi-\frac{\pi}{2}，2k\pi](k\in Z)$；$[2k\pi+\frac{\pi}{2}，(2k+1)\pi](k\in Z)$

2-2-24 A **只有(3)正确。对于(1)，只能说在**$(k\pi-\frac{\pi}{2}，k\pi+\frac{\pi}{2})$**内都是增函数(k∈Z)；对于(2)，只能说在[kπ，(k+1)π]内都是减函数(k∈Z)；对于(4)，**$y=\sin x$**在**$[\pi，\frac{3\pi}{2}]$**上是减函数，**$y=\cos x$**不是。**

2-2-35 D $\sin^2x>\cos^2x\Leftrightarrow\sin^2x>1-\sin^2x$

$\Leftrightarrow\sin^2x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow|\sin x|>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$**或**$\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$

故 $x\in[k\pi+\frac{\pi}{4}，k\pi+\frac{3\pi}{4}]$ $(k\in Z)$

2-2-26 A **因为**$\operatorname{tg}x$**在**$(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})，(\frac{\pi}{2}，\frac{3\pi}{2})$**内都递增，故(1)，(2)使 tgα＜tgβ必成立，(4)使 tgα＜tgβ必不成立。对于(3)，当 0＜**

$\beta<\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$**时，有**$\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\beta$**成立。**

2-2-37 $\because 0<\sin3<1(0<3<\pi)，-1<\cos3<(\frac{\pi}{2}<3<\pi)$

$\operatorname{tg}0.8>1(\frac{\pi}{4}<0.8<\frac{\pi}{2})$

∴ tg0.8＞sin3＞cos3

2-2-38 递减 设$-b\le x_1<x_2\le -a$**，那么** $a\le -x_2<-x_1\le b$**，于是**$\cos(-x_2)<\cos(-x_1)$**，即**$\cos x_1>\cos x_2$**。**

2-2-39 (1)**令**$u=x-\frac{\pi}{6}$**，则u是x的增函数。因**$y=-2\sin u$**在区间**$[2k\pi+\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$**上单调递增，故当**$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$**即**$x\in[2k\pi+\frac{2\pi}{3}，2k\pi+\frac{5\pi}{3}](k\in Z)$**时，**$y=-2\sin(x-\frac{\pi}{6})$**单调递增。**

(2)**令**$u=-\frac{3\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}$**，则u是x的减函数。因**$y=\sin u$**在区间**$[2k\pi+\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$**上单调递减，故当**$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le-\frac{3\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$**即**$x\in[\frac{4}{3}k-\frac{5}{6}，\frac{4}{3}k-\frac{1}{6}](k\in Z)$**时，**$y=\sin(-\frac{3\pi}{2}x+\frac{\pi}{4})$**单调递增。**

2-2-40 (1)3π (2)π (3)2π (4)$\frac{2\pi}{3}$

2-2-41 C 因为|sin(x+π)|=|-sinx|=|sinx|，所以π是 y=|sinx|

的一个周期。设 $0<T<\pi$。假定 T 是 $y=|\sin x|$ 的周期，则有 $|\sin(x+T)|=|\sin x|$。令 x=0，得 $|\sin T|=0$，从而 $\sin T=0$。这不可能。故 $y=|\sin x|$ 的最小正周期为 π。

2-2-42　A(2)正确。因为 $\sin|-x|=\sin|x|$。其它均不正确。

2-2-43　C 根据函数周期的定义，任何非零实数都是 f(x)=c(c 为常数)的一个周期。

2-2-44　(1)$M=3$，$m=-1$，$T=\frac{2\pi}{\omega}$

(2)要使 f(x)在任意两个整数(包括此两整数)间变化时,能取到一个最

大值M，一个最小值m，必须且只需$T\leq 1$，即$\frac{2\pi}{\omega}\leq 1$，但$\omega>0$，所以 $\omega\geq 2\pi$，从而ω的最小正整数值是 7。

2-2-45　(1)首先，对任意 x∈R，总有

$$f(x+\pi)=\sin(x+\pi)\cos(x+\pi)=-\sin x(-\cos x)=\sin x\cos x$$

故π是 $f(x)=\sin x\cos x$ 的一个周期。其次，假设 $0<T<\pi$，而 T 是 $f(x)=\sin x\cos x$ 的周期，则对任意 x∈R，都有

$$f(x+T)=\sin(x+T)\cos(x+T)=\sin x\cos x$$

成立。令 x=0，得 $\sin T\cos T=0$，又 $0<T<\pi$，故只能是 $\cos T=0$，从而 $T=\frac{\pi}{2}$，于是

$$\sin(x+\frac{\pi}{2})\cdot\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\cos x\sin x=\sin x\cos x$$

对一切 x∈R 都成立，这不可能。所以当 $0<T<\pi$ 时，T 不可能是 $f(x)=\sin x\cos x$ 的周期，即π是最小正周期。

注　如果不限于用周期的定义证明，则可将原式化为：

$$y=\frac{1}{2}\sin 2x$$

由此立刻得最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$。

(2)因为 f(x)的最小正周期为 T，故 T 是使

$$f(kx+T)=f(kx)$$

对一切$kx\in R$都成立的最小正数，从而$\frac{T}{k}$是使

$$f[k(x+\frac{T}{k})]=f(kx)$$

对一切$x\in R$都成立的最小正数，此即$f(kx)$的最小正周期为$\frac{T}{k}$。

2-2-46　仿 2-2-45 证明。

2-2-47　(1)若 x∈[-1，1]，则-x∈[-1，1]。假设 x=sint，则 -x=sin(-t)。根据题设条件分别有

$$2f(-\sin t)+3f(\sin t)=4\sin t\cos t \qquad (i)$$

$$2f[-\sin(-t)]+3f[\sin(-t)]=4\sin(-t)\cos t$$

即 $$2f(\sin t)+3f(-\sin t)=-4\sin t\cos t \qquad (ii)$$

(i)+(ii)，得

$$5f(\sin t)+5f(-\sin t)=0$$

即 $f(-\sin t)=-f(\sin t)$ (iii)

所以 f(x)=-f(x)。所以 f(x)为奇函数。

(2)由(i)，(iii)可得

$$-2f(\sin t)+3f(\sin t)=4\sin t\cos t$$

即 $f(\sin x)=4\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$(注意 $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$)

所以$f(x)=4x\sqrt{1-x^2}$，此即所求的表达式。

2-2-48 (2)，(4)，(6)，(7) (3)，(5) (1) 对于(1)，有

$$f(-x)=-\sin x+\cos x\neq -f(x)或 f(x)$$

故它不是奇函数也不是偶函数；对于(2)，

$$f(-x)=\sin(-x)\cos(-x)=-\sin x\cos x=-f(x)$$

故它是奇函数；同理，(4)，(6)，(7)都是奇函数；对于(3)，

$$f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x$$

故它是偶函数；同理，(5)也是偶函数。

第三部分　两角和与差的三角函数、解斜三角形

(一)两角和与差的三角函数

1．两角和与差的三角函数(一)

3-1-1 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

3-1-2 $-\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$，$-\frac{\sqrt{6}+3}{6}$，$4\sqrt{2}+3\sqrt{3}$，

3-1-3 (1) $-\frac{63}{65}$ (2) $\frac{56}{65}$ (3) $\frac{63}{16}$

3-1-4 $\frac{264}{1105}$，$-\frac{943}{1105}$

3-1-5 (1)$\sin\alpha$ (2)$\cos\alpha$ (3)0 (4)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3-1-6 (1)$\frac{1}{2}$ (2)$\frac{1}{2}$ (3)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3-1-7 (1)$\frac{187}{205}$ (2)$\frac{156}{205}$或$\frac{84}{205}$

3-1-8 (1)$\frac{\sqrt{2}}{10}$ (2)$\frac{3}{22}$ (3)$3-2\sqrt{2}$

3-1-9 A

3-1-10 略

3-1-11 略

3-1-12 因为$\mathrm{tg}B=\frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$，$\mathrm{tg}C=\frac{AD}{DC}=\frac{1}{3}$，所以

$\mathrm{tg}\angle BAC=\mathrm{tg}[180°-(B+C)]=-\mathrm{tg}(B+C)=-1$

又$0°<\angle BAC<180°$，所以$\angle BAC=135°$。

3-1-13 $\mathrm{tg}(x+y)=\cdots=-1$，又由$0<x<\frac{\pi}{2}$及$0<y<\frac{\pi}{2}$知$0<x+y<\pi$，所以$x+y=\frac{3}{4}\pi$。

3-1-14 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\cdots=\frac{7}{9}$，$\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\cdots=1$。又由$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{tg}\beta$，$\mathrm{tg}\gamma$都大于0而小于1，知$0<\alpha$，$\beta$，$\gamma<\frac{\pi}{4}$，所以$0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{4}\pi$，所以$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$。

3-1-15 (1)已知等式变为$\cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$，所以$x-\frac{\pi}{3}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ $(k\in Z)$，即

$$x=2k\pi\text{或}x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in Z)$$

(2)等式左边展开并化简，得$2\cos x\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$，即$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} (k \in Z)$。

(3)因为$\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$，代入已知等式得

$$\cos(x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x + \frac{\pi}{6}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{或} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in Z)$$

3-1-16 依题意求得$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$。又易知$0 < \alpha + \beta < \pi$。故

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

3-1-17 C $\cos\beta = \cos(\alpha + \beta - \alpha) = \frac{-36 \pm 20}{13 \times 5} < 0$

$$\sin\beta = \sin(\alpha + \beta - \alpha) = \frac{\pm 15 + 48}{13 \times 5} > 0$$

故选 C。

3-1-18 两式平方后再相加，得

$$9\sin^2\alpha + 25\cos^2\beta + 30\sin\alpha\cos\beta + 9\cos^2\alpha + 25\sin^2\beta + 30\cos\alpha\sin\beta = 49$$

即$\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$，从而

$$\alpha + \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{或} \alpha + \beta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in Z)$$

3-1-19 由$0 < \beta < \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，得

$$\alpha - \frac{\beta}{2} \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \quad \frac{\alpha}{2} - \beta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$$

故 $\sin(\alpha - \frac{\beta}{2}) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$，$\cos(\frac{\alpha}{2} - \beta) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

从而 $\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = \cos[(\alpha - \frac{\beta}{2}) - (\frac{\alpha}{2} - \beta)] = \frac{7\sqrt{5}}{27}$

3-1-20 (1)$y = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x)$或$y = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} + x)$

(2)$y = 13\sin(x + \alpha)$，其中$\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5}$。

3-1-21 (1)$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$；2；-2；π；$[k\pi-\frac{5}{12}\pi，k\pi+\frac{1}{12}\pi]$ (k∈Z)

(2)y=5sin(x-α)，其中 tgα=3/4；5；2π。

3-1-22 D $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，$x\in[-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}]$。

当$x=\frac{\pi}{6}$时，f(x)最大，最大值为$f(\frac{\pi}{6})=2$；当$x=-\frac{\pi}{2}$时，f(x)最小，最小值为$f(-\frac{\pi}{2})=-1$。

3-1-23 (1)原式$=\dfrac{\frac{1}{2}\cos15°}{\frac{1}{2}\sin15°+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos15°}=\dfrac{\frac{1}{2}\sin75°}{\sin(60°+15°)}=\dfrac{1}{2}$

(2)原式$=\dfrac{tg45°-tg15°}{1+tg45°tg15°}=tg(45°-15°)=tg30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3-1-24 ∵sinα=sin[(α+β)-β]=sin(α+β)cosβ-cos(α+β)sinβ

而 sin(α+2β)=sin[(α+β)+β]=sin(α+β)cosβ+cos(α+β)sinβ

因此，由已知得

sin(α+β)cosβ-cos(α+β)sinβ=ksin(α+β)cosβ+kcos(α+β)sinβ

$\Rightarrow tg(\alpha+\beta)=\dfrac{1+k}{1-k}tg\beta$

2．两角和与差的三角函数(二)

3-1-25 (1)因$\dfrac{tg15°+tg30°}{1-tg15°tg30°}=tg45°=1$，故

tg15°+tg30°+tg15°tg30°=1

(2)因为$\dfrac{tg65°+tg70°}{1-tg65°tg70°}=tg(65°+70°)=tg135°=-1$，所以

1+tg65°+tg70°=tg65°tg70°

3-1-26 $tg(20°-10°)=\dfrac{tg20°-tg10°}{1+tg20°tg10°}$

$\Leftrightarrow tg10°tg20°=\dfrac{tg20°-tg10°}{tg10°}-1$

同理，$tg20°tg30°=\dfrac{tg30°-tg20°}{tg10°}-1$，从而

$$tg10°tg20°+tg20°tg30°$$
$$=\dfrac{tg20°-tg10°+tg30°-tg20°}{tg10°}-2$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}10° \mathrm{tg}20° + \mathrm{tg}20° \mathrm{tg}30° = \frac{\mathrm{tg}30°}{\mathrm{tg}10°} - 3$$

3-1-27　在△ABC 中，A+B+C=π，故 A+B=π-C。所以

$$\frac{\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB}}{1 - \mathrm{tgAtgB}} = \mathrm{tg}(A + B) = \mathrm{tg}(\pi - C) = -\mathrm{tgC}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} = -\mathrm{tgC} + \mathrm{tgAtgBtgC}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} + \mathrm{tgC} = \mathrm{tgAtgBtgC}$$

3-1-28 $\because\ 1 + \sqrt{3}\mathrm{tg}10° = 1 + \mathrm{tg}60° \mathrm{tg}10°$

$$= \frac{\mathrm{tg}60° - \mathrm{tg}10°}{\mathrm{tg}(60° - 10°)} = \frac{\mathrm{tg}60° - \mathrm{tg}10°}{\mathrm{tg}50°}$$

$\therefore$ **左边** $= \sin 50° \dfrac{\mathrm{tg}60° - \mathrm{tg}10°}{\mathrm{tg}50°} = \cos 50° (\mathrm{tg}60° - \mathrm{tg}10°)$

$$= \cos 50° \frac{\sin 60° \cos 10° - \cos 60° \sin 10°}{\cos 60° \cos 10°}$$

$$= \cos 50° \frac{\sin 50°}{\frac{1}{2}\cos 10°} = \frac{\sin 100°}{\cos 10°} = \frac{\sin 80°}{\sin 80°} = 1$$

3-1-29　(1)由题设知 tgα+tgβ=-a，tgα·tgβ=a+1，故

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\beta} = \frac{-\alpha}{1 - \alpha - 1} = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$$

(2)**由题设，**$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \dfrac{3 - 2a}{a}$，$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = \dfrac{a - 2}{a}$，**故**

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\beta} = \frac{\frac{3 - 2a}{a}}{1 - \frac{a - 2}{a}} = \frac{3}{2} - a$$

依题意，已知方程的判别式非负，即

$$\triangle = (2a - 3)^2 - 4a(a - 2) = -4a + 9 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{9}{4}$$

于是 $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{3}{2} - a \geq -\dfrac{3}{4}$

此即 $4\sin(\alpha + \beta) \geq -3\cos(\alpha + \beta)$

3-1-30　因为 A，B，C 是三角形的内角，所以 A+B=π-C。于是，

cosC=-cos(A+B)=-cosAcosB+sinAsinB

因为方程两根之积是两根之和的 2 倍，故

$$1 - \cos C = 2\cos A\cos B \Rightarrow 1 + \cos A\cos B - \sin A\sin B = 2\cos A\cos B$$

$$\Rightarrow \cos A\cos B + \sin A\sin B = 1 \Rightarrow \cos(A - B) = 1$$

又-π＜A-B＜π，所以 A-B=0，即 A=B。因此，△ABC 是等腰三角形。

3-1-31 $\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\beta} = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{2}$，**故**

tgα=tgβ+2tg(α-β)

$$\textbf{3-1-32}\quad \frac{\sin(\alpha+\beta)-4\sin\alpha+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-4\cos\alpha+\cos(\alpha-\beta)}$$
$$=\frac{2\sin\alpha\cos\beta-4\sin\alpha}{2\cos\alpha\cos\beta-4\cos\alpha}$$
$$=\frac{2\sin\alpha(\cos\beta-2)}{2\cos\alpha(\cos\beta-2)}$$
$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$$

而$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，故$0<\mathrm{tg}\,\alpha<1$。从而原不等式成立。

$\textbf{3-1-33}\quad \sin^2\gamma=\mathrm{tg}^2\gamma\cos^2\gamma=\frac{\mathrm{tg}^2\gamma}{1+\mathrm{tg}^2\gamma}$，$\sin^2\alpha=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$。

代入已知等式，得

$$\frac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)}{\mathrm{tg}\alpha}+\frac{\mathrm{tg}^2\gamma(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{\mathrm{tg}^2\alpha(1+\mathrm{tg}^2\gamma)}=1$$
$$\Rightarrow \mathrm{tg}(\alpha-\beta)\mathrm{tg}\alpha(1+\mathrm{tg}^2\gamma)+\mathrm{tg}^2\gamma(1+\mathrm{tg}^2\alpha)=\mathrm{tg}^2\alpha(1+\mathrm{tg}^2\gamma)$$
$$\Rightarrow [1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta)]\mathrm{tg}^2\gamma=\mathrm{tg}\alpha[\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}(\alpha-\beta)]$$
$$\Rightarrow \mathrm{tg}^2\gamma=\frac{\mathrm{tg}\alpha[\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}(\alpha-\beta)]}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta)}=\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}[\alpha-(\alpha-\beta)]=\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta$$

3-1-34 $\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$

代入已知条件等式 $k\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)$中，即得

$$k\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-k\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$$
$$\Rightarrow k\cos\beta-k\sin\beta\,\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=1$$
$$\Rightarrow \mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\mathrm{ctg}\beta-\frac{1}{k\sin\beta}$$

$$\textbf{3-1-35}\quad \mathrm{ctg}(A-B)=\frac{1}{\mathrm{tg}(A-B)}=\frac{1+\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}A-\mathrm{tg}B}=\frac{1+a^2-1}{a+1-a+1}=\frac{a^2}{2}$$

$$\textbf{3-1-36}\quad (\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow -2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=-\frac{3}{2}\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$$

又α，β均为锐角，且$\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{2}<0$，所以

$$\sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$\Rightarrow \mathrm{tg}(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$\textbf{3-1-37}$ (1)左边 $=\frac{\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)$

$$=\frac{-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

(2)仿(1)可证。

3-1-38 $a\mathrm{tg}\alpha=b\mathrm{tg}\beta\Rightarrow\frac{a^2(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{b^2\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}$

$\Rightarrow a^2-a^2\cos^2\alpha-a^2\sin^2\beta+a^2x^2\cos^2\alpha\sin^2\beta=0$

$\Rightarrow 1-\cos^2\alpha-\sin^2\beta+x^2\cos^2\alpha\sin^2\beta=0$

$\Rightarrow x^2-x^2\cos^2\alpha-x^2\sin^2\beta+x^4\cos^2\alpha\sin^2\beta=0$

$\Rightarrow 1-x^2\cos^2\alpha-x^2\sin^2\beta+x^4\cos^2\alpha\sin^2\beta=1-x^2$

$\Rightarrow(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)=1-x^2$

3-1-39　由已知等式容易得出

$$a=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$b=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

所以　$\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

3-1-40　(1)$a\sin(\theta+\alpha)=b\sin(\theta+\beta)$

$\Rightarrow a\sin\theta\cos\alpha+a\cos\theta\sin\alpha=b\sin\theta\cos\beta+b\cos\theta\sin\beta$

$\Rightarrow(a\cos\alpha-b\cos\beta)\sin\theta=(b\sin\theta-a\sin\alpha)\cos\theta$

$\Rightarrow\mathrm{tg}\theta=\frac{b\sin\beta-a\sin\alpha}{a\cos\alpha-b\cos\beta}$

(2)仿(1)可证。

3．二倍角的正弦、余弦、正切

3-1-41 A $\sqrt{1+\sin190°}=\sqrt{(\sin95°+\cos95°)^2}$

且 $\sin95°+\cos95°>0$。

3-1-42　B 原式$=(\sin^2 7°30'-\cos^2 7°30')\sin(23°-8°)$

$$=\cdots=-\frac{1}{2}\sin30°=-\frac{1}{4}$$

3-1-43 C $\frac{\sin2\theta-\cos2\theta}{1+\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}$

将分子分母同除以$\cos^2\theta$，并将已知$\mathrm{tg}\theta=2$代入上式即得$\frac{7}{6}$。

3-1-44 B设$t=\mathrm{tg}(45°+\alpha)$，则$t^2=17+12\sqrt{2}$，所以

$$\sin2\alpha=-\cos(90°+2\alpha)=-\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{16+12\sqrt{2}}{18+12\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

3-1-45 原式$=\frac{1}{\cos10°}(-\cos40°)\cdot2\sin(20°-60°)=\frac{\sin80°}{\cos10°}=1$

3-1-46 因$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$，故$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$。所以

$$\sin 2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9}\Rightarrow\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{9}$$

3-1-47 因为$\sin(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{5}{13}$，$x\in(0，\frac{\pi}{4})$，所以$\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{12}{13}$，故

$$\frac{\cos 2x}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2x)}{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}=2\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{24}{13}$$

3-1-48 原式=(tg9°+tg81°)-(tg27°+tg63°)

$$=(\frac{\sin 9°}{\cos 9°}+\frac{\cos 9°}{\sin 9°})-(\frac{\sin 27°}{\cos 27°}+\frac{\cos 27°}{\sin 27°})$$

$$=\frac{1}{\sin 9°\cos 9°}-\frac{1}{\sin 27°\cos 27°}$$

$$=\frac{2}{\sin 18°}-\frac{2}{\sin 54°}$$

$$=2\frac{\sin 54°-\sin 18°}{\sin 18°\sin 54°}$$

$$=2\frac{2\sin 18°\cos 36°}{\sin 18°\sin 54°}=4$$

3-1-49 由$0<\beta<\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，可知

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\pi$$

又因$\sin(\frac{\alpha}{2}-\beta)=\frac{2}{3}$，$\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})=-\frac{1}{9}$，故

$$\cos(\frac{\alpha}{2}-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{3}，\sin(\alpha-\frac{\beta}{2})=\frac{4\sqrt{5}}{9}，$$

所以 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos[(\alpha-\frac{\beta}{2})-(\frac{\alpha}{2}-\beta)]$

$$=-\frac{1}{9}\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{3}\frac{4\sqrt{5}}{9}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$$

$$\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=-\frac{239}{729}$$

3-1-50 左边$=\frac{1}{\sec^2 A}=\frac{1}{1+tg^2 A}=\frac{24}{25}$

而$tg2B=\frac{2tgB}{1-tg^2B}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{3}{4}$，故

$$\text{右边} = \sin 4B = \frac{2\mathrm{tg}2B}{1+\mathrm{tg}^2 2B} = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1+(\frac{3}{4})^2} = \frac{24}{25}$$

3-1-51　因为 $\sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$**，**$\beta$**为锐角，所以**$\cos\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$**，所以** $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{3}$**．所以**

$$\mathrm{tg}2\beta = \frac{2\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}^2\beta} = \frac{3}{4}$$

从而　$$\mathrm{tg}(\alpha+2\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}2\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}2\beta} = \frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}} = \frac{4+21}{28-3} = 1$$

又$0<\mathrm{tg}\alpha<1$，$0<\sin\beta<\frac{\sqrt{2}}{2}$**，故**$\alpha$**，**$\beta\in(0,\frac{\pi}{4})$**，从而**$\alpha+2\beta\in(0,\frac{3\pi}{4})$**．再由上式即知**$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$**．**

3-1-52　(1)**左边** $$= \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}) = \text{右边}$$

(2)**左边** $$= \frac{\cos A}{2\sin A}\cdot\frac{\sec^2 A}{2\sin A\cos A} = \frac{1}{4\sin^2 A\cos^2 A} = \csc^2 2A = \text{右边}$$

(3)**左边** $$= \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

$= $**右边**

(4)**右边** $$= \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\beta}{\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)} = \frac{2\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \text{左边}$$

3-1-53　注意：

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1-1+\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}-2\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{2\mathrm{tg}\alpha}$$
$$=\mathrm{ctg}\alpha-2\mathrm{ctg}2\alpha$$

(1)左边 $=\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-\mathrm{ctg}x+\frac{1}{4}\mathrm{ctg}\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\mathrm{ctg}\frac{x}{4}-\mathrm{ctg}x=$ 右边

(2)左边=ctgA-2ctg2A+2ctg2A-4ctg4A+4ctg4A-8ctg8A
=ctgA-8ctg8A=右边

3-1-54 左边 $=\frac{\cos\alpha+1+\sin\alpha}{\cos\alpha+1-\sin\alpha}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2})^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha$$

= 右边

又法：设 $t=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$，则

左边 $=\frac{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}+\frac{2t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}-\frac{2t}{1-t^2}}=\frac{1+t}{1-t}$

右边 $=\frac{1+t^2}{1-t^2}+\frac{2t}{1-t^2}=\frac{1+t^2+2t}{1-t^2}=\frac{1+t}{1-t}$

3-1-55 左边 $=\frac{\sin^2 2\theta-4\sin^2\theta}{4\sin^2\theta\cos^2\theta-4\cos^2\theta}$

$$=\frac{4\sin^2\theta\cos^2\theta-4\sin^2\theta}{-4\cos^4\theta}=\frac{-4\sin^4\theta}{-4\cos^4\theta}=\mathrm{tg}^4\theta=\text{右边}$$

3-1-56 左边 $=2^n\cdot(2\sin x\cos x)\cos 2x\cdot\cdots\cdot\cos 2^n x$
$=2^n\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cdot\cdots\cdot\cos 2^n x$
$=2^{n-1}\sin 4x\cos 4x\cdot\cdots\cdot\cos 2^n x$
$=\cdots=2^2\sin 2^{n-1}x\cos 2^{n-1}x\cos 2^n x$
$=2\sin 2^n x\cos 2^n x=\sin 2^{n+1}x=$ 右边

4．半角的正弦、余弦、正切

3-1-57 C

3-1-58 D

3-1-59 C

3-1-60 C

3-1-61 C

3-1-62 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$；$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$；$1-\sqrt{2}$

3-1-63　(1)由$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$两边平方得

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$$

(2)仿(1)证明．

(3)右边$=1+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=$左边

(4)右边$=1-\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=$左边

3-1-64　(1)$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$，$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

(2)$\cos\alpha=\pm0.8=\pm\frac{4}{5}$，所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}，\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}，\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=3$$

或　$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}，\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10}，\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$$

3-1-65　(1)原式$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\cos\alpha}{2}}$

$$=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}\quad(\text{其中}\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}．)$$

(2)仿(1)求之．原式$=\sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{4})$．

3-1-66　原式$=\frac{2\sin^2 39°}{2\sin 39°}+\mathrm{ctg}15°+\frac{2\cos^2 129°}{2\cos 129°}+$

$$\frac{\csc^2 105°}{\csc 105°\cdot\sec 105°}$$

$$=\sin 39°+\cos 129°+\mathrm{ctg}15°+\mathrm{ctg}105°$$

$$=\mathrm{ctg}15°-\mathrm{tg}15°$$

$$=\frac{\cos^2 15°-\sin^2 15°}{\cos 15°\sin 15°}=2\mathrm{ctg}30°=2\sqrt{3}$$

3-1-67　$\because\sin 15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$$\cos 15°=\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\therefore$左边$=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2+\sqrt{2}$

$=\frac{1}{\sin 30°}+\frac{1}{\sin 45°}=$右边

又法：

$$左边=\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin(15°-45°)}=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2+\sqrt{2}$$

同理　左边 $=2+\sqrt{2}$

3-1-68　左边 $=\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)(1-\cos2\varphi)+\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)(1+\cos2\varphi)$

$$=\cdots=\frac{1}{2}(2+2\cos2\theta\cos2\varphi)$$

$$=1+\cos2\theta\cos2\varphi=右边$$

3-1-69　左边 $=\left(\frac{1+\cos45°}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos135°}{2}\right)^2$

$$+\left(\frac{1+\cos225°}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos315°}{2}\right)^2$$

$$=\left[\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right]^2+\left[\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right]^2+\left[\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right]^2+\left[\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}(1\times4+\frac{1}{2}\times4)=\frac{3}{2}=右边$$

3-1-70　因为 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi$，所以 $k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}$，又

$$\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}>0$$

所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限的角，所以 $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}<0$，又

$$(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2})^2=1+\sin\alpha=2-(1-\sin\alpha)$$

$$=2-(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2})^2=2-(\frac{1}{3})^2=\frac{17}{9}$$

所以　$\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{17}{9}}=-\frac{\sqrt{17}}{3}$

3-1-71　$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi\Rightarrow k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 又已知 $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$，所以 $2k\pi+\frac{5\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in Z)$，而

$$(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2})^2=\frac{1}{5}\Rightarrow 1-\sin\alpha=\frac{1}{5}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{3}{5}$$

所以 $$\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{2}}=-\frac{2}{5}\sqrt{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+(-\frac{3}{5})}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

5．积化和差与和差化积

3-1-72　B

3-1-73　C

3-1-74　B　(用特殊值法)　不妨设α=β=45°，则

$\sin(45°+45°)=\sin 90°=1$，$\sin 45°+\sin 45°=\sqrt{2}\approx 1.7$

所以sinα+sinβ＞sin(α+β)　(因为α，β为锐角，不能选α=90°，β=0°，故排除D).

3-1-75　B

cos36°-cos72°=2sin18°sin54°

$$=\frac{2\sin 18°\cos 18°\sin 54°}{\cos 18°}$$

$$=\frac{2\sin 36°\cos 36°}{2\cos 18°}$$

$$=\frac{\sin 72°}{2\sin 72°}=\frac{1}{2}$$

3-1-76　D　$y=\frac{1}{2}[\cos\frac{\pi}{4}-\cos(2x-\frac{\pi}{4})]=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})$

当$\cos(2x-\frac{\pi}{4})$**有最大值**1**时，函数**y**取最小值**$y_{min}=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$**.**

3-1-77　C　**原式**$=\sin^2 15°+\cos^2 15°+\frac{1}{2}(\cos 90°+\cos 60°)$

$$=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

3-1-78　C　**原式**$=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}(2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}-2\sin\frac{3\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}$

$$+2\sin\frac{5\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14})$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}[\sin\frac{2\pi}{14}-(\sin\frac{4\pi}{14}+\sin\frac{2\pi}{14})+$$

$$(\sin\frac{6\pi}{14}+\sin\frac{4\pi}{14})]$$

$$=\frac{\sin\frac{6\pi}{14}}{2\sin\frac{6\pi}{14}}=\frac{1}{2}$$

3-1-79 C $(\sin x+\sin y)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow 2-\cos^2 x-\cos^2 y+2\sin x\sin y$

$$=\frac{4}{9}\Rightarrow \cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y$$

$$=\frac{14}{9}+2\cos(x-y)\Rightarrow(\cos x+\cos y)^2$$

$$=\frac{14}{9}+2\cos(x-y)$$

当$\cos(x-y)=1$**时，**$(\cos x+\cos y)^2$**有最大值**$\frac{14}{9}+2=\frac{32}{9}$**，所以**$\cos x+\cos y$

的取值范围是$[-\frac{4\sqrt{2}}{3}$**，**$\frac{4\sqrt{2}}{3}]$**.**

3-1-80 A $y=\frac{1+\cos(2x-\frac{\pi}{6})}{2}+\frac{1-\cos(2x+\frac{\pi}{6})}{2}-1$

$$=\cos(2x-\frac{\pi}{6})-\cos(2x+\frac{\pi}{6})=2\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x=\sin 2x$$

3-1-81 A 将已知两式，右左两边分别平方再相加，即得

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{59}{72}$$

3-1-82 C **原式**$=\frac{2\sin 7°+\sin 23°-\sin 7°}{2\cos 7°+\cos 23°-\cos 7°}=\frac{\sin 7°+\sin 23°}{\cos 7°+\cos 23°}$

$$=\frac{2\sin 15°\cos 8°}{2\cos 15°\cos 8°}=tg15°=tg(45°-30°)$$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=2-\sqrt{3}$$

3-1-83 B 2y=cos6x+cos2x-(1+cos6x)=-1+cos2x，即

$$y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$$

3-1-84 B y=2sin²x+2sinxcosx=-1-cos2x+sin2x

$$=1+\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$$

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$$

所以减区间为$k\pi+\frac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{7\pi}{8}(k\in Z)$.

3-1-85 C

f(x)=3sin(x+20°)+5[sin(x+20°)cos60°+cos(x+20°)sin60°]

$$=\frac{11}{2}\sin(x+20°)+\frac{5\sqrt{3}}{2}\cos(x+20°)=7\sin(x+20°+\varphi)$$

其中φ为锐角，其值由$tg\varphi=\frac{5\sqrt{3}}{11}$决定.

3-1-86 C 根据半角公式及和化积公式，原式可化为

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2(x+\alpha)+2\cos 2(x+\alpha)\cos 2\alpha]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2(x+\alpha)(1+2\cos 2\alpha)$$

因为$\alpha\in(0,\pi)$，所以当且仅当$\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$，即$2\alpha=\frac{2\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}$，也就是$\alpha=\frac{\pi}{3}$或$\alpha=\frac{2\pi}{3}$时，f(x)的图象才是一条直线(否则表示三角函数曲线).

3-1-87 $\frac{1}{2}$ 原式$=\cos(42°+18°)+\cos(42°-18°)-\sin(90°+24°)$

$$=\frac{1}{2}+\cos 24°-\cos 24°=\frac{1}{2}$$

3-1-88 $\frac{3}{4}$

$$原式=\frac{1}{2}[2\sin^2 5°+\cos(35°+25°)+\cos(35°-25°)]$$

$$=\frac{1}{2}[1-\cos 10°+\frac{1}{2}+\cos 10°]=\frac{3}{4}$$

3-1-89 0 原式$=\frac{1}{2}[(\cos 3\alpha+\cos\alpha)+(\cos 7\alpha-\cos 3\alpha)-(\cos 7\alpha-\cos\alpha)]$

$$=0$$

3-1-90 $[1,\sqrt{2})$ 由$\sin x+\cos x=a$知

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

因为$x\in[0,\pi]$，所以$\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sin(x+\frac{\pi}{4})<1$时，原方程有两解(在同一坐标系中作出$y=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$的图象和平行于x轴的直线$y=a$，可以直观地看出这个结论).从而可知

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{a}{\sqrt{2}} < 1 \Leftrightarrow 1 \leq a < \sqrt{2}$$

3-1-91　原式 $= \frac{1}{2}\cos 2\alpha\cos 2\beta - (\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)^2$

$+ 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta$

$= \frac{1}{2}(\cos 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\alpha\sin 2\beta) - \cos^2(\alpha-\beta)$

$= \frac{1}{2}\cos 2(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}[1+\cos 2(\alpha-\beta)] = -\frac{1}{2}$

3-1-92　原式 $= 1 - \sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}[\sin\frac{\pi}{4} - \sin(\alpha+\frac{\pi}{4})]$

$= 2\sqrt{2}\sin(-\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}) = -2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})$

3-1-93　原式 $= 2\sin\frac{3}{2}\cos 3 \cdot \cos\frac{3}{2} = \sin 3 \cdot \cos 3 = \frac{1}{2}\sin 6$

3-1-94　原式 $= \frac{2}{1+\cos 200°} - \frac{6}{1-\cos 200°}$

$= \frac{2-2\cos 200° - 6 - 6\cos 200°}{1-\cos^2 200°} = \frac{-8(\frac{1}{2}+\cos 200°)}{\sin^2 200°}$

$= \frac{-8(\cos 60° + \cos 200°)}{\sin^2(180°+20°)} = \frac{-16\cos 130°\cos 70°}{\sin^2 20°}$

$= \frac{-16\cos(90°+40°)}{\sin 20°} = \frac{32\sin 40°\cos 20°}{2\sin 20° \cdot \cos 20°} = 32\cos 20°$

3-1-95　原式 $= \frac{\sin 20°}{\cos 20°} - \frac{\cos 20°}{\sin 20°} + 2\mathrm{tg}40° + 4\mathrm{tg}10°$

$= \frac{\sin^2 20° - \cos^2 20°}{\cos 20°\sin 20°} + 2\mathrm{tg}40° + 4\mathrm{tg}(90°-80°)$

$= 2\frac{-\cos 40°}{\sin 40°} + 2\frac{\sin 40°}{\cos 40°} + 4\mathrm{ctg}80°$

$= 2\times 2\frac{\sin^2 40° - \cos^2 40°}{2\sin 40°\cos 40°} + 4\mathrm{ctg}80° = -4\mathrm{ctg}80° + 4\mathrm{ctg}80°$

$= 0$

3-1-96　由已知得 $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$**，** $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$**，** $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$**．设** $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4} = t$**，则** $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2t}{1-t^2}$**，即** $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{3}{4}$ **解得** $t_1 = -3$**，** $t_2 = \frac{1}{3}$**．但** $\alpha \in (4\pi, \frac{9\pi}{2})$**，即** $\frac{\alpha}{4} \in (\pi, \frac{9\pi}{8})$**，故** $t_1 = -3$ **应舍去，所以** $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{t} = 3$**．**

3-1-97　原式 $=(\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15})-(\cos\frac{7\pi}{15}-\cos\frac{\pi}{15})$

$$=2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{15}-2\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}=2\cos\frac{\pi}{5}(\cos\frac{\pi}{15}-\cos\frac{4\pi}{15})$$

$$=4\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10}=2\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{5}/2\cos\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}$$

3-1-98　原式=(1-cosα)-(tgα-sinα)=(1-cosα)-tgα(1-cosα)

$$=(1-\cos\alpha)(1-\mathrm{tg}\,\alpha)=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sec\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

$$=2\sqrt{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sec\alpha\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$$

3-1-99　$\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{6}-\alpha)-\sin\frac{\pi}{12}\cos(\frac{\pi}{12}+2\alpha)$

$$=[\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)]\cdot[\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)]$$

$$-\sin\frac{\pi}{12}\cos(\frac{\pi}{12}+2\alpha)$$

$$=2\sin\frac{5\pi}{24}\cos(\frac{\pi}{24}+\pi)\cdot 2\cos\frac{5\pi}{24}\sin(\frac{\pi}{24}+\alpha)-\sin\frac{\pi}{12}\cos(\frac{\pi}{12}$$

$$+2\alpha)$$

$$=\sin\frac{5\pi}{12}\sin(\frac{\pi}{12}+2\alpha)-\cos\frac{5\pi}{12}\cos(\frac{\pi}{12}+2\alpha)=-\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha)$$

$$=\sin 2\alpha$$

3-1-100　原式=$\sin^2\alpha\sin 3\alpha\sin\alpha+\cos^2\alpha\cos 3\alpha\cos\alpha$

$$=-\frac{1}{2}(\cos 4\alpha-\cos 2\alpha)\sin^2\alpha+\frac{1}{2}(\cos 4\alpha+\cos 2\alpha)\cos^2\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\cos 4\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\frac{1}{2}\cos 2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2\alpha(1+\cos 4\alpha)=\cos^3 2\alpha$$

3-1-101　原式 $=\dfrac{2(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}{(\cos\alpha-\cos 3\alpha)-(\sin\alpha-\sin 3\alpha)}$

$$=\frac{2(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha\sin\alpha+2\sin\alpha\cos 2\alpha}=\frac{2(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}{2\sin\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}$$

3-1-102　原式 $=\frac{1}{2}(\cos\frac{23}{18}\pi+\cos\frac{2\pi}{3})\cos\frac{13}{36}\pi$

$=(-\frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{18}-\frac{1}{4})\cos\frac{13\pi}{36}$

$=-\frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{13\pi}{36}-\frac{1}{4}\cos\frac{13\pi}{36}$

$=-\frac{1}{4}(\cos\frac{23\pi}{36}+\cos\frac{\pi}{12})-\frac{1}{4}\cos\frac{13\pi}{36}$

$=\frac{1}{4}\cos\frac{13\pi}{36}-\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\cos\frac{13\pi}{36}=-\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}$

3-1-103　原式 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 48°-\frac{1}{2}\cos 48°-\cos 36°=\sin 18°$

$-\cos 36°$

$=\frac{\sin 36°-2\cos 36°\cos 18°}{2\cos 18°}=\frac{\sin 36°-\cos 54°-\cos 18°}{2\cos 18°}$

$=-\frac{1}{2}$

3-1-104　原式=2cos36°cos11°-2cos36°cos25°
=2cos36°(cos11°-cos25°)=2cos36°·2sin18°sin7°

$=\frac{2\cos 36°\sin 36°}{\cos 18°}\sin 7°=\frac{\sin 72°}{\cos 18°}\cdot\sin 7°=\sin 7°$

3-1-105　左边 $=\frac{(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)}{\frac{1}{2}(\sin 2A-\sin 2B)}$

$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos(A+B)\sin(A-B)}$

$=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\sin(A-B)}=\mathrm{tg}(A+B)=$ **右边**

3-1-106　右边 $=2\sin\theta[\cos\frac{\pi}{3}-\cos(\pi+2\theta)]$

$=\sin\theta+2\sin\theta\cos 2\theta$

$=\sin\theta+(\sin 3\theta-\sin\theta)=\sin 3\theta=$ **左边**

3-1-107　左边 $=\sin^2\varphi+\sin(\theta-\varphi)[\sin(\theta-\varphi)+2\sin\varphi\cos\theta]$

$=\sin^2\varphi+\sin(\theta-\varphi)\sin(\theta+\varphi)=\sin^2\varphi+\frac{1}{2}(\cos 2\varphi-\cos 2\theta)$

$=\sin^2\varphi+\frac{1}{2}(1-2\sin^2\varphi-1+2\sin^2\theta)=\sin^2\theta=$ **右边**

3-1-108　左边$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}$

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2})$

$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}=$ **右边**

3-1-109　左边通分后，再证明分子等于 0.

3-1-110　原式$=\frac{2\sin x+\sin x+\sin 3x}{2\cos x+\cos x+\cos 3x}=\frac{2\sin x+2\sin 2x\cos x}{2\cos x+2\cos 2x\cos x}$

$$=\frac{2\sin x+4\sin x\cos^2 x}{2\cos x+2(2\cos^2 x-1)\cos x}=\frac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{2\cos^3 x}=\mathrm{tg}x\frac{1+2\cos^2 x}{2\cos^2 x}$$

$$=\mathrm{tg}x\cdot\frac{1}{2}(\sec^2 x+2)=\frac{1}{2}\mathrm{tg}x(\mathrm{tg}^2x+3)=\frac{1}{2}a(a^2+3)=\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a$$

3-1-111　因为$\frac{\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{m+\cos^2\theta}{m+\sin^2\theta}$**且**$\mathrm{tg}\theta\neq\mathrm{tg}\alpha$**，所以**$\frac{\mathrm{tg}\theta+\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\theta-\mathrm{tg}\alpha}$

$=\frac{2m+1}{\cos 2\theta}$**，所以**

$$2m+1=\frac{(\mathrm{tg}\theta+\mathrm{tg}\alpha)\cos 2\theta}{\mathrm{tg}\theta-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos 2\theta}{\sin(\theta-\alpha)}$$

$$=\frac{\sin(3\theta+\alpha)+\sin(\alpha-\theta)}{2\sin(\theta-\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow 4m+2=\frac{\sin(3\theta+\alpha)+\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{\sin(3\theta+\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin(3\theta+\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)}=4m+3$$

3-1-112　因$\frac{a}{b}=-\frac{-\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$**，可令**$a=m\cos\beta$**，**$b=m\cos\alpha$

$(m\neq 0)$**．于是**

左边$=\frac{m\cos\beta+m\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2m\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$

$=2m\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

右边$=\frac{m\cos\beta}{\mathrm{ctg}\beta}+\frac{m\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}=m(\sin\alpha+\sin\beta)$

$=2m\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

3-1-113　sinA+sin3A+sin5A

=2sin3Acos2A+sin3A

$=\sin 3A(2\cos 2A+1)$

$\cos A+\cos 2A+\cos 3A$

$=2\cos 3A\cos 2A+\cos 3A$

$=\cos 3A(2\cos 2A+1)$

(1)b≠0时，有$\frac{a}{b}=\frac{\sin 3A(2\cos 2A+1)}{\cos 3A(2\cos 2A+1)}=\mathrm{tg}3A$；

(2)$a^2+b^2=\sin^2 3A(2\cos 2A+1)^2+\cos^2 3A(2\cos 2A+1)^2=(2\cos 2A+1)^2$

3-1-114　由已知等式易得

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{4}，2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3}$$

由此知$\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}$，所以

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}$$

3-1-115　由已知等式消去 a，b，得 $a=-\sec(\alpha+\beta)$，$b=\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$，所以

$$a^2-b^2=\sec^2(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)=1$$

3-1-116　$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$

$$=\mathrm{tg}\frac{B}{2}(\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2})+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

$$=\mathrm{ctg}\frac{A+C}{2}\mathrm{tg}\frac{A+C}{2}(1-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2})+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}=1$$

3-1-117　可以证明$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>1$，所以

$$\cos A+\cos B>1-\cos C$$

又　$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

而$0<\cos\frac{A-B}{2}\leq 1$，所以

$$\cos A+\cos B\leq 2\sin\frac{C}{2}$$

3-1-118　由已知方程得$m=-2\sin(x+\frac{\pi}{3})$．因为$0<x<2\pi$，所以$\frac{\pi}{3}<x+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{3}$，要使方程在$(0，2\pi)$内有两个不同的实数根，必须$-2<m<2$且$m\neq-\sqrt{3}$(绘出$y=-2\sin x$，$\frac{\pi}{3}<x<\frac{7}{3}\pi$的图象，容易直观理解这一结论)．

又α，β为方程$\sin x+\sqrt{3}\cos x+m=0$的两个实数根，即

$$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha+m=0$$

$$\sin\beta+\sqrt{3}\cos\beta+m=0$$

两式相减得

$$\sin\alpha-\sin\beta+\sqrt{3}(\cos\alpha-\cos\beta)=0$$

由此可得

$$\frac{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\sqrt{3}$$

3-1-119　原方程化为 $4\cos^2x+4\cos x-4a-3=0$．令 $\cos x=t$，则有

$4t^2+4t-4a-3=0$

(i)

(1)设 $f(t)=4t^2+4t-(4a+3)$，要使原方程在[0，π]上有相异两根，即方程(i)在[-1，1]上有两个不同的实根，则有

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta=16+16(4a+3)>0\\ f(1)=4+4-(4a+3)\geq 0\\ f(-1)=4-4-(4a+3)\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow -1<a\leq -\frac{3}{4}$$

所以当 $a\in(-1,\ -\frac{3}{4}]$ 时，原方程在 $[0,\pi]$ 上有相异两根．

(2)要使原方程在[0，π]上有且仅有一根，即方程(*)在[-1，1]上有且仅有一根，于是

$$f(-1)<0\text{且}f(1)\geq 0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}<a\leq\frac{5}{4}$$

故当 $a\in(-\frac{3}{4},\ \frac{5}{4}]$ 时，原方程在 $[0,\pi]$ 上有且仅有一根．

3-1-120　$\cos2\alpha+3\sin\alpha=1-2\sin^2\alpha+3\sin\alpha=-2(\sin\alpha-\frac{3}{4})^2+\frac{17}{8}$，

故

$$-2(-1-\frac{3}{4})^2+\frac{17}{8}\leq\cos2\alpha+3\sin\alpha\leq -2(\frac{3}{4}-\frac{3}{4})^2+\frac{17}{8}$$

$$\Leftrightarrow -4\leq\cos2\alpha+3\sin\alpha\leq 2\frac{1}{8}$$

3-1-121　令 $y=\frac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}$，则

$(2y-6)\cos x-(3y+1)\sin x=5y-5$

$$\Leftrightarrow \sin(\varphi-x)=\frac{5y-5}{\sqrt{(2y-6)^2+(3y+1)^2}}\qquad(\text{其中}\operatorname{tg}\varphi=\frac{2y-6}{3y+1})$$

$$\Leftrightarrow -1\leq\frac{5y-5}{\sqrt{(2y-6)^2+(3y+1)^2}}\leq 1\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\leq y\leq 3$$

3-1-122　依题意，设$C = A + \frac{\pi}{2}$，则$= \frac{\pi}{2} - 2A$．由正弦定理，得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos 2A} = \frac{c}{\cos A} \Rightarrow \frac{a+c}{\sin A + \cos A} = \frac{b}{\cos 2A}$$

又 2b=a+c，即

$$2\cos 2A = \sin A + \cos A \Leftrightarrow \cos A - \sin A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 2\sin A\cos A = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2A = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{\sqrt{7}+1}{4} \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

所以　$a:b:c = \sin A : \cos 2A : \cos A = (\sqrt{7}-1) : \sqrt{7} : (\sqrt{7}+1)$

3-1-123　设$t = \sin x + \cos(-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$，则$\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$，则所给函数化为$y = \frac{t-1}{2}$．此函数y在$[-\sqrt{2}，\sqrt{2}]$上单调递增，所以$t = \sqrt{2}$时，函数y取得最大值$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，这时$x = \frac{\pi}{4}$．

3-1-124　必要性：不妨设 A=120°，则 B+C=60°，此时

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 + 2\cos\frac{3}{2}(B+C)\cos\frac{3}{2}(B-C)$$

$$= 1 + 2\cos 90°\cos\frac{3}{2}(B-C) = 1$$

充分性：在△ABC 中，有

$$\cos 3C = \cos[3\pi - 3(A+B)] = -\cos 3(A+B) = 1 - 2\cos^2\frac{3}{2}(A+B)$$

由 cos3A+cos3B+cos3C=1 得

$$-4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2} + 1 = 1 \Rightarrow \sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\frac{3A}{2} = 0 \text{或} \sin\frac{3B}{2} = 0 \text{或} \sin\frac{3C}{2} = 0$$

而$0 < \frac{3A}{2}，\frac{3B}{2}，\frac{3C}{2} < \frac{3\pi}{2}$，所以$A = 120°$或$B = 120°$或$C = 120°$．

6．综合题

3-1-125　(1)$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(2)$\frac{1}{4}$　(3)$\frac{\sqrt{3}-2}{4}$　(4)$\frac{\sqrt{2}}{2}$

3-1-126　(1)$\mathrm{ctg}\,\alpha$　(2)-2　(3)$\mathrm{tg}\frac{x}{2}$　(4)$2\cos\frac{\theta}{8}$

3-1-127　C

3-1-128 (1)**原式** $= \dfrac{1}{4\cos18°} \times 4\sin18° \cos18° \cos36°$

$$= \frac{\sin72°}{4\cos18°} = \frac{1}{4}$$

(2)**设**$\cos36° - \sin18° = x$，**则**

$$\cos^2 36° + \sin^2 18° - \frac{1}{2} = x^2 \Leftrightarrow \frac{1+\cos72°}{2} + \frac{1-\cos36°}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= x^2 \Leftrightarrow \sin18° - \cos36° = 2x^2 - 1$$

最后的等式即$-x = 2x^2 - 1$，**解之得**$x = \dfrac{1}{2}$**.** (**已舍去**$x = -1$)**.**

(3)由(2)知

$$\cos^2 36° + \sin^2 18° = x^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

(4)∵ $(\cos36°+\sin18°)^2$

$=\cos^2 36°+\sin^2 18°+2\cos36°\sin18°$

$$= \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$\therefore\ \cos36° + \sin18° = \sqrt{5}/2$

3-1-129 将 $\cos54°=4\cos^3 18°-3\cos18°$ 及 $\sin36°=2\sin18°\cos18°$ 代入 $\cos54°=\sin36°$ 得

$4\cos^3 18°-3\cos18°-2\sin18°\cos18°=0$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 18° + 2\sin18° - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

3-1-130 (1)**左边** $= \dfrac{4\sin36°\cos36°\cos72°}{4\sin36°} = \dfrac{\sin144°}{4\sin144°} = \dfrac{1}{4}$

$=$ **右边**

(2)左边$=\cos^2 20°\cos^2 40°\cos^2 60°\cos^2 80°$

$$= \frac{2^6\sin^2 20°\cos^2 20°\cos^2 40°\cos^2 80°}{2^2 \cdot 2^6\sin^2 20°} = \frac{\sin^2 160°}{2^8\sin^2 160°}$$

$= 2^{-8} =$ **右边**

3-1-131 设 $\mathrm{tg}18°=t$，则

$$\mathrm{tg}36° \cdot \mathrm{tg}72° = \mathrm{tg}36° \cdot \mathrm{ctg}18° = \frac{2t}{1-t^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{2}{1-t^2}$$

(i)

又由$\mathrm{tg}36° = \mathrm{tg}(72° - 36°) = \dfrac{\mathrm{tg}72° - \mathrm{tg}36°}{1+\mathrm{tg}36°\,\mathrm{tg}72°}$**得**

$$\mathrm{tg}36° \cdot \mathrm{tg}72° = \frac{\mathrm{tg}72° - \mathrm{tg}36°}{\mathrm{tg}36°} - 1 = \frac{1-t^2}{2t} - 2$$

(ii)

由(i)，(ii)可求得$t^2=1-\frac{2\sqrt{5}}{5}$(已舍去$t^2=1+\frac{2\sqrt{5}}{5}$)，代入(i)即得tg36°tg72°$=\sqrt{5}$，所以

$$\text{tg}^2 36°\ \text{tg}^2 72°=5$$

3-1-132 sec50°+tg10°

$$=\frac{1}{\cos 50°}+\frac{\sin 10°}{\cos 10°}=\frac{2\sin 50°}{\sin 100°}+\frac{\sin 10°}{\cos 10°}$$

$$=\frac{2\sin 50°+\sin 10°}{\cos 10°}=\frac{2\sin(60°-10°)+\sin 10°}{\cos 10°}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos 10°-\sin 10°+\sin 10°}{\cos 10°}=\sqrt{3}$$

3-1-133 (1)左边$=2\cos^2\theta+4\cos\theta+2=2(\cos\theta+1)^2\geq 0$

(2)左边$=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha\sin^2 2\beta}$

$=1+\text{tg}^2\alpha+4(1+\text{ctg}^2\alpha)(1+\text{ctg}^2 2\beta)$

$=1+\text{tg}^2\alpha+4+4\text{ctg}^2\alpha+\text{ctg}^2 2\beta+\text{ctg}^2\alpha\,\text{ctg}^2 2\beta$

$=5+\text{tg}^2\alpha+4\text{ctg}^2\alpha+\text{ctg}^2 2\beta+\text{ctg}^2\alpha\,\text{ctg}^2 2\beta$

$\geq 5+2\sqrt{\text{tg}^2\alpha\cdot 4\text{ctg}^2\alpha}+\text{ctg}^2 2\beta+\text{ctg}^2\alpha\,\text{ctg}^2 2\beta\geq 9$

(3)$\frac{\sin\alpha}{\sec^2\frac{\alpha}{2}-1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\text{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}=\text{ctg}\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)$但$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，故$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$，于是$\text{ctg}\frac{\alpha}{2}>1$，$1+\cos\alpha>1$，故$\frac{\sin\alpha}{\sec^2\frac{\alpha}{2}-1}>1$，即$\sin\alpha>\sec^2\frac{\alpha}{2}-1$.

3-1-134 (1)因为

$2(\sin\alpha+\sin 2\alpha)(1-\cos\alpha)=2\sin\alpha(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=2\sin^3\alpha$

故 $2\sin\alpha+\sin 2\alpha=\frac{2\sin^3\alpha}{1-\cos\alpha}$

(2)左边$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha=$右边

(3)左边$=\frac{1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha}=\frac{1-\cos^2 2\alpha}{\sin^2\alpha}=4\cos^2\alpha=$右边

(4)左边$=\frac{8\cos 2\alpha}{2+4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha}=\frac{8\cos 2\alpha}{2(1+\cos 2\alpha)^2}=\frac{4\cos 2\alpha}{(2\cos^2\alpha)^2}$

$$=\frac{2\cos^2\alpha-1}{\cos^4\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}(2-\sec^2\alpha)$$

$$=\sec^2\alpha(1-\mathrm{tg}^2\alpha)=\text{右边}$$

3-1-135　原式 $=\dfrac{(1+\mathrm{tg}2\alpha)^2-2\mathrm{tg}^2 2\alpha-2\mathrm{tg}2\alpha-(1+\mathrm{tg}^2 2\alpha)}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}$

$$=\frac{-2\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha}=\frac{-2\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}=-2\sin^2 2\alpha$$

3-1-136　(1)左边

$$=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos(120°-2A)}{2}+\frac{1+\cos(120°+2A)}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2A+\cos(120°-2A)+\cos(120°+2A)]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+2\cos 120°\cos 2A)=\frac{3}{2}$$

(2)左边$=\cos^2x+2\cos x\cos y+\cos^2y+\sin^2x+2\sin x\sin y+\sin^2y$

$=2+2\cos(x-y)$

$$=2[1+\cos(x-y)]=4\cos^2\frac{x-y}{2}=\text{右边}$$

(3)**左边** $=\dfrac{2\sin^2A-2\sin^2B}{\sin 2A-\sin 2B}=\dfrac{-\cos 2A+\cos 2B}{\sin 2A-\sin 2B}$

$$=\frac{2\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\sin(A-B)\cos(A+B)}$$

$$=\mathrm{tg}(A+B)=\text{右边}$$

3-1-137　(1)**左边** $=\dfrac{2(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$

$$=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}-2\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1-\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}-\frac{\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}+1)}{1+\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}}$$

$$=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})-\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}-\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\text{右边}$$

$$(2)\text{左边}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{3\cos\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha}=\frac{\sin(\frac{3}{2}\alpha-\frac{\alpha}{2})-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\alpha-(\sin2\alpha-\sin\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3}{2}\alpha}=\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3}{2}\alpha}$$

$$=\frac{4\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3}{2}\alpha}$$

$$=\frac{4\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{3\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^3\frac{\alpha}{2}}=\frac{4\sin\alpha}{1+2\cos\alpha}=\text{右边}$$

3-1-138　由已知得

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2\sin^2\beta+\cos^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{\sin^2\beta+1}{\cos^2\beta}=\frac{\sin^2\beta+1}{1-\sin^2\beta}$$

$$\Leftrightarrow\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)=(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\beta)\Leftrightarrow\sin^2\beta$$
$$=2\sin^2\alpha-1$$

3-1-139　$(1)y=\frac{a}{2}\sin4x$，$y_{max}=\frac{1}{2}|a|$，$y_{min}=-\frac{1}{2}|a|$

(2)y=cos2x，y_{max}=1，y_{min}=-1

$$(3)y=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}=\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})$$

$$=\frac{1}{2}(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2})=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x-1)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$$

而$x\in[0,\pi]$，**故**$x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi]$．**故当**$x=\frac{\pi}{4}$**时，**$y_{max}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$；**当**$x=\pi$**时，**$y_{min}=-1$．

3-1-140　(1)设三角形 ABC 顶角为 A，则 A=π-2B，所以

$$\cos A=-\cos2B=2\sin^2B-1=\frac{7}{25}$$

(2)**由题设知，**$B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$**，故**

$$\sin B=\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\frac{4}{5}$$

（二） 解斜三角形

1．余弦定理

3-2-1 D 3-2-2 B 3-2-3 D 3-2-4 C

3-2-5 B 3-2-6 A 3-2-7 2 3-2-8 30°

3-2-9 等腰三角形或直角三角形．

3-2-10 锐角三角．

3-2-11 2，3，4

3-2-12 0

3-2-12 由余弦定理，得

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

3-2-14 由余弦定理，得

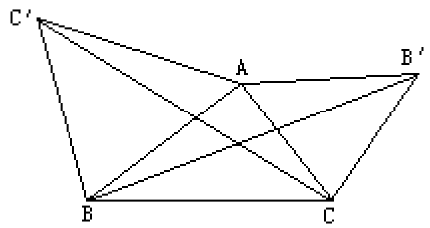
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

又由正弦定理，得 a=2RsinA，b=2RsinB，c=2RsinC．代入上式得

$$\cos A=\frac{4R^2\sin^2 B+4R^2\sin^2 C-4R^2\sin^2 A}{2\cdot 2R\sin B\cdot 2R\sin C}$$

$$=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$$

3-2-15 如下图．分别以 AB，AC 为边在△ABC 外作等边三角形 ABC′和 ACB′．



在△BB′C 中，由余弦定理，得

$BB'^2=a^2+b^2-2ab\cos(C+60°)$

在△ABB′中，由余弦定理，得

$BB'^2=b^2+c^2-2bc\cos(A+60°)$

由以上两等式即得

$a^2+b^2-2ab\cos(C+60°)=b^2+c^2-2bc\cos(A+60°)$

利用 CC′，同理可证另一等式成立．

3-2-16 由(a+b+c)(a+b-c)=3ab 得 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$$

而 0＜C＜180°，所以 C=60°，所以 A+B=120°．

又由$\sin A\sin B=\frac{3}{4}$得

$$\sin A\sin(120°-A)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos(120°-2A)-\cos120°=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos(2A-120°)=1\Leftrightarrow A=60°$$

于是，A=B=C=60°，故△ABC 是等边三角形.

3-2-17　由已知，得 cosAsinB+sin2B=cosAsinC+sin2C，即

cosA(sinB-sinC)+sin2B-sin2C=0

$$\Leftrightarrow\cos A\cdot 2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}+2\cos(B+C)\sin(B-C)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos A\sin\frac{B-C}{2}(\cos\frac{B+C}{2}-2\cos\frac{B-C}{2})=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos A\sin\frac{B-C}{2}(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})=0$$

而 $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\neq0$，所以

$$\cos A=0\text{或}\sin\frac{B-C}{2}=0$$

又因 $0<A<\pi$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $A=90°$ 或 $B=C$.

故△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

3-2-18　由余弦定理及题设等式，有

$$a(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{bc})+b(1-\frac{a^2+c^2-b^2}{ac})+c(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{ab})=0$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+a^2bc+ab^2c+abc^2-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=0$$

$$\Leftrightarrow[(a+b)^2-c^2](a-b)^2+[(b+c)^2-a^2](b-c)^2$$

$$+[(c+a)^2-b^2](c-a)^2=0$$

(i)

在△ABC 中，a+b＞c＞0，b+c＞a＞0，c+a＞b＞0，所以

$[(a+b)^2-c^2]>0$，$[(b+c)^2-a^2]>0$，$[(c+a)^2-b^2]>0$

于是欲使(i)成立，必须 a-b=0 且 b-c=0 且 c-a=0，即 a=b=c.

故△ABC 是等边三角形.

3-2-19　由已知两等式求得

$$c=\frac{1}{4}(a^2+3)，b=\frac{1}{4}(a-3)(a+1)$$

因为 a，b，c 是三角形的三边，由 $a>0$，$b=\frac{1}{4}(a-3)(a+1)>0$，$c=\frac{1}{4}(a^2+3)>0$，得 $a>3$. 在此条件下，有

$$b-c=\frac{1}{4}(a-3)(a+1)-\frac{1}{4}(a^2+3)=-\frac{1}{2}(a+3)<0$$

$$c-a=\frac{1}{4}(a^2+3)-a=\frac{1}{4}(a-3)(a-1)>0$$

所以 c 为最大边，从而 C 为最大角. 而

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ba}=\frac{a^2+\frac{1}{16}(a-3)^2(a+1)^2-\frac{1}{16}(a^2+3)^2}{2a\cdot\frac{1}{4}(a-3)(a+1)}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

故△ACB 的最大角∠C=120°．

3-2-20　已知△ABC的面积$S=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$；又由余弦定理，有$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，所以

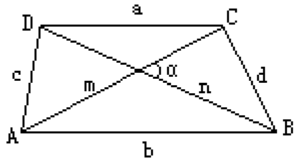
$$S=\frac{1}{2}ab\cos C$$

另一方面，又有

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

所以　$\cos C=\sin C\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{4}$

3-2-21　如下图．在△ABC 中，由余弦定理，得



$m^2=b^2+d^2-2bd\cos B$

(i)

在△DBC 中，由余弦定理，得

$n^2=a^2+d^2-2ad\cos C$

(ii)

而 cosB=-cosC，由(i)，(ii)两式可得

$m^2a+n^2b=(a+b)(ab+d^2)$

(iii)

同理可得

$n^2a+m^2b=(a+b)(ab+c^2)$

(iv)

(iii)+(iv)得

$m^2+n^2=c^2+d^2+2ab$

3-2-22　由 $a^2+c^2-b^2=ac$，知

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ab}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow B=60°$$

从而 A+C=120°．

又由$\lg\sin A+\lg\sin C=-2\lg 2$得$\sin A\sin c=\frac{1}{4}$，即

$$\frac{1}{2}[\cos(A-C)-\cos(A+C)]=\frac{1}{4}$$

$\Leftrightarrow \cos(A-C)=0 \Leftrightarrow A-C=90°$

由 A+C=120°，A-C=90°，解得 A=105°，C=15°．

再由△ABC**的面积**$S=\frac{1}{2}absinC=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{1}{2}casinB=\sqrt{3}$**，得**

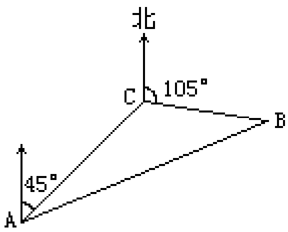
$ac=4$，$bc=2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$，$ab=2\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

3-2-23　如下图．∠ACB=360°-105°-135°=120°．设我舰需用 t 小时追上敌舰，则由余弦定理可得

$(21)t^2=10^2+(9t)^2-2\cdot 10\cdot 9t\cos 120° \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$．

故我舰用$\frac{2}{3}$**小时即可追上敌舰．**



3-2-24　如下图.设正方形边长为 x,∠ABP=α,则∠CBP=90°-α.由余弦定理，得

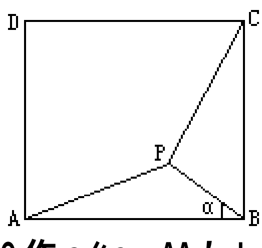
$(\sqrt{7})^2=x^2+1^2-2\cdot x\cdot 1\cdot\cos\alpha$

$3^2=x^2+1^2-2\cdot x\cdot 1\cdot\cos(90°-\alpha)$

由(i)，(ii)**解得**$x=\sqrt{8\pm\sqrt{14}}$．

但当$x=\sqrt{8-\sqrt{14}}$**时，由**(ii)**式得** $\sin\alpha=\frac{-\sqrt{14}}{2\sqrt{8-\sqrt{14}}}<0$．**与α是锐角矛盾．**

故正方形的边长为$\sqrt{8+\sqrt{14}}$．



3-2-25　如下图．过 Q 作 c∥a，AA′⊥c．

(1)在 Rt△APQ 中，AP=h·ctgα．

在 Rt△BQP 中，BQ=h·ctgβ．

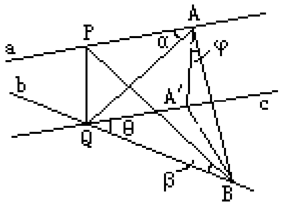
在△A′QB 中，由余弦定理，得

$A'B^2=A'Q^2+BQ^2-2A'Q\cdot BQ\cos\theta$

$=h^2(ctg^2\alpha+ctg^2\beta-2ctg\alpha ctg\beta\cos\theta)$

所以 $AB=\sqrt{AA'^2+A'B^2}$

$$=h\sqrt{1+ctg^2\alpha+ctg^2\beta-2ctg\alpha ctg\beta\cos\theta}$$



(2)易知∠A′AB就是AB与PQ所成的角，设∠A′AB = φ，则

$$tg\varphi=\frac{A'B}{AA'}=\sqrt{ctg^2\alpha+ctg^2\beta-2ctg\alpha ctg\beta\cos\theta}$$

2．正弦定理

3-2-26 C 3-2-27 D 3-2-28 A 3-2-29 C

3-2-30 B 3-2-31 C 3-2-32 C 3-2-33 C

3-2-34 $\pm\frac{3}{5}$

3-2-35 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3-2-36 $2(\sqrt{3}+1)$

3-2-37 直角三角形

3-2-38 $\sqrt{17}$

3-2-39 $60°$

3-2-40 $\sqrt{2}:\sqrt{3}:\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

3-2-41 $\frac{2\pi}{3}$

3-2-42 (1)两解：B=38°41′或141°19′；C=111°19′或8°41′；c=149.1或24.16.

(2)一解：$B=90°$；$C=60°$；$c=50\sqrt{3}$.

(3)无解.

3-2-43 由正弦定理，得a=2RsinA，b=2RsinB，c=2RsinC．所以

a(sinB-sinC)+b(sinC-sinA)+c(sinA-sinB)

=2RsinA(sinB-sinC)+2RsinB(sinC-sinA)+2RsinC(sinA-sinB)=0

3-2-44 由正弦定理，得

acosA+bcosB+ccosC

=2RsinAcosA+2RsinBcosB+2RsinCcosC

=R(sin2A+sin2B+sin2C)=…

=4RsinAsinBsinC=2asinBsinC

3-2-45 $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}=\dfrac{4R^2\sin^2 A\sin(B-C)}{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}$

$$=4R^2(4\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2})$$

$$=4R^2(1-\cos A)(\cos C-\cos B)$$

$$=4R^2[\cos C-\cos B-\cos A(\cos C-\cos B)]$$

同理 $\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}=4R^2[\cos A-\cos C-\cos B(\cos A-\cos C)]$

$$\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=4R^2[\cos B-\cos A-\cos C(\cos B-\cos A)]$$

所以 $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin A+\sin C}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$

3-2-46 由 A：B：C=1：2：4，A+B+C=π得

$A=\dfrac{\pi}{7}$，$B=\dfrac{2\pi}{7}$，$C=\dfrac{4\pi}{7}$

所以 $\dfrac{c}{2(a+b+c)}=\dfrac{\sin C}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}$

$$=\frac{\sin C}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{8\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{8\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{8\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}=\sin\frac{\pi}{14}=\sin\frac{A}{2}$$

3-2-47 在△ABC 中，有

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$$

又已知由 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$**，得故**

$$\cos A\cos B\cos C=0\Leftrightarrow \cos A=0\text{或}\cos B=0\text{或}\cos C=0$$

$$\Leftrightarrow A=90°\text{或}B=90°\text{或}C=90°$$

即△ABC 是直角三角形.

3-2-48 由题设等式得

$$\cos(\frac{A}{2}-B)-\cos(\frac{3A}{2}+B)=\cos(A-\frac{B}{2})-\cos(A+\frac{3B}{2})$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A-B}{4}\sin\frac{5(A+B)}{4}=-\sin\frac{A+B}{4}\sin\frac{3(A-B)}{4}$$

不妨假定$A\geq B$**，并设** $\alpha=\dfrac{A-B}{4}$ **和** $\beta=\dfrac{A+B}{4}$**，则有** $0\leq\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{4}$**，故**

$$\sin\alpha\sin5\beta=-\sin\beta\sin3\alpha$$

$\Leftrightarrow \sin\alpha\sin 5\beta + \sin\beta\sin 3\alpha = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha\sin\beta(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos^2 2\beta) = 0$

又$0 \leq 2\alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$，故$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos^2 2\beta > 0$，且$\sin\beta \neq 0$，所以$\sin\alpha = 0$，即$\alpha = 0$，于是$A - B = 0$，即$A = B$，从而有$a = b$。

所以△ABC 是等腰三角形.

3-2-49　根据正弦定理及题设等式，有

$$4R^2\sin^2 B\sin^2 C + 4R^2\sin^2 C\sin^2 B = 8R^2\sin B\sin C\cos B\cos C$$

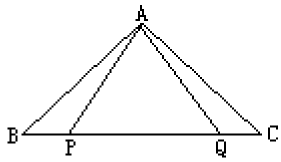
$\Leftrightarrow \sin B\sin C(\cos B\cos C - \sin B\sin C) = 0$

$\Leftrightarrow \sin B\sin C\cos(B + C) = 0$

因为 $0 < B < \pi$，$0 < C < \pi$，故 $\sin B \neq 0$，$\sin C \neq 0$，所以$\cos(B + C) = 0$. 又$0 < B + C < \pi$，所以$B + C = \frac{\pi}{2}$.

故△ABC 是直角三角形.

3-2-50　设∠BAP=∠CAQ=α，∠PAQ=β.



在△APB 与△AQC 中由正弦定理得

$$\frac{AP}{\sin B} = \frac{BP}{\sin\alpha}，\quad \frac{AQ}{\sin C} = \frac{CQ}{\sin\alpha}$$

又因为$BP = CQ$，所以

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{\sin B}{\sin C} \qquad \text{(i)}$$

另一方面，再考虑△ABQ 与△ACP，与上类似，可得

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{\sin B}{\sin C} \qquad \text{(ii)}$$

由(i)，(ii)易得 sinB=sinC，所以∠B=∠C 或∠B=180°-∠C.

但当∠B=180°-∠C 时，AB∥AC，与题设矛盾.

故△ABC 是以 A 为顶角的等腰三角形.

3-2-51　(1)由已知得 2b=a+c，再利用正弦定理，有

$$2\sin B = \sin A + \sin C \Leftrightarrow 2\sin B = 2\sin\frac{A + C}{2}\cos\frac{A - C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A + C}{2}\cos\frac{A + C}{2} = 2\sin\frac{A + C}{2}\cos\frac{A - C}{2}$$

而$0 < \frac{A + C}{2} < \frac{\pi}{2}$，所以$\sin\frac{A + C}{2} \neq 0$，故由上式得

$$2\cos\frac{A + C}{2} = \cos\frac{A - C}{2}$$

(2)若$B=60°$，则$A+C=120°$，即$\frac{A+C}{2}=60°$．由(1)所得到的等式，有

$$\cos\frac{A-C}{2}=2\cos\frac{A+C}{2}=2\cos 60°=1$$

所以 A-C=0，即 A=C，于是有 A=B=C=60°．

故△ABC 是等边三角形．

3-2-52　由已知得 2B=A+C，而 A+B+C=180°，故

B=60°，A+C=120°

又由$\mathrm{tg}(A+C)=\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}C}{1-\mathrm{tg}A\mathrm{tc}C}$及题设$\mathrm{tg}A\mathrm{tg}C=2+\sqrt{3}$，知

tgA+tgC=tg(A+C)·(1-tgAtgC)

$=\mathrm{tg}120°\cdot(1-2-\sqrt{3})=3+\sqrt{3}$

由以上结果易知

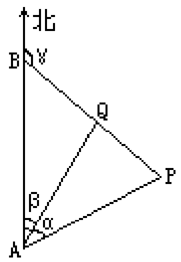
A=45°，B=60°，C=75°或 A=75°，B=60°，C=45°

又据已知顶点C的对边上的高为$4\sqrt{3}$，则可得

$a=8$，$b=4\sqrt{6}$，$c=4+4\sqrt{3}$

或　$a=8$，$b=4\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$，$c=8(\sqrt{3}-1)$

3-2-53　如图．在△ABP 中，由正弦定理得



$$\frac{AB}{\sin\angle APB}=\frac{AP}{\sin\angle ABP}$$

所以　$AP=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)}$

在△APQ 中，由正弦定理得

$$\frac{AP}{\sin\angle AQP}=\frac{PQ}{\sin\angle PAQ}$$

所以　$PQ=\frac{AP\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\beta+\pi-\gamma)}$

将(i)代入(ii)得

$$PQ=\frac{a\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}$$

故两灯塔间的距离是$\frac{a\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}$千米．

3-2-54　由已知 2A+3B=180°，A+B+C=180°，得

$$A=90°-\frac{3}{2}B，C=90°+\frac{B}{2}$$

利用正弦定理，有

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(90°-\frac{3}{2}B)+\sin B}{\sin(90°+\frac{B}{2})}$$

$$=\frac{\cos\frac{3}{2}B+\sin B}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{4\cos^3\frac{B}{2}-3\cos\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$=-4\sin^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}+1=-4(\sin\frac{B}{2}-\frac{1}{4})^2+\frac{5}{4}$$

而$0<\frac{B}{2}<90°$**，所以**$1<-4(\sin\frac{B}{2}-\frac{1}{4})^2+\frac{5}{4}\leq\frac{5}{4}$**，即**

$$1<\frac{a+b}{c}\leq\frac{5}{4}$$

第四部分　反三角函数和简单三角方程

（一）反三角函数的概念

4-1-1　C　因为 $\cos(\arcsin x)\geq 0(|x|\leq 1)$，故不选 A．

令 $\alpha=\arccos(-\frac{1}{5})$，则 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，故 $\mathrm{tg}\alpha<0$．故不选 B．

$\sin[\arcsin(-\frac{1}{5})]=-\frac{1}{5}$，故不选 D．

令 $\alpha=\arccos(-\frac{1}{5})$，则 $\cos\alpha=-\frac{1}{5}$，故 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以

$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，于是 $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{12}$．故选 C．

4-1-2　D　$\left.\begin{array}{l}2-3x\geq 0\\ -1\leq -\sqrt{2-3x}\leq 0\end{array}\right\}\Rightarrow x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$

4-1-3　(1)易知 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$．由韦达定理知

$$p=-(\alpha+\beta)=-\frac{7\pi}{12},\quad q=\alpha\beta=\frac{\pi^2}{12}$$

(2)3/4

4-1-4　因为

$$a=\arccos(-1)=\pi,\quad x^2-x-2+\pi^2=(x-\frac{1}{2})^2+(\pi^2-\frac{9}{4})>0$$

所以方程左端有意义，且原方程可变为

$$x^2-x-2+\pi^2=\pi^2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x_1=2,\ x_2=-1$$

4-1-5　因为 $\arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$，$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$，

$\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\mathrm{tg}\{\arccos\sin[\arccos(-\frac{1}{2})]\}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

注　求多重复合函数的值，可从里向外，一层一层算．

4-1-6　B

4-1-7　依题意有 $-1\leq ax+5\leq 1$．

当 $a>0$ 时，$-\frac{6}{a}\leq x\leq -\frac{4}{a}$；当 $a<0$ 时，$-\frac{4}{a}\leq x\leq -\frac{6}{a}$．

考虑到 $|\arcsin(ax+5)|$ 的最小值为 0，最大值为 $\frac{\pi}{2}$．易知

当 $a>0$ 时，定义域为 $[-\frac{6}{a},-\frac{4}{a}]$，值域为 $[0,\frac{\pi}{8}]$；

当 $a<0$ 时，定义域为 $[-\frac{4}{a},-\frac{6}{a}]$，值域为 $[0,\frac{\pi}{8}]$．

4-1-8　因为 $y=(\arccos x+1)^2-2$，而 $0\leq\arccos x\leq\pi$．易知

(1)当 $x=1$ 时，有 $y_{min}=-1$；

(2)当 $x=-1$ 时，有 $y_{max}=\pi^2+2\pi-1$．

4-1-9 (1)依题意有 $0<2^x\le 1$，故 $-\infty<x\le 0$，即函数定义域为 $(-\infty, 0]$．易求得值域为 $(0, \frac{\pi}{8}]$．

(2)定义域由下面的不等式组确定

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ -1\le \log_2 x+1\le 1 \\ \arcsin(\log_2 x+1)\ge 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 0\le \log_2 x+1\le 1 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\in[\frac{1}{2}, 1]$$

值域为 $[0, \frac{\sqrt{2}\pi}{4}]$．

(3)定义域为 $(-\infty, +\infty)$；值域为 $[0, \frac{\pi}{2}]$．

(4)因 $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，故 $\sqrt{x^2-x+1}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$．

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1}\ge\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1\le\sqrt{x^2-x+1}\le 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\le\sqrt{x^2-x+1}\le 1 \Leftrightarrow x\in[0, 1]$$

因此定义域为 $[0, 1]$．

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$x=1\Rightarrow\sqrt{x^2-x+1}=1\Rightarrow\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

再由反正弦函数的单调性知值域为 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$．

4-1-10 (1)令 $\alpha=\operatorname{arctg}x$，则 $x=\operatorname{tg}\alpha$，由于 $x\ge 0$，故 $\alpha\in[0, \frac{\pi}{2}]$．

从而

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

又 $\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，所以 $\alpha=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$．

于是等式得证．

(2)令 $\alpha=\arccos x$，则 $\cos\alpha=x$，于是 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2x^2-1$．

又 $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$，故 $0\le 2\alpha\le\pi$，所以

$$2\arccos x=2\alpha=\arccos(2x^2-1)$$

于是等式得证．

（二）反三角函数的图象与性质

4-2-1 (1) $\frac{5\pi}{6}$ **原式** $=\arccos\cos(2\pi-\frac{7\pi}{6})=\arccos(\cos\frac{5\pi}{6})=\frac{5\pi}{6}$

(2) $\frac{4\pi}{5}$ **原式** $=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{5})=\frac{4\pi}{5}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **原式** $=\operatorname{tg}[\arcsin(\sin\frac{5\pi}{6})]$

$$=\operatorname{tg}[\arcsin(\sin\frac{\pi}{6})]=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(4) $\alpha+\frac{\pi}{4}$ **原式** $=\arcsin[\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})]=\alpha+\frac{\pi}{4}$

4-2-2 **令** $\alpha=\arccos\frac{4\sqrt{3}}{7}$**，则** $\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$**，且** $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$**，故**

$$\sin\alpha=\frac{1}{7}\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{12}\Rightarrow\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{12}=\arcsin\frac{1}{7}$$

于是 $\arcsin\frac{1}{8}<\arcsin\frac{1}{7}=\arccos\frac{4\sqrt{3}}{7}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{12}<\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4}}{12}$

注　比较两个（或多个）反三角函数值的大小时，先用一个字母表示其中一个角，然后写出其三角函数值；再算出与它比较的其它的三角函数值（关于这个角的）；再利用反三角函数的单调性即可．

4-2-3 A $\arccos(-x)>\arccos x\Leftrightarrow\pi-\arccos x>\arccos x$

$$\Leftrightarrow\arccos x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x\in(0,1]$$

4-2-4 $x\in(\sin 1,1]$

$$\left.\begin{array}{l}\arcsin x>1\\-1\leq x\leq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\arcsin x>\arcsin(\sin 1)\\-1\leq x\leq 1\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x>\sin 1\\-1\leq x\leq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\sin 1<x\leq 1$$

4-2-5 $\alpha=\arcsin\{\sin[\pi+(\sqrt{3}-\pi)]\}$

$$=-\arcsin[\sin(\sqrt{3}-\pi)]=\pi-\sqrt{3}$$

$$\beta=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

根据韦达定理知 $p-\sqrt{3}=\alpha+\beta$**，即** $p=\frac{5\pi}{3}$**，且** $q=\alpha\beta=\frac{2\pi(\pi-\sqrt{3})}{3}$**．**

4-2-6 因 $x\in(-\pi,0)$**，故** $x+\frac{\pi}{2}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$**．所以**

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)-\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}x)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)}+\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2})]$$

$$=\frac{1}{x}+x+\frac{\pi}{2}$$

由$x<0$知，$-x>0$，于是$(-x)+\frac{1}{(-x)}\geq 2\sqrt{(-x)\cdot\frac{1}{(-x)}}=2$，即

$$\frac{1}{x}+x\leq -2$$

于是 $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)-\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}x)\leq -2+\frac{\pi}{2}<0$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)<\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}x)$$

4-2-7 $\arcsin[\sin(-\frac{5\pi}{4})]=\arcsin(\sin\frac{3\pi}{4})=\arcsin(\sin\frac{\pi}{4})$

$$=\frac{\pi}{4}\arccos(\cos\frac{4\pi}{3})=\arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$$

所以 原式$=\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2\pi}{3}}=\frac{3}{8}$

4-2-8 $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi\Rightarrow\operatorname{arctg}x=\pi-\operatorname{arcctg}y$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=-\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}y)=-\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}y)}$$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{y}\Rightarrow x$，$y$异号

若 $x<0$，$y>0$ 则

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{arctg}x\in(-\frac{\pi}{2},0)\\&\operatorname{arcctg}y\in(0,\frac{\pi}{2})\end{aligned}\right\}\Rightarrow \operatorname{arcctg}x+\operatorname{arcctg}y\neq\pi$$

故应有 $x>0$，$y<0$．任取$(x,y)\in N$，则 $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi$．如前已证，有 $xy=-1$，且 $x>0$，即$|xy|=1$，且 $x>0$，即$(x,y)\in M$，从而 $N\subseteq M$．显然$N\neq M$．因为$(1,1)\in M$，但$(1,1)\notin N$，从而$N\subset M$．

4-2-9 令 $u=x^2-2x$，则 $u=(x-1)^2-1$．而$-1\leq u\leq 1$，故

$$-1\leq u\leq 1\Rightarrow -1\leq (x-1)^2-1\leq 1\Rightarrow 0\leq |x-1|\leq\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{2}\leq x\leq 1+\sqrt{2}$$

由此得出函数定义域为$[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$．

内函数$u=x^2-2x$在$[1-\sqrt{2},1]$内是减函数，在$[1,1+\sqrt{2}]$内是增函数，因此$y=\arccos(x^2-2x)$在区间$[1-\sqrt{2},1]$内是递增函数，在区间$[1,1+\sqrt{2}]$内是减函数．

4-2-10 注意 $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}x$，$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x$，并用$-x$ 代替原式中的 x，得

$$5f(-\operatorname{arctg}x)+3f(\operatorname{arctg}x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}x \qquad (i)$$

将(i)式与原式相加可得

$$f(\operatorname{arctg}x)+f(-\operatorname{arctg}x)=0 \Rightarrow f(-\operatorname{arctg}x)=-f(\operatorname{arctg}x) \qquad \text{(ii)}$$

将(ii)代入原式得

$$2f(\operatorname{arctg}x)=\operatorname{arcctg}x-\frac{\pi}{2}=(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)-\frac{\pi}{2}=-\operatorname{arctg}x$$

即有$2f(x)=-x$**，故**$f(x)=-\frac{x}{2}$**，从而**$f(\frac{\sqrt{2}}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{6}$**.**

（三）反三角函数的运算

4-3-1 (1) 因为$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，所以

原式$=\cos(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\pi}{7})=\sin(\arcsin\frac{\pi}{7})=\frac{\pi}{7}$

(2)令$\alpha=\arcsin\frac{4}{5}$，则$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，故$\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

令$\beta=\arcsin\frac{5}{13}$，则$\sin\beta=\frac{5}{13}$，且$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，故$\cos\beta=\frac{12}{13}$.

由以上可知，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cdots=\frac{16}{65}\Rightarrow\alpha+\beta=\arccos\frac{16}{65}$$

所以，

$$原式=\alpha+\beta+\arcsin\frac{16}{65}=\arccos\frac{16}{65}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$$

(3)令$\alpha=\arccos\frac{a}{b}$，则$\cos\alpha=\frac{a}{b}$，故

$$原式=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})+\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$$

$$=\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}+\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$$

$$=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}=\frac{2b}{a}$$

4-3-2 C　用特殊值法．令 a=0，b=1 代入计算，即知应选 C．

又法：令$\alpha=\mathrm{arctg}a$，$\beta=\mathrm{arctg}b$，则

$$\mathrm{tg}\alpha=a，\mathrm{tg}\beta=b\Rightarrow 2=(\mathrm{tg}\alpha+1)(\mathrm{tg}\beta+1)$$

$$\Rightarrow\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\Rightarrow\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=1\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

4-3-3　令$\alpha_1=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$，$\alpha_2=\mathrm{arctg}\frac{1}{5}$，则$\mathrm{tg}\alpha_1=\frac{1}{3}$，$\mathrm{tg}\alpha_2=\frac{1}{5}$，

且α_1，$\alpha_2\in(0,\frac{\pi}{6})$，于是

$$\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{4}{7}，且\alpha_1+\alpha_2\in(0,\frac{\pi}{3})$$

再令$\beta_1=\mathrm{arctg}\frac{1}{7}$，$\beta_2=\mathrm{arctg}\frac{1}{8}$，则$\mathrm{tg}\beta_1=\frac{1}{7}$，$\mathrm{tg}\beta_2=\frac{1}{8}$，且$\beta_1$，$\beta_2$

$\in(0,\frac{\pi}{6})$，于是

$$\mathrm{tg}(\beta_1+\beta_2)=\frac{3}{11}，且\beta_1+\beta_2\in(0,\frac{\pi}{3})$$

由以上可知，

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{5}+\mathrm{arctg}\frac{1}{7}+\mathrm{arctg}\frac{1}{8})$$
$$=\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2)$$
$$=\frac{\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)+\mathrm{tg}(\beta_1+\beta_2)}{1-\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\mathrm{tg}(\beta_1+\beta_2)}=1$$

且$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2\in(0,\frac{2\pi}{3})$，所以

$$\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{5}+\mathrm{arctg}\frac{1}{7}+\mathrm{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

注　证明若干个反三角函数值的代数和为一已知角，一般可以先取代数和及已知角同名的三角函数值，证明它们的值相等；再证明角代数和的取值范围与已知角在该函数的同一单调区间内.

4-3-4　两边式子都有意义的 x 的范围由以下不等式组确定：

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1-2x^2}{1-x^2}\geq 0\\ x^2\neq 1\\ |x|\leq 1\\ |\mathrm{tg}(\arcsin x)|\leq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow|x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

令$\alpha=\arcsin x$，则$\sin\alpha=x$，其中$|x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$\alpha\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

于是

$$\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\mathrm{tg}\alpha\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow\arccos[\mathrm{tg}(\arcsin x)]=\arccos\mathrm{tg}\alpha=\arccos\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

再令$\beta=\arccos\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，则$\cos\beta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，且$\beta\in[0,\pi]$，故

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{\frac{1-2x^2}{1-x^2}}$$

注　证明等式时，必须首先求两边函数的定义域，它们的交即为此等式成立的允许值集.

4-3-5　100　由 B=arctg3，C=arctg2，得 tgB=3，tgC=2，可求得

$$\cos B=\frac{\sqrt{10}}{10},\quad\sin B=\frac{3\sqrt{10}}{10},\quad\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5},\quad\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

于是 $$\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

再由正弦定理可得

$$a=\frac{b}{\sin B}\cdot\sin A=100$$

4-3-6 令$\beta=\operatorname{arcctg}\sqrt{\cos\alpha}$，则$\operatorname{ctg}\beta=\sqrt{\cos\alpha}$，且$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以

$$\cos\alpha=\operatorname{ctg}^2\beta\Rightarrow\sin^2\beta=\frac{1}{1+\cos\alpha}，\ \cos^2\beta=\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

又
$$\begin{aligned}x&=\operatorname{arcctg}\sqrt{\cos\alpha}-\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\alpha}\\&=\operatorname{arcctg}\sqrt{\cos\alpha}-(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\sqrt{\cos\alpha})\\&=2\operatorname{arcctg}\sqrt{\cos\alpha}-\frac{\pi}{2}=2\beta-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

从而
$$\begin{aligned}\sin x&=\sin(2\beta-\frac{\pi}{2})=-\cos2\beta\\&=\sin^2\beta-\cos^2\beta=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

4-3-7 $\frac{7}{50}$ 由$\arccos\frac{7}{25}=\arcsin(3x-1)$得

$$3x-1=\sin(\arccos\frac{7}{25})$$

令$\alpha=\arccos\frac{7}{25}$，则$\cos\alpha=\frac{7}{25}$，且$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，故

$$\sin\alpha=\frac{24}{25}\Rightarrow3x-1=\frac{24}{25}\Rightarrow x=\frac{49}{75}\qquad\text{(i)}$$

再由$\arccos\frac{7}{25}=\operatorname{arctg}(2y+3)$得

$$2y+3=\operatorname{tg}(\arccos\frac{7}{25})=\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}\Rightarrow y=\frac{3}{14}\qquad\text{(ii)}$$

由(i)，(ii)得$xy=\frac{7}{50}$.

4-3-8 令$\beta=\arcsin\frac{1}{b}$，则$\sin\beta=\frac{1}{b}$，且$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，故

$$\cos\beta=\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}$$

由$\arcsin\frac{1}{a}+\arcsin\frac{1}{b}=\frac{\pi}{2}$，得

$$\arcsin\frac{1}{a}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{1}{a}=\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos\beta=\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}$$

$$\Rightarrow b=a\sqrt{b^2-1}\Rightarrow b^2=a^2(b^2-1)\Rightarrow c^2=a^2b^2$$

$$\Rightarrow2\lg c=2\lg a+2\lg b\Rightarrow\lg c-\lg a-\lg b=0$$

4-3-9 A 要使函数有意义，必须 arccosx∈(0，π]，即 arccosx＞0．由平均值不等式有

$$y=\frac{3}{\arccos x}+\frac{\arccos x}{3}\geq 2$$

特别当$\frac{3}{\arccos x}=\frac{\arccos x}{3}$时，即$\arccos x=3$时，$y_{min}=2$．因此函数当 x=cos3 时有最小值为 2．

但函数无最大值，因为当x无限接近$\frac{\pi}{2}$时，$y=\frac{3}{\arccos x}+\frac{\arccos x}{3}$无限增大．

4-3-10 由$\arcsin(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin\alpha-\sin\beta)$得

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin[\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin\alpha-\sin\beta)]$$

$$=\cos[\arcsin(\sin\alpha-\sin\beta)] \qquad \text{(i)}$$

令$\theta=\arcsin(\sin\alpha-\sin\beta)$，则

$$\sin\theta=\sin\alpha-\sin\beta\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{1-(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$$

代入(i)式得

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sqrt{1-(\sin\alpha-\sin\beta)^2} \qquad \text{(ii)}$$

将(ii)式两边平方，整理后得

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\frac{1}{2}$$

（四）简单的三角方程

4-4-1 (1)**原方程** $\Leftrightarrow \cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}+x)$

原方程解集为$\{x|x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$**或**$x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$，$k\in Z\}$.

(2)**原方程** $\Leftrightarrow \text{tg}ax=\text{ctg}bx=\text{tg}(\frac{\pi}{2}-bx)$

$\Rightarrow ax=k\pi+(\frac{\pi}{2}-bx)$，$k\in Z\Rightarrow(a+b)x=\frac{2k+1}{2}\pi$，$k\in Z$

当$a+b\neq 0$**时，原方程解集为**$\{x|x=\frac{2k+1}{2(a+b)}\pi$，$k\in Z\}$；

当$a+b=0$**时，原方程无解．**

(3)**原方程** $\Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x=\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \sin(x-\varphi)=\frac{1}{5}\quad(\varphi=\text{arctg}\frac{4}{3})$

$\Leftrightarrow x-\varphi=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{1}{5}$，$k\in Z$

原方程解集为$\{x|x=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{1}{5}+\text{arctg}\frac{4}{3}$，$k\in Z\}$.

(4)因为 cosx=0 的解不是原方程的解，两边除以 $\cos^3x$ 得同解方程

$\text{tg}^3x-\text{tg}^2x-3\text{tg}x+3=0$

$\Leftrightarrow(\text{tg}x-1)(\text{tg}x+\sqrt{3})(\text{tg}x-\sqrt{3})=0$

$\Leftrightarrow \text{tg}x=1$**或**$\text{tg}x=-\sqrt{3}$**或**$\text{tg}x=\sqrt{3}$

原方程解集为$\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{4}$**或**$x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$，$k\in Z\}$.

4-4-2 (1)**原方程** $\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$

原方程解集为$\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z\}$.

(2)**原方程** $\Leftrightarrow 4\cos^2x-13\cos x+3=0\Leftrightarrow(4\cos x-1)(\cos x-3)=0$

$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{4}$**或**$\cos x=3$(**舍去**)

原方程解集为$\{x|x=2k\pi\pm\arccos\frac{1}{4}$，$k\in Z\}$.

(3)原方程可变为

$\sin^2x(\sin x-\cos x)=0\Leftrightarrow \sin x=0$**或**$\sin x-\cos x=0$

当$\sin x=0$**时，**$x=k\pi$，$k\in Z$；

当$\sin x-\cos x=0$**时，得**$\text{tg}x=1$，**故**$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$.

原方程解集为$\{x|x=k\pi$或$x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in Z\}$.

4-4-3　判别式为

$$\triangle=[-4\sin(\theta-\frac{\pi}{4})]^2-8\cos4\theta=8(1-\sin2\theta-\cos4\theta)$$

令△=0，得

$$(1-\sin2\theta)-(1-2\sin^2 2\theta)=0\Leftrightarrow\sin2\theta(2\sin2\theta-1)=0$$

$\Leftrightarrow\sin2\theta=0$或$\sin2\theta=\dfrac{1}{2}$

当$\sin2\theta=0$时，$\theta=\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in Z$；

当$\sin2\theta=\dfrac{1}{2}$时，$\theta=\dfrac{k\pi}{2}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}$，$k\in Z$.

因此当$\theta=\dfrac{k\pi}{2}$或$\dfrac{k\pi}{2}+(-1)^k\dfrac{\pi}{12}(k\in Z)$时，原方程有重根.

4-4-4　(1)$\{x|x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z\}$

原方程$\Leftrightarrow\sin^2 2x=2\cos x\sin2x\Leftrightarrow2\sin2x\cdot\cos x(\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow\sin x=0$或$\cos x=0$或$\sin x=1$

由于原方程分母有 cosx，故舍去 cosx=0；又 $1-\cos2x=2\sin^2x$，又舍去 sinx=0．由 sinx=1 得

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in Z.$$

此即原方程的解.

(2)$\{x|x<0$ 或 $x=k\pi$，k 为非负整数$\}$

当 $x\geq0$ 时，

原方程$\Leftrightarrow\sin x=\sin(x+\pi)\Rightarrow\sin x=-\sin x$

$\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$，k为非负整数

当 $x<0$ 时，

原方程$\Leftrightarrow-\sin x=\sin(x+\pi)=-\sin x\Leftrightarrow x\in R^-$

4-4-5　令 $t=2-\sin x$，易知 $t\in[1,3]$，代入原函数表达式得

$$y=t+\frac{1}{t}-1$$

可证当$1\leq t\leq3$时，$y=t+\dfrac{1}{t}-1$是增函数．事实上，若$1\leq t_1\leq t_2\leq3$，则

$$(t_2+\frac{1}{t_2}-1)-(t_1+\frac{1}{t_1}-1)$$

$$=(t_2-t_1)+\frac{t_1-t_2}{t_1t_2}$$

$$=\frac{(t_2-t_1)(t_1t_2-1)}{t_1t_2}>0$$

因此，当 t=1 时，原函数取最小值 y_{min}=1．这时，

$$1=2-\sin x \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad (k\in Z)$$

当$t=3$时，原函数取最大值$y_{max}=3+\frac{1}{3}-1=\frac{7}{3}$，此时

$$3=2-\sin x \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \quad (k\in Z)$$

4-4-6　用正弦定理，得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow B=60° \text{或} B=120°$$

$$\Leftrightarrow C=90° \text{或} C=30°$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow c=8 \text{或} c=4$$

因此△ABC中$B=60°$，$C=90°$，$c=8$或$B=120°$，$C=30°$，$c=4$。

4-4-7 C　原方程$\Leftrightarrow \frac{2\sin x(\sin x+\cos x)}{2\cos(\sin x+\cos x)}=\frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=\frac{7}{2} \Leftrightarrow x=k\pi+\operatorname{arctg}\frac{7}{2} \quad (k\in Z)$$

4-4-8　原方程$\Leftrightarrow 4\sin 2x-3\cos 2x=2a+3$

$$\Leftrightarrow \sin(2x-\operatorname{arctg}\frac{3}{4})=\frac{2a+3}{5} \Leftrightarrow \left|\frac{2a+3}{5}\right|\leq 1 \Leftrightarrow a\in[-4，1]$$

即当 a∈[-4，1]时，原方程有实数解．

(i)当$\left|\frac{2a+3}{5}\right|=1$时，由原方程得

$$2x-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=2k\pi+\arcsin\frac{2a+3}{5} \quad (k\in Z)$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2a+3}{5}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4} \quad (k\in Z)$$

(ii)当$\left|\frac{2a+3}{5}\right|<1$时，由原方程得

$$2x-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{2a+3}{5} \quad (k\in Z)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{2a+3}{5}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4} \quad (k\in Z)$$

4-4-9 (1)原方程$\Leftrightarrow \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}+\frac{\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{\sin(\frac{\pi}{4}-x)}=4$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2(\frac{\pi}{4}-x)=1 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad (k\in Z)$$

所求解为$x=\frac{\pi}{6}$或$x=\frac{5\pi}{6}$或$x=\frac{7\pi}{6}$或$x=\frac{11\pi}{6}$．

(2)原方程$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow\cos x+\sin x=0$或$\cos x-\sin x=1$

先解 cosx+sinx=0：

$$\cos x+\sin x=0\Leftrightarrow\cos(x-\frac{\pi}{4})=0$$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\quad(k\in Z)$

在$(0，2\pi)$中的解为$x_1=\frac{3\pi}{4}$，$x_2=\frac{7\pi}{4}$．

再解 cosx-sinx=1：

$$\cos x-\sin x=1\Leftrightarrow\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}$$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}\quad(k\in Z)$

在$(0，2\pi)$中的解为 $x_3=\frac{3\pi}{2}$．

4－4－10　当$a>0$时，$a+\frac{1}{a}\geq 2$，于是$\sin x\geq 2$矛盾，原方程无解；

当 $a<0$ 时，若有 x_0 满足方程，即

$$\sin x_0=a+\frac{1}{a}\Leftrightarrow\sin(-x_0)=(-a)+\frac{1}{(-a)}\geq 2$$

矛盾．

综上知原方程对一切 $a\neq 0$ 都无解．

4-4-11　原方程可变为

$$\cos^n x=1+\sin^n x \qquad (i)$$

当 n 为偶数时，可证(i)的解集为$\{x|x=k\pi，k\in Z\}$．事实上，显然 $x=k\pi(k\in Z)$是(i)的解；若 $x\neq k\pi\ (k\in Z)$，那么 $\sin x\neq 0$，故 $\sin^n x>0$，这与(i)式矛循．

当 n 为奇数时，可证(i)的解集为

$$\{x|x=2k\pi\text{或}x=2k\pi-\frac{\pi}{2}，k\in Z\}$$

事实上，上面集中的 x 值显然满足(i)．取不在上面集中的 x，分别讨论如下：

①当 x 终边落在第一象限时，$\sin x>0$，$\cos x>0$，这与(i)式矛盾；

②当 x 终边落在第二象限时，$\sin x>0$，$\cos x<0$，也与(i)式矛盾；

③当 x 终边落在第三象限时，$\cos x<0$，$\sin x<0$，也与(i)式矛盾；

④当 x 终边落在正向 y 轴上时，cosx=0，sinx=1，也与(i)式矛盾；

⑤当 x 终边落在负向 x 轴上时，cosx=-1，sinx=0，也与(i)式矛盾；

⑥当 x 终边落在第四象限时，

$$\cos x > 0,\ \sin x < 0 \Leftrightarrow 1 = \cos^n x - \sin^n x = |\cos x|^n + |\sin x|^n \qquad \text{(ii)}$$

又分两种情况研究：

当 n 为大于 2 的奇数时，由于 $0<|\sin x|<1$，$0<|\cos x|<1$，则

$$1=|\cos x|^n+|\sin x|^n<\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

矛盾.

当 n=1 时，有 $0<|\sin 2x|<1$，于是

$$1=|\cos x|+|\sin x|=\sqrt{1+|\sin 2x|}>1$$

矛盾.

综上所述，设原方程解集为 M，那么

$$M=\begin{cases}\{x|x=k\pi,\ k\in Z\} & \text{当}n\text{为偶数时}\\ \{x|x=2k\pi\text{或}x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ k\in Z\} & \text{当}n\text{为奇数时}\end{cases}$$

第五部分　不等式

（一）不等式和它的性质

5-1-1　(1)不可以，因为虚数不能比较大小．

(2)不变．理由见例 5-1-2(4)注．

5-1-2　(1)假．当 $c=d\leq 0$ 时不成立．

(2)假．当 $c\leq 0$ 时不成立．

(3)真．因 $c^2>0$(注意 $c\neq 0$)．

(4)真．因 $\frac{1}{c^2}>0$．

5-1-3　(1)能．由 $-a>-b>0$ 并利用取倒数法则可知．条件改为 $a<1<b$ 时则不能，因有可能 $a<0$．

(2)能．因 $a<0<\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$．

(3)不能．当 n 为奇数时，能．

(4)能．由 $-a>-b>0$ 有 $\frac{1}{-a}<\frac{1}{-b}$，从而 $\frac{1}{\sqrt[n]{-a}}<\frac{1}{\sqrt[n]{-b}}$，于是 $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}>\frac{1}{\sqrt[b]{b}}$．

5-1-4 (1)>　由 $a^2+b^2>2ab$ 两边乘以 $\frac{1}{4}$，再加上 $\frac{a^2+b^2}{4}$ 即知．

(2)>　$(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a})-(a+b)=\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}>0$

(3)>　$(a^3-b^3)-(a^2b-ab^2)=(a^3-a^2b)+(ab^2-b^3)$

$=a^2(a-b)+b^2(a-b)=(a-b)(a^2+b^2)>0$

(4)≥　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{\sqrt{ab}}\geq\frac{4}{a+b}$

5-1-5 (1)真．$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，$a^2+b^2\geq 2ab$，$a^3+b^3\geq 2\sqrt{a^3b^3}$，三式两边分别相乘即得．

(2)假．因为有可能 $a=b=c$．将“ > ”改为“ ≥ ”后为真．由 $a^2b^2+b^2c^2\geq 2ab^2c$ 等可知．

(3)真．由 $(a-1)^2>0$ 立即推理．

(4)真．由 $a^2+1\geq 2a$，$b^2+1\geq 2b$，$c^2+1\geq 2c$，三式两边分别相加即得．当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立．

5-1-6　(1)同向不等式不能分边相减．

(2)同向不等式不能分边相除．

5-1-7　(1)真．分 $b>0$，$b<0$ 两种情形考虑．

(2)真．分 $c>0$，$c<0$ 两种情形考虑，并注意 $b<0$．

(3)真．由 $0<c<d$ 得 $\frac{1}{c}>\frac{1}{d}>0$．再利用(1)即可．

(4)真．$c<d<0\Rightarrow -c>-d>0\Rightarrow\frac{1}{-c}<\frac{1}{-d}\Rightarrow\frac{1}{c}>\frac{1}{d}$

再利用(2)即可．

5-1-8 (1)＞ 由 $x^2+x+1>0>x^2-3x+2$ 可知．

(2)＞ 由 $x^2-x+1>1>x^{-\ln x}$ 可知．

(3)＜ 由 $-\lg\sin x>-\lg\cos x>0$ 及 $a>b>0$ 两边分别相乘得知．

(4)＞ $f(a)-f(b)=\dfrac{a-b}{(1+a)(1+b)}>0$

5-1-9 C 作差比较，并注意 $\sin\alpha=1$，$\cos\alpha=1$ 不可能同时成立．

5-1-10 A $f(x)\geq 2\geq g(x)$，注意两等号不能同时成立．

5-1-11 B $m+n>mn\Leftrightarrow\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}>1\Leftrightarrow m=1$或$n=1$

5-1-12 A $\alpha<\beta\Rightarrow\alpha-\beta<0$；$\alpha>-\pi$，$-\beta>-\pi\Rightarrow\alpha-\beta>-2\pi$．

5-1-13 (1)＞ 先化简前一式子，再作差比较．

(2)≤ 两边平方，然后作差比较．当且仅当 a=b 时等号成立．

5-1-14 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$．作平方差比较，并注意$a+b=c+d=-p$，$\sqrt{ab}=\dfrac{m+n}{2}$，$\sqrt{cd}=\sqrt{mn}$．

5-1-15 $-(1+q)<p<1+q$ 注意

$$p^2-(1+q)^2=(\alpha^2-1)(1-\beta^2)<0\Leftrightarrow|p|<1+q\quad(1+q>0)$$

5-1-16 $A\leq B\leq C$．由$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\dfrac{2ab}{a+b}$及$f(x)$是$(0,+\infty)$内的单调减函数推得．

5-1-17 $n=4$ 原式$\Leftrightarrow n<\lg(3^5\cdot 5^3)<n+1$

由$10^4<3^5\cdot 5^3=30375<10^5$知$n=4$．

5-1-18 a，b，c 为不都相等的正实数．

原式$\Leftrightarrow a>0$，$b>0$，$c>0$且$\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}>abc$

$\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>0$

5-1-19 是．不妨设$a\geq b\geq c$，则只须$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$成立．由$(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2>b+c>a$即知上式成立．

5-1-20 $A\supset B$．问题归结为判断两区间$(|a-b|,a+b)$与$(\sqrt{|a^2-b^2|},\sqrt{a^2+b^2})$的关系，从而只须比较两区间端点的大小．

(二)不等式的证明

1．不等式证明的基本依据(性质、比较、重要不等式)

5-2-1　B　注意：$a-ab^2<0$，$ab-ab^2>0$

5-2-2　D　由(i)得 $a<b-(d-c)<b$ 及 $a<c-(d-b)=c-(a-c)$，即 $a<b$ 且 $a<c$．再由(iii)知 $b-d=c-a>0$，即 $d<b$．

5-2-3　(1)用比差法，并注意$x-y$与$\sqrt{x}-\sqrt{y}$同号．注意原不等式等价于$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}>x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$，故也可利用例$5-2-6$所证的不等式．

(2)用比差法，并注意$-x>0$，$1+x>0$，$x^2>0$．

5-2-4　用比商法．

$$a^b b^a/(ab)^{\frac{a+b}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b-a}{2}}\leq 1$$

$$a^a b^b/(ab)^{\frac{a+b}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}\geq 1$$

5-2-5　作立方差：

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3-(\sqrt[3]{a-b})^3=-3\sqrt[3]{ab}\cdot(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})<0$$

5-2-6 (1)利用不等式$x^2+y^2\geq 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，并注意

$a+b=1$，$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(2)注意：$1\pm\frac{c}{a}>0$，$1\pm\frac{c}{b}>0$．对左边两项分别用平均值不等式．

5-2-7 (1)原不等式$\Leftrightarrow(\frac{a}{b+c}+1)+(\frac{b}{c+a}+1)+(\frac{c}{a+b}+1)\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\cdot(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\geq\frac{9}{2}$

(2)先拆项．令$c=\frac{c}{2}+\frac{c}{2}$，$\frac{4}{c}=\frac{1}{c/2}+\frac{1}{c/2}$，再利用平均值不等式．

5-2-8　(1)作差比较，并分解因式．

(2)利用均值不等式．

5-2-9　作差并配成平方和．

5-2-10　先利用幂分拆不等式证明 $a^3+b^3\geq a^2b+b^2b$，…

5-2-11 原不等式$\Leftrightarrow c+2\sqrt{ab}\geq 3\sqrt[3]{abc}$．左边适当拆项后再利用平均值不等式．等号成立的条件是$ab=c^2$．

5-2-12　由 $a^4+b^4>a^3b+ab^3$ 及 $a^4+b^4>2a^2b^2$ 分别相加．

5-2-13　∵$a_i\in R^+(i=1,2,\cdots,n)$

∴$2+a_i=1+1+a_i\geq 3\sqrt[3]{a_i}>0$　　n个式子依项相乘即获证．

5-2-14　直接利用例 5-2-5 的不等式．

5-2-15 利用幂平均不等式$x^2+y^2 \geq 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

5-2-16 (1)利用平均值不等式.(2)比差，并分解因式.

5-2-17 作商比较.

5-2-18 因为$2\sqrt{2ab} \leq a+2b=4\sqrt{2}$(当且仅当$a=2b=2\sqrt{2}$时等号成立)，所以$ab \leq 4$及$\frac{16}{ab} \geq 4$，从而可得

$$\log_2 a+\log_2 b \leq 2,\quad 4+\log_2\frac{1}{a}+\log_2\frac{1}{b} \geq 2$$

5-2-19 作差比较．关键在于去掉绝对值符号．为避免对 a 的讨论，作差变形时，先换成常用对数，再去掉绝对值符号．

5-2-20 作差比较．

$pf(x)+qf(y)-f(px+qy)$

$=p(x^2+ax+b)+q(y^2+ay+b)-[(px+qy)^2+a(px+ay)+b]$

$=p(1-p)x^2-2pqxy+q(1-q)y^2=pq(x^2-2xy+y^2)$

$=pq(x-y)^2>0$

(注意：$1-p=q$，$1-q=p$)，有 $pf(x)+qf(y)>f(px+qy)$

2．不等式证明的基本方法(综合、分析、反证)

5-2-21 (1)因 $t>0$，$t\neq 1$，由平均值不等式知

$$\frac{t+n}{1+n}=\frac{\overbrace{t+1+\cdots+1}^{n个}}{1+n}>\sqrt[n+1]{t}$$

又 $0<a<1$，故根据对数函数的递减性即获证．

(2)仿(1)证明．

5-2-22 利用对数运算的性质、对数函数的单调性以及平均值不等式即可证明．

5-2-23 用分析法证明.只须证$\frac{\cos x+a^x}{\sin x+a^x}>\frac{\cos x}{\sin x}$，而$\cos x>0$,$\sin x>0$，故只须证$(\cos x+a^x)\sin x>(\sin x+a^x)\cos x$，即$a^x\sin x>a^x\cos x$又$a^x>0$，于是只须证$\sin x>\cos x$．由题设$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$可知，此最后不等式成立，故原不等式得证．

注　此题是下述命题的特例：

若$b>a>0$，$c>0$，则$\frac{a+c}{b+c}>\frac{a}{b}$.

5-2-24

(1)原不等式$\Leftrightarrow \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}<\frac{a-b}{\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}} \Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}$

(2)原不等式$\Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{a+c}+\sqrt{a}}<\frac{c}{\sqrt{b+c}+\sqrt{b}} \Leftrightarrow \sqrt{a+c}+\sqrt{a}>\sqrt{b+c}+\sqrt{b}$

5-2-25 易知当$a_1=a_2=a_3=\frac{1}{3}$时等号成立．这时$a_i=\frac{1}{9a_i}$．由此得到启示，为了利用平均值不等式，应将$\frac{1}{a_i}$分拆为$\underbrace{\frac{1}{9a_i}+\cdots+\frac{1}{9a_i}}_{9\text{项}}$．并注意

$$a_1a_2a_3\leq\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^3=\frac{1}{3}$$

注　一般地，有$(a_1+\frac{1}{a_1})\cdots(a_n+\frac{1}{a_n})\geq(n+\frac{1}{n})^n$．

5-2-26　∵$3a_i+2>0$

∴$\sqrt{3a_i+2}\leq\frac{(3a_i+2)+1}{2}(i=1，2，3)$

三式分别相加即得.等号成立的条件是$3a_i+2=1$,即$a_1=a_2=a_3=-\frac{1}{3}$．

5-2-27 原不等式$\Leftrightarrow(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\leq3(a+b+c)$

5-2-28　利用幂平均不等式易知

$x^2+y^2\geq\frac{1}{2}(x+y)^2$(当且仅当$x=y$时取等号)

5-2-29 综合与分析相结合证明.由$\sqrt{a}-\sqrt{b}=10$可得$a=100+20\sqrt{b}+b$．于是要证$a-2b\leq200$,只须证$100+20\sqrt{b}+b-2b\leq200$，即只须证$20\sqrt{b}=100+b$．由$(10-\sqrt{b})^2\geq0$知此式成立．

5-2-30 用分析法．只须证$-\sqrt{c^2-ab}<a-c<\sqrt{c^2-ab}$，从而只须证$|a-c|<\sqrt{c^2-ab}$，即证$a^2-2ac+c^2<c^2-ab$(由$2c>a+b\geq2\sqrt{ab}$知$c^2-ab>0$)，即只须证$a(a+b-2c)<0$．但$a>0$，故只须证$a+b-2c<0$．

5-2-31　从中间三因式出发，用平均值不等式证左边不等式．展开后用幂分拆不等式证右边不等式(注意，a，b 同正或同负)．

5-2-32 (1)$a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}[(a^4+b^4)+(b^4+c^4)+(c^4+a^4)]\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq ab^2c+bc^2a+ca^2b=abc(a+b+c)$

(2)$a^3-b^3=a^2-b^2\Rightarrow a^2+ab+b^2=a+b(a\neq b)$

$\Rightarrow(a+b)^2>a+b\Rightarrow a+b>1$

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\a^3-b^3=a^2-b^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}(a+b)^2=a+b+ab\\4ab<(a+b)^2\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow(a+b)^2<a+b+\frac{(a+b)^2}{4}\Rightarrow\frac{3}{4}(a+b)^2<a+b\Rightarrow a+b<\frac{4}{3}$

5-2-33　只须证 $x^2y^2z^2(yz+zx+xy)\leq x^8+y^8+z^8$．而 $yz+zx+xy\leq x^2+y^2+z^2$．从而只须证 $x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)\leq x^8+y^8+z^8$．再利用综合法仿

5-2-32(1)证此不等式．

5-2-34 利用不等式$\frac{x^2}{y}\geq 2x-y$；从左边每项项入手．

5-2-35 可仿例 5-2-9 方法一或方法四证明．也可令原式左边=A，并令$B=\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}$，这时$A-B=0$，即$A=B$，从而只须证$A=\frac{1}{2}(A+B)>\frac{1}{2}(a+b+c)$

5-2-36 因 abc=1，故原不等式等价于

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

再用平均值不等式的变式$\frac{x^2}{y}\geq 2\lambda x-\lambda^2 y$(取$\lambda=\frac{1}{2}$)证之．当且仅当$a=b=c=1$时取“＝”．

5-2-37 用反证法．假设$a+b+c<\sqrt{3}$，两边平方后经整理可得$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}+2(ab+bc+ca)<3$，于是有

$$3(ab+bc+ca)<\Leftrightarrow ab+bc+ca<1$$

与题设矛盾．

5-2-38 分析法．

$|ac+bd|\leq 1\Leftarrow(ac+bd)^2\leq(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)\Leftarrow b^2c^2-2abcd+a^2d^2\geq 0\Leftarrow(bc-ad)^2\geq 0$

又法：反证法．假定$|ac+bd|>1$，则

$$(ac+bd)^2>(a^2+b^2)(c^2+d^2)\Rightarrow\cdots\Rightarrow(bc-ad)^2<0$$

这不可能．

5-2-39 假设$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|\geq 1$，则

$$|a+b|\geq|1+ab|\Rightarrow(a+b)^2\geq(1+ab)^2\Rightarrow(a^2-1)(b^2-1)\leq 0$$

与已知矛盾．

5-2-40 假设4个数都大于$\frac{1}{4}$，则有

$$A=\sqrt{a_1(1-a_2)}+\sqrt{a_2(1-a_3)}+\sqrt{a_3(1-a_4)}+\sqrt{a_4(1-a_1)}>2\text{(i)}$$

但由平均值不等式，有

$$A\leq\frac{a_1+(1-a_2)}{2}+\frac{a_2+(1-a_3)}{2}+\frac{a_3+(1-a_4)}{2}+\frac{a_4+(1-a_1)}{2}=2\text{(ii)}$$

(i)与(ii)矛盾．

3．不等式证明的常用技巧(代换、放缩、构造、转化)

5-2-41 用均值代换，令左边=2k，并设

$$\sqrt{2a^2+1}=k+t,\ \sqrt{2b^2+1}=k-t(k>0,\ t\in R)$$

也可用三角代换．因$(2a^2+1)+(2b^2+1)=4$，故可设

$$2a^2+1=4\cos^2\theta，2b^2+1=4\sin^2\theta(\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3})$$

5-2-42　当 $b=0$ 时，不等式显然成立，且取等号；当 $a\geq b>0$ 时，可用均值代换，或变量代换，即令

$$\sqrt[n]{a+b}=x，\sqrt[n]{a-b}=y(x>0，y>0)$$

再利用幂平均不等式即可．

5-2-43 作比值代换：令 $\frac{a_i}{b_i}(i=1，2，\cdots，n)$**，则有** $k_1<k_2<\cdots<k_n$**，对中间项的分子施行代换 $a_i=k_ib_i$ 后，再分别用 k_1，k_n 代换所有的 k_i，则左、右两端不等式分别得证．**

5-2-44 作三角代换： $a=\cos\theta，b=\sin\varphi(-\frac{\pi}{2}<\theta，\varphi<\frac{\pi}{2})$**．**

5-2-45 构造函数 $f(x)=\frac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a^x+b^x}$**．易知，当** $a=b>0$ **时，** $f(x)$ **是常值函数；当** $a\neq b$ **时，** $f(x)$ **是实数集内的增函数，从而有** $f(-1)<f(-\frac{1}{2})<f(0)<f(1)$**．综合之得证．**

其实，只用幂平均不等式就可轻易地解本题．

5-2-46　根据条件等式的结构特点，可考虑用三角代换：

$$a=\mathrm{tg}\alpha，b=\mathrm{tg}\beta，c=\mathrm{tg}\gamma[\alpha，\beta，\lambda\in(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})]$$

代入等式左端并注意 $\sin^2x=\frac{\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}$**，可得** $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$**．再由平均值不等式，有**

$$2\sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\leq\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1-\sin^2\gamma=\cos^2\gamma$$

同理　$2\sqrt{\sin^2\beta\sin^2\gamma}\leq\cos^2\alpha$**；** $\sqrt{\sin^2\gamma\sin^2\alpha}\leq\cos^2\beta$

三式分边相乘后可化为 $\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\beta\mathrm{tg}^2\gamma\leq\frac{1}{8}$**，此即** $|abc|\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$**．**

5-2-47 已知条件可变形为 $\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{2}y)^2=1$**，故可用三角代换．令**

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}=\sin\theta，\sqrt{2}y=\cos\theta(0\leq\theta<2\pi)$$

并注意 $|x+y|=|(x-y)+2y|$．

5-2-48　由 $x，y\geq a>0$，联想 $\sec^2\theta\geq1$，因此可考虑设

$$x = a\sec^2\alpha(0\leq\alpha<\frac{\pi}{2})，y = a\sec^2\beta(0\leq\beta<\frac{\pi}{2})$$

$$左端 = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\leq\frac{a}{\cos\alpha\cos\beta} = a\sec\alpha\sec\beta = \sqrt{xy}$$

当且仅当$\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$**即**$\frac{a}{x}+\frac{a}{y} = \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$**时取等号．**

5-2-49 根据题中表达式的结构可设$x = \mathrm{tg}\theta(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$**，则**

$$\frac{\sqrt{3}x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{3}\mathrm{tg}\theta+1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\theta+1}} = \sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta = 2\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$$

因为$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$**，所以**$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\leq 1$**．**

5-2-50　由 $a^2+b^2<1$，可设 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$ $(0\leq\theta<2\pi)$，$|r|<1$．于是，

左边$=r^2|\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta|=r^2|\sin2\theta+\cos2\theta|$

$$= \sqrt{2}r^2|\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})|\leq\sqrt{2}r^2<\sqrt{2}$$

5-2-51　(1)直接用平均值不等式．

(2)**原式**$\Leftrightarrow n[(a_1+\frac{1}{a_1})^2+(a_2+\frac{1}{a^2})^2\cdots+(a_n+\frac{1}{a_n})^2]\geq(n^2+1)^2$

利用柯西不等式，视$n = \underbrace{1^2+\cdots+1^2}_{n个}$**，并注意：由**(1)**及题设，有**

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\geq n^2$$

5-2-52　引进参数 $\lambda>0$，构造一列平均值不等式：

$$\frac{1}{x}+\lambda^2x\geq 2\lambda，\frac{4}{y}+\lambda^2y\geq 4\lambda，\frac{9}{z}+\lambda^2z\geq 6\lambda \qquad (i)$$

三式依项相加后，移项、整理，得

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geq 12\lambda-\lambda^2(x+y+z) = 12\lambda-\lambda^2$$

根据(i)中三式等号同时成立的条件及 x+y+z=1，可得 $\lambda=6$．所以

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geq 12\lambda-\lambda^2 = 36$$

5-2-53 先证左边不等式，用放缩法。由$1-2a^2>0$**及**$0<a\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$**，从而**$0<a^2\leq\frac{\sqrt{2}}{2}a$**．于是，**

$$\sqrt{1-2a^2} = \sqrt{1-4a^2+2a^2}\geq\sqrt{1-2\sqrt{2}a+2a^2} = 1-\sqrt{2}a$$

同理，$\sqrt{1-2b^2}\geq 1-\sqrt{2}b$．

以上两式不能同时取等号．所以

$$\sqrt{1-2a^2}+\sqrt{1-2b^2}>2-\sqrt{2}(a+b)=2-\sqrt{2}$$

现在证右边不等式：

$$\sqrt{1-2a^2}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1-2a^2)}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}[\frac{1}{2}+(1-2a^2)]=\frac{3\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}a^2$$

同理　$\sqrt{1-2b^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}b^2$

所以　$\sqrt{1-2a^2}+\sqrt{1-2b^2}\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}(a^2+b^2)$

$$\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}(\frac{a+b}{2})^2=\sqrt{2}$$

5-2-54 构造函数$f(x)=\frac{a+x}{b+x}$．易证$f(x)$在区间$[0，+\infty]$内是增函数(实质上是作差比较，这里构造函数有更深层的意义)．

参考 5-2-23 的注．

5-2-55　利用上题结果．

5-2-56　利用

$$\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4k(k+1)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$$

将左边拆项变形，正负抵消，命题即获证．

5-2-57 令$y=\frac{2x^2-2x-1}{x^2-x+1}$，两边同乘以$x^2-x+1>0$，可得

$$(y-2)x^2+(2-y)x+(y+1)=0$$

注意 $y\neq 0$($y=2$ 时 x 不存在)，故问题转化为利用判别式求 y 的取值范围．

5-2-58　利用

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

将中间各项放缩变形、拆项抵消，命题即得证．

5-2-59　根据对数函数的性质，所证不等式等价于

$$[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa]^2<n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a]$$

观察其结构特征，可构造二次函数

$$g(t)=nt^2+2[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa]t+[1+2^{2x}+\cdots+n^{2x}a^2]$$
$$=(t+1)^2+(t+2^x)^2+\cdots+(t+n^xa)^2\geq 0$$

而利用其判别式$\Delta\leq 0$证之．注意其中还要利用$0<a^2\leq a$将a^2放大为 a，并注意因 $x\neq 0$，故等号不成立．

本题也可直接利用柯西不等式证明．

5-2-60　当$|a+b|=0$时，左边=0，右边≥ 0，不等式成立．

当$|a+b|\neq 0$时，利用绝对值的性质作不等代换，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}=\frac{1}{1+\frac{1}{|a+b|}}\leq\frac{1}{1+\frac{1}{|a|+|b|}}=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

(三)不等式的解法

1．代数不等式的解法

5-3-1　C　注意，(x-1)(x-2)≤0 即(x-1)(2-x)≥0．

5-3-2　A　注意，B 中，

$$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)>[g(x)]^2\end{cases}\text{或}\begin{cases}g(x)<0\\ f(x)\ge 0\end{cases}$$

C中，$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<0,\\ g(x)<0\end{cases}$；

D中，$\dfrac{f(x)}{g(x)}>1\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0\\ f(x)-g(x)>0\end{cases}$或$\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)-g(x)<0.\end{cases}$

5-3-3 C **原不等式**$\Leftrightarrow\begin{cases}x-c\ne 0\\ (x-a)(x-b)(x-c)\le 0\end{cases}$

5-3-4　(-β，-α)令 x=-t，则 ax^2-bx+c＞0 化为 at^2+bt+c＞0．由题设，有α＜-x＜β，故-β＜x＜-α．

5-3-5 $(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}，1)\cup(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}，3)$**原不等式同解于**

$$(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{2})(x-1)(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{2})(x-3)<0$$

5-3-6 (1)**原不等式**$\Leftrightarrow\dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)}{x-1}<1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 1\\ (x+1)(x-2)-1<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<1\text{或}1<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

(2)**原不等式**$\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-2x-2}-1\right)\left(\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-2x-2}-2\right)<0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 1\pm\sqrt{3}\\ -x^2+2x+3<0\end{cases}\Leftrightarrow x<-1\text{或}x<3$$

5-3-7　不等式的允许值集为：x≤-2 或 x≥1．故原不等式同解于

$$\begin{cases}x\le -2\\ 2x^2+2x-4\ge 0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\ge 1\\ 2x^2+2x-4\ge (x+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow x\le -2\text{或}x\ge 4$$

5-3-8 原不等式$\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}}<x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\ne 0\\ \sqrt{x+3}<x+1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 2\\ x+1>0\\ x+3<(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<2\text{或}x>2$$

5-3-9 原不等式$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2}<\sqrt{(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow(x-2)^2-(x-1)^2<0\Leftrightarrow-(2x-3)<0\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$

5-3-10 原不等式$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x-3}>\sqrt{x^2+2}-1(>0)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-3\geq 0\\x^2-2x-3>(\sqrt{x^2+2}-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow x<-\frac{7}{6}$

5-3-11 原不等式$\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-8}>1-\sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow x-8>1-3\sqrt{x-3}+3(x-3)-(x-3)\sqrt{x-3}$

$\Leftrightarrow x(\sqrt{x-3}-2)>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 3\\x-3>4\end{cases}\Leftrightarrow x>7$

5-3-12 原不等式同解于不等式组

$\begin{cases}\frac{x+1}{x-3}\leq 0\\\frac{x+2}{1-x}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x-1)\neq 0\\(x+1)(x-3)\leq 0\\(x+2)(1-x)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leq x<3\\-2\leq x<1\end{cases}\Leftrightarrow-1\leq x<1$

5-3-13 当 a=0 时，解得 x<3.

当$a\neq 0$**时，**$\Delta=9(a-1)^2\geq 0$**．若**$a<0$**，则**$\frac{3}{a}<x<3$**；若**$0<a<1$**，则**$x<3$**或**$x>\frac{3}{a}$**；若**$a\geq 1$**，则**$x<\frac{3}{a}$**或**$x>3$**．**

5-3-14 原不等式

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\(a-1)x^2+2ax+a+1>0\end{cases}$**或**$\begin{cases}x+1<0\\(a-1)x^2+2ax+a+1<0\end{cases}$

当 a=1 时，解得 x<-1 或 x>-1；

当 a≠1 时，$\Delta=4a^2-4(a-1)(a+1)=4$**，二次方程**$(a-1)x^2+2ax+a+1=0$**的**

两根为-1，$\frac{1+a}{1-a}$**．当**$a<1$**时，**$\frac{1+a}{1-a}>-1$**，当**$a>1$**时，**$\frac{1+a}{1-a}<-1$**．故当**$a<1$**时，解得**$x<-1$**或**$-1<x<\frac{1+a}{1-a}$**；当**$a>1$**时，解得**$x>-1$**或**$\frac{1+a}{1-a}<x<-1$**．**

5-3-15 原不等式$\Leftrightarrow\begin{cases}x+a<0\\x^2-2a^2\geq 0\end{cases}$**或**$\begin{cases}x+a\geq 0\\x^2-2a^2>(x+a)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x<-a\\(x+\sqrt{2}a)(x-\sqrt{2}a)\geq 0\end{cases}$**或**$\begin{cases}x\geq -a\\2ax<-3a^2\end{cases}$

故当$a=0$**时，解得**$x<0$**；当**$a>0$**时，解得**$x\leq-\sqrt{2}a$**；当**$a<0$**时，**

解得$x\le\sqrt{2}a$，或$x>-\frac{3}{2}a$.

5-3-16 原不等式$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ a-2x>(x-1)^2\end{cases}$或$\begin{cases}x-1<0\\ a-2x\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2<a-1\end{cases}$或$\begin{cases}x<1\\ x\le\frac{a}{2}\end{cases}$

当$a\le 1$时，解得$x\le\frac{a}{2}$；当$1<a<2$时，解得$1\le x<\sqrt{a-1}$或$x\le\frac{a}{2}$；当$a=2$时，解得$x<1$；当$a>2$时，解得$x<\sqrt{a-1}$.

5-3-17 由$2+x-x^2\ge 0$得$-1\le x\le 2$.

故当$a=-1$时，原不等式$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -1\\ 2+x-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\le 2$

当$a<-1$时，原不等式$\Leftrightarrow 2+x-x^2\ge -1\le x\le 2$

5-3-18 显然，$a\ne 0$.

原不等式$\Leftrightarrow\begin{cases}a-x\ge 0\\ a^2-x^2>(a-x)^2\end{cases}$或$\begin{cases}a-x<0\\ a^2-x^2\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le a\\ x(x-a)<0\end{cases}$或$\begin{cases}x>a\\ (x-a)(x+a)\le 0\end{cases}$

于是，当 $a>0$ 时，解得 $0<x<a$；当 $a<0$ 时，解得 $a<x\le -a$.

5-3-19 原不等式$\Leftrightarrow\sqrt{x-a}>\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\ (a+1)x<a-1\end{cases}$

于是，当$a<-1$时，因$a<1<\frac{a-1}{a+1}$，故这时$x>\frac{a-1}{a+1}$；当$a>-1$时，因$\frac{a-1}{a+1}<1$，故这时不等式无解；当$a=-1$时，不等式也无解.

5-3-20 当 $a=1$ 时，解得 $x<-1$ 或 $x>1$；当 $a>1$ 时，

原不等式$\Leftrightarrow\frac{x+a}{x-a}>a-1\Leftrightarrow\frac{(2-a)x+a^2}{x-a}>0$

当$1<a<2$时，则有$\left(x-\frac{a^2}{a-2}\right)\cdot(x-a)>0$，且$a>\frac{a^2}{a-2}$，故这时$x<\frac{a^2}{a-2}$或$x>a$；当$a=2$时，则$x>2$；当$a>2$时，则有$\left(x-\frac{a^2}{a-2}\right)(x-a)<0$，且$a<\frac{a^2}{a-2}$，故这时$a<x<\frac{a^2}{a-2}$.

2．指数不等式、对数不等式的解法

5-3-21 B 原不等式$\Leftrightarrow a^{x^2-3x-2}>a^{1-x}\Leftrightarrow x^2-3x-2<1-x$

5-3-22 D 原不等式$\Leftrightarrow \log_x(x-1) \leq \log_x \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \leq \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2-3x+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

5-3-23 $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

原不等式$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^{x^2-4x-7} > \left(\frac{6}{5}\right)^{-x-3} \Leftrightarrow x^2-3x-4 > 0 \Leftrightarrow x < -1$或$x > 4$

5-3-24 $(4, +\infty)$

原不等式$\Leftrightarrow \frac{2^{2x+4} \cdot 3^{2x+4}}{2^{x+8} \cdot 3^{3x}} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4} < \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$

5-3-25 原不等式$\Leftrightarrow(a^x-a^2)(a^x-a^{-2})<0$

于是，当 $0<a<1$ 时，有 $a^2<a^x<a^{-2}$；当 $a>1$ 时，有 $a^{-2}<a^x<a^2$．两种情况下均有$-2<x<2$．

5-3-26 联立 $x^2-2x-15>0$，$x+13>0$，$x^2-2x-15<x+13$ 解得

$$-4<x<-3 \text{ 或 } 5<x<7$$

这就是原不等式的解．

5-3-27 允许值集为 $x<0$ 或 $x>a$．

当 $a>1$ 时，原不等式同解于

$$1-\frac{a}{x} > a \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < \frac{a}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{1-a} < x < 0$$

当 $0<a<1$ 时，原不等式同解于

$$1-\frac{a}{x} < a \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{a}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow a < x < \frac{a}{1-a}$$

5-3-28 因$a>0$，故允许值集为$x > -(1+\frac{1}{2a})$．这时，原不等式同解于

$$\frac{1+(x+1)^2}{1+2a(x+1)} < 1 \Leftrightarrow (x+1)[x-(2a-1)] < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2a-1$$

注 $a<0$ 时，原不等式的解为 $2a-1<x<-1$；$a=0$ 时，原不等式无解．

5-3-29 原不等式可化为$a^{x^4-a^2x^2-(x^2-a^2)}<1$．

当 $0<a<1$ 时，有$(x+a)(x-a)(x+1)(x-1)>0$，得

$$x<-1 \text{ 或} -a<x<a \text{ 或 } x>1$$

当 $a>1$ 时，有$(x+a)(x-a)(x+1)(x-1)<0$，得

$$-a<x<-1, \text{ 或 } 1<x<a$$

5-3-30 原不等式$\Leftrightarrow a^{2x}+(ab)^x-6b^{2x}+1>1$

$$\Leftrightarrow (a^x+3b^x)\cdot(a^x-2b^x)>0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x>2$$

当$a>b$时，得$x>\log_{\frac{a}{b}}2$；当$a=b$时，无解；当$a<b$时，$x<\log_{\frac{a}{b}}2$.

5-3-31　原不等式同解于

$$0<\frac{a^{2x}+(ab)^x}{4b^{2x}}-\frac{1}{2}<1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2x}+(ab)^x-2b^{2x}>0 \\ a^{2x}+(ab)^x-6b^{2x}<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^x-b^x>0 \\ a^x-2b^x<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<\left(\frac{a}{b}\right)^x<2$$

所以，当$a>b$时，$0<x<\log_{\frac{a}{b}}2$；当$a<b$时，$\log_{\frac{a}{b}}2<x<0$.

5-3-32　原不等式同解于

$$\begin{cases} 1-\log_a x<0 \\ \log_a x+1\geq 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 1-\log_a x\geq 0 \\ \log_a x+1>(1-\log_a x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \log_a x>1 \text{或} 0<\log_a x\leq 1 \Leftrightarrow 0<x<a \text{或} a\leq x<1$$

所以原不等式的解为$0<x<1$.

5-3-33 令$\sqrt{\log_a(x^2+2ax+a^2)}=t(t\geq 0)$，则代入原不等式得

$$t^2+t-2<0 \Leftrightarrow 0\leq t<1$$

即　$$0\leq \log_a(x+a)^2<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+a\neq 0 \\ 1\leq (x+a)^2<a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -a-\sqrt{a}<x\leq -a-1 \text{或} -a+1\leq x<-a+\sqrt{a}$$

5-3-34　原不等式通过换底并整理后，可化为

$$\frac{1+2[\log_x(ax)]^2}{\log_x(ax)}>0 \Leftrightarrow \log_x(ax)>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ 0<ax<1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x>1 \\ ax>1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{a} \text{或} x>1$$

5-3-35 换底化为$\log_2(2^x-1)\cdot\log_2\frac{2^x-1}{2}-2\leq 0$. 令$\log_2\frac{2^x-1}{2}=t$，代入前面的不等式并整理得

$$(t+1)t-2\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq t\leq 1$$

即　$$-2\leq \log_2\frac{2^x-1}{2}\leq 1 \Leftrightarrow \log_2\frac{3}{2}\leq x\leq \log_2 5$$

5-3-36　通过换底并整理，原不等式可化为

$$\frac{\log_2[x(a-x)]}{\log_2 x} > \frac{\log_2 \frac{a^2}{4}}{\log_2 x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 - ax + \frac{a^2}{4} > 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - ax + \frac{a^2}{4} < 0 \end{cases} (\text{其中} a > 0.)$$

对于前一不等式组，若$0 < a < 2$，则得$0 < x < \frac{a}{2}$或$\frac{a}{2} < x < 1$；若$a \geq 2$，则得$0 < x < 1$．后一不等式组无解．

5-3-37　允许值集为 $0<x<1$ 或 $x>1$．原不等式可化为

$$\frac{\log_a(2^x - \frac{3}{4})}{\log_a x} < \frac{\log_a \frac{2^{2x}}{4}}{\log_a x}$$

当 $0<x<1$ 时，注意到 $a>1$，则得

$$\log_a(2^x - \frac{3}{4}) > \log_a \frac{2^{2x}}{4} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < 2^x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \log_2 3$$

当 $x>1$ 时，则得

$$\log_a(2^x - \frac{3}{4}) < \log_a \frac{2^{2x}}{4} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x > 3 \Leftrightarrow x > \log_2 3$$

5-3-38　原不等式可化为

$$a^{2(2+2\log_2 x)} > a^{(\log_2 x)^2 - 1}$$

当$0 < a < 1$时，有

$$2(2 + 2\log_2 x) < (\log_2 x)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 5 > 0 \Leftrightarrow \log_2 x < -1 \text{或} \log_2 x > 5$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \text{或} x > 2^5 = 32$$

当$a > 1$时，有$\frac{1}{2} < x < 32$．

5-3-39　当 $x>0$ 时，不等式 $f(x)<-x$ 即为

$$\frac{x}{1-\lg(10+x)} < -x \Leftrightarrow \frac{1}{1-\lg(10+x)} < -1 \Leftrightarrow \lg(10+x) < 2$$

$$\Leftrightarrow 10 + x < 10^2 \Leftrightarrow 0 < x < 90$$

当$x < 0$时，

$$f(x) = -f(-x) = -\frac{-x}{1-\lg(10-x)} = \frac{x}{1-\lg(10-x)}$$

于是，不等式$f(x) < -x$即为

$$\frac{x}{1-\lg(10-x)} < -x \Leftrightarrow \log_2(10-x) > 2 \Leftrightarrow 10 - x > 100 \Leftrightarrow x < -90$$

5-3-40　原不等式可化简为

$$\log_a \frac{4(4^{x-\frac{3}{2}}+1)}{3\times 2^x} > 0$$

当$0<a<1$时，则有

$$\frac{4(2^{2x-3}+1)}{3\times 2^x} < 1 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6\cdot 2^x + 8 < 0$$

$\Leftrightarrow 2<2^x<4 \Leftrightarrow 1<x<2$

当$a>1$时，则得$x<1$或$x>2$.

3．含绝对值的不等式的解法

5-3-41　C　$|3x+1|>2 \Leftrightarrow 3x+1<-2$ 或 $3x+1>2$

5-3-42 C　$M=\{x|1\leq x\leq 2\}$，$N=\{x|\ x\leq -3$或$x\geq \frac{1}{3}\}$

5-3-43　D　$|3^x-2|>1 \Leftrightarrow 3^x-2<-1$ 或 $3^x-2>1$

$\Leftrightarrow 3^x<1$ 或 $3^x>3 \Leftrightarrow x<0$ 或 $x>1$

5-3-44 C　原不等式$\Leftrightarrow 2(|x|+a)<3(a-|x|) \Leftrightarrow 5|x|<a \Leftrightarrow |x|<\frac{a}{5}$

5-3-45　B　原不等式同解于

$$\begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}+1>0 \\ \frac{f(x)}{g(x)}-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x)+g(x)}{g(x)}>0 \\ \frac{f(x)-g(x)}{g(x)}<0 \end{cases}$$

5-3-46　$\{x|-1<x<4\}$

5-3-47　$\{x|x\leq -4\}\cup\{x|-1\leq x\leq 1\}\cup\{x|x\geq 4\}$

原不等式$\Leftrightarrow \left(\frac{3x}{x^2-4}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4\neq 0 \\ 9x^2\leq (x^2-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2\leq 1$或$x^2\geq 16$

5-3-48　$\left\{x|-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}\right\}$显然$|x|+1>0$，所以原不等式同解于

$$3|x|-2<0 \Leftrightarrow |x|\leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\leq x\leq \frac{2}{3}$$

5-3-49　$(-4,-2)\cup(-2,-1)$易知 $x\neq 0$ 且 $x\neq -2$．原不等式同解于

$$|x|>(x+2)^2 \Leftrightarrow x>(x+2)^2 \text{ 或 } x<-(x+2)^2 \Leftrightarrow -4<x<-1$$

5-3-50　$(-\infty,-2)$两边平方，并注意$|2^{-x}-1|-2\geq 0$，得

$$|2^{-x}-1|-2>1 \Leftrightarrow |2^{-x}-1|>3$$

$\Leftrightarrow 2^{-x}-1>3$ 或 $2^{-x}-1<-3 \Leftrightarrow x<-2$

5-3-51 (1)原不等式$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3}-2>1$或$\sqrt{2x-3}-2<-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3}>3$或$\sqrt{2x-3}<1 \Leftrightarrow x>6$或$\frac{3}{2}\leq x<2$

(2)当 $x+1>0$，即 $x>-1$ 时，原不等式同解于

$$\begin{cases}x^2-x-6\leq x+1\\x^2-x-6\geq -(x+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2\sqrt{2}\leq x\leq 1+2\sqrt{2}\\x\leq -\sqrt{5}\text{或}x\geq\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{5}\leq x\leq 1+2\sqrt{2}$$

当 x+1＜0，即 x＜-1 时，原不等式同解于

$$\begin{cases}x^2-x-6\leq -(x+1)\\x^2-x-6\geq x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}\\x\leq 1-2\sqrt{2}\text{或}x\geq 1+2\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{5}\leq x\leq 1-2\sqrt{2}$$

5-3-52　原不等式$\Leftrightarrow(x+3)^2>(2x-1)^2$

$$\Leftrightarrow(x-4)(3x+2)<0\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<x<4$$

5-3-53　原不等式 $\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x-3}<|x+1|\Leftrightarrow 0\leq x^2-2x-3<(x+1)^2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-3\geq 0\\x^2-2x-3<(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq -1\text{或}x\geq 3\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x>-1$$

5-3-54　原不等式

$$\Leftrightarrow x+1<0\text{或}\begin{cases}x+1\geq 0\\x^2-2x-3>x+1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+1\geq 0\\x^2-2x-3<-(x+1)\end{cases}$$

解集为　(-∞，-1)∪(4，+∞)∪(-1，2)

5-3-55　采用分段脱去绝对值符号法．零点为-1，1．当 x≤-1 时，有

$$(x^2-1)-(x+1)>x+4\Leftrightarrow x<1-\sqrt{7}$$

当-1＜x≤1 时，有

$$(1-x^2)+(x+1)>x+4\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

当 x＞1 时，有

$$(x^2-1)+(x+1)>x+4\Leftrightarrow x>2$$

5-3-56　原不等式

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq -3\\x-4<\dfrac{x}{2}+1\end{cases}\text{或}\begin{cases}-3\leq x<\dfrac{1}{2}\\3x+2<\dfrac{x}{2}+1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{2}\\-x+4<\dfrac{x}{2}+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x<-3\text{或}-3\leq x<-\frac{2}{5}\text{或}x>2$$

解集为$(-\infty,-\frac{2}{5})\cup(2,+\infty)$．

5-3-57　原不等式

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{1}{2} \\ -5x+-1 < 2x+5 \end{cases} \text{或} \begin{cases} -\dfrac{1}{2} < x \le \dfrac{2}{3} \\ -x+3 < 2x+5 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x > \dfrac{2}{3} \\ 5x < 2x+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{7} < x \le -\frac{1}{2} \text{或} -\frac{1}{2} < x \le \frac{2}{3} \text{或} \frac{2}{3} < x < 2$$

解集为$(-\frac{4}{7}，2)$.

5-3-58　原不等式⇔$|(x-3)(x-1)|>(|x|-3)(|x|-1)$

当 $x\le 0$ 时，解得 $x<0$；当 $0<x\le 1$ 时，无解；当 $1<x\le 3$ 时，解得 $1<x<3$；当 $x>3$ 时，无解.

故原不等式的解集为$(-\infty，0)\cup(1，3)$.

5-3-59　当 $x\ge 1$ 时，原不等式可化为$(2^x)^2+2^x-6<0$，解得$-3<2^x<2$，有 $x<1$，故此时原不等式无解；

当 $x<1$ 时，原不等式化为$(2^x)^2-2^x-2<0$，解得$-1<2^x<2$，有 $x<1$.

故原不等式的解集为$(-\infty，1)$.

5-3-60　当 $x\le -1$ 时，原不等式化为 $3<-3x<6$，解得$-2<x<-1$；

当$-1<x\le 0$ 时，化为 $3<-x+2<6$，无解；

当 $0<x\le 1$ 时，原式化为 $3<x+2<6$，无解；

当 $x>1$ 时，化为 $3<3x<6$，解得 $1<x<2$.

故原不等式的解集为$(-2，-1)\cup(1，2)$.

(四)不等式的应用

5-4-1 D 函数的定义域确定于$\begin{cases} x\neq -1，0，1 \\ 2-x-x^2>0 \end{cases}$.

5-4-2 C f(x)在区间(-∞，-1)上是减函数，其值域为[3，+∞)，此即$f^{-1}(x)$的定义域.

5-4-3 D 设$x_1>x_2$，则$\log_{a^2}(2-x_1)>\log_{a^2}(2-x_2)$，但$2-x_1<2-x_2$，故$0<a^2<1$，即$-1<a<0$或$0<a<1$.

5-4-4 D M=(-∞，a-1)∪(a+1，+∞)，N=(2，3)．令 a+1≤2 或 a-1≥3，解得 a≤1 或 a≥4.

5-4-5 $(\frac{3}{5}，1)\cup(1，+\infty)$联立$2x-1>0，2x-1\neq 1，5x-3>0$解之即得.

5-4-6 [-1，1]因为$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}$，而$0<\frac{2}{x^2+1}\leq 2$，所以，

$$-1\leq 1-\frac{2}{x^2+1}<1$$

5-4-7 (-3，1)依题意，$x^2+(a+1)x+1>0$对一切 x∈R 都成立，故$\Delta=(a+1)^2-4<0$，解得-3<a<1.

5-4-8 $[-5，4\sqrt{2})$由$32-x^2>0$得$M=(-4\sqrt{2}，4\sqrt{2})$；由$0<32-x^2\leq 32$得$\log_{0.5}(32-x^2)\geq\log_{0.5}32=-5$，所以 N=[-5，+∞).

5-4-9 (1)所给函数为 $f(x)=(x-a)^2+1$．易知它在区间[a，b]上为增函数,其最小值为$(a-a)^2+1=1$,最大值为$(b-a)^2+1$.故 $N=[1,(b-a)^2+1]$.

(2)由$[1-a,b-a+1]\subseteq N$,有 1-a≥1，即 a≤0，且有$(b-a)^2+1\geq b-a+1$,解得 b≥a+1.所以 a 的取值范围为(-∞,0],b 的取值范围为[a+1,+∞).

5-4-10 令$f(x)=t(\frac{1}{2}\leq t\leq 4)$，则有

$$y=t+\frac{1}{t}(\frac{1}{2}\leq t\leq 4)$$

易知此函数在区间[1/2,1]上递减,在区间[1,4]上递增.又当 t=1/2，1，4 时，分别有 y=5/2，2，17/4．故所求值域为[2，17/4].

5-4-11 设x_1，x_2是方程的两个实根，则 a 的取值范围确定于

$$\Delta=(2a)^2-4(a+6)\geq 0$$

和 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(2a)^2-4(a+6)\leq(2\sqrt{6})^2$

由前者解得 a≤-2 或 a≥3；由后者解得-3≤a≤4．所以 a 的取值范围为[-3，-2]∪[3，4].

5-4-12 原方程可化为 $a=\sin^2x+3\sin x+3$．于是问题归结为求函数

$$f(t)=t^2+3t+3(-1\leq t\leq 1)$$

的值域。配方得$f(t)=(t+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}$．易知$f(t)$在区间$[-1，1]$上递增，所以有 $f(-1)\le f(t)\le f(1)$，即 $1\le a\le 7$．

5-4-13　令方程的左边为 $f(x)$，则实数 a 的取值范围确定于不等式组

$$\begin{cases}\Delta=(a+1)^2-4(a+4)\ge 0\\ f(2)>0\\ \frac{a+1}{2}>2\end{cases}\Leftrightarrow 5\le a<6$$

注意，不要忽视隐含条件 $\Delta\ge 0$(保证根存在)．如果由不等式 $(x_1-2)+(x_2-2)>0$，$(x_1-2)(x_2-2)>0$ 联立解得 $3<a<6$，则扩大了取值范围．

5-4-14　令 $\sin x=t(-1\le t\le 1)$，则方程的左边为 $f(t)=2t^2+(1-a)t-(a+1)$．因为 $f(-1)=0$，所以 $f(t)=0$ 在区间$[-1，1]$上有惟一解的反面即为 $f(t)=0$ 在$[-1，1]$上有两个解，其条件为

$$\begin{cases}(1-a)^2+4(a+1)\\ f(-1)\ge 0\\ f(1)\ge 0\\ -1<\frac{a-1}{4}<1\end{cases}\Leftrightarrow -3<a\le 1$$

取其补集，即知 a 的取值范围为$(-\infty，-3]\cup(1，+\infty)$．

5-4-15　令 $f(x)=2x^2-3ax+a^2$．当 $a>1$ 时，$y=\log_a f(x)$在区间$(1，2)$内为减函数，等价于 $f(x)$在$(1，2)$内为正且递减，其条件为 $f(2)\ge 0$ 且

$\frac{3}{4}a\ge 2$，这时得$a\ge 4$；当$0<a<1$时，$y=\log_a f(x)$在$(1，2)$内递减，等价于$f(x)$在区间$(1，2)$内为正且递增，其条件为$f(1)\ge 0$且$\frac{3}{4}a\le 1$，这时$0<a<1$．故 a 的取值范围为$(0，1)\cup[4，+\infty)$．

5-4-16　(1)原不等式可化为

$$(\log_{0.5}x+3)(\log_{0.5}x+1)\le 0$$

$$\Leftrightarrow -3\le\log_{0.5}x\le -1\Leftrightarrow 2\le x\le 8$$

(2)因为 $x\in[2，8]$，所以 $1\le\log_2 x\le 3$．而

$$f(x)=(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)$$

$$=(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=(\log_2 x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$$

因为$\frac{3}{2}\in[1，3]$，故$f(x)$的最小值为$-\frac{1}{4}$．易知$f(2)<f(8)$，故当$\log_2 x=3$ 即 $x=8$ 时，$f(x)$取最大值 2．

5-4-17　令 $\log_2 x=t$，$0\le t\le 1$，则 y 可表为

$$y=f(t)=[2\log_a b-(\log_a b)^2]t-2\log_a b+1$$

于是，对一切 $x\in[1,2]$，$y>0$ 等价于对一切 $t\in[0,1]$，$f(t)>0$，根据一次函数的性质，即等价于

$$\begin{cases} f(0)=-2\log_a b+1>0 \\ f(1)=1-(\log_a b)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<\log_a b<\frac{1}{2}$$

因此，当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<b<\sqrt{a}$；当 $0<a<1$ 时，$\sqrt{a}<b<\frac{1}{a}$.

5-4-18 在反面情况下求出 m 的范围，而取其补集即为所求．若三个方程均无实数解，则

$(m+1)^2-4(m+4)<0$，$(m-1)^2-4(m+2)<0$

$(m+2)^2-4\times\frac{1}{2}(m^2+\frac{7}{2})<0$

联立解之，得 $-1<m<1$ 或 $3<m<5$．故 m 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[1,3]\cup[5,+\infty)$．

5-4-19 (1) 因为 $1\le f(\sin t)\le\frac{17}{4}$，故有

$$1-\sin t+\sin^2 t\le a\le\frac{17}{4}-\sin t+\sin^2 t$$

即 $$\left(\sin t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\le a\le\left(\sin t-\frac{1}{2}\right)^2+4$$

左边当 $\sin t=-1$ 时取最大值 3，右边当 $\sin t=\frac{1}{2}$ 时取最小值 4，故所求 a 的取值范围为 $[3,4]$．

(2) 依题意，由 $a=4$，有

$$1\le\frac{4+4\sin t}{8-4\sin t}\le\frac{5+3\sqrt{2}}{7}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\sin t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因为 $0\le t\le 2\pi$，所以 $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{6}$．故所求 t 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right]$.

5-4-20 一般地，$f(x)=x^2+px+q>0$ 在区间 $[a,b]$ 上成立的条件是

$$\begin{cases} f(a)>0 \\ f(b)>0 \\ -\frac{p}{2}\le a \end{cases}\text{或}\begin{cases} f(a)>0 \\ f(b)>0 \\ -\frac{p}{2}\ge b \end{cases}\text{或}\begin{cases} f(a)>0\text{且}f(b)>0, \\ a<-\frac{p}{2}<b, \\ f\left(-\frac{p}{2}\right)>0. \end{cases}$$

原不等式可化为 $\sin^2\theta-2m\sin\theta+(2m+1)>0$．令 $\sin\theta=t$，$0\le t\le 1$．这样，问题归结为求使 $f(t)=t^2-2mt+(2m+1)>0$ 成立的 m 值的范围(在

区间 $0\le t\le 1$ 内）．于是，m 的取值范围确定于

$$\begin{cases} f(0)=2m+1>0 \\ f(1)=2>0 \\ m\le 0 \end{cases}$$ 或 $$\begin{cases} f(0)=2m+1>0 \\ f(1)=2>0 \\ m\ge 0 \end{cases}$$

或 $$\begin{cases} f(0)=2m+1>0, \\ f(1)=2>0, \\ 0<m<1, \\ f(m)=m^2-2m^2+2m+1>0. \end{cases}$$

解得 $m>-\frac{1}{2}$．

5-4-21　(1)因 $-1\le\sin\theta\le 1$，$1\le\sin\theta+2\le 3$，故在区间[-1，1]上 $f(x)\le 0$；在区间[1，3]上，$f(x)\ge 0$．从而 $f(1)=0$，即 $1+p+q=0$，也就是 $q=-(p+1)$．

(2)由(1)，$f(x)=x^2+px-(p+1)$，且 $-\frac{p}{2}\le 0$，从而 $p\ge 0$．

(3)注意到 $f[x]$ 在[1，3]上是增函数，故 $f(\sin\theta+2)$ 的最大值为 $f(3)=14$．

于是 $9+3p-(p+1)=14$，从而 $p=3$．这时 $-\frac{p}{2}=-\frac{3}{2}<-1$，故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=1^2+3(-1)-4=-6$．

5-4-22　依题意，可列出不等式

$$(0.71-0.01)x-\left(0.6x-0.1\sqrt{x}\right)\ge 3$$

令 $\sqrt{x}=t$，得 $t^2+t-30\ge 0$，解得 $t\ge 5$，从而 $x\ge 25$．故至少要销售25件，商店的盈利才不少于 3 万元．

第六部分　数列、极限、数学归纳法

（一）数列

1．数列及其性质

6-1-1　(1)不正确．$\{\frac{k+1}{k}\}$仍表示该数列，它的第k项是$1+\frac{1}{k}$$\left(\text{或}\frac{k+1}{k}\right)$．

(2)不正确．通项与前 n 项和的关系一般为：

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 1)\end{cases}$$

(3)正确．该数列为$\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$，其中$a_n=f(n)=\frac{1}{2n-1}$是自然数集N上的减函数．

(4)正确．例如，把“n 除以 2 的余数”作为第 n 项的数列，其通项a_n有多种表示方式．如：

$$a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}，a_n=\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|，a_n=\begin{cases}1 & (n\text{为奇数})\\ 0 & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

$$a_n=n-2\times\left[\frac{n}{2}\right]，\cdots$$

注　记号$\left[\frac{n}{2}\right]$表示不超过$\frac{n}{2}$的最大整数．

6-1-2　(1)各项的绝对值为正奇数并依从小到大的次序排列，符号“+”“-”相间，故 $a_n=(-1)^{n-1}(2n-1)$可作为该数列的一个通项．依次填 9，-11．

(2)各项绝对值的分子都是 1，分母为自然顺序的偶数，符号“-”“+”相间，故$a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{2n}$可作为该数列的一个通项．依次填$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{12}$．

(3)已知项具有规律：$a_1=1\times2$，$a_2=3\times4$，$a_4=7\times8$，$a_7=11\times12$，故$a_n=(2n-1)(2n)$可作为该数列的一个通项．依次填 30，90．

(4)因$\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}=10^n-1$，故$a_n=\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}=\frac{2}{9}(10^n-1)$可作为该数列的一个通项．依次填 22，2222，222222．

6-1-3　C 对于 A，B，D，只有数列的前 2 项被满足．

6-1-4　分别令 $a_n=12$，18，21，解相应二次方程即知 12 是$\{a_n\}$的第 6 项；18 不是$\{a_n\}$的项；21 是$\{a_n\}$的第 3 项和第 9 项．

6-1-5　B有理化分母得$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，从而有$S_n=\sqrt{n+1}-1=9$，解得$n=99$．

6-1-6　可求得$S_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$．由$1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{2}{3}$解得$n>8$，即n的最小值为 9．

6-1-7　(1)只须在通项公式中令 n=1，2，3，4，即得前 4 项为 1，$-\frac{1}{3}$，$-\frac{3}{5}$，$-\frac{5}{7}$．

(2)在递推式中令 n=2，结合 $a_1=a_2-1$ 解得 $a_1=1$．再利用递推式依次可得 $a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=14$．

(3)这里是用语言描述的，可按带余除法求解．因为 1=3×0+1，2=3×0+2，3=3×1+0，4=3×1+1，故 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=0$，$a_4=1$．

6-1-8　(1)由于 $f(n)=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ 确定数列 1，0，1，0，…，故可取

$a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\cdot n$．

(2)不考虑符号，各项可表示为 $n+\frac{1}{n+1}$，故可取 $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n^2+n+1}{n+1}$ 作为该数列的一个通项．

(3)注意：0.23=23×0.01，0.2323=23×0.0101，0.232323=23×0.010101，…，故可取 $a_n=\frac{23}{99}\left(\frac{10^{2n}-1}{10^{2n}}\right)$．

(4)将各项写成 10-1，100+1，1000-1，10000+1，…，即知

$a_n=10^n+(-1)^n$

6-1-9　令 $b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}$，则 $b_{n+1}=\frac{n(n+1)-a_n}{n(n+1)a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{n(n+1)}$，即有

$b_{n+1}-b_n=-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$

从而 $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}$，…，$b_2-b_1=\frac{1}{2}-1$

以上各式分边相加，得

$b_{n+1}-b_1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{1}=-\frac{n}{n+1}\Leftrightarrow b_{n+1}=b_1-\frac{n}{n+1}=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

所以 $a_n=\frac{1}{b_n}=n$．

6-1-10　由 $a_1=S_1=1+2a_1$ 得 $a_1=-1$．

当 n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，所以

$a_n=2a_{n-1}=2^2a_{n-2}=\cdots=2^{n-1}a_1=-2^{n-1}$

$a_1=-1$ 也适合此式，故通项 $a_n=-2^{n-1}$．

6-1-11　由 $a_1=S_1=1^2+\frac{1}{2}a_1$，得 $a_1=2$．当 $n\geq 2$ 时，$S_n=n^2+1$，而

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$

故通项 $a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 2n-1 & (n\geq 2)\end{cases}$

6-1-12　联立 a+b+c=1，4a+2b+c=1+4，9a+3b+c=1+4+11 解得 a=

$\frac{7}{2}$，$b=-\frac{13}{2}$，$c=4$．

6-1-13 $a_1=S_1=\frac{1}{2}$，$a_2=S_2-a_1=\frac{2^2-2+1}{2+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$a_3=S_3-S_2=\frac{3}{4}$

6-1-14 $(1)S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{9}{10}=\frac{11}{5}$

(2)**因为**$a_{n+1}-a_n=\frac{2n+1}{\left[(n+1)^2+1\right]\left(n^2+1\right)}>0$，**所以**$a_{n+1}>a_n$．

又$\left|\frac{n^2}{n^2+1}\right|=1-\frac{1}{n^2+1}<1$．

故此数列是递增有界数列．

6-1-15 **化简得**$S_n=1-\frac{1}{n+1}$．**当**$n\geq 2$**时，**

$a_n=S_n-S_{n-1}=(1-\frac{1}{n+1})-(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n(n+1)}$

又$a_1=S_1=\frac{1}{2}$**适合此式，故**$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$**为所求．**

6-1-16 **令**$\sqrt{100-n^2}=8$，**解得**$n=6$．**故**8**是**$\{a_n\}$**的第**6**项．令**$n=1$，**得首项**$a_1=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$．**由**$100-n^2\geq 0$，**得**$n\leq 10$．**末项是**$a_{10}=0$．

6-1-17 **由**$S_k=(k+2)S_k+1$**得**$S_k=-\frac{1}{k+1}$．**故**$a_1=S_1=-\frac{1}{2}$；**当**$n\geq 2$**时，**

$$a_n=S_n-S_{n-1}=-\frac{1}{n+1}-\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n(n+1)}$$

所以通项为

$$a_n=\begin{cases}-\frac{1}{2} & (n=1)\\ \frac{1}{n(n+1)} & (n\geq 2)\end{cases}$$

6-1-18 因为 $3^1=3$，$3^2=9$，$3^3=27$，$3^4=81$，$3^5=243$，所以 $a_1=3$，$a_2=9$，$a_3=7$，$a_4=1$，$a_5=3$．易知这个数列由 3，9，7，1 依序循环出现所构成．事实上，因 3^4 的末位数是 1，故 3^{n+4} 与 3^n 有相同的末位数．故通项公式可取为

$$a_n\begin{cases}3 & (n=4q_1+1)\\ 9 & (n=4q_2+2)\\ 7 & (n=4q_3+3)\\ 1 & (n=4q_4)\end{cases}\quad (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4\in Z)$$

6-1-19　采用错位相减法．因$a_n=\overbrace{5959\cdots59}^{n个59}$，故

$$S_n=59+(5900+59)+\cdots+(\overbrace{5959\cdots5900}^{n-1个59}+59)$$

$$100S_n=5900+595900+\cdots+\overbrace{5959\cdots5900}^{n个59}$$

两式相减得

$$99S_n=\overbrace{5959\cdots59}^{n个59}00-59n$$

从而 $S_n=\frac{1}{99}(\overbrace{5959\cdots59}^{n个59}00-59n)=\frac{1}{99}(100a_n-59n)$

以$a_n=\frac{59}{99}(10^{2n}-1)$代入并化简，即得

$$S_n=\frac{59}{99^2}(10^{2(n+1)}-99n-100)$$

6-1-20　采用拆项求和法．

$$a_n=\frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)]$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{4}[(n-1)n(n+1)(n+2)-(n-2)(n-1)n(n+1)]$$

……

$$a_2=\frac{1}{4}[2\times3\times4\times5-1\times2\times3\times4]$$

$$a_1=\frac{1}{4}[1\times2\times3\times4-0]$$

$$\therefore S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

2．等差数列

6-1-21　D 充分性见例 6-1-11(3)．必要性：若$\{a_n\}$是等差数列，则

$$S_n=na_1+\frac{(n-1)n}{2}d=pn^2+qn$$

(其中$p=\frac{d}{2}$，$q=a_1-\frac{d}{2}$)．B对$\{a_n\}$的第一项没有限定，故不真．A，C 中有可能 $c\neq0$．

6-1-22　D由$9a_1+\frac{9\times(9-1)}{2}d=3(4a_1+\frac{4\times(4-1)}{2}d)$解得．

6-1-23　B 由 $31+(16-1)d<1$ 且 $31+(15-1)d\geq1$ 解得．

6-1-24　-2；1　由 $S_{50}=50a_1+25\times49d=1125$，$S_{100}=100a_1+50\times99d=1125+3625$ 可解得．

6-1-25　3n-5 或 25-3n 因为 $2a_5=a_2+a_8$，所以 $3a_5=30$，即 $a_5=10$．从而 $a_2+a_8=20$，$a_2a_8=19$，联立解得 $a_2=1$，$a_8=19$ 或 $a_2=19$，$a_8=1$．于是 $d=3$ 或 $d=-3$．故

$a_n=-2+(n-1)\times3=3n-5$ 或 $a_n=22+(n-1)\times(-3)=25-3n$

6-1-26　$\frac{1}{2}n-\frac{11}{2}$；$\frac{1}{2}$利用公式：$a_n=a_m+(n-m)d$.

6-1-27　3；1由$\frac{30(a_1+a_{30})}{2}=S_{30}=45$，得$a_1+a_{30}=3$，从而$a_5+a_{26}=a_1+a_{30}=3$，故 $a_{30}=3-a_1=3-(-13)=16$．故$-13+29d=16$，解得 $d=1$．

6-1-28　$\frac{m+1}{n+1}$；100，34由$b=a+(n+1)d_1$，$b=a+(m+1)d_2$，解得$\frac{d_1}{d_2}=\frac{m+1}{n+1}$.

令$\frac{(n+2)(a+b)}{2}=(n-48)(a+b)$，得$n=98$．于是，$\frac{m+1}{98+1}=\frac{1}{3}$，由此得 $m=32$．故第 1 个数列的项数是 100，第 2 个数列的项数是 34．

6-1-29　设$\{a_n\}$的首项为 a，公差为 d，则 $a_n=a+(n-1)d$，故

$b_n=p[a+(n-1)d]+q=(pa+q)+(n-1)pd$

故$\{b_n\}$是首项为 $pa+q$，公差为 pd 的等差数列．

6-1-30　$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=S_1=1$，$a_2=S_2-a_1=8-1=7$，$\{a_n\}$的公差为 $7-1=6$，故 $a_n=1+(n-1)\cdot6=6n-5$．于是

$b_n=a_n+a_{n+r}=(6n-5)+[6(n+r)-5]=12(n-1)+(6r+2)$

故$\{b_n\}$的首项为 $6r+2$，公差为 12．

6-1-31　$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2m+1}}{2m+1}=a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=6m+5$

6-1-32　运用等差数列的中项性质及前 n 项和公式：

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_{2n-1}}{b_1+b_{2n-1}}=\frac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}\div\frac{(2n-1)(b_1+b_{2n-1})}{2}=\frac{S_{2n-1}}{S'_{2n-1}}$$

6-1-33　原数列的首项为 1，公差为 6，故 $a_n=6n-5$．

设新数列为$\{b_n\}$，则 $b_4=1+3d=7$，由此得 $d=2$．故

$b_m=1+(m-1)\cdot2=2m-1$

由 $b_m=a_{15}$ 得 $2m-1=85$，故 $m=43$；由 $a_n=b_{30}=2\times30-1$，得 $6n-5=59$，此式无整数解；由 $a_n=b_{31}=31\times2-1$ 得 $6n-5=61$，解得 $n=11$．故原数列的第 15 项是新数列的第 43 项；新数列的第 30 项不是原数列的项，第 31 项是原数列的第 11 项．

6-1-34　(1)$\{a_n\}$成等差数列的充要条件是 $q-3-p=0$，即 $q=p+3$．这时，

$$S_n=(p+1)n^2-(p+4)n=-3n+\frac{n(n-1)}{2}\times2(p+1)$$

故 $a_1=-3$，$d=2(p+1)$．

(2)当 $p>-1$ 时，$a_{n+1}-a_n=d>0$ 对一切自然数 n 都成立，故$\{a_n\}$单调递增．

(3)当$p=-\frac{1}{4}$时，$d=2(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{2}$；$a_n=-3+(n-1)\times\frac{3}{2}$．

令$-3+(n-1)\times\frac{3}{2}>0$，得$n>3$．故从第4项起，数列的各项都大于零．

6-1-35　从 a_k 到 a_{28} 的项数是 28-(k-1)=29-k．而 $a_k=2k-1$，$a_{28}=55$．故有

$$\frac{1}{2}[(2k-1)+55](29-k)=559\Leftrightarrow k^2-2k-224=0$$

在 k>0 的条件下解这个方程得 k=16．

6-1-36　不妨设 m<n，则

$$a_n-a_m=(n-m)d\Leftrightarrow\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=(n-m)d\Leftrightarrow d=\frac{1}{mn}$$

于是，$a_1+(m-1)\frac{1}{mn}=a_m=\frac{1}{n}$，故$a_1=\frac{1}{mn}$．所以

$$S_{mn}=(mn)a_1+\frac{(mn-1)mn}{2}d=\frac{mn+1}{2}$$

6-1-37　(1)设公差为 d，则 $a_7=20+6d>0$，且 $a_8=20+7d<0$，联立解得$-\frac{10}{3}<d<-\frac{20}{7}$．但d为整数，故$d=-3$．

$$(2)(S_n)_{max}=S_7=7\times 20+\frac{7\times 6}{2}\times(-3)=77$$

(3)由$S_n=20n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-3)>0$，解得$n<\frac{43}{3}$．故使$S_n>0$的最大 n=14．

6-1-38　假定存在.设首项为 a,公差为 d,问题归结为 d 的存在性.令

$$S_n:S_{2n}=(na+\frac{n(n-1)}{2}d):(2na+\frac{2n(2n-1)}{2}d)=k:1$$

(k 是与 n 无关的常数)，化简得

$(4k-1)dn+(2k-1)(2a-d)=0$

为使此等式对任何 $n\in N$ 都成立，应使 $(4k-1)d=0$ 且 $(2k-1)(2a-d)=0$．依

题设，$d\neq 0$，故$4k-1=0$，即$k=\frac{1}{4}$，从而$d=2a$．故所求数列存在，任取首项 a，令公差 d=2a 即可．

6-1-39　(1)由题设，有 $a_k=1+(k-1)d_k$，$b_k=1+(m-1)d_k$．故

$b_2-b_1=(m-1)(d_2-d_1)$，$b_3-b_2=(m-1)(d_3-d_2)$，…

$b_n-b_{n-1}=(m-1)(d_n-d_{n-1})$

由于 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 成等差数列,并且 $m-1\neq 0$,所以 $d_2-d_1=d_3-d_2=\cdots=d_n-d_{n-1}$．于是 d_1，d_2，…，d_n 是等差数列，其公差为 d_2-d_1，从而

$d_k=d_1+(k-1)(d_2-d_1)=(1-k)d_1+(k-1)d_2$

(2)由 $d_1=1$，$d_2=2$，得 $d_k=(1-k)\times 1+(k-1)\times 2=k-1$．故

$a_k=1+(k-1)d_k=1+(k-1)(k-1)=k^2-2k+2$

6-1-40　(1)能被 3 整除的所有三位自然数，其最小者为 102，最大者为 999，它们构成以 102 为首项，公差为 3，末项为 999 的等差数列．由 $999=102+3(n-1)$求得其项数 $n=300$．设所求的和为 S_M，则

$$S_M=300\times102+\frac{300\times299}{2}\times3=165150$$

(2)设所求的和为 S_N，仿(1)，有

$$S_N=100\times180+\frac{180\times179}{2}\times5=98550$$

(3)能被 3 和 5 整除的数也就是能被 $3\times5=15$ 整除的数．设所求的和为 S_{MN}，仿上，$S_{MN}=32850$(首项为 105，末项为 990，项数为 60)．

(4)设所求的和为 S，易知 $S=S_M+S_N-S_{MN}=230850$．

3．等比数列

6-1-41　(1)是．公比是$\frac{1}{q}$．因为对一切$n\in N$，$a_n\neq0$，而$\frac{1}{a_{n+1}}$：$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1q^n}$：$\frac{1}{a_1q^{n-1}}=\frac{1}{q}$对一切$n\in N$都成立．

(2)是．公比为 q^2，因为 $a^2_{n+1}:a_n^2=(a_1q^n)^2:(a_1q^{n-1})^2=q^2$ 对一切 $n\in N$ 都成立．

(3)是．公比为$|q|$．因为$|a_{n+1}|:|a_n|=|a_1q^n|:|a_1q^{n-1}|=|q|$对一切 $n\in N$ 都成立．

(4)当 $c=0$ 时，不是；当 $c\neq0$ 时，是，公比为 q．因为 $c\neq0$ 时，有 $ca_{n+1}:ca_n=ca_1q^n:ca_1q^{n-1}=q$ 对一切 $n\in N$ 都成立．

(5)当 $q=-1$ 时不是，因为这时 $a_n+a_{n+1}=a_n+a_nq=a_n(1+q)=0$，不符合等比数列的定义．当 $q\neq-1$ 时，是，公比为 q．因为这时

$(a_{n+1}+a_{n+2}):(a_n+a_{n+1})=a_1(1+q)q^n:a_1(1+q)q^{n-1}=q$

6-1-42　(1)当 $k=1$ 时，是；当 $k\neq1$ 时，不是．因为由 $\lg(S_n+k)=n$ 得 $S_n=10^n-k$．所以 $a_1=S_1=10-k$；当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=10^n-10^{n-1}=9\times10^{n-1}$．令 $a_1=10-k=9$，得 $k=1$．故当且仅当 $k=1$ 时，对一切 $n\in N$，有 $a_n=9\times10^{n-1}$，即这时的数列是等比数列．

(2)当 $a=b$ 时，不是；当 $a\neq b$ 时，是．

由$S_n=\frac{a^n-b^n}{a^n}$得$a_1=\frac{a-b}{a}$；当$n\geq2$时，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=-\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}=\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$$

令$n=1$，得$a_1=\frac{a-b}{a}$．所以，对于$n\geq1$，都有$a_n=\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$．

故当且仅当$1-\frac{b}{a}\neq 0$即$a\neq b$时，所给数列是首项为$1-\frac{b}{a}$，公比为$\frac{b}{a}$的等比数列．

6-1-43　D 因为

$a_n^2=(a_1q^{n-1})^2=(a_1q^{n-r-1})(a_1q^{n+r-1})=a_{n-r}a_{n+r}$

故 a_n 是 a_{n-r} 与 a_{n+r} 的等比中项．对于 A，当 a=0 时则不是；对于 B，条件应加强为 $b^2=ac>0$ 才是；对于 C，$q\neq 0$ 才是．

6-1-44　D 设公比为 q，则可设三边长为 a，aq，aq^2．由题设 $q\neq 1$ 且 $q>0$．若 $0<q<1$，则 a 最大，这时 $a^2=(aq)^2+(aq^2)^2$，即 $q^4+q^2-1=0$．解得$q^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，从而$q=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{2}$；若 $q>1$，则 aq^2 最大，这时$(aq^2)^2=a^2+(aq)^2$，故 $q^4-q^2-1=0$，解得 $q^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，从而$q=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$．

6-1-45　D$a_1=S_1=b(a+1)$；当 $n\geq 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=(ab^n+b)-(ab^{n-1}+b)=a(b-1)b^{n-1}$

若$\{a_n\}$成等比数列，则由 $a_1\neq 0$ 知 $b\neq 0$ 且 $a\neq -1$；又 $a_n\neq 0$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a(b-1)b^n}{a(b-1)b^{n-1}}=b$对一切$n\in N$都成立，于是又有$b\neq 1$，且$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a(b-1)b}{b(a+1)}=b$，即$a+b=0$．

6-1-46　C$S_{101}=\frac{2^{101}-1}{2-1}=2^{101}-1$．因为$2^{101}$的末位数字是不为0的偶数，所以 $2^{101}-1$ 的位数与 2^{101} 的位数相等．因此，只需考察 2^{101} 的位数就行了．由 $\lg 2^{101}=101\lg 2$ 知 $30<\lg 2^{101}<31$．于是，$10^{30}<2^{101}<10^{31}$．故 2^{101}，从而 $2^{101}-1$ 是 31 位数．

6-1-47　5；-2 由

$S_3=a_1(1+q+q^2)=15$

$S_6=a_1(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)$

$=a_1(1+q+q^2)+a_1q^3(1+q+q^2)=15+15q^3=-105$

得 $q^3=-8$，故 $q=-2$，从而 $a_1=5$．

6-1-48　3，或$\frac{1}{3}$；$\frac{9}{4}$，或$60\frac{3}{4}$假设公比为q，那么$a_1(1+q^3)=63$，$a_1q(1+q)=27$，由此得$\frac{1+q^3}{q(1+q)}=\frac{7}{3}$，即$\frac{1-q+q^2}{q}=\frac{7}{3}$，故有$3q^2-10q+3=0$，解得$q=3$或$q=\frac{1}{3}$，从而$a_1=\frac{9}{4}$或$a_1=60\frac{3}{4}$．

6-1-49　$\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}$或2或-2；-2或2或$-\frac{1}{512}$或$\frac{1}{512}$．

因为a_6是a_4与a_8的等比中项，所以$a_4a_8=a_6^2=\left(-\frac{1}{16}\right)^2=\frac{1}{256}$．又$a_4+a_8=-\frac{7}{64}$，故$a_4$，$a_8$是二次方程$x^2+\frac{17}{64}x+\frac{1}{256}=0$的两个实根．解得$a_4=-\frac{1}{4}$，$a_8=-\frac{1}{64}$，或$a_4=-\frac{1}{64}$，$a_8=-\frac{1}{4}$．

由$q^4=\frac{a_8}{a_4}=\left(-\frac{1}{64}\right)/\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}$．得$q=\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}$．分别代入$a_1q^3=-\frac{1}{4}$，相应地得$a_1=-2$或$2$；由$q^4=\frac{a_8}{a_4}=\left(-\frac{1}{4}\right)/\left(-\frac{1}{64}\right)=16$，得$q=2$或$-2$，分别代入$a_1q^3=-\frac{1}{64}$，相应地得$a_1=-\frac{1}{512}$或$\frac{1}{512}$．

6-1-50　$\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$；$\pm\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$因为$b$是第$n+2$项，所以$b=aq^{n+1}$，从而$q^{n+1}=\frac{b}{a}$当$n$为偶数时，$n+1$为奇数，则有$q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$；当$n$为奇数时，$a$，$b$必同号，这时$q=\pm\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$．

6-1-51　7；$-\frac{81}{8}$由$(2x+1)^2=x(3x+\frac{3}{2})$，解得$x=-2$，或$x=-\frac{1}{2}$(后者使$2x+1=0$，不合，舍去)．故$x=-2$，$q=\frac{2x+1}{x}=\frac{3}{2}$．从而

$$a_m=(-2)\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}=-\frac{729}{32}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^6\Leftrightarrow m=7$$

从而$a_5=(-2)(\frac{3}{2})^4=-\frac{81}{8}$

6-1-52　(1)$0<q<1$ 且 $a_1<0$，或 $q>1$ 且 $a_1>0$．(2)$0<q<1$ 且 $a_1>0$，或 $q>1$ 且 $a_1<0$．(3)$q<0$ 或 $q=1$．

因为 $a_{n+1}-a_n=a_n(q-1)=a_1q^{n-1}(q-1)$．当 $q<0$ 时，$\{a_n\}$中相邻两项异号，属于(3)．当 $q=1$ 时，$\{a_n\}$为常数数列，也属于(3)．当 $0<q<1$ 时，$q^{n-1}(q-1)<0$，这时，若 $a_1<0$，则属于(1)；若 $a_1>0$，则属于(2)．当 $q>1$ 时，$q^{n-1}(q-1)>0$，这时，若 $a_1>0$，则属于(1)；若 $a_1<0$，则属于(2)．

6-1-53　因为 $q\neq-1$，所以对一切 $m\in N$，$S_m\neq0$，$S_{3m}-S_{2m}\neq0$．又

$$S_m(S_{3m}-S_{2m})=(a_1+a_2+\cdots+a_m)(a_{2m+1}+\cdots+a_{3m})$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_m)(a_1q^{2m}+a_2q^{2m}+\cdots+a_mq^{2m})$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_m)^2(q^m)^2$$

$=(a_1q^m+a_2q^m+\cdots+a_mq^m)^2$

$=(a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m})^2=(S_{2m}-S_m)^2$

此即 $S_{2m}-S_m$ 是 S_m 与 $S_{3m}-S_{2m}$ 的等比中项．

6-1-54　设公比为q，则$q\neq1$．否则，$\frac{S_{2m}}{S_m}=\frac{Sma_1}{ma_1}=2$，这与$\frac{S_{2m}}{S_m}=\frac{255}{8}/\frac{15}{8}=17$，不符．于是，

$$\frac{a_1\left(q^m-1\right)}{q-1}=\frac{15}{8}\qquad\text{(i)}$$

$$\frac{a_1\left(q^{2m}-1\right)}{q-1}=\frac{255}{8}\qquad\text{(ii)}$$

得$\frac{q^{2m}-1}{q^m-1}=17$，即$(q^m)^2-17q^m+16=0$，解得$q^m=16$(舍去$q^m=1$)，代入(i)，得$a_1=\frac{1}{8}(q-1)>0$，从而$q>1$．于是由各项为正数知最大的项为末项$a_{2m+2}=64$，即$a_1q^{2m+1}=64$，故$\frac{1}{8}(q-1)\cdot16^2q=64$，即$q^2-q-2=0$．解得$q=2$(舍去$q=-1$)，从而$a_1=\frac{1}{8}(2-1)=\frac{1}{8}$．在$q^m=16$中令$q=2$，得$m=4$．故该数列的项数为 2m+2=10，从而

$$S=\frac{\frac{1}{8}\times\left(2^{10}-1\right)}{2-1}=\frac{1023}{8}$$

6-1-55　设首项为 a，公比为 q，易知 $q\neq1$．于是，

$$\frac{a\left(q^n-1\right)}{q-1}=80\qquad\text{(i)}$$

$$\frac{a\left(q^{2n}-1\right)}{q-1}=6480+80=6560\qquad\text{(ii)}$$

(ii)÷(i)，得 $q^n=81$，代入(i)，得 $a=q-1>0$，即 $q>1$．故所给数列递增．因此，162 为第 n+1 项，即 $aq^n=162$．由 $q^n=81$ 知 a=2，从而 q=a+1=3．故 $a_n=2\times3^{n-1}$．

6-1-56　由题设知 $a_1+b_1=1$．当 $n\geq2$ 时，$a_n+b_n=2(a_{n-1}+b_{n-1})$，故数列$\{a_n+b_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列．于是，

$$a_n+b_n=2^{n-1}，S_n=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

又 $a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}$，$a_1-b_1=1$，故数列$\{a_n-b_n\}$是各项都为 1 的常数数列．于是，$S_n'=n$．

由 $a_n+b_n=2^{n-1}$ 及 $a_n-b_n=1$，解得

$a_n=\frac{1}{2}(2^{n-1}+1)$，$b_n=\frac{1}{2}(2^{n-1}-1)$

6-1-57　令$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=k$，则

$c=bk=ak^2$

因为$a\neq 0$，由①及上式得$k^2+k-1=0$，从而$\frac{1-k}{k}=k$．以$b=\frac{c}{k}$代入②，得$d=\frac{1-k}{k}\cdot c$，即$\frac{d}{c}=k$．以$c=\frac{d}{k}$代入③，得$\frac{d}{k}=d+e$，即$e=(\frac{1}{k}-1)d=kd$，从而$\frac{e}{d}=k$．综上有$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}$．故a，b，c，d，e是等比数列．

6-1-58　(1)由题设，有$S_{n+1}-S_n=3(S_n-S_{n-1})$对一切$n\in N$都成立，故$\{a_n\}$是公比为3的等比数列；它的前n项的和$S_n=\frac{a_1(3^n-1)}{2}$．

(2)当$a_1=1$时，$S_n=\frac{3^n-1}{2}$．于是，可求满足$\frac{3^n}{2}>10^6$的最小整数n．两边取以10为底的对数，得$n\lg 3-\lg 2>6$，故$n>(6+\lg 2)/\lg 3=13.2\cdots$容易验证，$\frac{3^{14}-1}{2}>10^6$，而$\frac{3^{13}-1}{2}<10^6$，故$n=14$为所求的最小整数．

6-1-59　依题设，

$P_n=1+10+10^2+\cdots+10^n$，$Q_n=4+4\times 10+4\times 10^2+\cdots+4\times 10^n$故$P_n$是首项为1，公比为10的等比数列的前n项的和，$Q_n$是首项为4，公比为10的等比数列的前n项的和，于是，

$P_{2n}=\frac{10^{2n}-1}{9}$，$Q_n=\frac{4(10^n-1)}{9}$

所以$P_{2n}+Q_n+1=\frac{1}{9}[(10^{2n}-1)+4(10^n-1)+9]=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$

由于$10^n+2=(10^n-1)+3$，而10^n-1是9的倍数，所以10^n+2是3的倍数，即$\frac{10^n+2}{3}$是整数，故$P_{2n}+Q_n+1$是整数的平方．

6-1-60　(1)当q=1时，前m项的和是$ma_1=2$，其后的2m项的和是$2ma_1=12$．此二式相互矛盾．故$q\neq 1$．当$q\neq 1$时，令$\frac{a_1}{q-1}=p$，则有$p\neq 0$，且

$S_m=p(q^m-1)=2$，$S_{3m}=2+12=14$

所以$\frac{S_{3m}}{S_m}=\frac{q^{3m}-1}{q^m-1}=\frac{14}{2}=7$

$\Leftrightarrow q^{2m}+q^m+1=7\Leftrightarrow(q+3)(q^m-2)=0$

因为 $q>0$，所以 $q^m=2$，代入 $p(q^m-1)=2$，得 $p=2$.

故所求的 3m 项的和是

$S_{6m}-S_{3m}=p(q^{6m}-1)-14=2(2^6-1)-14=112$

(2)当 $m=2$ 时，$q=\sqrt{2}$，$a_1=p(q-1)=2(\sqrt{2}-1)$，所以

$a_n=2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^{n-1}$

4．等差数列与等比数列的综合题

6-1-61　(1)不正确.如等差数列-4,-2,0,2,4,…中,(-2)+(-4)=-6不是此数列中的项.

注　当首项 $a_1=0$ 时，答案是肯定的．这时，$a_n=(n-1)d$，$a_m=(m-1)d$，从而

$a_n+a_m=[(n+m-1)-1]d=a_{n+m-1}$

(2)不正确．如等比数列 $\frac{1}{9}$，$\frac{1}{3}$，1，3，9，…中，$\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$ 不是此数列中的项.

注　当首项 $a_1=1$ 时，答案是肯定的．这时，$a_n=q^{n-1}$，$a_m=q^{m-1}$，从而

$a_n\cdot a_m=q^{(n+m-1)-1}=a_{n+m-1}$

(3)①正确．$\because c_n=a_{(n-1)m+1}+a_{(n-1)m+2}+\cdots+a_{nm}$

$=ma_1+[(n-1)m+\cdots+(nm-1)]d=ma_1+\frac{(2nm-m-1)}{2}d$

$c_{n+1}=a_{nm+1}+\cdots+a_{(n+1)m}=ma_1+\frac{[nm+(n+1)m-1]m}{2}d$

$\therefore c_{n+1}-c_n=m^2d$(m 为常数)对一切 $n\in N$ 都成立.

②正确．$\because c_n=a_{(n-1)m}+\cdot\cdots\cdot a_{nm}=a_1^mq^{(2nm-m+1)m/2}$

$c_{n+1}=a_{nm+1}\cdot\cdots\cdot a_{(n+1)m}=a_1^mq^{(2nm+m-1)m/2}$

$\therefore\frac{c_{n+1}}{c_n}=q^{m^2}$(m为常数)对一切 $n\in N$ 都成立.

(4)①正确．令 $a_2-a_1=d$，则对一切 $n\in N$，都有 $a_{n+1}-a_n=d$ 成立.

②不正确(除非$\{a_n\}$是非零常数列).

③不正确.如各项为常数的数列满足已知条件,但 $a_{n+1}-a_n=0$,因而$\{a_{n+1}-a_n\}$不是等比数列.

6-1-62　A由 $a=\log_3 2/\log_3 x$，$b=1/\log_3 x$，$c=\log_3\frac{9}{2}/\log_3 x$ 知 $b-a=c-b=\frac{1-\log_3 2}{\log_3 x}$；但 $\frac{b}{a}\neq\frac{c}{b}$.

6-1-63　A 由递推式有 $2(a_{n-1}-a_n)=a_{n-1}a_n$．于是，

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\quad(n\geq 2)$$

又$a_2=\frac{2a}{a+2}$，从而$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=\frac{a+2}{2a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$．故对一切$n\in N$，都有

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$$

6-1-64　C 所给数列能成等差数列等价于方程 3+(n-1)·(9-3)=6561 有正整数解．实际上，这个方程有解 n=1094，所以，它能成等差数列．所给数列能成等比数列等价于方程$3\times(\frac{9}{3})^{n-1}=6561$有正整数解．实际上，这个方程有解 n=8，所以，它能成等比数列．

数列$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，…$\frac{1}{6561}$，…能成等差数列等价于方程$\frac{1}{3}+(n-1)(\frac{1}{9}-\frac{1}{3})=\frac{1}{6561}$有正整数解．但此方程无正整数解，所以$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$，…，$\frac{1}{6561}$，…不能成等差数列．

6-1-65　C 设等差数列的公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d$．设$\{b_n\}$的公比为 $q(q>0)$，则 $b_n=b_1q^{n-1}$．于是，由 $a_1+d=a_2=b_2=b_1q$ 及 $a_1=b_1$，得 $b_1+d=b_1q$，故 $d=b_1(q-1)$．故 $a_n=b_1[1+(n-1)(q-1)]$．所以

$b_n-a_n=b_1q^{n-1}-b_1[1+(n-1)(q-1)]$

$=b_1[(q^{n-1}-1)-(n-1)(q-1)]$

$=b_1(q-1)[(q^{n-2}+q^{n-3}+\cdots+q+1)-(n-1)]$

$=b_1(q-1)[(q^{n-2}-1)+(q^{n-3}-1)+\cdots+(q-1)]$

注意到 $b_1>0$，因此，当 q=1 时，$b_n=a_n$；当 $q>1$ 时，因为 $q^k-1>0(k\in N)$，故 $b_n-a_n>0$，即 $b_n>a_n$；当 $0<q<1$ 时，因为 $q^k-1<0(k\in N)$，这时也有 $b_n-a_n>0$，即 $b_n>a_n$．综上所述，总有 $a_n\geq b_n$．

6-1-66　3，6，12，18 可设前三个数为 a，aq，aq^2，则第四个数为 $2aq^2-aq$．于是，由

$a\cdot aq\cdot aq=216$，$aq+aq^2+(2aq^2-aq)=36$

联立解得 q=2，a=3．

6-1-67　6；1，3，4，6，7，12，10 可依次设七个数为 a-d，bq^{-1}，a，b，a+d，bq，a+2d．于是，有

$4a+2d-b^3=-194$　　(i)

$(a-d)+(a+2d)+b=17$　　(ii)

由(i)，(ii)可得

$b^3+2b-228=0\Leftrightarrow(b-6)(b^2+6b+38)=0$

由于 $b^2+6b+38=0$ 无实数解，故 b=6．以 b=6，d=3 代入(i)或(ii)，得 a=4．故当 d=3，q=2 时，此数列为 1，3，4，6，7，12，10．

6-1-68　-10，$-\frac{5}{2}$，5由$c^3=c\cdot c^2=cab=125$得$c=5$．再代入$2b=a+c$及$c^2=ab$得$2b=a+5$，$ab=25$．由此可得$b=5$(舍去)，或$b=-\frac{5}{2}$．当$b=-\frac{5}{2}$时，$a=-10$．

6-1-69　$\frac{3}{2}$由$ac=b^2$即$\log_b a+\log_b c=2$及$2\log_b c=\log_c a+\log_a b$，结合换底公式，可得

$$\frac{2-\log_b c}{\log_b c}+\frac{1}{2-\log_b c}=2\log_b c$$

令 $\log_b c=x$，因 $q\neq1$，故 $b\neq c$，从而 $x\neq1$．于是，上式可化为

$2x^3-3x^2-3x+4=0\Leftrightarrow(x-1)(2x^2-x-4)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-4=0(x\neq1)$

从而$d=\log_a b-\log_b c=\frac{1}{2-x}-x=\frac{1-2x+x^2}{2-x}$

$=\frac{2x^2-x-4-3x+6}{4-2x}=\frac{6-3x}{4-2x}=\frac{3}{2}$

6-1-70　由$2^n=3m+2$得$\frac{2\left(2^{n-1}-1\right)}{3}=m$，可见$2^{n-1}-1$必须被3整除，故 $n-1=2k(k\in N)$，即 $n=2k+1$．故 $c_k=a_{2k+1}=2^{2k+1}$，即

$c_k=2\cdot4^k$ 或 $c_n=2\cdot4^n$

6-1-71　依题意有

$S_n=1+3\cdot3+5\cdot3^2+7\cdot3^3+\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}$

利用错位相减法得

$S_n-3S_n=1+2\times(3+3^2+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot3^n$

$\Leftrightarrow S_n=1+(n-1)\cdot3^n$

6-1-72　依题意有

$a^2=1\cdot b$(i)　$c^2=49b$(ii)　$2b=a+c$(iii)

由(i)，(ii)，$c^2=49a^2$．所以 $c=\pm7a$

若 $c=7a$，则由(iii)，$b=4a$．再由(i)，$a^2=4a$，所以 $a=0$ 或 $a=4$．若 $a=0$，则 $b=c=0$，不合题意；若 $a=4$，则 $b=16$，$c=28$．

若 $c=-7a$，由(iii)，$b=-3a$，从而 $a^2=-3a$，而 $a\neq0$，故 $a=-3$，这时 $b=9$，$c=21$．

综上可知，a，b，c 分别为 4，16，28 或-3，9，21．

6-1-73　设某三个数为 a，b，c，则有

$a+b+c=27$　　(i)

$2b=a+c$　　(ii)

$(b+3)^2=(a+1)(c+21)$　　(iii)

由(i)，(ii)得 b=9，代入(ii)，得 a+c=18．以 a=18-c 代入(iii)，得

$c^2+2c-255=0\Leftrightarrow c=15$，-17

由 c=15 得 a=3；由 c=-17 得 a=35．

综上可知，a，b，c 分别为 3，9，15 或 35，9，-17．

6-1-74　对 $a^x=b^y=c^z$ 取常用对数，得

$x\lg a=y\lg b=z\lg c$

当 a=1 时，易知 b=c=1．这时，a，b，c 成等比数列．

当 a≠1 时，令所得连等式为 k(k≠0)，则有

$\frac{1}{x}=\frac{\lg a}{k}$，$\frac{1}{y}=\frac{\lg b}{k}$，$\frac{1}{z}=\frac{\lg c}{k}$

又$\frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$，故$\frac{2\lg b}{k}=\frac{\lg a}{k}+\frac{\lg c}{k}$，从而$\lg b^2=\lg(ac)$，即$b^2=ac$．

所以 a，b，c 成等比数列．

6-1-75　当 a=b=c 时，命题显然成立．当 b≠c 时，有 b-c=a-b 且$\frac{c-a}{c-b}=2$．又由$y^2=xz$，有$21gy=\lg x+\lg z$，于是，

$\frac{c-a}{c-b}\lg y=\lg x+\lg z\Leftrightarrow(c-a)lay=(c-b)(\lg x+\lg z)$

$\Leftrightarrow(b-c)\lg x+(c-a)\lg y+(a-b)\lg z=0$

6-1-76　由 $x^2=ab$ 有 $b^2-x^2=b(b-a)$．由 $y^2=bc$ 有 $y^2-b^2=b(c-b)$．但 b-a=c-b，所以 $b^2-x^2=y^2-b^2$，即 x^2，b^2，y^2 成等差数列．

6-1-77　因$\frac{3(n+1)-2}{(n+1)+3}-\frac{3n-2}{n+3}=\frac{11}{(n+4)(n+3)}>0$，故$a_{n+1}>a_n$，即$\{a_n\}$递增．

又$\frac{11}{(n+4)(n+3)}\neq$常数，故$\{a_n\}$不是等差数列．

又由$a_1=\frac{1}{4}$，$a_2=\frac{4}{5}$，$a_3=\frac{7}{6}$知$\{a_n\}$也不是等比数列．

6-1-78　(1)因为$a=\frac{1}{2}[(a+b)+(a-b)]$，$b=\frac{1}{2}[(a+b)-(a-b)]$，所以，奇数项为 a，偶数项为 b 的数列$\{a_n\}$的通项是

$a_n=\frac{1}{2}[(a+b)+(-1)^{n-1}(a-b)]$

(2)关键在于确定各项的指数与其项数之间的关系．不难发现，当 n 为奇数时．C_n的指数是$\frac{n+1}{2}$；当n为偶数时，指数是$\frac{n}{2}$．所以，由(1)，一般地，第 n 项的指数为

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n+1}{2}+\frac{n}{2}\right)+(-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{2}-\frac{n}{2}\right)\right]=\frac{1}{4}\left[(2n+1)+(-1)^{n-1}\right]$$

所以$C_n=C^{\frac{1}{4}[(2n+1)+(-1)^{n-1}]}$

6-1-79 由 lgsinA，lgsinB，lgsinC 成等差数列，得 $\sin^2B=\sin A\sin C$．再由正弦定理知 $b^2=ac$．

设 a，b，c 边上的高分别为 h_a，h_b，h_c，则

$$V_a=\frac{1}{3}\pi ha^2\cdot a=\frac{\pi}{3}abc\sin B\sin C=\frac{\pi}{3}b^3\cdot\sin B\sin C$$

$$V_b=\frac{\pi}{3}hb^2\cdot b=\frac{\pi}{3}b^3\sin^2B；V_c=\frac{\pi}{3}b^3\sin A\sin B$$

所以 $V_b^2=V_a\cdot V_c$．

6-1-80 设平均每年新建住房为 d(万平方米)，则到 2000 年底，该市的住房面积为 100×5.4+4d(万平方米)．这时的人口为 $100\times(1.01)^4$(万人)．故有

$540+4d=100\times(1.01)^4\times6.5\Leftrightarrow d=34.1$

即每年平均需要新建住房 34.1 万平方米．

(二)数列的极限

1．数列极限的定义

6-2-1 (1)有．极限为 0．事实上，对任意小的 ε＞0(ε＜1)，有

$|q^n-0|<\varepsilon \Leftrightarrow |q|^n<\varepsilon \Leftrightarrow n>\log_{|q|}\varepsilon$

(2)有．极限为 a+b．事实上，对任意小的正数 ε，有

$|(a+\frac{n-1}{n}b)-(a+b)|=|b|\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{|b|}{\varepsilon}$

(3)没有．当$n\to\infty$时，$a_{2n-1}=-\frac{2n}{2n-1}\to-1$，$a_{2n}=\frac{2n+1}{2n}\to1$．因此$a_n$不可能趋近于某个常数 A．

(4)有．极限为0．因为，当$n\to\infty$时，$a_n=\frac{1}{n}\to0$．事实上，数列是否有极限与这个数列的前有限项无关．

6-2-2 D $\left|\frac{1}{2n+1}-0\right|<0.01\Leftrightarrow\frac{1}{2n+1}<0.01$

$\Leftrightarrow 2n+1>100\Leftrightarrow n>49.5$

所以只要取 N 为不小于 49 的任一正整数即可．

6-2-3 B(1)正确．因为对于 q-a＞0，存在这样的正整数 N，使得对一切 n＞N，不等式$|x_n-a|<q-a$都成立．此不等式即$a-q<x_n-a<q-a$，由右边不等式即知 $x_n<q(n>N)$．不满足此条件的只可能是前面的有限项．

(2)正确．理由与(1)类似．

(3)正确．例如，$a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$，则

$a_n+b_n=(-1)^n+(-1)^{n+1}=(-1)^n[1+(-1)]=0$

$a_nb_n=(-1)^n\cdot(-1)^{n+1}=(-1)^{2n+1}=-1$

这里，$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都没有极限，但$\{a_n+b_n\}$和$\{a_nb_n\}$都有极限，分别为 0，-1．

(4)不正确．$\{a_n+b_n\}$不可能有极限，但$\{a_nb_n\}$可能有极项．如$a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=n$就是一例．

(5)不正确．如$a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=1$．

6-2-4 11；$\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$(也可取比$\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$更大的整数)．

6-2-5 (1)和(2)对于(1)，任意 ε＞0，

$\left|(-1)^n\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$

故取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$即可．

对于(2)，任给 ε＞0，

$\left|\frac{1}{3^n}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3^n}<\varepsilon \Leftrightarrow 3^n>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\log_3\frac{1}{\varepsilon}$

故取$N=\left[\log_3\frac{1}{\varepsilon}\right]$即可．

6-2-6 正确．证明过程符合极限定义的要求．

注 采用放大法证明要注意“适度放大”．例如，取$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<1$，则放得太大，不能解决问题．因为1不能小于任意小的正数 ε．又如取$\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<\frac{2}{n(n-1)}<\varepsilon$，虽说$\frac{2}{n(n-1)}$随n的增大可以任意减小，但形式较繁，不便于解不等式$\frac{2}{n(n-1)}<\varepsilon$，从而不易解决问题．

6-2-7 (1)$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2n}$

(2)要使$\frac{1}{2n}<0.01$，只要$2n>100$，即$n>50$即可．故使$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<0.01$的最小项数 n=51．

(3)要使$\frac{1}{2n}<\varepsilon$，只需$2n>\frac{1}{\varepsilon}$，即$n>\frac{1}{2\varepsilon}$．故可取$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，则第N项后的所有项，都使得$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$成立．

(4)由(3)的结果可知，数列$\{a_n\}$的极限是$\frac{1}{2}$．

6-2-8 由$\left|a_n-\frac{1}{3}\right|=\frac{3n-1}{6n^2}<\frac{1}{2n}$可知，要使$\left|a_n-\frac{1}{3}\right|$小于任意给定的正数ε，只需$\frac{1}{2n}<\varepsilon$，即$n>\frac{1}{2\varepsilon}$．于是，取$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，则当$n>N$时，恒有$\left|a_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$成立．故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}$．

注 将$\frac{3n-1}{6n^2}$放大为$\frac{1}{2n}$，再解不等式$\frac{1}{2n}<\varepsilon$，比直接解不等式$\frac{3n-1}{6n^2}<\varepsilon$简便，从而绕过了难关．

6-2-9 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以对于任意小的 ε＞0，存在正整数 N，当 n＞N 时，$|a_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，从而$||a_n|-|a||\le|a_n-a|<\varepsilon$ 恒成立．故

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$$

6-2-10　因为$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$**，所以**

$$\left|a_n-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

于是，对于任意小的正数 ε，由$\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$**得**$n>\frac{1}{\varepsilon^2}$**．故存在**$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$**，使得当**$n>N$**时，**$\left|a_n-0\right|<\varepsilon$**恒成立．故**$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$**．**

2．数列极限的运算法则

6-2-11　(1)**否．化简，**$a_n=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$**，故**$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$**．**

(2)是。$\{(0.99)^n\}$是无穷等比数列，公比是q=0.99。因|q|<1，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(3)否。例如，对于$a_n = \frac{1}{n} + n$，$b_n = n - \frac{1}{n}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$，但是，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$及$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$都不存在。

(4)否。例如，当$a_n = \frac{1}{n^2}$，$b_n = \frac{1}{n}$时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，但是，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

6-2-12 D 因为$\{a_n\}$是首项为1，公比为$-\frac{\sqrt{3}}{x}$的无穷等比数列，故此数列存在极限的条件是$x \neq 0$且$-1 < -\frac{\sqrt{3}}{x} < 1$。解之得$x > \sqrt{3}$或$x \leq -\sqrt{3}$。

6-2-13 A 所给数列为0，1，0，1，…，$\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$，…，只考虑奇数项时，它的极限为 0；只考虑偶数项时，它的极项为 1，但整个数列不存在极限。可用反证法证明。

6-2-14 B 当 $a \neq 0$，$\{a_n\}$是首项为 a^2，公比为 a^2 的等比数列，故这时存在极限的条件是 $0 < a^2 \leq 1$，即$-1 \leq a < 0$，或 $0 < a \leq 1$；显然当 a=0 时，$\{a_n\}$也存在极限。

6-2-15 D 当$k = j$时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a_0}{n^j} + \frac{a_1}{n^{j-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n} + a_k}{\frac{b_0}{n^j} + \frac{b_1}{n^{j-1}} + \cdots + \frac{b_{j-1}}{n} + b_j} = \frac{a_k}{b_j}$；

当$k < j$时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a_0}{n^j} + \frac{a_1}{n^{j-1}} + \cdots + \frac{a_k}{n^{j-k}}}{\frac{b_0}{n^j} + \frac{b_1}{n^{j-1}} + \cdots + b^j} = 0$

显然，当 $k > j$ 时，$\{x_n\}$不存在极限。

6-2-16 $\frac{a}{p}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{p + \frac{q}{n} + \frac{r}{n^2}} = \frac{a}{p}$

6-2-17 1 $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n) = \lim\limits_{n\to\infty}[(2n+1)a_n \cdot \frac{n}{2n+1}]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}[(2n+1)a_n] \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

6-2-18 2 因为$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$，故$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$，又因$a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$，故无穷数列$\{a_n - 2\}$是首项为$-1$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，所以$a_n - 2 = (-1)(\frac{1}{2})^{n-1}$，即$a_n = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$。故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$。

6-2-19 $-\frac{1}{b}$ **原式** $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\cdot(\frac{a}{b})^{n-1}-1}{a^2(\frac{a}{b})^{n-1}+b}=\frac{0-1}{0+b}=-\frac{1}{b}$

6-2-20 (1)**原式** $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}[1+3+\cdots+(2n-1)]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$

(2)**由** $1+\frac{1}{2}=2(1-\frac{1}{2^2})$，**得**

$$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^{2n}})$$
$$=2(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^{2n}})=2(1-\frac{1}{2^{2^2}})\cdot\cdots\cdot(1-\frac{1}{2^{2^n}})$$
$$=2(1-\frac{1}{2^{2^n}})(1+\frac{1}{2^{2^n}})=2(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}})$$

故 **原式** $=\lim\limits_{n\to\infty}[2(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}})]=2$

6-2-21 **记** $A_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，**则**

$$C_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq A_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=B_n$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$， $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$，**所以** $\lim\limits_{n\to\infty}A$ ≥1**且** $\lim\limits_{n\to\infty}A_n\leq1$，**即** $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=1$。

6-2-22 (1)无穷数列{$(-1)^{n-1}$}是首项为1,公比为-1的等比数列，故

$$S_n=\frac{1\cdot[(-1)^n-1]}{(-1)-1}=\frac{1-(-1)^n}{2}$$

(2)令 $S=S_1+S_2+\cdots+S_n$，则

$$S=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & (n\text{为奇数})\\ \frac{n}{2} & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

于是，总有 $\frac{n}{2}\leq S\leq\frac{n+1}{2}$(**当**n**为奇数时右边取等号，当**n**为偶数时左边取等号**)。**从而** $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{n}S\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$。**故**

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}S)\geq\frac{1}{2}，\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}S)\leq\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})=\frac{1}{2}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n}(S_1+S_2+\cdots+S_n)]=\frac{1}{2}$

6-2-23 **当** $a<b$ **时**， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{b^n}-(\frac{a}{b})^n}{\frac{1}{b^n}+1}=0$；

当$a=b$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{b^n}-1}{\frac{1}{b^n}+1}=-1$；

当$a>b$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1+b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^n}-1}{\frac{1}{a^n}+(\frac{b}{a})^n}$，极限不存在。

6-2-24 当$a=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$；

当$a>1$时，则有$\sqrt[n]{a}>1$，可令$\sqrt[n]{a}=1+a_n(a_n>0)$，那么$a=(1+a_n)^n>1+na_n$(见例5-2-5(3))，所以$a_n<\frac{a-1}{n}$。

对任意给定的$\varepsilon>0$，要使$|\sqrt[n]{a}-1|=a_n<\varepsilon$，只需要$\frac{a-1}{n}<\varepsilon$，即$n>\frac{a-1}{\varepsilon}$。取$N=[\frac{a-1}{\varepsilon}]$，则当$n>N$时，$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$恒成立。这时$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$得证。

当$0<a<1$时，$\frac{1}{a}>1$。于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1$$

综合上述各款，命题获证。

6-2-25 (1)利用上题结果，

$$\frac{12!}{5!\ 4!\ 2!\ 1!}=83160$$

6-2-26 (1)$a_n=-\frac{1}{n}$　　(2)$a_n=\frac{n+1}{n}$

(3)$a_n=-\frac{1}{n}$，$b_n=\frac{1}{n}$　　(4)$a_n=(-1)^n$

6-2-27 (1)由题设，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3-2a_n}{a_n}=\frac{3}{a_n}-2$。令$b_n=\frac{1}{a_n}$，则得$b_{n+1}=3b_n-2$，从而 $b_{n+1}-1=3(b_n-1)$。因此，无穷数列$\{b_n-1\}$是首项为$b_1-1=2-1=1$，公比为3的等比数列。所以$b_n-1=3^{n-1}+1$。故$b_n=3^{n-1}+1$，从而$a_n=$

$\frac{1}{3^{n-1}+1}$。

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

6-2-28 原式可化为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^2-bn}{n+b}=2$。易知当且仅当 $a=1$ 时，左边的极限才存在。而当 $a=1$ 时，原式变为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-bn}{n+b}=2$。另一方面，左边 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-b}{1+\frac{b}{n}}=-b$，故 $b=-2$。于是 $a=1$，$b=-2$ 为所求。

6-2-29 按无穷等比数列求和公式计算。(1) $\frac{3}{4}$；(2) $\frac{1}{x}$。

6-2-30 如原题图，由右往左数，第 i 个长方形的面积为 $\frac{(n-i)ab}{n^2}$，故

$$S_n=\frac{(n-1)ab}{n^2}+\frac{(n-2)ab}{n^2}+\cdots+\frac{[n-(n-1)]ab}{n^2}$$

故

$$\lim_{0\to\infty}S_n=ab\cdot\lim_{0\to\infty}\frac{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}{n^2}=ab\lim_{0\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}$$

$$=ab\lim_{0\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{ab}{2}$$

数列 $\{S_n\}$ 的极限即△ABC 的面积。

（三）数学归纳法

6-3-1 (1)命题假。证明过程缺第二步，因而导致错误的结论。事实上，当 x=41 时，$f(41)=41^2+41+41=41\times43$，即 f(41)就不是质数。

(2)命题假。证明缺第一步，因而导致错误结论。事实上，当 n=1 时，左边=2，右边 $=1^2+1+1=3$，左边≠右边，等式不成立。

(3)命题真。但证明的第二步不正确，即没有利用归纳假设证明 $P(k)\Longrightarrow P(k+1)$，而是形式地把 P(k)改写成了 P(k+1)。

6-3-2 B 依题意，P(n)只与奇数 n 有关。令其中 n=2m-1，则得到与自然数 m 有关的命题 P′(m)。易知，当 n=1 时 P(n)成立，等价于当 $m=1$ 时，$P'(m)$ 成立。令 $n=k$，则 $m=\frac{k+1}{2}=k'$ $(k'\in N)$。故命题 $P(k)\Longrightarrow P(k+2)$ 等价于 $P'(k')\Longrightarrow P'(k'+1)$。可见，命题 P′(m)对一切 m∈N 都成立，此即 P(n)对一切奇数 n 都成立。

注 如果已验证 P(1)，P(2)成立，且已证明 $P(k)\Longrightarrow P(k+2)$ 成立，才可断言 P(n)对一切自然数成立。

6-3-3 C 命题 P(k+1) 应该是

$$\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+k}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}>\frac{13}{24}$$

6-3-4 C 当 n=1 时，左边末项为 $a^{n+1}=a^2$。

6-3-5 B 使不等式恒成立的 n 的取值范围是 n≥9。

6-3-6 $1-\frac{1}{2}$；$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

6-3-7 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$$

当$n=k+1$时，左边末项为$\frac{1}{3(k+1)+1}=\frac{1}{3k+4}$。

6-3-8 $a_n=n(n+1)$ 当 n=1 时，$a_1=1\cdot(1+1)=2$，等式成立。

假定当 n=k 时，有 $a_k=k(k+1)$，那么，当 n=k+1 时，则有

$$a_{k+1}=\frac{k+2}{k}a_k=\frac{k+2}{k}\cdot k(k+1)=(k+1)[(k+1)+1]$$

6-3-9 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$。用数学归纳法易证。

6-3-10 当 n=1 时，不等式显然成立(取等号)。

假定当 n=k 时，有 $|\sin k\theta|\le k|\sin\theta|$，那么当 n=k+1 时，则有

$$|\sin(k+1)\theta|=|\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta|$$
$$\le|\sin k\theta\cos\theta|+|\cos k\theta\sin\theta|$$
$$\le|\sin k\theta|+|\sin\theta|\le k|\sin\theta|+|\sin\theta| \quad \text{(归纳假设)}$$
$$=(k+1)|\sin\theta|$$

6-3-11 当 n=1 时，不等式显然成立。

假定当$n=k$时，不等式成立，即有$\frac{k(k+1)}{2}<a_k<\frac{(k+1)^2}{2}$，则当n=k+1 时，则有

$$a_{k+1}=a_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}>\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

$$a_{k+1}=a_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{2k+3}{2}=\frac{(k+2)^2}{2}$$

6-3-12 原不等式等价于

$$\frac{\sin^{2n}\theta+\cos^{2n}\theta}{2}\ge\left(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2}\right)^n$$

当 n=1 时，上式取“=”，故不等式成立。

假定当$n=k$时，有$\frac{\sin^{2k}\theta+\cos^{2k}\theta}{2}\ge\left(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2}\right)^k$，那么当n=k+1 时，则有

$$\left(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2}\right)^{k+1}=\left(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2}\right)^k\cdot\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2}$$
$$\le\frac{\sin^{2k}\theta+\cos^{2k}\theta}{2}\cdot\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2}$$
$$=\frac{1}{4}[\sin^{2(k+1)}\theta+\cos^{2(k+1)}\theta+\sin^{2k}\theta\cos^2\theta+\cos^{2k}\theta\sin^2\theta]$$
$$=\frac{1}{2}[\sin^{2(k+1)}\theta+\cos^{2(k+1)}\theta]-\frac{1}{4}(\sin^{2k}\theta-\cos^{2k}\theta)\cdot(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$$
$$\le\frac{1}{2}[\sin^{2(k+1)}\theta+\cos^{2(k+1)}\theta]$$

6-3-13 当 n=1 时，$(2n+7)\cdot3^n+9=36$ 能被 36 整除。

假定当 n=k 时，$(2k+7)\cdot3^k+9$ 能被 36 整除，那么当 n=k+1 时，则有

$$[2(k+1)+7]3^{k+1}+9=3[(2k+7)\cdot3^k+9]-18+6\cdot3^k$$

$=3[(2k+7)\cdot 3^{k}+9]+18(3^{k-1}-1)$

能被 36 整除。这是因为由归纳假设，$(2k+7)\cdot 3^{k}+9$ 能被 36 整除，又 $3^{k-1}-1$ 是偶数，因而 $18(3^{k-1}-1)$ 也能被 36 整除。

6-3-14 当$n=1$时，$(2+\sqrt{3})^{n}=2+\sqrt{3}$，这里$p=2$，$q=1$，故命题成立。

假定当$n=k$时，有$(2+\sqrt{3})^{k}=p+q\sqrt{3}$，那么当$n=k+1$时，就有

$$(2+\sqrt{3})^{k+1}=(p+q\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$$
$$=(2p+3q)=(p+2q)\sqrt{3}$$

这里 2p+3q，p+2q 都是自然数，故命题对 n=k+1 也成立。

6-3-15 当$n=1$时，$x+\frac{1}{x}$是关于$x+\frac{1}{x}$的一次式，故命题成立。

当$n=2$时，$x^{2}+\frac{1}{x^{2}}=(x+\frac{1}{x})^{2}-2$，此即$x^{2}+\frac{1}{x^{2}}$是关于$x+\frac{1}{x}$的$2$次式。假定当$n\leq k(k\geq 2)$时，$x^{n}+\frac{1}{x^{n}}$是关于$x+\frac{1}{x}$的$n$次式，那么$x^{k}+\frac{1}{x^{k}}$及$x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}$分别是$x+\frac{1}{x}$的$k$次式和$(k-1)$次式。于是，当$n=k+1$时，因为

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=(x^{k}+\frac{1}{x^{k}})(x+\frac{1}{x})-(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}})$$

而由归纳假定，$(x^{k}+\frac{1}{x^{k}})$是$x+\frac{1}{x}$的k次式，从而$(x^{k}+\frac{1}{x^{k}})(x+\frac{1}{x})$是$x+\frac{1}{x}$的$(k+1)$次式，$x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}$是$x+\frac{1}{x}$的$(k-1)$次式，故$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$是关于$x+\frac{1}{x}$的$(k+1)$次式。

6-3-16 当 n=1 时命题成立，因为一个圆分平面为 2 个区域，而 $1^{2}-1+2=2$。

假定当 n=k 时命题成立，那么当 n=k+1 时，从 k+1 个圆中选出一个圆。首先，它与其余 k 个圆中的每一个圆至多交于两个点；其次，根据归纳假设，余下的 k 个圆将平面划分成不多于 $k^{2}-k+2$ 个区域。被选出的那个圆与其余 k 个圆的交点(不多于 2k 个)将该圆分割为不多于 2k 个圆弧。每个圆弧分割一个已有的平面区域为两部分。因此，又增加了不多于 2k 个区域。于是总共得到不多于

$$(k^{2}-k+2)+2k=(k+1)^{2}-(k+1)+2$$

区域。此即命题对 n=k+1 成立。

6-3-17 (1)由$a_{1}=4$，$a_{2}=\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}$，$a_{3}=\sqrt[3]{4^{\frac{1}{3}}}=4^{(\frac{1}{3})^{2}}$，…，我们猜想 $a_{n}=4^{(\frac{1}{3})^{n-1}}$

用数学归纳法易证猜想成立。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}4^{1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-1}}=8$

注 $1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-1}=\dfrac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}\to\frac{3}{2}$(当$n\to\infty$时)

6-3-18 (1)$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{9-2a_n}{4-a_n}$，故$a_2=\frac{7}{3}$，$a_3=\frac{13}{5}$，$a_4=\frac{19}{7}$。

(2)观察 a_1，a_2，a_3，a_4 的值，分母构成正奇数列，分子构成首项为1，公差为6的等差数列，故猜想$a_n=\dfrac{6n-5}{2n-1}$。

(3)注意，$a_{k+1}=\dfrac{9-2a_k}{4-a_k}=\dfrac{9-\frac{6k-5}{2k-1}\times 2}{4-\frac{6k-5}{2k-1}}=\dfrac{6(k+1)-5}{2(k+1)-1}$。

6-3-19 由 $f(1)=2=2^0+1$，$f(2)=3=2^1+1$，$f(3)=3\times3-2\times2=2^2+1$，猜想：

$$f(n)=2^{n-1}+1$$

用数学归纳法易证猜想成立。注意

$$f(k+1)=3f(k)-2f(k-1)=3(2^{k-1}+1)-2(2^{k-2}+1)$$
$$=2\cdot 2^{k-1}+1=2^k+1$$

6-3-20 对于凸边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$，延长 A_2A，A_kA_{k+1}，使其相交于 A，作成凸 k 边形 $AA_2A_{k-1}A_k$。依归纳假定，此 k 边形中满足条件的三角形共有$\frac{1}{6}k(k-4)(k-5)$个。但是在原$k+1$边形中，自顶点A_1和A_{k+1}引出的对角线各有(k+1)-3=k-2 条，它们各可以构成满足条件的三角形

$$(k-4)+(k-5)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}(k-3)\cdot(k-4)$$

个在 k 边形 $AA_2\cdots A_{k-1}A_k$ 中未计入；而 k 边形 $AA_2\cdots A_{k-1}A_k$ 中自顶点 A 引出的 k-3 条对角线所构成的满足条件的三角形共有

$$(k-5)+(k-6)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}(k-4)(k-5)$$

个在 k+1 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$ 中是没有的，故

$$f(k+1)=f(k)+2\times\frac{1}{2}(k-3)(k-4)-\frac{1}{2}(k-4)(k-5)$$
$$=\frac{1}{6}k(k-4)(k-5)+(k-3)(k-4)-\frac{1}{2}(k-4)(k-5)$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)-4][(k+1)-5]$$

第七部分　复数

(一)复数的概念

7-1-1　(1)$-x+yi$　(2)$x-yi$　(3)$-x-yi$　(4)$(2-x)+yi$

7-1-2　设 $z=x+yi$，那么原方程变为

$2x=4+ai \Longleftrightarrow x=2$，$a=0$

再由 $|z|^2=9$ 得 $x^2+y^2=9$，从而 $y=\pm\sqrt{5}$。

因此 $z=2+\sqrt{5}i$ 或 $z=2-\sqrt{5}i$。

7-1-3　D　因为 $z=0$ 时，$\overline{z}=0$，故 $z\overline{z}=0$。故不选A。

同理 $z=\overline{z}=0$ 时，$z-\overline{z}=0$，不是纯虚数。故不选B。

若 $z=1$，则 $\overline{z}=1$，从而 $z+\overline{z}=2$。故不选C。

7-1-4　C

7-1-5　A

7-1-6　$\sqrt{2}$　因为 z 与 $\overline{z}$ 的实部是相等的，所以

$1+\sin\theta=1-\sin\theta \Longleftrightarrow \sin\theta=0 \Longleftrightarrow \cos\theta=\pm1$

于是 $z=1\pm i$，从而 $|z|=\sqrt{2}$。

7-1-7　要使 z 有意义，须 $m>1$。又

$m^2+3m-10=(m+5)(m-2)$

(1)M 在实轴上 $\Longleftrightarrow \lg(m-1)=0 \Longleftrightarrow m-1=1 \Longleftrightarrow m=2$

$$(2)\begin{cases}\lg(m-1)\neq 0\\ m^2+3m-10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 2\\ m=2\text{或}m=-5\\ m>1\end{cases}$$

因此同样的 m 不存在。

$$(3)\begin{cases}\lg(m-1)>0\\ m^2+3m-10>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>2\\ m<-5\text{或}m>2\end{cases} \Leftrightarrow m>2$$

即当 $m>2$ 时，点 M 位于第一象限。

$$(4)\begin{cases}\lg(m-1)<0\\ m^2+3m-10<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<m-1<1\\ -5<m<2\end{cases} \Leftrightarrow 1<m<2$$

即当 $m\in(1，2)$ 时，点 M 位于第三象限。

7-1-8　C　因为 $t^2-2t+3=(t-1)^2+2>0$，$2-\cos t>0$，因此 z 对应点在第一象限。故不选 A。

当 $t=0$ 时，$z=3+i$，故不选 B。

对任何 $t\in R$，有 $2-\cos t\neq 0$，故 $z\neq 0$，故不选 D。

7-1-9　由 $\begin{cases}\sin[\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})]=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\end{cases}$ 得 $|z_1|^2=\frac{3}{4}$。

又 $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\pi}{4}$，可知 $|z_2|^2=\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2+1>|z_1|^2$，从而 $|z_2|>|z_1|$。

7-1-10　因为

$a_1=S_1=2\times1^2+1=3$，$a_8=S_8-S_7=(2\times8^2+8)-(2\times7^2+7)=31$

所以

$$\overline{z}=a_8-a_1i=31-3i$$

7-1-11 因为$|\lg x+i|=\sqrt{\lg^2x+1}$，因此原不等式变为

$\lg^2x+1>5\Longleftrightarrow|\lg x|>2\Longleftrightarrow\lg x>2$ 或 $\lg x<-2$

$\Leftrightarrow x>100$或$x<\dfrac{1}{100}$

7-1-12 依题意，有

$4=S_2=a_1+(a_1+d)=2a_1+d$

$16=S_4=4a_1+6d$

由上两方程解得 $d=2$。

又按题设有 $384=b_8=b_1q^7=3q^7$，所以实数 $q=2$。

所以 $|\overline{z}|+|z|=2|z|=2\times\sqrt{2^2+2^2}=4\sqrt{2}$。

7-1-13 (1)$z=\overline{z}\Longleftrightarrow z$ 为实数$\Longleftrightarrow\sin\theta-\cos\theta=0$

$\Longleftrightarrow\mathrm{tg}\,\theta=1$

因此，当$\theta=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in Z)$时，$z=\overline{z}$。

(2)由z为虚数知$\sin\theta-\cos\theta\neq0$，因此$\theta\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in Z)$，$z$为虚数。

(3)z为纯虚数$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\theta-\cos\theta\neq0\\\cos\theta-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\theta=2k\pi\quad(k\in Z)$

(4)z 对应点位于左半平面$\Longleftrightarrow z$ 的实数小于 0

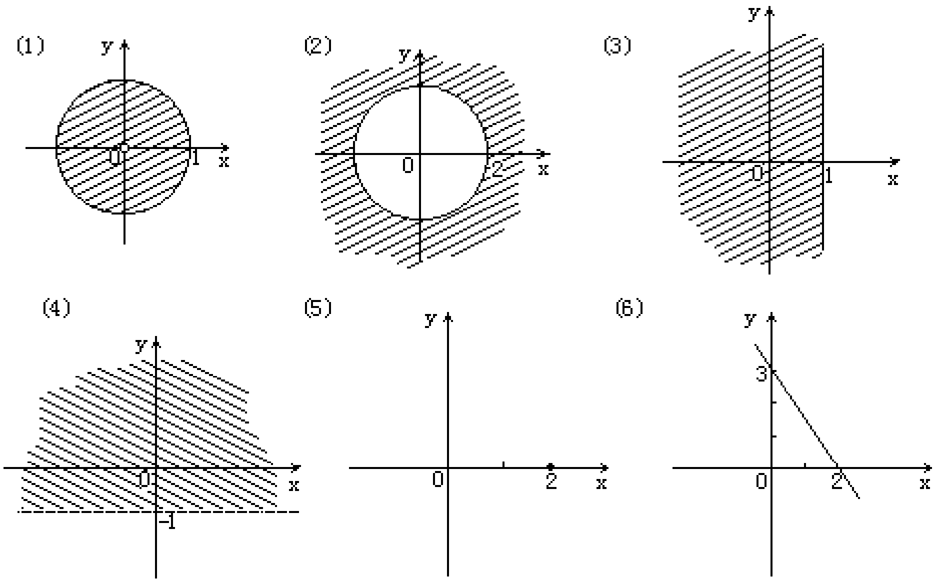
$\Longleftrightarrow\cos\theta-1<0\Longleftrightarrow\theta\neq2k\pi\,(k\in Z)$

7-1-14 $|z|^2=(x-1)^2+(2x+3)^2=5(x+1)^2+5$

当 $x\in[0,2]$时，$|z|^2$ 是 x 的增函数，因此当 $x=2$ 时，$|z|$有最大值，且

$$|z|_{max}=\sqrt{5(2+1)^2+5}=5\sqrt{2}$$

7-1-15 答案由图中阴影(不包括虚线和空心点，包括实线)部分或实数表示。



7-1-16　z 对应的点为 A(a，-1)，而第一、三象限角平分线方程为 y=x，因此，依题设有

$$\mathrm{tg}5x\mathrm{tg}x=-1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}5x=-\mathrm{ctg}x \Leftrightarrow \mathrm{tg}5x=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+x)$$

$$\Leftrightarrow 5x=k\pi+(\frac{\pi}{2}+x)，k\in Z \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}，k\in Z$$

7-1-17　C　设△ABC 的三边分别为 a，b，c，外接圆半径为 R。那么

a=2RsinA，b=2RsinB，c=2RsinC

故由 a+b＞c 知，sinA+sinB＞sinC，结合题设条件即得 $|z_1|>|z_2|$**。**

7-1-18　B　**因为** $|z_k|=\sqrt{3}$ $(k=1，2，3，4)$。

(二)复数的四则运算

7-2-1 (1)**原式** $=\frac{[(1-i)^2]^{50}\cdot(1-i)}{[(1+i)^2]^{53}}=\frac{-(1-i)}{8i}=\frac{1+i}{8}$

(2) $\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1+i)i}{\frac{\sqrt{3}i+1}{2}}=\frac{-1+i}{\varepsilon}$，$\frac{2-2}{1+\sqrt{3}i}i=\frac{1-i}{\varepsilon}$，**其中** $\varepsilon=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$**，所以**

$$\text{原式}=\frac{(-1+i)^7}{\varepsilon}-\frac{(1-i)^7}{\varepsilon}=\frac{(-2i)^3(-1+i)-(-2i)^3(1-i)}{\varepsilon}$$

$$=\frac{-8i(-2+2i)}{\varepsilon}$$

$$=8i(-2+2i)\varepsilon^2=(-8-8\sqrt{3})+(-8+8\sqrt{3})i$$

(3)**原式** $=\frac{i(b-ai)}{b-ai}+\frac{(-i)(b+ai)}{b+ai}=0$

(4)当 n=4k 时，原式=4；

当 n=4k+1 时，原式$=1+i+i^2+i^3=0$**；**

当 n=4k+2 时，原式$=1+i^2+1+i^2=0$**；**

当 n=4k+3 时，原式=1+i^3+i^2+i=0。

7-2-2 (1)$2+3i$　原式 $=\frac{i(1+2\sqrt{3}i)}{1+2\sqrt{3}i}+2+i-\frac{(2i)^{11}}{2^{11}}=2+3i$

(2) -2^{100}　原式 $=2^{100}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{100}+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{100}\right]$

$$=-2^{100}(\varepsilon+\overline{\varepsilon})=-2^{100}$$

其中 $\varepsilon=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，$\varepsilon^3=-1$。

(3) 1-i

(4) i　因为 $\frac{1+i}{1-i}=i$，故原式 $=i^{1+2+\cdots+1998}=i$。

7-2-3 A　因为 $\frac{1+i}{1+3i}+\frac{1}{1+2i}=\frac{3-3i}{5}$，所以

$$\frac{1}{z}=\frac{3-3i}{5}\Leftrightarrow z=\frac{5}{3-3i}=\frac{5+5i}{6}$$

7-2-4 $(2^{64}-1)i$　因为

$$f(z)=\frac{(1-z)(1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^{64})}{1-z}=\frac{1-z^{128}}{1-z}$$

故　$$f(1-i)=\frac{1-(1-i)^{128}}{1-(1-i)}=\frac{1}{i}\{1-[(1-i)^2]^{64}\}=\frac{1}{i}(1-2^{64})$$

$=(2^{64}-1)i$

7-2-5　C

7-2-6　充分性显然。下证必要性。设$|z|^2=z^2$，若 z=0，结论成立。若 z≠0，则

$$|z|^2=z^2\Longleftrightarrow z\bar{z}=z^2\Longleftrightarrow z=\bar{z}\Longleftrightarrow z\in R$$

注　(i)本例说明，在实数集中$|x|^2=x^2$，但在复数集中此式不一定成立。

(ii)本题中的平方不能去掉。因为当|z|=z 时，令 z=x+yi(x，y∈R)，因为|z|∈R，所以 y=0。这时 z=x∈R。即必要性仍然成立。但充分性不成立。比如 z=-1，那么|z|与 z 不相等。

7-2-7　D　设 z=x+yi(x，y∈R)，那么原方程变为

$$|z|=(2-x)+(8-y)i\Leftrightarrow\begin{cases}8-y=0\\|z|=2-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=8\\x^2+y^2=(2-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=8\\x=-15\end{cases}$$

$\Longleftrightarrow|z|^2=x^2+y^2=289$

7-2-8　$z^2=5-12i=(3-2i)^2\Longleftrightarrow z=\pm(3-2i)$

当$z=3-2i$时，$f(z)=\frac{12}{13}(3-2i)$。

当$z=-3+2i$时，$f(z)=\frac{12}{13}(-3+2i)$。

注　也可令 z=x+yi(x，y∈R)变为 x，y 的方程求解。

7-2-9 (1)**因为** $\lim\limits_{0\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{0\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2nh2}=\dfrac{1}{2}$，**所以**

$z_1=\dfrac{1}{2}+3i$

又因为 $\lim\limits_{0\to\infty}\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}=\lim\limits_{0\to\infty}\dfrac{1-\left[\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right]^n}{1+\left[\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right]^n}=1$，**所以**

$z_2=1-i$

由上可知，$z_1-z_2=-\dfrac{1}{2}+4i$，$\dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{5}{4}+\dfrac{7}{4}i$

(2)**因为**$|z_1|=\sqrt{(\dfrac{1}{2})^2+9}$，$|z_2|=\sqrt{2}$，**所以**$|z_1|>|z_2|$。

7-2-10 $[(2a-b-c)+(b-c)\sqrt{3}i]^3$
$=[2a+b(-1+\sqrt{3}i)+c(-1-\sqrt{3}i)]^3$
$=(2a+2b\boldsymbol{\omega}+2c\boldsymbol{\omega}^2)^3$

$[(2b-c-a)+(c-a)\sqrt{3}i]^3$
$=[a(-1-\sqrt{3}i)+2b+c(-1+\sqrt{3}i)]^3$
$=(2a\boldsymbol{\omega}^2+2b+2c\boldsymbol{\omega})^3=[(2a+2b\boldsymbol{\omega}+2c\boldsymbol{\omega}^2)\boldsymbol{\omega}^2]^3$
$=(2a+2b\boldsymbol{\omega}+2c\boldsymbol{\omega}^2)^3$

其中$\boldsymbol{\omega}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\boldsymbol{\omega}^3=1$。

7-2-11 设公比为 q，那么

$$0=a_1+a_3=\frac{2i}{q}+2iq\Leftrightarrow\frac{1}{q}+q=0\Leftrightarrow q^2+1=0\Leftrightarrow q=\pm i$$

当 q=i 时，a_1=2，故

$$a_{1997}=a_1q^{1996}=2，S_{1997}=\frac{a_1(q^{1997}-1)}{q-1}=2$$

当 q=-i 时，同理可得 a_{1997}=-2，S_{1997}=-2。

7-2-12 用反证法。设 z_0=b+ci(c∈R，c≠0)是原方程的根，其中 b，
c∈R。**那么$\bar{z}_0$也是原方程的根，即有**

$$\frac{1}{z_0+a_1}+\cdots+\frac{1}{z_0+a_n}=0$$
$$\frac{1}{\bar{z}_0+a_1}+\cdots+\frac{1}{\bar{z}_0+a_n}=0$$

两式相减得

$$\left(\frac{1}{z_0+a_1}-\frac{1}{\bar{z}_0+a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{z_0+a_n}-\frac{1}{\bar{z}_0+a_n}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{2ci}{(a_1+b)^2+c^2}+\cdots+\frac{2ci}{(a_n+b)^2+c^2}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{(a_1+b)^2+c^2}+\cdots+\frac{1}{(a_n+b)^2+c^2}=0$$

此式不可能成立，故原方程无虚根。

7-2-13 $z=\left[\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i}\right]^n=\dfrac{1}{i^n}\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n}=\dfrac{1}{i^n}\cdot\dfrac{1}{\overline{\varepsilon}^n}$ (i)

其中 $\varepsilon=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，那么 $\overline{\varepsilon}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\overline{\varepsilon}^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，$\overline{\varepsilon}^3=-1$。

当 n=1，2 时，z 都不是纯虚数，当 n=3 时，由(i)知

$$z=\frac{1}{i^3}\cdot\frac{1}{\overline{\varepsilon}^3}=-i$$

因此所求的 n=3。

7-2-14 $\dfrac{1}{2}+(1+\sqrt{6})i$ 或 $\dfrac{1}{2}+(1-\sqrt{6})i$。

设 $z=x+yi$ (x，$y\in R$)，则 $z-z_1=(x+2)+(y-1)i$，故

$$|z-z_1|^2=(x+2)^2+(y-1)^2$$

同理可得

$$|z-z_2|^2=(x-3)^2+(y-1)^2$$

由假设有

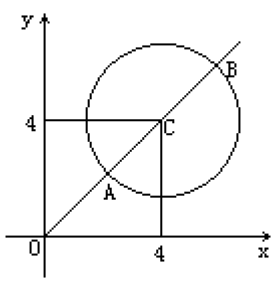
$$\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=\dfrac{49}{4}\\(x-3)^2+(y-1)^2=\dfrac{49}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=1+\sqrt{6}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=1-\sqrt{6}\end{cases}$$

7-2-15 (1)设 $z=x+yi$ (x，$y\in R$)，则

原方程 $\Longleftrightarrow 4|(x-3)+(y-3)i|^2=|x+yi|^2$

$\Longleftrightarrow (x-4)^2+(y-4)^2=8$

因此 z 的轨迹是一个圆，其圆心是 C(4，4)，半径 $2\sqrt{2}$ (如图所示)。



(2)直线 y=x 与⊙C 有两个交点 A(2，2)，B(6，6)。那么由图可得

$|z|_{max}=|OB|=6\sqrt{2}$，$|z|_{min}=|OA|=2\sqrt{2}$

7-2-16 因为 $\lg^2 8+(\lg 1.25)(\lg 80)=\lg^2 8+(\lg\dfrac{10}{8})(\lg(10\times 8))$

$=\lg^2 8+(\lg 10-\lg 8)(\lg 10+\lg 8)=\lg^2 8+\lg^2 10-\lg^2 8=1$

又 $$\frac{\lg^3 2+\lg^3 5-1}{\lg^2 2+\lg^2 5-1}=\frac{(\lg 2+\lg 5)^3-3\lg 2\lg 5(\lg 2+\lg 5)-1}{(\lg 2+\lg 5)^2-2\lg 2\lg 5-1}$$

$$=\frac{1-3\lg 2\lg 5-1}{1-2\lg 2\lg 5-1}=\frac{3}{2}$$

所以　原方程 $\Leftrightarrow z+|z|=1+\frac{3}{2}i$

令 z=x+yi(x，y∈R)，代入上面的方程得

$$|z|=(1-x)+(\frac{3}{2}-y)i \Leftrightarrow \frac{3}{2}-y=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow\ z=x+\frac{3}{2}i$，$|z|=1-x \Leftrightarrow x^2+\frac{3}{2}y^2=(1-x)^2$

$$\Leftrightarrow\ x^2+\frac{9}{4}=(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow\ x=-\frac{5}{8} \Leftrightarrow z=-\frac{5}{8}+\frac{3}{2}i$$

7-2-17 (1)$\because \sin 20°\sin 40°\sin 80°=-\frac{1}{2}(\cos 60°-\cos 20°)\sin 80°$

$$=-\frac{1}{4}\sin 80°+\frac{1}{2}\sin 80°\cos 20°=-\frac{1}{4}\sin 80°+\frac{1}{4}(\sin 100°+\sin 60°)$$

$$=\frac{1}{4}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore\ z_1=\frac{\sqrt{3}}{8}+bi$$

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})+(\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7})}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ z_2=\frac{1}{2}i$$

再根据题设条件，有

$$(3-a)+\frac{\sqrt{3}}{8}i=z_1+z_2=\frac{\sqrt{3}}{8}+(b+\frac{1}{2})i$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3-a=\frac{\sqrt{3}}{8}\\ b+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}\end{cases}\Leftrightarrow a+b=\frac{5}{2}。$$

(2)由$z_3=\frac{\sqrt{3}}{8}(1-i)$，$z_1+z_2=\frac{\sqrt{3}}{8}(1+i)$得

$$\left(\frac{z_1+z_2}{z_3}\right)^{1997}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1997}=i^{1997}=i$$

7-2-18 $\because a_n=ia_{n-1}+3=i(ia_{n-2}+3)+3=i^2a_{n-2}+3(1+i)$

$=i^2(ia_{n-3}+3)+(1+i)3=i^3(a_{n-3})+3(1+i+i^2)$

$=\cdots=i^{n-5}a_5+3(1+i+\cdots+i^{n-6})$

$$\therefore a_{1998}=i^{1993}(1-2i)+3(1+i+\cdots+i^{1992})=(1-2i)i+3\cdot\frac{1-i^{1993}}{1-i}=5+i)$$

7-2-19 (1)由$a_1=\frac{i}{2}$及递推公式得

$$a_2=\frac{1}{2i-\frac{i}{2}}=-\frac{2i}{3}，a_3=\frac{1}{-2i+\frac{2i}{3}}=\frac{3i}{4}$$

猜想：$a_n=(-1)^{n+1}\frac{ni}{n+1}$ (i)

当 n=1 时，(i)式显然成立。

假设结论对 n=k 成立，则 n=k+1 时，

$$a_{k+1}=\frac{1}{(-1)^{k+1}2i-(-1)^{k+1}\frac{ki}{k+1}}=(-1)^{k+1}\frac{1}{2i-\frac{k}{k+1}i}$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{k+1}{(k+2)i}=(-1)^{k+2}\frac{(k+1)i}{k+2}$$

即(i)式对 k+1 也成立。从而原等式对一切自然数 n 成立。

(2)设 $M_n=a_1a_2\cdots a_n$，则

$$M_n=[(-1)^2\frac{i}{2}][(-1)^3\frac{2i}{3}]\cdots[(-1)^{n+1}\frac{ni}{n+1}]$$

$$=(-1)^{2+3+\cdots+n+1}\frac{i^n}{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{i^n}{n+1}$$

7-2-20 $\frac{13(z^2+10)}{6(3+2i)}=\frac{6iz-6iz^2+9z^2+4z}{3z+2i}=\frac{3z^2(3-2i)+2zi(3-2i)}{3z+2i}$

$$=\frac{(3-2i)\cdot z(3z+2i)}{3z+2i}=(3-2i)z$$

$\Longleftrightarrow 13(z^2+10)=6(3+2i)(3-2i)\Longleftrightarrow z^2-6z+10=0$

$\Longleftrightarrow (z-3)^2=-1\Longleftrightarrow z-3=\pm i\Longleftrightarrow z=3\pm i$

(三)复数的三角形式

7-3-1 D 在 A 中

$$z=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7})=\cos\frac{5\pi}{14}+i\sin\frac{5\pi}{14}$$

$\arg z=\frac{5\pi}{14}$。故不选A。在B中，z对应点在第四象限，$\arg z\in(\frac{3\pi}{2}，2\pi)$，故不选 B。在 C 中θ可能为负实数，这样θ不是辐角主值，仅是 z 的一个辐角，故不选 C。故选 D。

7-3-2 A 因为 $z=\cos(A+C-B)+i\sin(A+C-B)$，而 $z=\bar{z}$，所以 $\sin(A+C-B)=0$。又 $A+C-B\in(-\pi，\pi)$，故 $A+C-B=0$，故 $A+C=B$，故 $B=90°$。

7-3-3 (1)因$u=\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})$，故

$$u^{100}=\cos(-25\pi)+i\sin(-25\pi)=-1$$
$$u^{50}=\cos(-\frac{25}{2}\pi)+i\sin(-\frac{25}{2}\pi)=-i$$

从而$z=-i$，$|z|=1$，$\arg z=\frac{3\pi}{2}$。

(2)令$\varepsilon=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，则$\varepsilon^3=-1$，故

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^7=\varepsilon,\quad\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3=\left(\frac{i(1-\sqrt{3}i)}{2}\right)^3=i^3(\overline{\varepsilon})^3=i$$

又$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^5=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$，所以

$$z=\frac{8\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^7}{\left(\frac{\sqrt{3}+1i}{2}\right)^3}$$
$$=\frac{8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)}{i}$$
$$=2\sqrt{2}(1+i)(1+\sqrt{3}i)i$$
$$=2\sqrt{2}[(-1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i]$$

由上式得$|z|=8$，z的一个辐角为$\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{13\pi}{12}$，此时主值$\arg z=\frac{13\pi}{12}$。

(3)因为$|u|=1$，由题设知

$$z=1+u+u^2=u(\overline{u}+1+u)=(2\cos\theta+1)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

当$2\cos\theta+1>0$时，即$\theta\in(0,\frac{2\pi}{3})\cup(\frac{4\pi}{3},2\pi)$，故

$|z|=2\cos\theta+1$，$\arg z=\theta$

当$\theta\in(\frac{2\pi}{3},\pi)$时，$2\cos\theta+1<0$，故

$z=-(2\cos\theta+1)[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$

此时$|z|=-(2\cos\theta+1)$，$\arg z=\pi+\theta$。

当$\theta\in[\pi,\frac{4\pi}{3})$时，$2\cos\theta+1<0$，故

$z=-(2\cos\theta+1)[\cos(-\pi+\theta)+i\sin(-\pi+\theta)]$

此时 $\arg z=-2(2\cos\theta+1)$，$\arg z=\theta-\pi$。

当$\theta=\frac{2\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}$时，$2\cos\theta+1=0$，故$z=0$，此时$|z|=0$，z的辐角可任意取值，无主值。

(4)因为$\frac{1}{u_k u_{k+1}}=\frac{1}{1+i}\left(\frac{1}{u_k}-\frac{1}{u_{k+1}}\right)$ $(k=1，2，\cdots n-1)$，所以

$$z=\frac{1}{1+i}\left[\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right)+\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{u_{n-1}}-\frac{1}{u_n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{1+i}(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_n})=\frac{1}{u_1}\cdot\frac{u_n-u_1}{u_1u_n}=-\frac{u_{n-1}}{u_1^2u_n}=-\frac{n-1}{2n}i$$

所以$|z|=\frac{n-1}{2n}$，$\arg z=\frac{3\pi}{2}$。

7-3-4　因为$\varepsilon^3=-1$，$\omega^3=1$，所以

$$z_1=\varepsilon^{99}\cdot\varepsilon=-\varepsilon=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

而$|z_1|=1$，$\arg z_1=\frac{4\pi}{3}$。

因为$(\omega^k-\frac{1}{\omega^k})^2=\omega^{2k}+\frac{1}{\omega^{2k}}-2(k=1，2，\cdots\cdots)$，所以

$$z_2=(\omega^2+\omega^4+\cdots+\omega^{200})+(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^4}+\cdots+\frac{1}{\omega^{200}})-200$$

$$=\frac{\omega^2[1-(\omega^2)^{100}]}{1-\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}[1-(\frac{1}{\omega^2})^{100}]-200$$

$$=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}-200=\omega^2+\omega-200=-201$$

这时，$|z_2|=201$，$\arg z_2=\pi$。

7-3-5　(1)　0　因为$(1-u)(u+u^2+\cdots+u^5)=u-u^6=u-u=0$，而 $u\neq1$，故

$$u+u^2+\cdots+u^5=0$$

(2) $-2\sqrt{3}+2i$　因为$z=|z|(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$，依题设条件得$-2\sqrt{3}=|z|(-\frac{\sqrt{3}}{2})$，所以$|z|=4$，于是

$$z=4(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=-2\sqrt{3}+2i$$

(3) $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$　设$z=\cos\theta+i\sin\theta$，则

$$1=z^5+z=(\cos5\theta+\cos\theta)+i(\sin5\theta+\sin5\theta)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos5\theta+\cos\theta=1\\\sin5\theta+\sin\theta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos5\theta=1-\cos\theta\\\sin5\theta=-\sin\theta\end{cases}$$

两边平方相加得

$$1=1+\cos^2\theta-2\cos\theta+\sin^2\theta=2(1-\cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

从而　$z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(4) $(-\sec\alpha)[\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+i\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)]$因为$|z|=\sqrt{1+tg^2\alpha}=-\sec\alpha$，故

(5) $\frac{9\pi}{4}$　因为$(-2+i)(-1-3i)=5+5i=5\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$，所以

$$\alpha+\beta=\arg(-2+i)(-1-3i)+2k\pi=\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

其中$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\beta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，故$\alpha+\beta\in(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$，故$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{9\pi}{4}$。

7-3-6　原方程$\Longleftrightarrow z^2=a-2|z|\Longrightarrow|z|^2=|a-2|z||$

当$a-2|z|\geq 0$时，

$$|z|^2=a-2|z|\Leftrightarrow|z|^2+2|z|-a=0\Rightarrow|z|=\sqrt{a+1}-1$$

代入原方程得

$$z^2+2(\sqrt{a+1}-1)=a\Leftrightarrow z^2=(\sqrt{a+1}-1)^2$$
$$\Leftrightarrow z=\pm(\sqrt{a+1}-1)$$

当$a-2|z|<0$时，

$$|z^2|=2|z|-a\Longleftrightarrow(|z|-1)^2=1-a$$

若当$a>1$，原方程无解；

若当$a<1$，则

$$|z|=1\pm\sqrt{1-a}\Leftrightarrow z^2=a-2(1\pm\sqrt{1-a})=[1\pm\sqrt{1-a}i]^2$$
$$\Leftrightarrow z=(1\pm\sqrt{1-a})i\text{或}-(1\pm\sqrt{1-a})i$$

注　本题若令$z=x+yi$，计算起来比较麻烦。而利用三角形式中模的性质，以及复数的开方就简便得多。

7-3-7　A　显然0是方程的根。当$z\neq 0$时，

$z^2+|z|=0\Longleftrightarrow z^2=-|z|\Longrightarrow|z|^2=|z|\Longleftrightarrow|z|=0$(舍去)或$|z|=1$

将$|z|=1$代入原方程得$z^2=-1$，即$z=\pm i$。故选A。

7-3-8　由题设知

$$z-1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Rightarrow z^3=-1\text{，}|z|=1$$

令

$S=z+2z^2+\cdots+12z^{12}$　　(i)

则　$zS=z^2+2z^3+\cdots+11z^{12}+12z^{13}$　　(ii)

(i)-(ii)得

$(1-z)S=z+z^2+\cdots+z^{12}-12z^3$

$$=\frac{z\left(1-z^{12}\right)}{1-z}-12z^{13}=-12z^{13}=-12z$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{12z}{z-1}$$

所以 $\left|z+2z^{2}+\cdots+12z^{12}\right|=|S|=12\times\frac{|z|}{|z-|}=12$

7-3-9 3+4i 和-3-4i 设 z=x+yi(x，y∈R)为-7+24i 的平方根，则

$$z^{2}=-7+24i\Leftrightarrow\begin{cases}x^{2}-y^{2}=-7\\2xy=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}\text{或}\begin{matrix}x=-3\\y=-4\end{matrix}$$

所以-7+24i 的平方根为 z=3+4i 或 z=-3-4i。

7-3-10 $(1)\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$ **设**$z=x+yi(x，y\in R)$,**则**

$$f(-z)=|1-z|-\left(\overline{-z}\right)=\sqrt{(1-x)^{2}+y^{2}}+x-yi=10-3i$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(1-x)^{2}+y^{2}}+x=10\\y=3\end{cases}\Leftrightarrow z=5+3i\Rightarrow\arg z=\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$$

$(2)\frac{5+\sqrt{3}i}{2}$ **令**$\varepsilon=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$**，则**$\varepsilon^{3}=-1$**，**$\bar{\varepsilon}^{3}=-1$**。所以**

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{60}=\varepsilon^{60}=1\text{，}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{60}=\left(\bar{\varepsilon}\right)^{60}=1$$

$$\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{50}}{(1-i)^{100}}=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{50}}{(-2i)^{50}}=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right)^{50}=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{50}$$

$$=\left(\bar{\varepsilon}\right)^{48}\cdot\bar{\varepsilon}^{2}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

所以原式的值为$1+1-\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)=\frac{5+\sqrt{3}i}{2}$**。**

$(3)2\cos\frac{n\pi}{4}$ **令**$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$**，则**$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$**。所以**

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n}=\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\text{，}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n}=\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}$$

从而$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n}=2\cos\frac{n\pi}{4}$

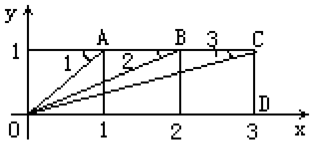
7-3-11 令$z=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$**，则**$z^{n}=-1$**，且**

$$A+iB=z+z^{2}+\cdots+z^{n-1}=\frac{z\left(1-z^{n-1}\right)}{1-z}=\frac{z+1}{1-z}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{n}+1\right)+i\sin\frac{\pi}{n}}{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)-i\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{n}i}{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{n}}=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}i$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ B=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ B=\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{2n}\end{cases}$$

注　此解法的巧妙在于将两个欲求的式子作为实部和虚部构造出一个复数。当然此法的构思和能成功是建立在对这两个式子结构特点的分析之上的。



7-3-12　如上图建立直角坐标系。那么 A，B，C 三点所表示的复数分别为$z_1=1+i$，$z_2=2+i$，$z_3=3+i$，**且**$\arg zi\in(0，\frac{\pi}{4}]$，**故**

$z_1z_2z_3=(1+i)(2+i)(3+i)=10i$

所以$\arg(z_1z_2z_3)=\frac{\pi}{2}$，**即**

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\arg z_1+\arg z_2+\arg z_3=\frac{\pi}{2}$$

7-3-13　(1)用数学归纳法。

当 n=1 时，结论显然成立。

假设结论对$n=k$**成立，即**$z_k=\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}z_1^k$，**则**$n=k+1$**时**

$$5z_{k+1}=-zk+\sqrt{3}z_ki=\left(-1+\sqrt{3}i\right)z_k=z_1\cdot z_k=\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}z_1^{k+1}$$

即　$z_{k+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{k}z_1^{k+1}$

所以 n=k+1 时原式成立。

从而原式对一切自然数 n 成立。

（2）$z_1=2$（$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$），**所以**$|z_1|=2$，**所以**

$$|z_n|=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}2^n=2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(|z_1|+\cdots+|z_n|\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2[1+\frac{2}{5}+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}]=\frac{2}{1-\frac{2}{5}}=\frac{10}{3}$

(3)易证：

$$\arg z_{3k+1}=\frac{2\pi}{3}，\ \arg z_{3k+2}=\frac{4\pi}{3}，\ \arg z_{3k}(k\in Z)$$

所以 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{10}$

$$=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+0\right)+\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+0\right)+\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+0\right)+\frac{2\pi}{3}=\frac{20\pi}{3}$$

7-3-14 (1) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **依题意，有**

$$0=a+\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)^5\Leftrightarrow 0=a+\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow a+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=0\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2) $-\frac{3}{8}\pm\frac{3\sqrt{15}}{8}i$ **设** $z_1=3(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$z_2=2(\cos\beta+i\sin\beta)$，**则**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3}{2}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)] \qquad \text{(i)}$$

又依题意得 $|z_1-z_2|^2=16$**，所以**

$$(3\cos\alpha-2\cos\beta)^2+(3\sin\alpha-2\sin\beta)^2=13-12\cos(\alpha-\beta)$$

$$\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{4}\Rightarrow\sin(\alpha-\beta)=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

代入(i)式得

$$\frac{z_1}{z_2}=-\frac{3}{8}\pm\frac{3\sqrt{15}}{8}i$$

7-3-15 (1)**设** $z=\cos\theta+i\sin\theta$**，则** $\frac{1}{z}=\bar{z}$**，所以**

$$\left|z^5+\frac{1}{z^3}\right|=\left|z^5+\bar{z}^3\right|=\left|z^5+z\bar{z}^4\right|=|z|\cdot\left|z^4+\bar{z}^4\right|$$

$$=|(\cos4\theta+i\sin4\theta)+(\cos4\theta-i\sin4\theta)|=|2\cos4\theta|$$

因为 $|\cos4\theta|\in[0，1]$**，因此**

$$\left|z^5+\frac{1}{z^3}\right|_{max}=2，\ \left|z^5+\frac{1}{z^3}\right|_{min}=0$$

(2)**原方程** $\Leftrightarrow\left(z+3-\sqrt{3}i\right)\left(\bar{z}+3+\sqrt{3}i\right)=3$

$$\Leftrightarrow\left|z+3-\sqrt{3}i\right|^2=3\Leftrightarrow\left|z+3-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3}$$

设 $z+3-\sqrt{3}i=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\theta\in[0，2\pi)$，**则**

$$\left|2z-2\sqrt{3}i\right|=2\left|-3+\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)\right|$$

当 $\cos\theta=-1$ 时(即 $\theta=\pi$ 时)，

$$\left|2z-2\sqrt{3}i\right|_{max}=2\sqrt{3}\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$=2\left(3+\sqrt{3}\right)=6+2\sqrt{3}$$

当 $\cos\theta=1$ 时(即 $\theta=0$ 时)，

$$\left|2z-2\sqrt{3}i\right|_{\min}=2\sqrt{3}\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$=2\left(3-\sqrt{3}\right)=6-2\sqrt{3}$$

7-3-16 依题设有

$z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$z_2=k(\cos\beta+i\sin\beta)$

$z_3=(2-k)(\cos r+i\sin\gamma)(0<k<2)$

又题设 $z_1+z_2+z_3=0$，所以

$$\begin{cases}\cos\alpha+k\cos\beta+(2-k)\cos\gamma=0\\ \sin\alpha+k\sin\beta+(2-k)\sin\gamma=0\end{cases}$$

利用 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，那么由上两式消去 α 得

$k^2+(2-k)^2+2k(2-k)\cos(\beta-\gamma)=1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\beta-\gamma\right)\frac{k^2+(2-k)^2-1}{2k(k-2)}=1+\frac{3}{2(k-1)^2-2} \qquad \text{(i)}$$

所以 $$\left|\cos\left(\beta-\gamma\right)\right|=\left|1+\frac{3}{2(k-1)^2-2}\right|=\left|\frac{2(k-1)^2+1}{2(k-1)^2-2}\right|$$

$$=\frac{2(k-1)^2+1}{\left|2k(k-2)\right|}=\frac{2(k-1)^2+1}{2k(2-k)}$$

考虑到$\left|\cos\left(\beta-\gamma\right)\right|\leq 1$**，易知**

$$4k^2-8k+3\leq 0\Leftrightarrow(2k-1)(2k-3)\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{3}{2}$$

(1)由(i)式，分母 $2(k-1)^2-2$ 取最小，$\cos(\beta-\gamma)$取最大，因此，当 $k=1$ 时，

$$[\cos\left(\beta-\gamma\right)]_{\max}=-\frac{1}{2}$$

(2)**当**$k=\frac{1}{2}$**或**$k=\frac{3}{2}$**时，**

$$[\cos\left(\gamma-\beta\right)]_{\min}=[\cos\left(\beta-\gamma\right)]_{\min}=-1$$

7-3-17 $$(1)z=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-2i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-i\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-i\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

从而 $|z|=1$，$\arg z=\frac{\pi}{2}+\theta$

(2)**当**$\theta=\frac{\pi}{13}$**时，**$z=\cos\frac{15}{26}\pi+i\sin\frac{15}{26}$**，故**

$$z^n=\cos\frac{15n\pi}{26}+i\sin\frac{15n\pi}{26}$$

若z_n**是实数，则**$\sin\frac{15n\pi}{26}=0$**，所以**

$$\frac{15n\pi}{26}=k\pi\Leftrightarrow\frac{15}{26}n=k\Leftrightarrow n=\frac{26k}{15}(k\in z)$$

使 n 为正整数的最小的 k 为 15，这时 n=26。即使 $z^n\in R$ 的最小自然数 n=26。

（四）复数与方程

7-4-1 (1)**原方程** $\Leftrightarrow 3iz = 1+i \Leftrightarrow z = \dfrac{1-i}{3}$

(2)**原方程** $\Leftrightarrow 5x^2+3x+4=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3\pm\sqrt{71}i}{10}$

(3)**因** $\left|\dfrac{\left(1-i^7\right)^6}{8\left(3+\sqrt{7}i\right)}\right| = \dfrac{1}{4}$**，故**

原方程 $\Leftrightarrow \dfrac{z}{4} = 2(1-i)i \Leftrightarrow z = 8+8i$

(4)**原方程** $\Leftrightarrow (2+i)z^2-(5+3i)z+(2+2i)=0$

其判别式$\triangle=[-(5+3i)]^2-4(2+i)z+(2+2i)=(3+i)^2$**，故其解为**

$$z=\frac{(5+3i)\pm(3+i)}{2(2+i)} \Leftrightarrow z_1=2，z_2=\frac{3+i}{5}$$

7-4-2 C 设两根为α，β，由韦达定理有

$\alpha+\beta=2i$，$\alpha\beta=-5$

因此不能选 A，B，D。从而选 C。事实上

$$x=\frac{2i\pm\sqrt{-4+20}}{2}=i\pm2$$

7-4-3 因为二次方程的系数为实数，故其判别式$\triangle=a^2-8<0$**，故它有共轭虚根，故**$|\alpha|=|\beta|$**。又由韦达定理知**$\alpha\beta=2$**，即**$|\alpha|\cdot|\beta|=2$**。于是**

$|\alpha|=|\beta|=\sqrt{2}$**，故**$|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{2}$**。**

7-4-4 设 z=x+yi(x，y∈R)，根据题设有

$x^2+y^2=1$ (i)

另一方面，原方程可变为

$$5=x^2+(y-2)^2-[(x-1)^2+y^2] \Leftrightarrow x=2y+1 \qquad \text{(ii)}$$

(ii)**代入**(i)**得**$y=0$**或**$y=-\dfrac{4}{5}$**。**

再分别代入(ii)**得**$x=1$**或**$x=-\dfrac{3}{5}$**。**

故原方程的根为$z=1$**或**$z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$**。**

7-4-5 (1)$\sqrt[5]{-6a}\cos\left[\dfrac{\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi}{5}\right](k=0，1，2，3，4)$**注意，**

$$-3a+3\sqrt{3}a=-6a\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-6a\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

(2) $\pm(3+i)$ 令$z=x+yi(x，y\in R)$，则$z^2=8+6i$，易知

$$\begin{cases}x^2-y^2=8\\xy=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$$

(3) $\dfrac{-(1\pm\sqrt{5})(1+\sqrt{3}i)}{4}$ 根据$\omega^3=1$，$\varepsilon^3=-1$，$(1+i)^2=2i$，$(1-i)^2=-2i$，

可将原方程变为

$$\omega^2z^2-\omega z-1=0$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\omega\pm\sqrt{5}\omega}{2\omega^2}=\frac{(1\pm\sqrt{5})\omega^2}{2}=-\frac{(1\pm\sqrt{5})(1+\sqrt{3}i)}{4}$$

7-4-6　设另一根为γ。

(1)当$\triangle=b^2-4ac\geq0$时，β，$\gamma\in R$，故$\beta\gamma=\dfrac{c}{a}>0$，即$\beta$，$\gamma$同号，所以

$$1>\left|-\frac{b}{a}\right|=|\gamma+\beta|=|\gamma|+|\beta|\Rightarrow|\beta|<1$$

(2)当$\triangle=b^2-4ac<0$时，$\gamma=\overline{\beta}$，故

$$1>\frac{c}{a}=\beta\gamma=|\beta|^2\Rightarrow|\beta|<1$$

7-4-7　(1)若β=1 时，则 $a^2-a+3a+2=0$，即$(a+1)^2=-1$，此不可。

(2)若β $=-1$，则$a^2-a-3a+2=0$，即$(a-2)^2=2$，故$a=2\pm\sqrt{2}$。

(3)若β是虚数，则方程另一根为$\overline{\beta}$。这时

$$\Delta=9a^2-8(a^2-a)<0\Leftrightarrow a^2+8a<0\Leftrightarrow-8<a<0$$

根据韦达定理有

$$1=\beta\overline{\beta}=\frac{2}{a^2-a}\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow a=-1\text{或}a=2(\text{舍去})$$

综上所述知$a=2\pm\sqrt{2}$或$a=-1$。

7-4-8　原方程$\Rightarrow(z+1+i)(\overline{z}+1+i)=4\Rightarrow|z+1+i|^2=4$

令$z=x+yi(x，y\in R)$，代入上面的方程后易知

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\(x+1)^2+(y+1)^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\x=-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$$

经检验知原方程的根为$z=1-i$或$z=-1+i$。

注　实质上本题是解方程组

$$\begin{cases}|z|=\sqrt{2}\\z\overline{z}+(1-i)z+(1+i)\overline{z}=2\end{cases}$$

7-4-9　由于实系数方程虚根成共轭虚数对出现，设α，β，γ为原方程的根，那么

$\alpha=1+i$，$\beta=1-i$，$\gamma\in R$

再由韦达定理得

$$3=\alpha+\beta+\gamma=(1+i)+(1-i)+\gamma\Leftrightarrow\gamma=1$$

而　$a=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=4$，$b=-\alpha\beta\gamma=-2$

注　本题也可据

$x^3-3x^2+ax+b=(x-\gamma)[x-(1+i)][x-(1-i)]$

比较两边同次项系数求解。

7-4-10 令$\frac{z_1}{z_2}=t$，得

$$z_1=tz_2=t^2z_3=t^3z_4=t^4z_1\Leftrightarrow t^4=1\Leftrightarrow t=\pm1\text{或}t=\pm i$$

从而$\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{z_1+z_2+z_3+z_4}\begin{cases}2 & \text{当}t=1\text{时}\\ 0 & \text{当}t=-1\text{时或}\pm i\text{时}\end{cases}$

7-4-11　A 设$\alpha=x+yi(x, y\in R)$，则$\beta=x-yi$，故

$$-1=\alpha+\beta=2x\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$3=|\alpha-\beta|=|2yi|\Leftrightarrow|y|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{2}$$

从而　$m=\alpha\beta=x^2+y^2=\frac{5}{2}$

7-4-12　(1)设$z_1=a+bi$，$z_2=c+di(a, b, c, d\in R)$，由(ii)有

$$a-bi-(c+di)=2i\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\ b+d=-2\end{cases}\Leftrightarrow z_1=a+bi\text{，}z_2=a-(2+b)i$$

代入(i)得

$$(a+bi)[a-(2+b)i]+2i(2(1+b)i)+1=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b^2-2b-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=0\\ b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_1=-i\\ z_2=-i\end{cases}\text{或}\begin{cases}z_1=3i\\ z_2=-5i\end{cases}$$

(2)上面无论哪一个解，都有$R(z_1)=R(z_2)$。

(3)上面无论哪一解，都有

$$z_1+z_2=-2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

因此z_1+z_2的立方根为

$$\sqrt[3]{2}\left[\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right](k=0\text{，}1\text{，}2)$$

即为　$\sqrt[3]{2}i$，$\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$，$\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$

7-4-13　先证必要性。若β是原方程的根，且$|\beta|=1$，那么

$$\beta^{n+1}-\beta^n=1\Rightarrow\beta^n(\beta-1)=1\Rightarrow|\beta-1|=1$$

令$\beta=x+yi(x, y\in R)$，则

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

从而 $\beta=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow\beta^3=-1$，$\beta^2-\beta+1=0$ (i)

设$n=6k+r$，其中$0\leq r\leq 5$，则

$$0=\beta^{6k+(r+1)}-\beta^{6k+r}-1=\beta^{r+1}-\beta^{r}-1$$

可以验证 r=0，1，2，3，5 时，都不能使(i)式成立，因此 r=4。这时 n=6k+4，即 n+2=6(k+1)。

再证充分性。设 n+2=6k，则

$z^{n+1}-z^{n}-1=z^{6k-1}-z^{6k-2}-1$ (ii)

取$\varepsilon=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则$\varepsilon^3=-1$，$\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$，$|\varepsilon|=1$，将$\varepsilon$代入(ii)式，得

$$\varepsilon^{n+1}-\varepsilon^{n}-1=\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^2}-1=-\varepsilon^2+\varepsilon-1=0$$

即ε是原方程的根。

7-4-14 (1)设 $z\in R$，则 z-2=0，即 z=2。

(2) 原方程 $\Leftrightarrow(z-2)(z-3+i)=0\Leftrightarrow z=2$或$z=3-i$

7-4-15 设 z=a+bi(a，b∈R)，且 x_0 为原方程的实数根，那么

$$x_0^2-(a+bi)x_0+4+3i=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2-ax_0+4=0\\-bx_0+3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b\neq 0，x_0=\frac{3}{b}，a=\frac{4b^2+9}{3b}$$

从而 $|z|^2=a^2+b^2=\frac{25b^4+72b^2+81}{9b^2}=\frac{25}{9}b^2+\frac{9}{b^2}+8$

$$\geq 2\sqrt{\frac{25}{9}b^2\cdot\frac{9}{b^2}}+8=18$$

当且仅当$\frac{25b^2}{9}=\frac{9}{b^2}$时，$|z|^2$取最小值，这时$b=\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}$，$a=\pm\frac{9\sqrt{5}}{5}$。

由于$3ab=4b^2+9>0$，故a，b同号，故

$$z=\frac{9\sqrt{5}}{5}+\frac{3\sqrt{5}}{5}i\text{或}z=-\frac{9\sqrt{5}}{5}-\frac{3\sqrt{5}}{5}i$$

此时，$|z|_{min}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$。

7-4-16 显然$z=i$ 不满足方程。令$t=\frac{z+i}{z-i}$，则

原方程 $\Leftrightarrow t^{n}=-1 \Leftrightarrow t^{n}=\cos\pi+i\sin\pi$

$\Leftrightarrow t_{k}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}(k=0，1，\cdots，n-1)$

令$\theta_{k}=\frac{\pi+2k\pi}{n}(k=0，1，\cdots，n-1)$**则**

$$t_{k}=\cos\theta_{k}+i\sin\theta_{k}(k=0，1，\cdots，n-1)$$

但$t_{k}=\frac{z_{k}+i}{z_{k}-i}$**，故**

$$z_{k}=\frac{i\left(1+t_{k}\right)}{t_{k}-1}=\frac{i\left(\cos\theta_{k}-1\right)-\sin\theta_{k}}{\left(\cos\theta_{k}-1\right)i\sin\theta_{k}}$$

$$=\frac{[i\left(\cos\theta_{k}-1\right)-\sin\theta_{k}][\left(\cos\theta_{k}-1\right)-i\sin\theta_{k}]}{\left(\cos\theta_{k}-1\right)^{2}+\sin\theta_{k}}=\frac{\sin\theta_{k}}{1-\cos\theta_{k}}=\operatorname{ctg}\frac{\theta_{k}}{2}$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{(1+2k)\pi}{2n}\left(k=0，1，\cdots，n-1\right)$$

（五）复数运算的几何意义

7-5-1 $6+4i$ **因为**$\overrightarrow{AB}$**对应的复数为**$z_2-z_1=-4+6i$。**设**$\overrightarrow{AC}$**对应复数**z_3，**那么**

$$z_3=(-4+6i)[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)]=6+4i$$

7－5－2 $(1)z-1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\varepsilon\Rightarrow|z|=|\varepsilon|=1,\ \varepsilon^3=-1$$

于是

$$zu=z^2+2z^3+\cdots+11z^{12}+12z^{13}$$

$$\Rightarrow(1-z)u=z+z^2+\cdots+z^{12}-12z^{13}$$

$$=\frac{z\left(1-z^{12}\right)}{1-z}-12z^{13}=-12z^{13}=-12z$$

$$\Rightarrow u=\frac{-12z}{1-z}=6\left(1-\sqrt{3}i\right)$$

(2) $z^2u=z^4+2z^6+\cdots+11z^{24}+12z^{26}$

$$\Leftrightarrow\left(1-z^2\right)v=z^2+z^4+\cdots z^{24}-12z^{26}$$

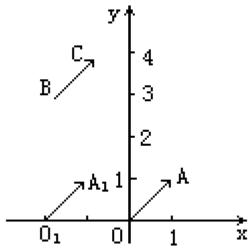
$$\Leftrightarrow v=\frac{-12z^2}{1-z^2}=2\left(3-\sqrt{3}i\right)$$

(3)**由**$u-v=-4\sqrt{3}i$**得**

$$|AB|=|u-v|=4\sqrt{3}。$$

AB 的中垂线方程为

$$\left|z-6+6\sqrt{3}i\right|=\left|z-6+2\sqrt{3}i\right|$$



7-5-3 (1)**如上图所示，**$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$，**因此**$z_1=1+2i$。

(2)从上图可见 B，C 的坐标分别为(-2，2)与(-1，4)，因此 $z_2=-2+2i$，$z_3=-1+4i$

(3)$\overrightarrow{CB}$**对应的复数为**$z_2-z_3=-1-2i$，**所以**

$$z_4=(-1-2i)[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)]=\frac{\sqrt{2}}{2}(-3-i)$$

7-5-4　B 因为 z 到三顶点距离相等。

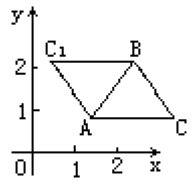
7-5-5 (1)$z_2 - z_1$**对应向量**$\overrightarrow{AB}$**，由余弦定理知**

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cos\angle AOB$$

$$\Rightarrow \cos\angle AOB = -\frac{\left|z_1 - z_2\right|^2 - \left|z_1\right|^2 - \left|z_2\right|^2}{2\left|z_1\right| \cdot \left|z_2\right|} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle AOB = \pm\frac{2\pi}{3}$$

(2)$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}$　$\frac{z_1}{z_2}$**的辐角为**$\pm\frac{2\pi}{3}$**，所以**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}\left[\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{10}$$



7－5－6　如上图。先设C**在**AB**的右侧。**$\overrightarrow{AB}$**对应的复数为**

$$z_2 - z_1 = \left(\frac{3}{2} + 2i\right) - (1 + i) = \frac{1}{2} + i$$

那么$\overrightarrow{AC}$**为**$\overrightarrow{AB}$**绕**A**点按顺时针方向旋转**$\frac{\pi}{3}$**所得出。因此**

$$z_3 - z_1 = \left(\frac{1}{2} + i\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)i$$

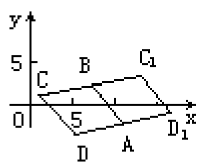
于是　$z_3 = z_1 + (z_3 - z_1) = \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)i$

再设C_1**在**AB**左侧，那么**

$$z_3 - z_1 = \left(\frac{1}{2} + i\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)$$

于是　$z_3 = \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)i$



7-5-7　如上图。设 10-3i，8+4i 对应点分别为 A，B。所求正方形另两个顶点为 C，D。

设 C，D 在 AB 左侧，且 C，D 对应复数分别为 z_1，z_2。

$\overrightarrow{BA}$ 对应复数为

(10-3i)-(8+4i)=2-7 i

$\overrightarrow{BC}$ 可以看成是 $\overrightarrow{BA}$ 绕B点按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得出，故

$$z_3-(8+4i)=(2-7i)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-7-2i$$

$$\Rightarrow z_3=1+2i$$

$\overrightarrow{AD}$ 可以看成 $\overrightarrow{AB}$ 绕A点按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，因此

$$z_4-(10-3i)=-(2-7i)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=-2i-7$$

$$\Rightarrow z_4=3-5i$$

类似，若 C，D 在 AB 右侧时(如上图中 C_1，D_1)，可求出

z_3=15+6i，z_4=17- i

7-5-8　(1)由 $z_2\neq 0$，故

原方程 $\Leftrightarrow 2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2-2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{1\pm i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_1=\frac{1\pm i}{2}z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}z_2\left(\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(i)}$$

因此 $\overrightarrow{OA}$ 可以看成 $\overrightarrow{OB}$ 按逆（或顺）时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$，长度再缩短 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍得出。因此 $\angle AOB=45°$。由(i)式得 $|z_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}|z_2|$，故

$$z_2-z_1=z_2-\frac{1\pm i}{2}z_2=\frac{1\mp i}{2}z_2$$

$$\Rightarrow |z_2-z_1|z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}|z_2|\Rightarrow |z_1|=|z_2=z_1|$$

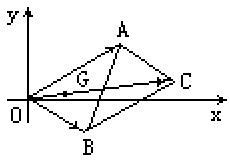
这就是说 $|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AB}|$，所以 $\angle ABO=45°$。又 $\angle AOB=45°$，所以∠OAB=90°，所以△AOB 为等腰直角三角形。

$$(2)z_1+z_2=\frac{1\pm i}{2}z_2+z_2=\frac{3\pm i}{2}z_2$$

$$\Rightarrow 10=|z_1+z_2|=\frac{\sqrt{10}}{2}|z_2|\Rightarrow |z_2|=2\sqrt{10}$$

即$|OB|=2\sqrt{10}$，故$|OA|=\frac{1}{\sqrt{2}}|OB|=2\sqrt{5}$，从而

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}\right)^2=10$$



7-5-9 如上图。因为$\angle AOx=\frac{\pi}{6}$，$\angle BOx=\frac{\pi}{6}$，所以$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，于是

$$\sqrt{3}=S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}|z_1|\cdot|z_2|$$

故 $|z_1|\cdot|z_2|=4$

$\overrightarrow{OC}$对应的复数为z_1+z_2，重心G对应的复数$z=\frac{1}{3}(z_1+z_2)$。由余弦定理知

$$|z_1+z_2|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-2\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\angle CBO$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1|\cdot|z_2|\cos 120°=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1|\cdot|z_2|$$

$$\geq 2|z_1|\cdot|z_2|+|z_1|\cdot|z_2|=12$$

仅当$|z_1|=|z_2|$时，即$|z_1|=|z_2|=2$时，$|z_1+z_2|_{min}=\sqrt{12}$，故

$$|z|_{min}=\frac{1}{3}|z_1+z_2|_{min}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

7-5-10 (1)由$\overrightarrow{AC}=z-z_1$，$\overrightarrow{CB}=z_2-z$知$\lambda=\frac{z-z_1}{z_2-z}$，故$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$。

(2)先证必要性。由上面(1)知存在实数λ(≠-1)，使

$$z_3=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\Rightarrow z_1+\lambda z_2-(1+\lambda)z_3=0$$

令$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda$，$\lambda_3=-(1+\lambda)$这就证明了要证的等式。

再证充分性。不失一般设$\lambda_1\neq0$。那么由(ii)知还存在$\lambda_2\neq0$($\lambda_3\neq0$)。再由(i)得

$$z_1=\frac{-\lambda_2 z_2-\lambda_3 z_3}{\lambda_1}=\frac{z_2+\frac{\lambda_3}{\lambda_2}z_3}{1+\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}=\frac{z_2+\lambda z_3}{1+\lambda}\left(\text{其中}\lambda=\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)$$

这就是说 A 在直线 BC 上。

(3)令$z_1=\frac{z_3+\lambda z_2}{1+\lambda}$，则$1+2i=\frac{3+\lambda(2+i)}{1+\lambda}$，解之得$\lambda=-2$。

因此A，B，C三点共线。

（六）复数与几何图形

7-6-1 (1)以原点为端点的一条射线，它与 x 轴正向夹角为 45°。

（2）圆心在点（0，-1）半径为$\sqrt{2}$的圆，这是因为$|z+i|^2=2$。

（3）因为$z=\frac{(3+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{7+9i}{10}$，它的图形是一个点$\left(\frac{7}{10},\frac{9}{10}\right)$。

(4)图形是一个椭圆，焦点是(-1，0)与(1，0)；长半轴在 x 轴，a=2；短半轴在y轴，$b=\sqrt{3}$。

(5)图形是单位圆。令 z=x+yi(x，y∈R)，则

$$(x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4\Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

（6）图形是一条抛物线。令$z=x+yi$（x，y∈R），则

$$|2x+(2y-4)i|=|(2y+4)i|\Leftrightarrow x^2=8y$$

(7)过点A（1，1）与B（-1，-1）的垂直平分线的方程为

$$|z+1+i|=|z-1-i|\Leftrightarrow y=-x$$

又 $$\log_{\frac{1}{2}}|z+1+i|>\log_{\frac{1}{2}}|z-1-i|$$

$$\Leftrightarrow|z+1+i|<|z-1-i|\Leftrightarrow y<-x$$

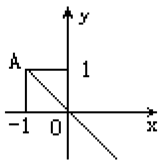
因此动点轨迹为直线 y=-x 的下半平面，但不包括点(-1，-1)。

(8)设 z=x+yi(x，y∈R)，由假设有

$$\begin{cases}x=m^2-8m+15\\y=-(m^2-8m+15)\end{cases}\Leftrightarrow y=-x$$

又 $m^2-8m+15=(m-4)^2-1\Leftrightarrow x\geq-1$

$$-(m^2-8m+15)=-(m-4)^2+1\Leftrightarrow y\leq1$$



因此 z 对应点的轨迹为 y=-x 的一段射线，此射线以 A(-1，1)为端点(如上图所示)。

7-6-2 设AB的中点为D，它对应的复数为z_4，那么$z_4=\frac{z_1+z_2}{2}$。

由平几知$\frac{\overrightarrow{CG}}{\overrightarrow{GB}}=2$，故

$$\frac{z-z_3}{z_4-z}=2\Leftrightarrow z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$$

7-6-3 由实系数方程虚根成共轭虚数对知，a-bi 也是方程的根。从而由韦达定理有

$$\begin{cases}(a+bi)+(a-bi)=-2k \\ (a+bi)(a-bi)=k\end{cases} \Rightarrow a^2+a+b^2=0$$

$$\Rightarrow \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+b^2=\frac{1}{4}(b>0)$$

即点(a，b)画出的图形是一个上半圆，此圆的圆心在点$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，半径为$\frac{1}{2}$，但不包括两个点(-1，0)与(0，0)。

7-6-4　由已知方程得

$$\left|z_2-2-\sqrt{2}i\right|=2$$

因此点B的轨迹是圆，圆心在点$\left(2, \sqrt{2}\right)$，半径为2。

7-6-5　设 z=a+bi，u=x+yi(a，b，x，y∈R)。由题设易知 ab≠0。

令$v=\frac{u}{u-2i} \cdot \frac{z-2i}{z}$，则

$$v=\frac{x+yi}{x+(y-2)i} \cdot \frac{a+(b-2)i}{a+bi}$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2-2y\right)+2xi}{x^2+(y-2)^2} \cdot \frac{\left(a^2+b^2-2b\right)-2ai}{a^2+b^2}$$

又因为|z-i|=1 所以

$$|a+(b-1)i|=1 \Leftrightarrow a^2+(b-1)^2=1 \Leftrightarrow a^2+b^2-2b=0$$

$$\Leftrightarrow v=\frac{4ax-2a\left(x^2+y^2-2y\right)i}{[x^2+(y-2)^2]\left(a^2+b^2\right)}$$

根据题设知$v=\bar{v}$，所以

$$a\left(x^2+y^2-2y\right)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$$

因此 u 对应点的轨迹是圆，圆心在(0，1)，半径为 1。

7-6-6　设 z=x+yi(x，y∈R)则，由|z|=a 知

$x^2+y^2=a^2$　　　　(i)

又　$u=\frac{1}{2}\left[(x+yi)+\frac{a}{(x+yi)}\right]=\frac{1}{2}\left[(x+yi)+(x-yi)\right]=x$　　(ii)

由(i)，(ii)知|x|≤a。因此 u 对应点的轨迹为以原点为中点长为 2a 的线段。

7-6-7　$z_2=\left(x_1+y_1i\right)+\frac{36}{x_1+y_i}=\left(x_1+y_1i\right)+\frac{36}{49}\left(x_1-y_1x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_2=x_1+\frac{36}{49}x_1=\frac{85}{49}x_1 \\ y_2=y_1-\frac{36}{49}y_1=\frac{13}{49}y_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=\frac{49}{85}x_2 \\ y_1=\frac{49}{13}y_2\end{cases} \qquad (i)$$

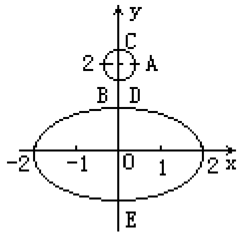
又由$|z_1|=7$得$x_1^2+y_1^2=49$，由此及(i)式易知

$$\left(\frac{7}{85}\right)^2 x_2^2+\left(\frac{7}{13}\right)^2 y_2^2=1$$

因此 z_2 对应点的轨迹是一个椭圆。

7-6-8 (1)$|z|^2+2i(z-\bar{z})+\frac{35}{9}=0 \Leftrightarrow z\bar{z}+2i(z-\bar{z})+\frac{35}{9}=0$

$\Leftrightarrow |z-2i|^2=\frac{1}{9} \Leftrightarrow |z-2i|=\frac{1}{3}$



因此M_1表示圆，圆心在点(0，2)、半径为$\frac{1}{3}$(见上图)。设此圆与y轴的两个交点为C，B，那么它们的坐标分别为$\left(0，\frac{7}{3}\right)$和$\left(0，\frac{5}{3}\right)$。

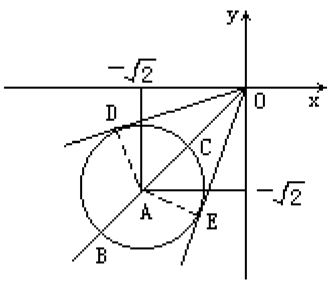
令 z=x+yi(x，y∈R)，则

$\left|z+\sqrt{3}\right|+\left|z-\sqrt{3}\right|=4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=1$

因此 M_2 表示一个椭圆。

(2)设椭圆与 y 轴两个交点为 D，E，那么它们的坐标分别为(0，1)与(0，-1)。并由图可知

$(d)_{max}=|CE|=\frac{7}{3}+1=\frac{10}{3}$，$(d)_{max}=|BD|=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$



7-6-9 (1)满足已知不等式$\left|z+\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right|\le 1$的点在复平面上是一个圆的内部(包括边界)，其圆心为点$A\left(-\sqrt{2}，-\sqrt{2}\right)$，半径为1(见上图)。

连 AO 与圆相交于两点 B，C，那么

$|z|_{max}=|OB|,|z|_{min}=|OC|$

设 A，B，C 对应的复数分别为 z_1，z_2，z_3，那么

$$z_1=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z_2=(2+1)\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z_3=(2-1)\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$$

故 $|z|_{max}=|z_2|=3$，$|z|_{min}=|z_3|=1$

(2)过点 O 作圆 A 的两条切线 OD 与 OE(见图)，因为△AOD 是直角三角形，$|OA|=2$，$|AD|=1$，所以$\angle AOD=\frac{\pi}{6}$，因此

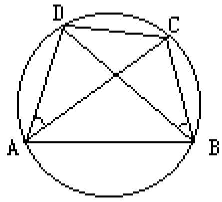
$$\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\le\arg z\le\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\frac{13\pi}{12}\le\arg z\le\frac{17\pi}{12}$$

(3)设点D对应复数z_4，则$\arg z_4=\frac{13\pi}{12}$，所以

$$z_4=\sqrt{3}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$=\sqrt{3}(-\cos15°-i\sin15°)$$

$$=-\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}-\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i$$



7-6-10　先证必要性。设 A，B，C，D 的位置如上图所示，它们共圆。这时有

$$\angle A=\arg\frac{z_4-z_1}{z_3-z_1}，\angle B=\arg\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2}$$

但∠A=∠B，所以

$$\arg\left[\left(\frac{z_4-z_1}{z_3-z_1}\right):\left(\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2}\right)\right]$$

$$=\angle A-\angle B+k\pi=k\pi$$

所以 $$\left(\frac{z_4-z_1}{z_3-z_1}\right):\left(\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2}\right)=\lambda\in R$$

设 A，B，C，D 四点共线，那么 A，B 分别都在 CD 直线上，即

$$\frac{z_1-z_4}{z_1-z_3}=\lambda_1，\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}=\lambda_1$$

于是 $$\left(\frac{z_4-z_1}{z_3-z_1}\right):\left(\frac{z_4-z_2}{z_3-z_2}\right)=1$$

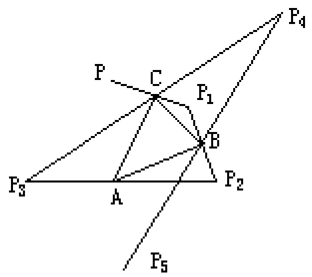
综上所述，必要性得证。

再证充分性。设$\left(\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\right):\left(\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\right)=\lambda\in\mathrm{R}$。

在 AB 直线上，从而 A，B，C，D 四点共线。

若 A，B，C 三点不共线，则共圆，若 A，B，C，D 四点如上图，则因上面每步可逆，可证∠A=∠B，即 D 也在 A，B，C 的圆上，从而四点共圆。

注　如果四点不是上述位置也类似可证。出发点可能不是∠A=∠B，而是∠A+∠B=π。



7-16-11　设 A，B，C，P 对应的复数分别为 a，b，c，p，点 P_k 对应的复数为 p_k(k=1，2，3，…)。

由于 C 为 PP_1 的中点，故 $p+p_1=2c$，即

$p_1=2c-p$

同理有

$p_2=2b-(2c-p)=2b-2c+p$

$p_3=2a-(2b-2c+p)=2a-2b+2c-p$

$p_4=2c-(2a-2b+2c-p)=2b-2a+p$

$p_5=2b-(2b-2a+p)=2a-p$

$p_6=2a-(2a-p)=p$

即经过 6 次后 P 点回到原来位置。而 1997=6×332+5，所以 P_{1997} 的位置就是 P_5，所以

$|PP_{1997}|=|PP_5|=|p-p_5|=|p-(2a-p)|$

$=|2p-2a|=2|p-a|=2\times10=20$

第八部分　排列、组合、二项式定理

(一)两个原理

8-1-1 (1)从 A 到 B 的不同映射有 $3^3=27$ 个。

(2)1 的象有 3 种可能，2 的象只有 2 种可能，3 的象只有 1 种可能。由乘法原理知，共有 $3\times2\times1=6$ 种从 A 到 B 的一一对应。

(3)1 的象是 y 已定，2 的象有 3 种可能，3 的象仍有 3 种可能，故所求从 A 到 B 的映射有 9 个。

8-1-2 (1)抛物线 $a\neq0$。因此 a 的取法有 7 种可能，b 的取法有 7 种可能，c 的取法有 6 种可能，可得抛物线的条数为 $7\times7\times6=294$。

(2)开口向上，必须 $a>0$。因此 a 的选法有 3 种，b 与 c 的选法分别为 7 与 6 种，因此开口向上的抛物线共有 $3\times7\times6=126$ 条。

(3)过原点的抛物线，必须 $c=0$。那么 a，b 的选法分别为 7 与 6 种，故所求过原点的抛物线共有 42 条。

8-1-3 B 因为用一角线币可以取 0 张，1 张，…，6 张共 7 种取法，同理一元纸币有 5 种取法，五元纸币有 4 种取法，由乘法原理，共有 $7\times5\times4=140$ 种不同取法，每一种不同取法，得出不同币值。又每种币值都取 0 张，不能构成币值。因此所求总数为 $140-1=139$。

注 此题类似于求自然数的正因数的总数。

8-1-4 (1)15 (2)5 (3)20 (4)74 它等于 $6\times5+6\times4+5\times4=74$。

8-1-5 (1)以 1 为首的四位整数，即千位数字是 1 的四位整数。所求种数为 $5\times4\times3=60$。

(2)由上题知以 1 为首的四位整数为 60，同理以 2 为首的四位整数也有 60 种。因此第 73 个一定是以 2 为首位的数里面。

考虑前两位是 20 的四位整数，那么十位数字与个位数字有 $4\times3=12$ 种选法。因此第 73 个四位整数就是 2103。

8-1-6 C 因为展开式的每一项，都是从每一个括号内分别取一个字母，然后相乘而得。第一个括号内字母有 2 种取法，第二个括号有 3 种取法，第三个括号有 4 种取法。总共有 $2\times3\times4=24$ 种不同取法。

8-1-7 (1)9 应满足条件 $\alpha>0$，$a\neq1$，$b>0$。于是 a 有 3 种取法，b 的取法也是 3 种。总共有 $3\times3=9$ 种取法。

(2)当 $a=\pi$ 时，$\log_\pi 9>0$，$\log_\pi \frac{1}{4}<0$；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}>0$，$\log_{\frac{1}{2}}9<0$；

当 $a=\sqrt{2}$ 时，$\log_{\sqrt{2}}9>0$，$\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{4}<0$。

因此所求正数有 3 个，负数也是 3 个。

8-1-8 以和的值分类：和为 3(=1+2)，为 4(=1+3)，为 5(=2+3)，为 6(=1+5=1+2+3)，为 7(=2+5)，为 8(=3+5)，为 9(=1+3+5)，为 10(=2+3+5)，为 11(=1+2+3+5)。因此所求不同的和有 9 个。

8-1-9 分成三类：①B 排在第一，有 3 种不同排法，即：BADC，BDAC，BCDA；②C 排在第一，也有三种排法，即 CADB，CDAB，CDBA；③D 排在第

一，有三种排法，即 DABC，DCAB，DCBA。

故总共排法有 9 种。

注　这叫做伯努利-欧拉问题，或叫做装错信箱问题。

8-1-10　分两类：①对角两扇形同色：有 4×3×3=36 种涂法；②对角两扇形异色，有 4×3×2×2=48 种。因此不同涂色方法有 36+48=84 种。

8-1-11　(1)$r_1+r_2+\cdots+r_m$

(2)$r_1(r_2+r_3+\cdots+r_m)+r_2(r_3+\cdots+r_m)+\cdots+r_{m-1}r_m$

(3)$r_1r_2\cdots r_m$

(二)排列与组合的概念与计算

8-2-1　D

8-2-2　A　因为焦点在 x 轴上，必须 m＞n。分成 4 类：①当 m=2 时，n 只有 1 种选法；②当 m=5 时，n 有 2 种选法；③当 m=8 时，n 有 4 种选法；④当 m=9 时，n 也有 4 种选法。因此总共有 11 个不同椭圆。

8-2-3　(1)分四类：①三点都取在α内，可确定一个平面；②三点都取在β内，也可确定一个平面；③α内1点，β内2点，共可确定$C_4^1C_6^2$个平面；④α内2点，β内1点，可确定$C_4^2C_6^1$个平面。故总共平面个数为$1+1+C_4^1C_6^2+C_4^2C_6^1=98$个。

(2)三棱锥由 4 个点确定，因此分三类：①α内 3 点，β内 1 点，共可确定三棱锥个数是$C_4^3C_6^1$；②α内2点，β内2点，确定棱锥个数为$C_4^2C_6^2$；③α内1点，β内3点，确定棱锥个数为$C_4^1C_6^3$。因此总个数为$C_4^3C_6^1+C_4^2C_6^2+C_4^1C_6^3=194$个。

8-2-4　$(1)C_4^2C_4^2=36$

(2)分成三类：①2男3女，共$C_4^2C_5^3$种；②3男2女，共$C_4^3C_5^2$种；③4男1女，共$C_4^4C_5^1$种。因此所求总数为$C_4^2C_5^3+C_4^3C_5^2+C_4^4C_5^1=105$种。

(3)此为有序分组问题共$C_9^3C_6^3C_3^3=1680$种选法。

8-2-5　先回答第一问。千位数字可从1，2，3，4选一个，共C_4^1种，其它三位数字，可从 4 个数字选三个并进行排列。故所求四位数的总数为$C_4^1P_4^3=96$个。

再求奇数个数。分三步：①个位数字有C_2^1种选法；②千位数字有C_3^1种选法；③其它两位数字有P_3^2种选法。奇数总共有$C_2^1C_3^1P_3^2=36$个。

最后求大于2430的四位数。分三类：①千位数字是3的，共有P_4^3个；②千位数字是4的也有P_4^3个；③千位数字是2的仅有1个比2430大，即2431。因此所求总数为$1+2P_4^3=49$个。

8-2-6　$(1)P_5^5=120$

(2)88　因为在(1)中比 43251 小的可分 4 类：①万位数字是 1 或 2 或 3的数，共有$3P_4^4$个；③万位数字是4，千位数字是1或2的共有$2P_3^3$个；③万位数字是4，千位数字是3，百位数字是1的，共有P_2^2个；④万位数字是 4，千位数字是 3，百位数字是 2 的只有 43215 这 1 个。故所求总数为$3P_4^4+2P_3^3+P_2^2+1=87$个。因此43251是第88个数。

(3)45213　因为上面第 88 个是 43251，再比它大的数依次为

43512→43521→45123→45132→45213

因此第 93 个数是 45213。

8-2-7　先求个数。一位数共有P_4^1个，两位数共有P_4^2个，三位数有P_4^3个，四位数有P_4^4个。因此所求自然数总数为$P_4^1+P_4^2+P_4^3+P_4^4=64$个。

再求和。设所有一位数的和为 S_1，则 S_1=1+2+3+4=10。

设所有两位数的和为 S_2，则

$$S_2=3\times10+(2+3+4)+3\times20+(1+3+4)+3\times30$$
$$+(1+2+4)+3\times40+(1+2+3)$$
$$=3(10+20+30+40)+3(1+2+3+4)=330$$

设所有三位数之和为 S_3，则

$$S_3=6(100+200+300+400)+6(10+20+30+40)$$
$$+6(1+2+3+4)=6660$$

设所有四位数之和为 S_4，则

$$S_4=6(1000+2000+3000)+6(100+200+300+400)$$
$$+6(10+20+30+40)+6(1+2+3+4)=66660$$

设所求自然数之和为 S，则

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4=73660$$

8-2-8　先不管 0 是否在首位，考虑一切可能的情况。分三步：取卡
片方法为 C_4^3，排卡片方法为 P_3^3，又确定每张卡片的正反面共有 2^3 种方法。由乘法原理知，一切可能种数为 $C_4^3P_3^3\cdot2^3=192$。

再考虑0在首位的一切可能。类似地可知有 $C_3^2P_2^2\cdot2^2=24$ 种。

故所求总数为 192-24=168。

8-2-9 (1) C_{10}^4

(2)分两类：①取4个白球，有 C_6^4 种；②取3白球1红球，有 $C_6^3C_4^1$ 种。故总数为 $C_6^4+C_6^3C_4^1$。

(3) $C_{10}^4-C_6^4$

(4)分4类：①取4个红球，取法总数为 C_4^4；②取3红球1白球，取法总数为 $C_4^3C_6^1$；③取2红球2白球，取法总数为 $C_4^2C_6^2$；④取1红球3白球，取法总数为 $C_4^1C_6^3$。故所求取法总数为 $C_4^4+C_4^3C_6^1+C_4^2C_6^2+C_4^1C_6^3$。

8-2-10 (1)由于有1个盒需放2个球，这2个球的选法有 C_{n+1}^2 种，再把这两个球看成一个球，并与其余n-1个球作全排列，共有 P_n^n 种放法。故所求总数为 $C_{n+1}^2P_n^n$。

(2)由于球无区别，故只须考虑哪一个盒子进2个球，故共有 $C_n^1(=n)$ 种选法。故所求总数为 n。

(3)这实质上是映射问题。每个球都有 n 种放法，故所求总数为 n^{n+1}。

8-2-11　B　因为三角形两边之和必须大于第三边，因此能组成三角形的三边分别为{3，4，6}，{3，6，7}，{3，7，9}，{4，6，7}，{4，6，9}，{4，7，9}，{6，7，9}，共 7 种。故选 B。

8-2-12　由于前排 4 人已定，后排 3 人已定，可以随便安排其余的13人。前排需要6人，共有 C_{13}^6 种选法；前排10人有 P_{10}^{10} 种排法。由于前排10人确定后，后排10人也就确定了，只须将后排10人排队，也有 P_{10}^{10} 种排法。由乘法原理知，所求排法总数为 $C_{13}^6(P_{10}^{10})^2$。

8-2-13　先设甲在左，乙在右。由于甲乙之间插 4 个人，因而甲的位

置有5种排法，剩下8人有P_8^8种排法。再因为甲与乙的地位是可对换的，即也可能乙在左，甲在右，因此所求一切可能排法总数为$2 \cdot C_5^1P_8^8 = 403200$种。

8-2-14 $(1)C_8^2 - C_6^2 = 13$ $(2)C_2^1C_6^1 + C_6^2 = 27$

$(3)C_2^1C_6^5 = 12$ $(4)C_6^2 = 15$

8-2-15 (1)分两步：①先选成对的一双，共有C_6^1种选法；②再选另外不成对的两只。又分两步：先从剩下的5双中选出2双，再从这两双中可选1只，共有$C_5^2C_2^1C_2^1$种选法。因此所求选法总数为$C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1$。

(2)与(1)中第②步类似，其不同选法总数为$C_6^4\left(C_2^1\right)^4$。

(3)从12只手套中任选4只，不同选法总数为C_{12}^4。再减去上面(2)的结果即为所求。因此至少有一双配对的选法总数为$C_{12}^4 - C_6^4\left(C_2^1\right)^4$。

8-2-16 分两类：①第二节不排课，共有P_3^3种排法；②第三节不排课也有P_3^3种排法。故不同排法总数为$2P_3^3 = 12$种。

8-2-17 能被3整除的三位数，其数字和一定是3的倍数。因而可分

为8类：①由0，1，2组成的三位数，有$C_2^1P_2^2 = 4$个；②由0，1，5组成三位数，也有4个；③由0，2，4组成有4个；④由0，4，5组成也有4个；⑤由1，2，3组成，共$P_3^3 = 6$个；⑥由1，3，5组成有6个；⑦由2，3，4组成有6个；⑧由3，4，5组成有6个。因此一切可能的3位数有4×4+4×6=40个。

再求其中为偶数的个数：①由0，1，2组成能被3整除的偶数有3个；②由0，1，5组成的，有2个；③由0，2，4组成的有4个；④有0，4，5组成的有3个；⑤由1，2，3组成的有2个；⑥由2，3，4组成的有4个；⑦由3，4，5组成的有2个。故所求偶数为3+2+4+3+2+4+2=20个。

8-2-18 设中方队员为x_1，x_2，…x_7，日方队员为y_1，y_2，…y_7。并且把淘汰的双方队员排成一列。比如第1场中方败，第2场中方胜，第3场中方又胜，则被淘汰的队员列为$x_1y_1y_2$。其余类推。

现设中方胜，那么可分7类：①中方1号队员击败日方所有队员，淘汰列为y_1，y_2，…y_7。这种过程只有1种可能；②中方由2号队员最后取胜，那么淘汰列中仅有一个x_1，其它七个均为y_i，而且最后一个是y_7。这时由于x_1有7种可能位置。因此有C_7^1种过程。③中方由3号队员最后获胜，由于淘汰列中有两个x，而且x_1在前、x_2在后，因此有C_8^2种不同过程。同理中方由4号、5号、6号、7号队员最后获胜，分别有：④C_9^3种过程；⑤C_{10}^4种过程；⑥C_{11}^5种过程；⑦C_{12}^6种方程。因此如果中方最后获胜，不同过程共有

$$1 + C_7^1 + C_8^2 + C_9^3 + C_{10}^4 + C_{11}^5 + C_{12}^6 = 1716\text{种}$$

但是也可能是日方最后获胜。

故所求总数为2×1716=3432种。

(三)排列数与组合数的等式、方程与不等式

8-3-1 (1)**原不等式即**$C_{10}^{x}>100$。

由于 0≤x≤10 且 x 为整数，故 x 的允许值集为{0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10}，通过逐一验算(**考虑到**$C_n^m=C_n^{n-m}$，**只须对 x=0，1，2，3，4，5 进行检验**)**知，所求解集为{3，4，5，6，7}。**

(2) **原不等式** $\Leftrightarrow C_{n+1}^{5}>C_{n+1}^{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{5!(n-4)!}>\frac{(n+1)!}{6!(n-5)!}\Leftrightarrow\frac{1}{n-4}>\frac{1}{6}\Leftrightarrow n<10$$

另一方面，

$$\begin{cases}n+1\geq n-4\\ n\geq 6\\ n\geq 5\end{cases}\Leftrightarrow n\geq 6$$

因此原不等式的解集为{6，7，8，9}。

8-3-2 因为 $\frac{(m+k)!}{k!}=C_{m+k}^{k}\cdot m!$，**因此**

原式左端 $=m!\left(1+C_{m+1}^{1}+C_{m+2}^{2}+\cdots+C_{m+n}^{n}\right)$

$$=m!\left(C_{m+1}^{0}+C_{m+1}^{1}+C_{m+2}^{2}+\cdots+C_{m+n}^{n}\right)$$

$$=m!C_{m+n+1}^{n}=\frac{m!(m+n+1)!}{n!(m+1)!}=\frac{(m+n+1)!}{(m+1)\cdot n!}=\text{原式右端}$$

8-3-3 因为

$$C_{x-2}^{y}+C_{x-2}^{y-2}+2C_{x-2}^{y-1}=\left(C_{x-2}^{y}+C_{x-2}^{y-1}\right)+\left(C_{x-2}^{y-2}+C_{x-2}^{y-1}\right)$$

$$=C_{x-1}^{y}+C_{x-1}^{y-1}=C_{x}^{y}$$

于是原不等式组变为

$$\frac{C_x^{y-1}}{C_x^{y}}=\frac{3}{5}\text{，且}\frac{C_x^{y}}{C_x^{y+1}}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=3\end{cases}$$

8-3-4 (1)**因为**$C_{x+2}^{x-2}+C_{x+2}^{x-3}=C_{x+3}^{x-2}=C_{x+3}^{5}$，**所以**

原方程 $\Leftrightarrow 10C_{x+3}^{5}=P_{x+3}^{3}\Leftrightarrow\frac{10\cdot(x+3)!}{5!(x-2)!}=\frac{(x+3)!}{x!}$

$\Leftrightarrow x^2-x-12=0\Leftrightarrow x=-3$(**舍去**)，$x=4$

(2)**原方程** $\Leftrightarrow\frac{n!(5-n)!}{5!}-\frac{n!(6-n)!}{6!}=\frac{7\cdot n!(7-n)!}{10\cdot 7!}$

$\Leftrightarrow n^2-23n+42=0\Leftrightarrow n=2$ **或** $n=21$(**舍去**)

8-3-5 $\begin{cases}5C_{x+2}^{y}=3C_{x+2}^{y+1}\\ 3C_{x+2}^{y+1}=3C_{x+2}^{y+2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-8y=-1\\ x-2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=2\end{cases}$

从而$C_x^y=C_5^2=10$。

8-3-6 (1) $\frac{n+1}{m+1}C_{m+1}^{n+1}=\frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{(m+1)!}{(n+1)!(m-n)!}=C_m^n$

$$
\begin{aligned}
&(2)C_{m+k}^{k-1}-\left(C_{m+k-1}^{k-1}+C_{m+k-2}^{k-2}+\cdots+C_{m+1}^{1}+C_{m}^{0}\right)\\
&\quad=\left(C_{m+k}^{k-1}-C_{m+k-1}^{k-1}\right)-C_{m+k-2}^{k-2}-\cdots-C_{m+1}^{1}-C_{m}^{0}\\
&\quad=\left(C_{m+k-1}^{k-2}-C_{m+k-2}^{k-2}\right)-\cdots-C_{m+1}^{1}-C_{m}^{0}\\
&\quad=C_{m+k-2}^{k-3}-C_{m+k-3}^{k-3}-\cdots-C_{m+1}^{1}-C_{m}^{0}\\
&\quad=\cdots=C_{m+2}^{1}-\left(C_{m+1}^{1}+C_{m}^{0}\right)=0
\end{aligned}
$$

移项后即得欲证等式。

8-3-7 (1)因为 P_{10}-9P_9-8P_8=8！(90-81-8)=8！，所以原式=1。

(2)P_8-8P_7+7P_6=6！(56-56+7)=P_7

8-3-8 原式 $=\left(\frac{1}{C_2^2}+\frac{1}{C_3^2}\right)+\frac{1}{C_4^2}+\frac{1}{C_5^2}+\cdots+\frac{1}{C_n^2}$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{4}{3}+2\left[\frac{1}{4\times 3}+\frac{1}{5\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\right]\\
&=\frac{4}{3}+2\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]\\
&=\frac{4}{3}+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)=\frac{4}{3}+\frac{2n-6}{3n}=\frac{2n-2}{n}
\end{aligned}
$$

8-3-9 设男生为 x 人，那么女生为 8-x 人。由题意得

$$C_x^2\cdot C_{8-x}^1P_3^3=180\Leftrightarrow x^3-9x^2+8x+60=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-6)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=5\text{或}x=6\text{或}x=-2(\text{舍去})$$

因此这小组男生 5 人，女生 3 人，或者男生 6 人，女生 2 人。

8-3-10 先用数学归纳法证明：

$2^{n-1}\geq n(n\geq 3)$ (i)

当 n=3 时，$2^{3-1}\geq 3$。结论成立。

归纳假设结论对 n=k 成立，即 $2^{k-1}\geq k$。则当 n=k+1 时，

$2^{(k+1)-1}=2\cdot 2^{k-1}\geq 2k>k+1$

从而结论对 k+1 成立。

故(i)对 n≥3 的自然数都成立。

回到原题，有

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)}=2^1\cdot 2^2\cdots 2^{n-1}>2\cdot 3\cdots n=P_n\quad(n\geq 3)$$

8-3-11 $\because (-1)^{2x+9}\frac{1}{6}P_{x+2}^5=-\frac{1}{6}(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$

$$1+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{x-1}^2=C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{x-1}^2$$

$$=C_x^3=\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$\therefore f(x)=-(x+2)(x+1)=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

又由 x+2≥5 及 x-1≥2 得 x≥3。

由于$f(x)$在$\left(-\frac{3}{2}，+\infty\right)$内是单调减少的，因此当$x=3$时，$f(x)$有最大值，值为 f(3)=-20。

8-3-12　$(1)C_n^r$

(2)因为1必须取出，剩下$r-1$个元素的取法共有C_{n-1}^{r-1}种。故总数为C_{n-1}^{r-1}。

(3)设最小数为 k，因此 1，2，…，k-1 都排斥在外，k 必须在内，剩下$r-1$个元素的取法共有C_{n-k}^{r-1}种。故所求总数为C_{n-k}^{r-1}。

(4)由上可知，将上面(1)中的总数C_n^r，分成$n-r+1$类：

第1类是以1为最小数的r个元素的子集，共有C_{n-1}^{r-1}个；

第2类是以2为最小数的r个元素的子集，共有C_{n-2}^{r-1}个；

……

第$n-r+1$类是以$n-r+1$为最小数的r个元素的子集，共有$C_{n-(n-r+1)}^{r-1}=C_{r-1}^{r-1}=1$个。

那么 $C_n^r=C_{n-1}^{r-1}+C_{n-2}^{r-1}+\cdots+C_{r-1}^{r-1}$

设这些子集中的每个子集中的最小数之和为 S，那么

$$
\begin{aligned}
S&=1\cdot C_{n-1}^{r-1}+2\cdot C_{n-2}^{r-1}+\cdots+(n-r+1)\cdot C_{r-1}^{r-1}\\
&=\left(C_{n-1}^{r-1}+C_{n-2}^{r-1}+\cdots+C_{r-1}^{r-1}\right)+\left(C_{n-2}^{r-1}+C_{n-3}^{r-1}+\cdots+C_{r-1}^{r-1}\right)+\cdots+C_{r-1}^{r-1}\\
&=C_n^r+C_{n-1}^r+\cdots+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}
\end{aligned}
$$

从而　$F(n，r)=\frac{S}{C_n^r}=\frac{C_{n+1}^{r+1}}{C_n^r}=\frac{n+1}{r+1}$

(四)有附加条件的排列与组合及其应用

8-4-1 (1)$P_7^2P_6^6$ 先从除甲外的7名学生中，选两人排在排头和排尾，再将剩下6人作排列。

(2)$P_8^8P_3^3$ 设想位置已编号，由于指定3人必须站在一起，那么3人中最左边的人只能站第1号至第8号位置之一，即共有C_8^1种站法。这3人团内部又有P_3^3种排法，剩下7人有P_7^7种排法。因此所求总数为$C_8^1P_3^3P_7^7=P_8^8P_3^3$。

(3)$P_{n-m+1}^{n-m+1}P_m^m$

(4)$2P_m^mP_{n-m}^{n-m}$ 分两步：①m人可选左边或是右边，有C_2^1种选法；②m人团内部有P_m^m种排法，剩下n-m人有P_{n-m}^{n-m}种排法。由乘法原理即得。

(5)$P_{10}^{10}P_{11}^5$ 分两步：①男生有P_{10}^{10}种排法；②男生的空隙(把全体男生队伍的左边和右边也各视作空隙)有11个，5个女生插空有P_{11}^5种排法，由乘法原理即得。

8-4-2 (1)先放小白球，两个不同小白球放入5个位置，不同放法总
数为P_5^2。剩下再放小红球，由于小红球都相同，只有1种方法。故所求总数为$P_5^2=20$。

(2)两个小白球共有C_5^2种选位置的方法，白球位置选定后，红球的位置就确定了，故所求总数为$C_5^2=10$种。

(3)P_{n+m}^n

(4)C_{n+m}^m

(5)小红球的选法有C_n^k种，小白球的选法有C_m^l种，k+l个球的排法有P_{k+l}^{k+l}种。故所求总数为$C_n^kC_m^lP_{k+l}^{k+l}$。

8-4-3 (1)把两个空位看成一个位置，设想这个位置也停一辆车，这

故 $V=(\frac{1}{2}AB\cdot AC)\cdot C_1H=2\sqrt{15}$

(2)把10本数学书看成一捆，9本外语书，8本语文书也各看成1捆。这3捆之间共有P_3^3种排列法。每1捆内部分别有P_{10}^{10}，P_9^9，P_8^8种排列法。

故所求总数为$P_3^3P_{10}^{10}P_9^9P_8^8$。

(3)保持原有6本书的顺序不变，并不排斥前后，中间可以插入书。分三步：①原有书共有7个间隔(这6本书的左、右边各视为一个间隔)，因此第1本书共有C_7^1种放法。②第2本书有C_8^1种放法(因为7本书有8个间隔)；③第3本书有C_9^1种放法。

故所求总数为9×8×7。

8-4-4 分三类：①决出初赛各小组前2名，共需进行$6C_4^2$场比赛；②进行复赛，需进行$3C_4^2$场比赛；③进行决赛，需进行C_3^2场比赛。

故所求场数为$6C_4^2+3C_4^2+C_3^2=57$。

8-4-5 (1)分两步：①先选千位数字有C_5^1种可能(即3，4，5，6，

7之一)；②再确定其他三位数字，有P_9^3种可能。

故所求总数为$C_5^1P_9^3=2520$。

(2)分两类：①当千位数为3，5，7之一时，那么千位数有C_3^1种选法；再选个位数C_4^1种选法；还剩下8个数码排十位与百位数字有P_8^2种方法。总共有$C_3^1C_4^1P_8^2$种方法；②千位数字为4，6之一时，个位数字有C_5^1种选法；其他两位数字有P_8^2种选排法，总共为$2C_5^1P_8^2$种方法。

故所求总数为$C_3^1C_4^1P_8^2+C_2^1C_5^1P_8^2=1232$。

(3)先考虑 3000 在内，再分四步：①千位数字有 5 种选法(3，4，5，6，7 之一)；②百位数字有 10 种选法；③十位数字也有 10 种选法；④个位数字有 5 种选法。总共为 $5^2\times10^2$ 个，但必须去掉 3000 这一个数。故所求总数为 2499 个。

8-4-6　由于第 6 次发现第 4 个二等品，因此前 6 次测试一定是发现 2 个一等品与 4 个二等品。而且第 6 次是二等品，相当于除去最后一个二等品外，其他 5 个元素(即 5 件产品)作全排列。

故所求总数为$C_4^3C_6^2P_5^5$。

8-4-7　(1)每组各任取两条平行线都可以组成一个矩形，因此共有$C_{19}^2C_{19}^2=29241$个矩形。

(2)设相邻两条平行线间的距离为 1,那么在每组 19 条平行线中间隔距离为1的平行线共有18对，因此边长为1的正方形共有$C_{18}^1C_{18}^1$个。类似边长为2的正方形共有$C_{17}^1C_{17}^1$个，…，边长为18的正方形有$C_1^1C_1^1$个。因此位置不同的正方形的个数为 $18^2+17^2+\cdots+2^2+1^2=2109$ 个。

(3)由于上述 18 类中，同一类的正方形面积都是相等的，它们的面积分别等于 1^2，2^2，…，18^2…。因此不同面积正方形共有 18 种。

8-4-8　(1)分两类：①取出的数全是正数，不同取法总数为

$$C_{10}^2+C_{10}^3+\cdots+C_{10}^{10}=\left(C_{10}^0+C_{10}^1+\cdots+C_{10}^{10}\right)-\left(C_{10}^0+C_{10}^1\right)=2^{10}-11$$

②取出偶数个负数，任意个正数，不同取法总数为

$$\begin{aligned}&C_{10}^2\left(C_{10}^0+C_{10}^1+\cdots+C_{10}^{10}\right)+C_{10}^4\left(C_{10}^0+C_{10}^1+\cdots+C_{10}^{10}\right)+\cdots\\&\quad+C_{10}^{10}\left(C_{10}^0+C_{10}^1+\cdots+C_{10}^{10}\right)\\&=\left(C_{10}^2+C_{10}^4+\cdots+C_{10}^{10}\right)2^{10}=\left(2^9-1\right)2^{10}=2^{19}-2^{10}\end{aligned}$$

故所求总数等于$(2^{10}-11)+(2^{19}-2^{10})=2^{19}-11$。

(2)分两类：①取出全是正数，不同取法总数为

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-(n+1)$$

②取出偶数个负数，任意个正数，不同取法总数为

$$\left(C_m^2+C_m^4+\cdots\right)\left(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n\right)=\left(2^{m-1}-1\right)2^n=2^{m+n-1}-2^n$$

因此不同取法总数为

$$\left[2^n-(n+1)\right]+\left(2^{m+n-1}-2^n\right)=2^{m+n-1}-(n+1)$$

8-4-9 (1)分两步：①先选医生，共有$C_6^3C_4^2$种选法；②再分地方，共有P_5^5种分法。

故所求总数为$C_6^3C_4^2P_5^5=14400$。

(2)分两步：①先分医生。又分两类：第1类两组人数分别为1女4男和3女2男。不同分法总数是$C_4^1C_6^4$；第2类两组人数都是3男2女。不同分法总数是$\frac{1}{2!}C_4^2C_6^3$。故医生不同分法总数为$C_4^1C_6^4+\frac{1}{2}C_4^2C_6^2=120$种。

②再分地方。两组分两地共有2种方法。

故所求总数为$2\left(C_4^1C_6^4+\frac{1}{2}C_4^2C_6^3\right)=240$。

8-4-10 B 从语文，数学，物理3门中选排两门在上午，有P_3^2种选排法，下午是剩下1门与体育的全排列，有P_2^2种排法。故总数为$P_3^2P_2^2$。

8-4-11 A 因为在 x^+上选两上点，y^+上选两个点，就可得到在第一

象限内的唯一一个交点。从而交点最大数为$C_{10}^2C_5^2=450$。

8-4-12 (1)4个男生进4列车共有P_4^4种方法，4个女生也有P_4^4种进法。故所求总数为$P_4^4P_4^4=576$种。

(2)分两步：①从4列车中，先选2列安排男生，车有C_4^2种选法；再选男生又有C_4^2种选法，因而男生进车总数为$C_4^2C_4^2$种；②女生车已定，人的安排法有C_4^2种。

故所求总数为$C_4^2C_4^2C_4^2=216$。

(3) $C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2=2520$

(2)证明$D_1G\perp$面B_1EF．并可求得$S_{\triangle AB_1C}=2$，$D_1G=\sqrt{3}$，因此，

目，有P_7^7种排法；③学生节目之间有6个空，教师节目插空，共有P_6^3种插法。

故所求总数为$C_{10}^7C_5^3P_7^7P_6^3=725760000$。

8-4-14 分两类：①含两个1，其余的数有C_9^2种选法；其中每一种再与非千位的1一起，组成3个数字的全排列，因此这类总数是$C_9^2P_3^3$。②只含一个1，(必在首位)。两个相同数字取法有C_9^1种；另一个数字取法有C_8^1种，而这个数字的位置有C_3^1种取法，故这类总数为$C_9^1C_8^1C_3^1$个。

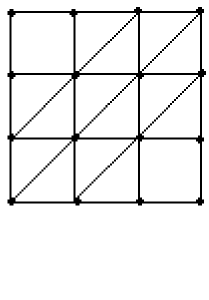
故所求总数为$C_9^2P_3^3+C_9^1C_8^1C_3^1=432$。

8-4-15 如下图所示，这样的整数点共有16个，共有$C_{16}^3=560$个三点组。但不是所有三点组都能构成三角形，要去掉下面几类共线的三点组：①有4条水平线，4条垂线，每条上有4个点，这8条线共含有三

11-1-13 设AI的延长线交BC于D，从而$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$，设点D的坐标

$1+C_4^3+1=6$；③斜率为-1的也有3条，含有3点组的个数也是6。

故所求三角形个数为560-32-6-6=516。



8-4-16 (1) 先给A，有C_{12}^3种取法；再给B，有C_9^3种取法；再给C，有C_6^3种取法：再给D，有C_3^3种取法。由乘法定理知，所求不同分法总数为$C_{12}^3C_9^3C_6^3C_3^3=369600$。

(2) 先将四堆编号，即把各堆看成是有区别的，按上面(1)，不同分法有 369600 种。而现在是分堆，堆与堆的区别就消失了，因此要除以 4！，故所求分堆方法总数为$\frac{369600}{4!}=15400$。

(3) 先将数字4，4，2，2作全排列，其不同排法总数为$\frac{4!}{2!2!}$。对于每一排列，就是一种分配方法，例如 2424，就让 A，C 各得 2 本，B，D各得4本。于是对于每一排列，分书的方法各有$C_{12}^4C_8^4C_4^2C_2^2$种。再由乘法定理，所求总数为

$$C_{12}^4C_8^4C_4^2C_2^2\cdot\frac{4!}{2!2!}=1625400$$

(4)先将堆编号，一切分法总数为$C_{12}^4C_8^4C_4^2C_2^2$种。再除去编号，即再除以 2！×2！。

故所求分法总数为$\frac{C_{12}^4C_8^4C_4^2C_2^2}{2!\ 2!}=51975$。

(5) 将 5，4，2，1 作全排列，共有 4！种方法。对于一个排列，如 4125，就让 A，B，C，D 分别得 5 本，4 本，1 本，2 本。

因而所求分法总数为

$$\frac{12!}{5!\ 4!\ 2!\ 1!}\cdot 4!=1995840。$$

(6) 与(5)类似，只是所分 4 堆没有区别，即不须像(5)中那样将 5，4，2，1 作全排列。因此所求分法总数为

$$\frac{12!}{5!\ 4!\ 2!\ 1!}=83160$$

(五)二项式定理

8-5-1 (1) -189 $T_{r+1}=C_7^r 3^{7-r}(-x)^r$

令$r=5$，得$T_6=(-1)^5 3^2 C_7^5 x^5=-189x^5$。

(2) -20 因为原式$=\left[\left(|x|+\frac{1}{|x|}\right)-2\right]^3$，通项

$$T_{r+1}=C_3^r\left(|x|+\frac{1}{|x|}\right)^{3-r}(-2)^r$$

而$\left(|x|+\frac{1}{|x|}\right)^{3-r}$的通项公式为

$$C_{3-r}^k|x|^{3-r-k}\left(\frac{1}{|x|}\right)^k=C_{3-r}^k|x|^{3-r-2k}$$

故 $$T_{r+1}=C_3^r C_{3-r}^k(-2)^r|x|^{3-r-2k} \qquad (i)$$

令 3-r-2k=0，并考虑到 r∈{0，1，2，3}，k∈{0，1，…，3-r}，得 r=1，k=1 或 r=3，k=0，将它们代入(i)式，求得常数项为

$$C_3^1C_2^1(-2)+C_3^3(-2)^3=-20$$

(3) -6 因为$(1+x+x^2)(1-x)=1-x^3$，故

原式$=(1-x^3)(1-x)^4$。

故$(1-x)^4$中的x^2项与$1-x^3$中的$-x^3$相乘才能得到含x^5的项。

而$(1-x)^4$的通项为

$$T_{r+1}=C_4^r(-x)^r$$

令$r=2$得$T_3=C_4^2(-x)^2=6x^2$。

于是可知展开式中x^5的系数是-6。

(4)-20 因为原式是等比数列，公比为-(x-1)。因此

原式$=\dfrac{(x-1)\left[1+(x-1)^5\right]}{1+(x-1)}=\dfrac{(x-1)+(x-1)^6}{x}$

$(x-1)^6$中含x^3的系数为$C_6^3(-1)^3=-20$。它就是原式中x^2的系数。

8-5-2 B $f(x)=C_5^0(2x+1)^5+C_5^1(2x+1)^4(-1)$

$+C_5^2(2x+1)^3(-1)^2+\cdots+C_5^5(2x+1)^0(-1)^5$

$=\left[(2x+1)-1\right]^5=(2x)^5=32x^5$

8-5-3 2^{120} $a=C_{10}^0+C_{10}^1+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}$，$b=C_{10}^3$

$(1+x)^{2^{10}}(2-x)^{C_{10}^3}$的常数项为$2^{C_{10}^3}=2^{120}$。

8-5-4 B 因为$T_{r+1}=C_{100}^r 3^{\frac{100-r}{2}} 2^{\frac{r}{3}} x^{100-r}$，按题意有

$$\begin{cases}\dfrac{100-r}{2}\in Z\\ \dfrac{r}{3}\in Z\\ 0\le r\le 100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=6k\\ 0\le r\le 100\end{cases}\Leftrightarrow k\in\{0，1，\cdots，16\}$$

因此有理项共有 17 项。

8-5-5 $T_7=C_n^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^{n-6}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6$，$T_{n-5}=C_n^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^6\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{n-6}$

由题意有

$$\frac{1}{6}=\frac{T_7}{T_{n-5}}\Leftrightarrow 3^{\frac{n}{3}-4}2^{\frac{n}{3}-4}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow 6^{\frac{n}{3}-4}=6^{-1}\Leftrightarrow n=9$$

所以 $T_7=C_9^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^{9-6}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6=\dfrac{56}{3}$

8-5-6 (1) 18 $T_{13}=C_n^{12}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{n-12}\left(2\sqrt{x}\right)^{12}=C_n^{12}2^{12}x^{18-n}$

令$18-n=0$ 得$n=18$。

(2)10 $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=512=2^9=2^{n-1}\Leftrightarrow n=10$

8-5-7 设 z=cosθ-isinθ，那么

$$z^n=\cos\theta-i\sin\theta \qquad (i)$$

另一方面，

$$z^n=\left[2\cos\theta-(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^n=\left(2\cos\theta-\bar{z}\right)^n$$

$$=(2\cos\theta)^n-C_n^1(2\cos\theta)^{n-1}\bar{z}+\cdots+(-1)^rC_n^r(2\cos\theta)^{n-r}\bar{z}^r+\cdots+(-1)^n\bar{z}^n \qquad (ii)$$

比较(i)，(ii)两式的实部，并注意$\bar{z}^r=\cos r\theta+i\sin r\theta$，即得所需证等式。

8-5-8 $T_{r+1}=C_{28}^r(2x)^{28-r}(-3y)^r=C_{28}^r2^{28-r}(-3)^rx^{28-r}y^r$

设T_{r+1}的系数为a_{r+1}，且$|a_{r+1}|$的最大项为第$k+1$项，那么

$$|a_{k+1}|\ge|a_k|\Leftrightarrow C_{28}^k2^{28-k}3^k\ge C_{28}^{k-1}2^{28-k+1}3^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow 2k\le 3(28-k+1)\Leftrightarrow k\le 17\frac{2}{5}$$

且 $|a_{k+1}|\ge|a_{k+2}|\Leftrightarrow k\ge 16\dfrac{2}{5}$

因此 k=17，即等 18 项的系数绝对值最大。

8-5-9 依题意有

$$2\left(C_n^1\cdot\frac{1}{2}\right)=C_n^0+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow n^2-9n+8=0$$

$$\Leftrightarrow n=1(\text{舍去})\text{或}n=8$$

于是原二项式展开式的通项为

$$T_{r+1}=C_8^r\left(\sqrt{\pi}\right)^{8-r}\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^r=C_8^r\left(\frac{1}{2}\right)^r x^{4-\frac{3}{4}r}$$

令$4-\frac{3}{4}r=1$，得$r=4$。

所以含x项为$C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 x=\frac{35}{8}x$。

8-5-10　令 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{13}x^{13}$

(1) $f(1)=c_0+c_1+\cdots+c_{13}=(1-2\times1)^5(1+1+1^2)^4=-81$

(2) $f(-1)=c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots-c_{13}$

$=[1-2(-1)]^5[1+(-1)+(-1)^2]^4=243$

$f(1)-f(-1)=2(c_1+c_3+\cdots+c_{13})=-324$

$\Leftrightarrow c_1+c_3+\cdots+c_{13}=-162$

8-5-11　(1)二项式各项系数和为

$f(1)=(1+3)^n=4^n$

展开式中各项的二项式系数和为 2^n。由题意知

$$4^n-2^n=992\Leftrightarrow\left(2^n\right)^2-2^n-992=0$$

$\Leftrightarrow\left(2^n+31\right)\left(2^n-32\right)=0\Leftrightarrow 2^n=-31$(舍去)或$2^n=32\Leftrightarrow n=5$

由于 $n=5$ 为奇数，展开式中二项式系数最大项为中间两项，它们是

$$T_3=C_5^2\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3\left(3x^2\right)^2=90x^6，T_4=C_5^3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(3x^2\right)^3=270x^{\frac{22}{3}}$$

(2)展开式通项公式为

$$T_{r+1}=C_5^r\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{5-r}\left(3x^2\right)^r=C_5^r3^r x^{\frac{2}{3}(5-r)+2r}$$

由假设有

$$\begin{cases}C_5^r3^r\geq C_5^{r-1}3^{r-1}\\C_5^r3^r\geq C_5^{r+1}3^{r+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3}{r}\geq\frac{1}{5-r+1}\\\frac{1}{5-r}\geq\frac{3}{r+1}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{14}{4}\leq r\leq\frac{18}{4}\Leftrightarrow r=4$$

因此展开式系数的最大项为

$$T_5=C_5^4x^{\frac{2}{3}}\left(3x^2\right)^4=405x^{\frac{26}{3}}$$

注　要注意展开式的二项式系数与展开式中某项的系数之区别。

8-5-12　$(x-4)^n$ 中含 x^s，x^{s-1}，x^{s-2} 的系数分别为

$C_n^s(-4)^s$，$C_n^{s-1}(-4)^{s-1}$，$C_n^{s-2}(-4)^{s-2}$

从而原式中含 x^s 的系数为

$$(-2)C_n^s(-4)^s+3C_n^{s-1}(-4)^{s-1}+5C_n^{s-2}(-4)^{s-2}$$

8-5-13 通项为$T_{r+1}=C_{50}^{r}2^{\frac{r}{2}}$**。依题意有**

$$\begin{cases}T_{r+1}\geq T_r\\T_{r+1}\geq T_{r+2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_{50}^{r}2^{\frac{r}{2}}\geq C_{50}^{r-1}2^{\frac{r-1}{2}}\\C_{5}^{r}2^{\frac{r}{2}}\geq C_{50}^{r+1}2^{\frac{r+1}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow r=29$$

故最大项为第30**项，**$T_{30}=C_{50}^{29}2^{\frac{29}{2}}$**。**

8-5-14 $7^n=(1+6)^n=1+C_n^1 6+C_n^2 6^2+\cdots+C_n^n 6^n$

$$=1+6n+C_n^2 6^2+\cdots+C_n^n 6^n$$

$$\Leftrightarrow 7^n-6n-1=C_n^2 6^2+\cdots+C_n^n 6^n=6\left(C_n^2 6+\cdots+C_n^n 6^{n-1}\right)$$

注　本例也可用数学归纳法证明。

8-5-15　因为$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$**，因此**

$$z=4nC_{4n-1}^{0}+4nC_{4n-1}^{1}i+4nC_{4n-1}^{2}i^2+\cdots+4nC_{4n-1}^{4n-1}i^{4n-1}$$

$$=4n(1+i)^{4n-1}=4n\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{4n-1}$$

$$=n\cdot 2^{\frac{4n+3}{2}}\left(\cos\frac{4n-1}{4}\pi+i\sin\frac{4n-1}{4}\pi\right)$$

故　$|z|=n2^{\frac{4n+3}{2}}$**，** $\arg z=\begin{cases}\dfrac{7\pi}{4} & (\text{当}n=2m\text{时})\\\dfrac{3\pi}{4} & (\text{当}n=2m+1\text{时})\end{cases}$

8-5-16 (1)**在**$(ax+1)^9$**展开式中**x^3**项的系数为**$C_9^6a^3$**，在**$(x+2a)^8$**展开式中**x^3**项的系数为**$C_8^5(2a)^5$**，由题意有**

$$C_9^6a^3=C_8^5(2a)^5\Leftrightarrow 64a^5=3a^3\Leftrightarrow a^2=\frac{3}{64}\Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{3}}{8}$$

当$a=\frac{\sqrt{3}}{8}$**时，**

$$1+a+a^2+\cdots=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{8}}=\frac{64+8\sqrt{3}}{61}$$

当$a=-\frac{\sqrt{3}}{8}$**时，**

$$1+a+a^2=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{8}}=\frac{64-8\sqrt{3}}{61}$$

(2) $|a+\sqrt{63}ai|=\sqrt{64a^2}=\sqrt{3}$

8-5-17　设在第 n 项出现，那么

$$\begin{cases}\dfrac{3}{4}=\dfrac{C_n^{k-1}}{C_n^k}\\[2ex]\dfrac{4}{5}=\dfrac{C_n^k}{C_n^{k+1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3n-4k=-3\\4n-9k=5\end{cases}\Leftrightarrow n=62，k=27$$

即第62行，此时$C_{62}^{26}：C_{62}^{27}：C_{62}^{28}=3：4：5$。

8-5-18 设$a_1=C_n^k$，$a_2=C_n^{k+1}$，$a_3=C_n^{k+2}$，$a_4=C_n^{k+3}$，那么

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}=\frac{C_n^k}{C_n^k+C_n^{k+1}}=\frac{C_n^k}{C_{n+1}^{k+1}}=\frac{k+1}{n+1}$$

类似可得

$$\frac{a_2}{a_2+a_3}=\frac{k+2}{n+1}，\quad\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{k+3}{n+1}$$

所以 $$\frac{a_1}{a_2+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2k+4}{n+1}=2\left(\frac{a_2}{a_2+a_3}\right)$$

8-5-19 设$(1+x)^{4m+2}$的奇数项的和为S_1，那么

$$S_1=C_{4m+2}^0+C_{4m+2}^2i^2+\cdots+C_{4m+2}^{4m}i^{4m}+C_{4m+2}^{4m+2}i^{4m+2}$$

由i的性质与$C_n^m=C_n^{n-m}$，可求得$S_1=0$。

设$(a-b)^m$展开式中含b的奇次项的系数和为S_2，那么

$$S_2=-\left(C_m^1+C_m^3+C_m^5+\cdots\right)=-2^{m-1}$$

设$(a+b)^{10}$展开式二项式系数和为S_3，那么$S_3=2^{10}$。

由题设有

$$S_1-S_2=S_3\Leftrightarrow 2^{m-1}=2^{10}\Leftrightarrow m=11$$

下面用数学归纳法证明：11可整除$2^{6n-3}+3^{2n-1}$。

当n=1时，$2^{6n-3}+3^{2n-1}=11$，结论显然成立。

归纳假设结论对n=k成立，即$2^{6k-3}+3^{2k-1}=11t$，其中$t\in Z$，则当n=k+1时，有

$$\begin{aligned}&2^{6(k+1)-3}+3^{2(k+1)-1}\\&=2^{6k-3}\cdot2^6+3^{2k-1}\cdot3^2\\&=(11t-3^{2k-1})2^6+9\cdot3^{2k-1}\\&=11t\cdot2^6+3^{2k-1}(9-64)=11(64t-5\times3^{2k-1})\end{aligned}$$

即结论对n=k+1也成立。

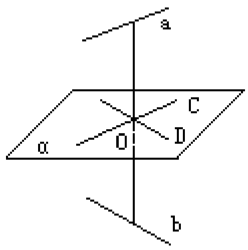
从而结论对$n\in N$都成立。

第九部分　直线和平面

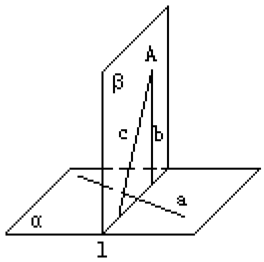
(一)惟一性命题

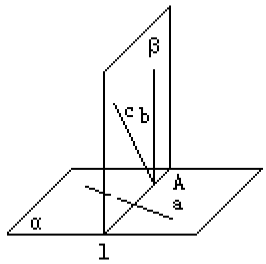
9-1-1　由平行线定义证存在性，利用惟一性公理(公理三)证明惟一性。

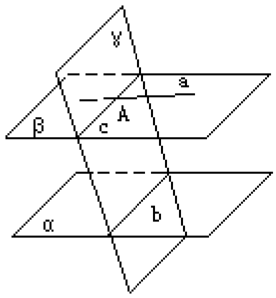
9-1-2　如下图，过异面直线 a，b 公垂线段中点 O 作 OC∥a，OD∥b，过相交直线 OC 与 OD 的平面α符合题意。存在性得证。然后用同一法证惟一性。



9-1-3 在α内任取一直线a，过点A作平面β⊥α，设β∩α =l。在β内过 A 作 b⊥l，则 b⊥α，然后用同一法证惟一性。(如下左图和下中图)。



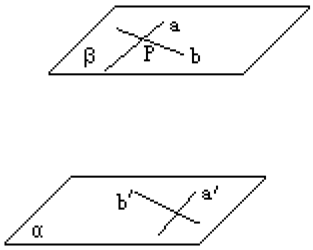


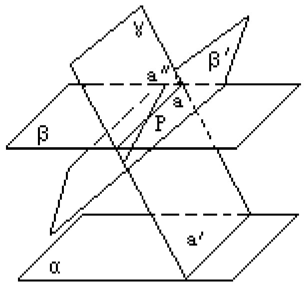


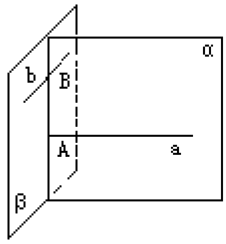
9-1-4　设 A∈a，在α内取与直线 a 不平行的直线 b。设由点 A 与直线 b 所确定的平面为γ，在γ内过 A 作直线 c∥b，则由 a，c 确定的平面β∥α(如上右图)。然后利用反证法以及平面和平面平行的性质定理证明惟一性。

9-1-5　存在性：在α内任作两相交直线 a′，b′，过 P 分别作 a′，b′的平行线 a，b，则 a，b 可确定一个平面β。(如下左图)。由作图知β∥α，即满足条件的平面存在。

惟一性：如果β′也是满足条件的一个平面，即β′过 P 点且β′∥α。由存在性的作图知 a∥a′，设 a，a′确定的平面为γ，则γ∩α=a′。设γ∩β′=a″（如下中图。）由β′∥α，得a″∥a′，又 a∥a′，a″，a 同时过点 P，故 a″与 a 重合(过已知直线外一点可以并且只可以作一条直线和已知直线平行)，因此β′过 a。同理β′过 b，但相交直线 a，b 确定一个平面，所以β′与β重合。惟一性得证。







9-1-6 存在性：在a上任取一点A，则由$A \notin b$，点A和直线b可确定平面β。在β内作AB⊥b于B。设由a和AB确定的平面为α(如上右图)，易知b⊥α，即经过a而和b垂直的平面α存在。

惟一性：假设过a除平面α外还有平面γ也和b垂直，设垂足为O点，因为α，γ不重合，所以$O \notin AB$。连结OA，则b⊥OA。这样，在同一个平面β内，过一点A有两条直线AB和OA都垂直于同一条直线b，这是不可能的。所以过a和b垂直的平面只有一个。

9-1-7　过斜线上任一点作已知平面的垂线，则由这两条相交直线确定的平面和已知平面垂直。可用反证法证惟一性。

(二)共点、共线与共面

9-2-1　C

9-2-2　C

9-2-3　D

9-2-4　证 P，Q，R 都在平面 ABC 与平面α的交线上。

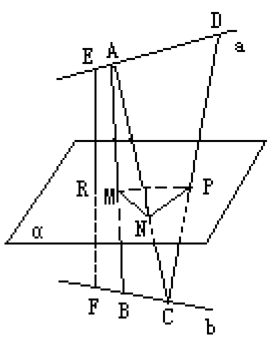
9-2-5　由已知的三对相交直线可确定三个平面 B_1BP，A_1AQ 与 ABB_1A_1。由平面$B_1BP\cap$平面$ABB_1A_1=BB_1$，$AA_1\cap BB_1=R$，知R是这三个平面的公共点。再证 CC_1 是其中某两个平面交线即可。

9-2-6　设直线$a\cap$直线$l=A$，a与l确定平面α，点M是直线l上异于点 A 的任意一点，直线 MN∥a。只要证由 MN 与 a 确定的平面β与α重合即可。

9-2-7　任取其中三点，因这三点不共线，故可确定一平面α，再证其余各点均在α内。

9-2-8　先由其中两条过点 A 且与 l 垂直的直线确定一个平面α，然后证过 A 且垂直于 l 的其他直线在α内。

9-2-9　如下图，a，b 是异面直线，A，D 是 a 上任意两点，B，C 是 b 上任意两点，AB，AC，CD 的中点分别为 M，N，P。设 M，N，P 确定的平面为α。易知 a∥α，b∥α。设 EF 是端点分别在 a，b上的任一线段，$EF\cap\alpha=R$，证R也是EF的中点。



9-2-10　先证 MFNE 为平行四边形，则 EF，MN 的交点 O 是 EF 的中点。再证 PQ 也过 O 点。

9-2-11　由 P 在 EH 上知 P 在平面 ABD 内，同理 P 在平面 BCD 内，故 P 在平面 ABD 与平面 BCD 的交线 BD 上。

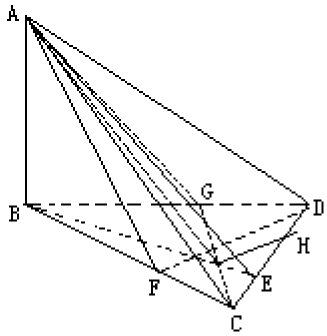
9-2-12　由 AA′⊥β，BB′⊥β得，AA′∥BB′。设 AA′，BB′确定平面γ，可知γ⊥α。又β′∈γ，B′C⊥α得B′C⊂γ，于是C∈γ。又C∈α，$\alpha\cap\gamma=AB$，故C∈AB。

9-2-13　先证 AB 与 A_1B_1 在同一平面内，再证 AB 与 A_1B_1 不平行，从而知它们必相交。同理，BC 与 B_1C_1，AC 与 A_1C_1 分别相交。然后证其交点在平面 ABC 与平面 $A_1B_1C_1$ 的交线上。

9-2-14　证 P，Q，R 都在平面 ABC 与平面 $A_1B_1C_1$ 的交线上。

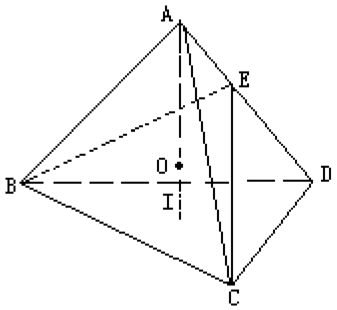
9-2-15　如下图。在平面 BCD 内，作 BE⊥CD，垂足为 E；过 D 作 DF⊥BC，垂足为 F；连结 AE，AF。则平面 ABE⊥平面 ACD，平面 AFD⊥平面 ABC。设平面 ABE 与平面 AFD 的交线为 AH。连 CH 并延长交 BD 于 G。由平

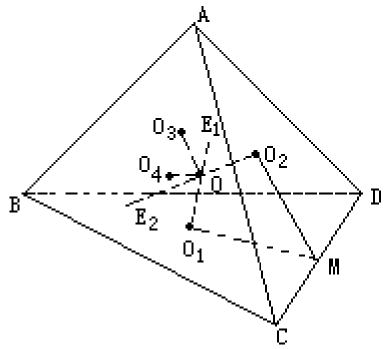
面几何知识知 CG⊥BD。又 CG⊥AB，得 CG⊥平面 ABD，于是平面 CAG⊥平面 ABD。故题中所述三垂面共线于 AH。



9-2-16　若两个二面角的平分面交于 AI，根据 AI 上的点到二面角的两个面距离相等的性质，可得 AI 也在第三个二面角的平分面上。

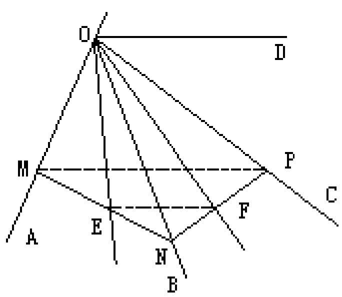
9-2-17　如下左图，由 9-2-16 知，顶点 A 的三个二面角的平分面交于 AI。设二面角 A-BC-D 的平分面与 AI 交于点 O，证明点 O 在其余二面角的平分面上。



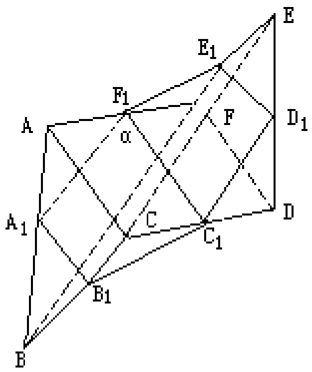


9-2-18　如上右图。先证 E_1O_1 与 E_2O_2 交于一点 O，过 O 分别作平面 ABD，ABC 的垂线，证明垂足分别与 O_3，O_4 重合(O 点称为四面体的外心，即外接球的球心)。

9-2-19　如下图。在三条射线上分别取 OM=ON=OP；连结 MN，NP，PM。设∠MON 的平分线交 MN 于 E，∠NOP 的平分线交 NP 于 F，连结 EF，则 EF∥MP。又∠COA 的外角平分线 OD∥MP，所以 OD∥EF。于是 OE，OF，OD 共面。



9-2-20　由 PA⊥α，得 PA⊥c，同理 PB⊥c，于是 c⊥平面 PAB。又c∥b，得b⊥平面PAB，而c⊂γ，所以γ⊥平面PAB。又PC⊥γ，故 PC 在平面 PAB 内。



9-2-21　如上图。易知 $A_1B_1 \parallel F_1C_1$。设 A_1B_1，F_1C_1 确定平面 α，由 $A_1F_1 \parallel BF \parallel CE \parallel C_1D_1$，知 $D_1 \in \alpha$。同理 $E_1 \in \alpha$。于是 A_1，B_1，C_1，D_1，E_1，F_1 六点共面。

（三）线面间的平行与垂直关系

1．线面间的平行关系

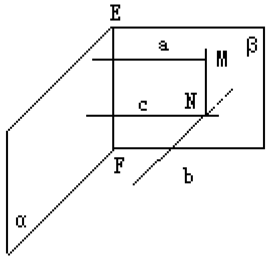
9-3-1　C

9-3-2　C

9-3-3　D

9-3-4　应用线面平行的判定定理和性质定理证明。

9-3-5　如下图。过 N 作 c⊥α。设 b，c 确定的平面为 γ。先证 EF⊥γ，再证 MN⊥γ，即得 EF∥MN。



9-3-6　利用面面平行的性质定理证明。

9-3-7　用反证法。假设 $b \nparallel \alpha$，因 $b \not\subset \alpha$，所以 b 与 α 相交；从而由 $a \perp \alpha$，$a \perp b$ **可推出** $b \subset \alpha$**。这与已知矛盾。**

9-3-8　过点 A 作 AE∥CD 交 β 于 E。连结 BE，BD。设 F 是 AE 中点。连结 MF，FN．可证 ACDE 是平行四边形．再证平面 MFN∥β，于是就有 MN∥β．

9-3-9　$\left.\begin{array}{l} D_1C_1 \parallel \text{平面}ABCD \Rightarrow D_1C_1 \parallel DC \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad D_1C_1 \parallel A_1B_1 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow A_1B_1 \parallel DC \Rightarrow A_1B_1 \parallel \text{平面}ABCD \Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$

9-3-10　证明 BC 和 GF 都垂直于平面 ADE．

9－3－11　过 a，c **作平面 β，设 β∩α．由** $c \perp \alpha$，$l \subset \alpha$**，得** $c \perp l$**．又** $c \perp a$，l，a **同在 β 内，所以** $a \parallel l$**．又** $l \subset \alpha$**，于是** $a \parallel \alpha$**．同理证** $b \parallel \alpha$**．**

9-3-12　过 a 作一平面 γ 与 α 相交，可证得与 β 也相交．设 α∩γ＝a′，β∩γ＝a″．由 a∥α，a∥β，得 a∥a′，a∥a″，于是 a′∥a″.用同法过 b 作一平面 δ 与 α，β 相交,设交线为 b′,b″.仿上证得 b′∥b″．又因 a′与 b′必相交(否则由 a′∥b，推出 a∥b，矛盾)，所以 α∥β．

9-3-13　连结 B_1C**，交** BC_1 **于 O，连结 DO，则 DO∥**AB_1**．而 DO ⊂平面** DBC_1**，所以** AB_1 **∥平面** DBC_1**．**

9-3-14　(1)由 EF∥B_1D_1**，**B_1D_1**∥BD 得 EF∥BD，所以 E，F，B，D 共面．**

(2)**易证** MN∥EF**．设** $A_1C_1 \cap MN = P$，$A_1C_1 \cap EF = Q$，$AC \cap BD = O$**．由** PQ∥AO**．**$PQ = AO$ **得** PA∥OQ**．于是平面** AMN**∥平面** EFDB**．**

2．线面间的垂直关系

9-3-15　B　9-3-16　A

9-3-17　过 A 作 AE⊥BS 于 E，得 AE⊥平面 SBC．

9-3-18　(1)由已知得 VC⊥平面 VAB．

(2)由三垂线定理的逆定理得出．

9-3-19　过 b 与β的交点 A 作直线 a′∥a，则有 a′⊥α．再过 b 与 a′作平面γ，则γ与β必相交于过 A 点的直线 a″，则 b⊥a″．又 b⊥a′，于是在γ内过 A 点有 a′与 a″均于 b 垂直，故 a′与 a″重合．所以$a' \subset \beta$，$a' \perp \alpha$，故$\alpha \perp \beta$．

9-3-20　应用反证法．

9-3-21　由△ABD≌△CDB 得 AN=NC，于是 MN⊥AC．

9-3-22　设 MN 与 AO 交于 Q 点,则 PQ∥VA.取 VA 中点 E,连结 OE.由 MN⊥平面 VAO 知 MN⊥OE．由 VA=AB 可推出 AO=VO．所以 OE⊥PQ．于是 OE⊥平面 MNP．

9-3-23　(1)因为 E 为 BD_1 的中点，所以 E 亦为 A_1C 的中点，亦为 FG 的中点．又因为 FG∥DC_1，所以 C_1D∥EF．由 C_1D∥EF，$C_1D \perp CD_1$ 得出．

(2)由 EF⊥BC，$EF \perp CD_1$ 得 EF⊥平面 BCD_1．

(3)由$EF \subset$平面A_1FCG且$EF \perp$平面BCD_1得出．

9-3-24　由已知证∠ACD=90°．

9-3-25　AC_1 是 AB_1 在平面 ACC_1A 上的射影．由可知可求得 $C_1M=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$A_1C_1=\sqrt{3}$，于是有$\frac{A_1C_1}{AA_1}=\frac{C_1M}{A_1C_1}$．又$\angle C_1A_1A=\angle MC_1A_1=90°$，所以$\triangle A_1C_1M \backsim AA_1C_1$，则$\angle A_1MC_1=\angle AC_1A_1$，因为$\angle A_1C_1A+\angle AC_1M=90°$，所以$\angle A_1MC_1+\angle AC_1M=90°$，于是可得 $A_1M \perp AC_1$．由三垂线定理知 $AB_1 \perp A_1M$．

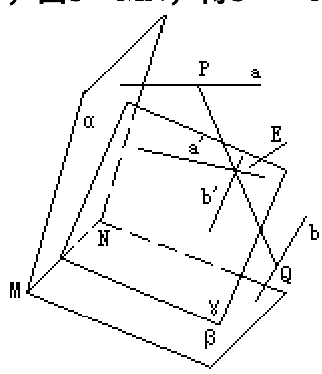
9-3-26　由△SEF≌△SGF 得 SG=SE，于是 GE∥BD．再证 BD⊥SC．

9-3-27　把证面面垂直转化为证线面垂直,即证 $A_1B \perp$平面 AB_1C_1D．

9-3-28　在β内过 E 作 EF⊥l,易证 EF 在平面 CDE 内.根据∠DEF=120°，∠CED=30°得 CE⊥EF．

9-3-29　应用反证法.假设 H 是△DBC 的垂心,可推出 AC⊥平面 ABD,得∠BAC=90°．这与△ABC 是正三角形矛盾．

9-3-30　如右图．设a，b的公垂线为PQ．$PQ \cap \gamma=E$．过a，PQ作平面交γ于a′，则a′∥a．由a⊥MN，得a′⊥MN．过b，PQ作平面交γ于b′，则b′∥b，由b⊥MN，得b′⊥MN．于是MN⊥γ．



9-3-31　先证 DC⊥EF，再证 EF⊥γ．

9-3-32　由平面垂直的性质定理得 DC⊥平面 ABC，于是 DC⊥AB．又 AB⊥AC，得 AB⊥平面 ACD．

9-3-33　作 SO⊥AB，垂足为 O，则

$$\angle ASO=\frac{\gamma}{2}，\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{AO}{SA}=\frac{AB}{2a}$$

同理　$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{AC}{2a}$，$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{BC}{2a}$

由已知可得 $AB^2=BC^2+CA^2$，于是∠ACB=90°．已知 SA=SB=SC，所以 S 在平面 ABC 上的射影是△ABC 的外心，于是外心即 O 点．故平面 SAB⊥平面 ABC．

(四)空间中的距离和角

1．空间中的距离

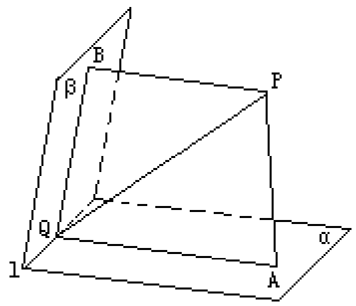
9-4-1　B　9-4-2　B　9-4-3　A

$9-4-4$　$\frac{\sqrt{3}}{3}$　$9-4-5$　$6\sqrt{6}$　$9-4-6$　$\frac{2a+b}{3}$或$\frac{|2a-b|}{3}$

$9-4-7$　$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

9-4-8　如下图，P，B，Q，A四点共圆，由余弦定理得AB=7．再由正弦定理得

$$PQ=2R=\frac{AB}{\sin 120°}=\frac{14\sqrt{3}}{3}.$$



9-4-9　(1)过S作SD⊥β，垂足为D．先证△SAD≌△SBD，再证△SAC≌△SBC．

(2)取AB中点E，连SE，则SE⊥AB．可求得SE=5cm．

9-4-10　过点P作PR⊥平面BD于R，则R∈MQ；过R作RN⊥BC于N．连PN，则∠PNR=45°．于是PR=NR．已知∠PQR=β，设∠PMR=α，可得asinα=acosα·sinθ，即tgα=sinθ，因此sinα

$=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$．在Rt△PRQ中，

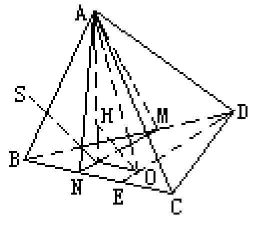
$$PQ=\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a\sin\theta}{\sin\beta\cdot\sqrt{1+\sin^2\theta}}$$

9-4-11　过O作EF∥AB交AD于E，交BC于F，连SE，可得BC⊥平面SEO．在平面SEF中作FG⊥SE，垂足为G，则FG的长即

为BC到平面SAD的距离．可求得$FG=\frac{3}{2}\sqrt{7}$．

9-4-12　如下图．作AO⊥平面BCD，垂足为O，则O是正三角形BCD的中心．过O作OS⊥DE交MN于S，连结AS．作OH⊥AS

故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{9y^2}{20}=1$．



$$OH=\frac{AO\cdot OS}{AS}=\frac{\sqrt{70}}{35}a$$

9-4-13　分两种情况：(i)EF 在平面α内的射影在 AB，CD 之间，可求得 EF 与 CD 的距离为 25cm；(ii)EF 在平面α内的射影在 AB，CD 之外，可求得 EF 与 CD 的距离为 39cm．

9-4-14　(1)由等腰三角形的性质得出；

$(2)MN=\sqrt{2}$

9-4-15　(1)先证 BC⊥平面 BB_1A_1A，再证 AA_1⊥平面 A_1BC．

(2)由(1)知 A_1B 是异面直线 A_1A 和 BC 的公垂线．由$\triangle A_1B_1B\backsim\triangle BA_1A$，得$A_1B=\sqrt{2}cm$．

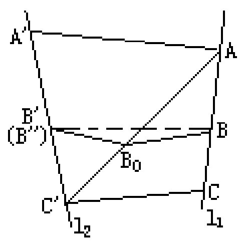
9-4-16　(1)连结BD．设$AC\cap BD=O$．在平面BDD_1内过O作$OE\perp BD_1$于E，则OE是AC和BD_1的公垂线段，由$\frac{OE}{DD_1}=\frac{OB}{BD_1}$，得$OE=\frac{\sqrt{6}}{6}a$．

(2)设$B_1D_1\cap A_1C_1=O_1$，因A_1C_1∥平面AB_1C，所以O_1到平面AB_1C的距离即为所求．连OB_1．作$O_1H\perp OB_1$于H，则在$Rt\triangle OO_1B_1$中有$O_1H=\frac{\sqrt{3}}{3}a$．

9-4-17　(1)由等腰三角形性质得出；(2)两条对角线的距离为 2cm．

9-4-18　线线距离转化为线面距离来求，可求得其距离为$3\sqrt{3}$．

9-4-19　过 C 作 CM⊥AE 于 M，则 CM 为β与γ间的距离．可求得$CM=\sqrt{11}$．



9-4-20　如下图．设 A′，B′，C′分别为 A，B，C 在 l_2 上的射影．连结 AC′，取 AC′的中点 B_0，A′C′的中点 B″，则 BB_0∥CC′，B_0B''∥AA′．可得 l_2⊥平面 $B_0B''B$，于是 $l_2\perp BB''$，因此 B″与 B′重合．在$\triangle B'B_0B$ 中，有 $BB'<BB_0+B_0B'$，即

$b<\frac{c}{2}+\frac{a}{2}$．又$(a+c)^2\le 2(a^2+c^2)$，故$b<\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$．再考虑特殊情况，必有$b\le\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$．

9-4-21　设$AD\cap MN=Q$．在平面PDA中，过A作AH垂直直线PQ 于 H．先证 AH⊥平面 PMN，再求出 AH 的长．

在 Rt△PDQ 中，

$$\sin\angle PQD=\frac{PD}{PQ}=\frac{2tg\alpha\sqrt{4tg^2\alpha+1}}{4tg^2\alpha+1}$$

在 Rt△AHQ 中，

$$AH=AQ\cdot\sin\angle AQH=AQ\cdot\sin\angle PQD=\frac{3\sqrt{3}atg\alpha\sqrt{4tg^2\alpha+1}}{4(4tg^2\alpha+1)}$$

9-4-22　设 PO=x，在△AOB 与△OBC 中应用余弦定理得

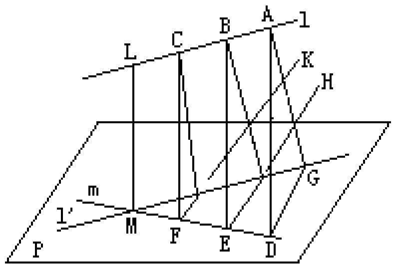
$OA^2=AB^2+OB^2-2AB\cdot OB\cos\angle ABO$

$OC^2=BC^2+OB^2-2BC\cdot OB\cos\angle OBC$

将 $OA=xctg\alpha$，$OB=xctg\beta$，$OC=xctg\gamma$，$\cos\angle ABO=-\cos\angle OBC$ 代入并消去 $\cos\angle OBC$，可得

$$x=\sqrt{\frac{ab(a+b)}{actg^2\gamma+bctg^2\alpha-(a+b)ctg^2\beta}}.$$

9-4-23　如下图，设 LM 为 l 与 m 的公垂线，L∈l，M∈m．过 m 作平面 P 平行于直线 l．过 A，B，C 分别作平面 P 的垂线 AG，BH，CK，垂足分别为 G，H，K，则点 G，H，K 落在与 l 平行的直线 l′上．连 GD，HE，KF，则有 GD∥HE∥KF，且 E，H 分别为 FD，KG 的中点．



设 l 与 m 的距离为 x．

当点 A，B，C 在点 LM 的同侧时，有 2HE=KF+GD，于是

$$2\sqrt{\frac{49}{4}-x^2}=\sqrt{10-x^2}+\sqrt{15-x^2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}\ \text{(负根舍去)}$$

求得l与m的距离为$\sqrt{6}$．

当 A，B，C 不全在 LM 的同侧时，有

$$2\sqrt{\frac{49}{4}-x^2}=\sqrt{15-x^2}-\sqrt{10-x^2}$$

此方程无解，故 A，B，C 必在点 L 的同侧．

2．空间中的角

9-4-24　B　9-4-25　A　9-4-26　C

9-4-27　D　9-4-28　B　9-4-29　B

9-4-30　45　**9-4-31**　$\frac{\sqrt{2}}{4}$　**9-4-32**　(0°，45°]，30°

9-4-33　$\frac{1}{2}$　**9-4-34**　$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

9-4-35　过 E 作 EG∥AB 交 BD 于 G．连 GF．则 GF∥DC．在△EGF中由余弦定理得$\cos\angle EGF=-\frac{1}{2}$，于是AB与CD所成的角为60°．

9-4-36　(1)由 BA⊥平面 ADC 得出．

(2)取 BC 中点 E，在平面 BCD 中作 EF∥CD，DF∥CE，交点为 F．则∠ADF 为直线 AD 与 BC 所成的角．在 Rt△ADF 中，得 tg∠ADF $=\frac{\sqrt{21}}{3}$．

9-4-37　过 E 作 CF 的平行线与 AB 交于 G．连结 SG，则 SE 与 EG 所成的锐角即为 SE 与 CF 所成的角．在△SEG 中由余弦定理得 cos∠SEG $=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故SE与CF所成的角为45°．

9-4-38　在平面α内，过 B 作 a′∥a，在 b 上取一点 P，作 PQ⊥l，垂足为 Q；再作 QM⊥a′，垂足为 M．连结 PM，则 PM⊥a′．计算得 a 与 b 所成的角 60°．

9-4-39　过 B 作 a′∥a.设 a′与 b 确定的平面为α,则 AB⊥α.过 M 作 AB 的平行线交 a′于 G，则 MG⊥α．△BNG 中由余弦定理得 $NG=d$或$NG=\sqrt{7}d$；在Rt△MGN中得∠NMG为$\frac{\pi}{4}$或$\operatorname{arctg}\sqrt{7}$，即为AB与 MN 所成角的值．

9-4-40　(1)取 AC 中点 E．连 DE，BE，则 DE∥PA，∠EDB=α．设正四面体棱长为a．在△BDE中由余弦定理得$\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{3}}$，故$\sin\alpha=\frac{\sqrt{33}}{6}$．

(2)设△ABC 的中点为 O，则 PO⊥平面 ABC．作 DO′⊥CO，垂足为O′．连BO′，则∠DBO′=β，于是$\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{3}$．

9-4-41　(1)设 A，B 在棱 a 上的射影间的距离 EF=d，利用异面直线上各一点间的距离公式有

$$d^2+2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cos 120°=10^2 \Rightarrow d=6\sqrt{2}$$

(2)在β内过B作BC∥a，且使$BC=d=6\sqrt{2}$，可证

$$\angle ACB=90°,\ \cos\angle ABC=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

(3)作AD⊥β于D，那么在△AED中，得$AD=\sqrt{3}$；在△ABD中，得$\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{3}}{10}$．

9-4-42　(1)设 PO⊥平面 ABC.作 PD⊥AB 于 D.连结 OD,则 OD⊥AB.由∠PAB=∠PAC 知 O 点在∠BAC 的平分线上，所以∠OAD=45°．于是$\cos\angle PAO=\frac{AO}{PA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即PA与平面ABC所成角为45°．

(2)若O点在BC上，由角平分线定理得$\frac{BO}{CO}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$；而$BO+CO=5$，所以$BO=\frac{15}{7}$．在△ABO中由正弦定理得$AO=\frac{12\sqrt{2}}{7}$，于是$PA=\sqrt{2}AO=\frac{24}{7}$．即$PA=\frac{24}{7}$时，P在底面内的射影落在BC上．

9-4-43　(1)过A作直线c∥b．由a⊥b知a⊥c．又a⊥α，且有$a\cap\alpha=A$，故$c\subset\alpha$．而c∥b，故b∥α．

(2)设b与BD确定的平面为β，易得β∥α，且BD为a，b的公垂线，BA = m．在Rt△BAD中有$tg\angle BAD=\frac{d}{m}$，故AD与α所成的角为$\frac{\pi}{2}-arctg\frac{d}{m}$．

9-4-44　在平面VAB内作VG⊥AB于G，连CG，交ED于F．由三垂线定理得VF⊥DE，于是DE⊥平面VCG，截面VED⊥平面VCG．在平面VCG内，作CH⊥VF，设垂足为H(H落在VF的延长线上)，则CH⊥平面VDE，于是∠CVH是侧棱VC和截面VDE所成的角．设AB = a，由Rt△VFG∽Rt△CFH得$CH=\frac{VG\cdot CF}{VF}=\frac{\sqrt{15}}{10}a$．在Rt△CVH中，$\sin\angle CVH=\frac{CH}{VC}=\frac{\sqrt{10}}{10}$．故侧棱VC与截面VDE所成的角为$\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$．

9-4-45　设正三棱台侧棱延长线交于点O，侧面BB_1C_1C的斜高为DD_1(D为BC的中点)．可求得

$$\angle AOD=\arccos\frac{5}{26}\sqrt{13}$$

9-4-46　(1)证BC⊥平面SAC．

(2)由AF⊥平面SBC，AE⊥SB得FE⊥SB．

(3)由△SCB∽△SEF得$\frac{BC}{EF}=\frac{SB}{SF}$，由△SAF∽△SCA得$\frac{AF}{AC}=\frac{SF}{SA}$，故

$$tg\theta\cdot tg\varphi=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AF}{EF}=\frac{SB}{SF}\cdot\frac{SF}{SA}=\frac{SB}{SA}=2$$

9-4-47　设正方体棱长为a，所求二面角为θ．应用射影法有

$$\cos\theta=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle MDB_1}}=\frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{6}}{4}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

故　$$\theta=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$$

9-4-48　在△ABC中，过C作CM⊥AB于M；在△ABD中，过

D作$DN \perp AB$于N．可求得$MC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$DN=1$，$MN=\frac{1}{2}$．设二面角C-AB-D的大小为θ，应用公式法有

$$\cos\theta=\frac{MN^2+MC^2+DN^2-CD^2}{2\cdot MC\cdot DN}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

故 $\theta=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

9-4-49　过A作AH⊥PB于H，过C作CF⊥PB于F，则异面直线AH，CF所成的角即为二面角A-PB-C的平面角θ．易知$PC=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$BC=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$PA=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{3}$，$CF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AC=\frac{\sqrt{5}}{2}$．再在Rt△PAB中求得$AH=\frac{\sqrt{6}}{3}$，且$FH=PH-PF=\frac{\sqrt{3}}{6}$．应用公式法，有

$$\cos\theta=\frac{AH^2+FH^2+CF^2-AC^2}{2\cdot AH\cdot CF}=0$$

故所求二面角为直二面角．

9-4-50　(1)连结B_1D_1，则$B_1D_1 \perp A_1C_1$．由$BD_1 \perp A_1C_1$，$BD_1 \perp C_1M$得出．

(2)作$D_1G \perp A_1M$于G．连结C_1G，则$C_1G \perp A_1M$．所以$\angle C_1GD_1$为二面角$C_1-A_1M-D_1$的平面角．由$\triangle CC_1D_1 \backsim \triangle C_1D_1M$，得$D_1M=\frac{9}{4}$．又由勾股定理及面积关系得$A_1M=\frac{15}{4}$，$D_1G=\frac{9}{5}$．在$Rt\triangle C_1D_1G$中，$tg\angle C_1GD_1=\frac{5}{3}$，故$\angle C_1GD_1=arctg\frac{5}{3}$．

9-4-51　(1)由侧面ABB_1A_1⊥底面ABC及CE⊥AB得CE⊥平面ABB_1A_1，从而$CE \perp AB_1$．

(2)过E作$ED \perp AB_1$于D.易知ED是CE和AB_1所在异面直线的距离.由$Rt\triangle ABB_1 \backsim Rt\triangle ADE$，得

$$ED=\frac{AE\cdot BB_1}{AB_1}=\frac{\sqrt{2}\times 4}{2\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(cm)$$

(3)设截面CAB_1和侧面ABB_1A_1所成的较小的二面角为α，应用射影法有

$$\cos\alpha=\frac{S_{\triangle EAB_1}}{S_{\triangle CAB_1}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

所以 $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$

9-4-52　(1)AB即为AE与BC间的距离．可求得AB=6．

(2)∠ADE是二面角B-CD-E的平面角．在Rt△AED中，sin∠ADE=$\frac{1}{2}$，所以$\angle ADE=30°$．

9-4-53　(1)连结 AN 并延长交 BC 于 E，连 PE．证明 MN∥PE．

(2)MN 与平面 ABCD 所成的角就是 PE 与平面 ABCD 所成的角．连结OE．由$PO=\frac{13\sqrt{2}}{2}$，$BE=\frac{65}{8}$，$PE=\frac{91}{8}$，得$\sin\angle PEO=\frac{4\sqrt{2}}{7}$．

9-4-54　作 AO⊥平面 N，垂足为 O．连结 BO 并延长交 CD 于 E，连结 AE，则∠AEB 为二面角 M-CD-N 的平面角．设∠AEB=α，由 AE $=\frac{2S}{a}$得$EO=\frac{2S}{a}\cos\alpha$，$BO=\frac{2\sqrt{3}S}{a}\sin\alpha$，所以

$$BE=EO+OB=\frac{2S}{a}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)=\frac{4S}{a}\sin(\alpha+30°)$$

设△BCD 的面积为 T，则

$$T=\frac{1}{2}CD\cdot BE=2S\cdot\sin(\alpha+30°)$$

故α+30°=90°，即α=60°时，$T_{max}=2S$．

3．翻折问题中的距离与角

9-4-55　B　9-4-56　C　9-4-57　A

9-4-58　A　9-4-59　D

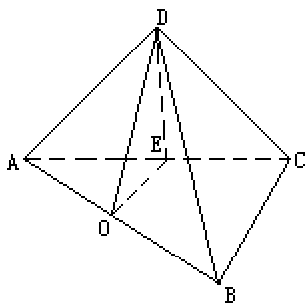
9-4-60　$\sqrt{3}$，$\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$

9-4-61　$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

9-4-62　$\frac{3}{4}a$，$\frac{\sqrt{3}}{4}a$

9-4-63　60°

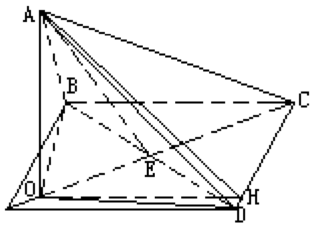
9-4-64　(1)如下图．过 D 作 DO⊥AB 于 O 点，作 DE⊥AC 于 E 点；连OE，则∠DEO为二面角D-AC-B的平面角．可求得$\cos\angle DEO=\frac{9}{16}$．



(2)先证 BC⊥平面 ABD，再证 AD⊥平面 BDC，得∠ADB=90°．

9-4-65　设 E 为 BD 中点，则∠AEC=120°．过 A 作 AO⊥平面 BDC，O 点落在 CE 的延长线上；过 O 作 OH⊥CD 于 H．连 AH，则∠AHO 为 A-CD-B 的平面角．在 Rt△AOH 中，

$$\sin\angle AHO=\frac{AO}{AH}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$



9-4-66　(1)作 CH⊥AD 于 H．连接 EH．由对称性知 EH⊥AD，得 AD⊥平面 CEH．所以 AD⊥CE．

(2)∠CHE 为二面角 F-AD-C 的平面角，利用余弦定理，得

$$\angle CHE=\arccos\frac{7}{9}$$

9-4-67　(1)易知 CD⊥AC．折起后，平面 ACD⊥平面 ABC．所以 CD⊥平面 ABC，从而 AB⊥CD．又 AB⊥BC，故 AB⊥平面 BCD．

(2)取 AC 中点 E．连 BE，则 BE⊥AC．所以 BE⊥平面 ACD．作 EF⊥AD 于 F．连结 BF，则 BF⊥AD．所以∠BFE 是平面 ABD 与平面 ACD 所成二面角的平面角，计算得∠BFE=60°．

(3)由 E 是 AC 中点和 C 到平面 ABD 的距离等于 E 到平面 ABD 距离的 2 倍．而 E 到平面 ABD 的距离即为 E 到 BF 的距离．计算所求距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$。

9-4-68　(1)连接 DH，则∠C′DH 是 C′D 与平面 ABD 所成的角．作 DE⊥AB 于 E．连 C′E，则∠DC′E 为 C′D 与平面 C′HA 所成的角．由

$$\sin\angle DC'E=\frac{DE}{C'D}\leq\frac{DH}{C'D}=\sin\angle DC'H$$

得∠DC′E≤DC′H，于是

∠DC′E+∠C′DE≤∠DC′H+∠C′DH=90°

(2)作 HG⊥AD 于 G，连 C′G，则∠C′GH 是二面角 C′-AD-H 的平面角，即$\angle C'GH=60°$．计算得$\angle BAD=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$．

9-4-69　易知 MN 为中位线，于是∠BNC 是二面角 B-MN-A 的平角，故∠BNC=60°，所以△BNC 为等边三角形．取 BN 的中点 D．连 CD，AD．可证∠ADC 为二面角 A-BN-C 的平面角．在 Rt△ACD 中，

$$\mathrm{tg}\angle ADC=\frac{AC}{CD}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

于是$\angle ADC=\mathrm{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

9-4-70　取 BC 中点 G，DE 中点 F．连 AG，AF．有 AF⊥平面 BDEC，AG⊥BC．

(1)由题设知 AF=x，于是

$$d^2=x^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\frac{5}{8}a^2$$

所以当$x=\frac{\sqrt{3}}{4}a$**时，**$(d^2)_{min}=\frac{5}{8}a^2$**.**

(2)在△ABC 中，由余弦定理得

$$\cos\theta=\frac{d^2+d^2-a^2}{2\cdot d\cdot d}=1-\frac{a^2}{2d^2}=1-\frac{a^2}{4(x-\frac{\sqrt{3}}{4}a)^2+\frac{5}{4}a^2}$$

所以当$x=\frac{\sqrt{3}}{4}a$**时，**$\cos\theta$**的最小值为**$\frac{1}{5}$**.**

9-4-71　在矩形 ABCD 中，作 DM⊥AE 于 M，延长 DM 交 AB 于 N．则折叠后的∠DMN=60°．作 DO⊥平面 AC，则垂足 O 在 MN 上．连 OE，OC．于是∠DEO，∠DCO 分别为 DE，DC 与平面 AC 所成的角．在$Rt\triangle DOM$**中，**$MO=DM\cdot\cos60°=\frac{3}{\sqrt{13}}$**．在**$Rt\triangle EOM$**中，**$EO=\sqrt{ME^2+MO^2}=\frac{5}{\sqrt{13}}$**．在**$Rt\triangle DOE$**中，**$\cos\angle DEO=\frac{EO}{DE}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$**，所以**$\angle DEO=\arccos\frac{5\sqrt{13}}{26}$**．在**$Rt\triangle DME$**中，设**$\angle EDM=\alpha$**，则**$\cos\alpha=\frac{DM}{DE}=\frac{3}{\sqrt{13}}$**，又折叠后的**$DO=\sqrt{DE^2-EO^2}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$**，而在平面图形中，由余弦定理得**

$$OC^2=DO^2+DC^2-2\cdot DO\cdot DC\cdot\cos\alpha$$

$$=\left(\frac{9}{\sqrt{13}}\right)^2+4^2-2\times4\times\frac{9}{\sqrt{13}}\times\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{73}{13}$$

注意，此时$DO=DM+MO=\frac{9}{\sqrt{13}}$**.**

在空间图形中，$\mathrm{tg}\angle DCO=\frac{DO}{OC}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{73}}$**，所以**

$$\angle DCO=\mathrm{arctg}\frac{3\sqrt{219}}{73}$$

第十部分　多面体和旋转体

(一)多面体和旋转体的概念

10-1-1　C　10-1-2　D　10-1-3　C

10-1-4　A　10-1-5　A

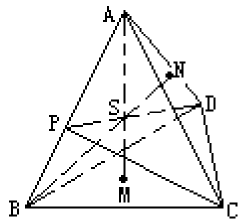
10-1-6　2，1　**10-1-7**　$\frac{\sqrt{15}}{6}a$　**10-1-8**　7㎝

10-1-9　$\frac{1}{2}$　**10－1－10**　$(\pi-2\alpha)R$

10－1－11　$AB^2+C_1D_1^2+BC_1^2+AD_1^2=AC_1^2+BD_1^2$

10-1-12　作棱柱的直截面，直截面的各内角分别是相应的二面角的平面角，根据平面几何中的凸多边形内角和定理即可证．

10-1-13　如下图．AM⊥平面 BCD，BN⊥平面 ADC，AM 与 BN 相交于点 S．由 CD⊥AS，CD⊥BS 可得 CD⊥AB．在△CAB 中，作 CP⊥AB 于 P，则 AB⊥平面 CDP，于是平面 CDP⊥平面 DAB，平面 CDP⊥平面 CAB．故自 C，D 所作四面的高均在面 CDP 内，即△CPD 的高，故必相交．



10-1-14　转化为证明$\frac{DO}{AD}+\frac{EO}{BE}+\frac{FO}{CF}=1$．而

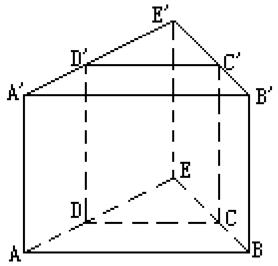
$$\frac{DO}{AD}+\frac{EO}{BE}+\frac{FO}{CF}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}=1$$

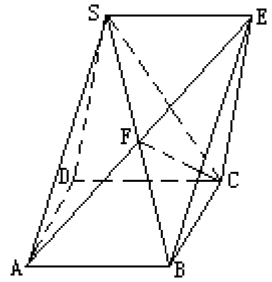
10-1-15　连 BH 并延长交 VC 于 E．若 H 是△VBC 垂心，则 BE⊥VC，所以 AB⊥VC，从而 AC⊥AB，与△ABC 是锐角三角形矛盾．

10-1-16　在$Rt\triangle ACC_1$中，作$C_1M\perp AC$于M．求得$C_1M=\frac{56}{3}$．即棱台的高．再求出$A_1B_1=\frac{17}{3}$．

10-1-17　(1)如下左图．AB∥CD，AD $\nparallel$ BC．由棱柱的定义即得侧面 AB′∥侧面 DC′，而侧面 BC′$\nparallel$侧面 AD′．

(2)设侧面 BC′和侧面 AD′的交线为 EE′，那么 EE′⊥底面 ABCD；而 AA′∥EE′，所以 AA′⊥底面 ABCD．即得这个棱柱是直棱柱．





10-1-18　如上右图．正四棱锥 S-ABCD 与正三棱锥 E-SBC 拼成的图

形是底面为正三角形的斜三棱柱 ADS-BCE．

作 CF⊥SB 于 F，连 CF，则∠AFC 是二面角 A-SB-C 的平面角．由 $AC=\sqrt{2}a$，$AF=CF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，在△AFC中据余弦定理求得

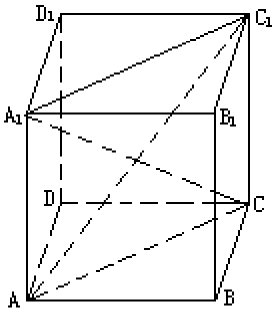
$$\angle AFC=\pi-\arccos\frac{1}{3}$$

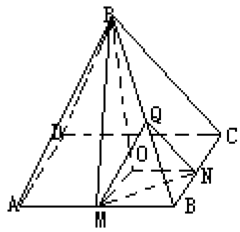
连结 EF，则∠EFC 是二面角 E-SB-C 的平面角，类似地求得

$$\angle EFC=\arccos\frac{1}{3}$$

于是两二面角互补，ABES 为平行四边形．再得 SE∥CD∥AB．又∠ABE=120°知 ADS-BCE 是斜三棱柱．

10-1-19 如下左图．由已知得 A_1ACC_1 是矩形，于是 A_1A⊥AC．再证 A_1A⊥平面 ABC．





10-1-20 如上右图．设 O 为 ABCD 中心，M，N 分别为 AB，BC 中点．作 MQ⊥PB 于 Q．连 NQ．则

$$\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}=\sqrt{\frac{2R^2+r^2}{3}}\Rightarrow 5R^6+48R^4r^2-5R^3r^3+24R^2r^4-23r^6=0$$

在 Rt△PMB 中，PM^2=PQ·PB，MQ^2=PQ·QB，OM^2=MB^2=BQ·PB，又 MN^2=$2MB^2$=2BQ·PB．代入(i)即得．

(二)多面体和旋转体的表面积与体积

1．多面体的表面积与体积

10-2-1　A　10-2-2　B　10-2-3　A

10-2-4　B　10-2-5　C

10-2-6　$2(a+b)\sqrt{ab}$

10-2-7　$30(2+\sqrt{2})$

10-2-8　$\frac{15}{2}$　　**10-2-9**　$\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$

10-2-10　7∶5

10-2-11　(1)取 AD 中点 E，连 BE，CE，则

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCE}\cdot AE+\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCE}\cdot ED$$

$$=\frac{1}{3}S_{\triangle BCE}(AE+ED)$$

$$=\frac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot AD=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

(2)取 CD 中点 F．连 BF，EF．可证∠BFE 为二面角 A-CD-B 的平面角．在△BEF中由余弦定理得$\cos\angle BFE=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

10-2-12　(1)连 BH，则 BH 为 BC_1 在平面 ABC 内的射影．由 $AC\perp BC_1$ 得 AC⊥BH．又 AC⊥AB 且 AB，AC 都在平面 ABC 内，故 A，B，H 三点共线．

(2)由$\tg\angle C_1BH=\frac{\sqrt{15}}{3}$，得$\sin\angle C_1BH=\frac{\sqrt{10}}{4}$，于是

$$C_1H=BC_1\sin\angle C_1BH=\sqrt{15}$$

故　$$V=(\frac{1}{2}AB\cdot AC)\cdot C_1H=2\sqrt{15}$$

10-2-13　(1)由 $BC\perp A_1M$ 与 BC⊥AM 得出．

(2)作 MP⊥AB，垂足为 P．连 A_1P，则 $A_1P\perp AB$，所以$\angle A_1PM=60°$．因为 PM∥AC，M 为 BC 中点，所以 P 为 AB 中点，且

$$MP=\frac{1}{2}a，A_1M=MP\cdot \tg 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

故$V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$．

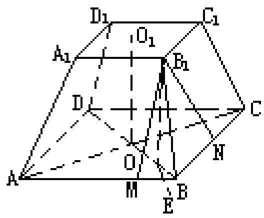
10-2-14　(1)先证$\angle AA_1B=90°$，又 $AA_1\perp BC$，故得证．

(2)由$AA_1=BB_1=CC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\sqrt{2}$得$S_{AA_1B_1B}=S_{AA_1C_1C}=2$．又$AA_1\perp BC$，则$BB_1\perp BC$，$BB_1C_1C$为矩形，则$S_{BB_1C_1C}=2\sqrt{2}$，故$S_{侧}=4+2\sqrt{2}$．

10-2-15 取AC中点M．连SM，MB，则$SM=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$．过M作$ME\perp BC$于E，那么$SE\perp BC$．在Rt△BMC中，$ME=\frac{MB\cdot MC}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$．在Rt△SME中，$SE=\frac{\sqrt{15}}{4}a$．又△SBC≌△SAB，故$S_{侧}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{15}}{4}\right)a^2$．

10-2-16 (1)取BC中点D．连PD，AD．设PD交MN于E．连结AE，有$PD\perp MN$，$PD\perp AE$，于是$PA=AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$．又$PB=PA=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，得$PD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，故$S_{全}=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{6})a^2$．

(2)设侧面与底面所成角为θ，由$\cos\theta=\frac{S_{底}}{S_{侧}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，得$\theta=\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$．



10-2-17 如下图．由两底面相似，求得上底边长为36和20．又可求得$B_1M=13$，$B_1N=15$，故$S_{侧}=1920$．

10-2-18 由

$$S_{锥侧}=\frac{1}{2}\cdot 4b\cdot EO_1=2b\cdot EO_1$$

$$S_{台侧}=\frac{1}{2}(4a+4b)\cdot EE_1=2(a+b)\cdot EE_1$$

得$2b\cdot EO_1=2(a+b)\cdot EE_1$，又

$$E_1E^2=h^2+(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b)^2,\quad EO_1^2=h^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^2$$

联立解得$h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a(2b^2-a^2)}{a+2b}}$．

当$2b^2-a^2>0$，即$a<\sqrt{2}b$时有解．

10-2-19 (1)二面角A_1-CO-M为90°．

(2)$V_{A_1\text{-}COM}=\frac{1}{8}a^3$．

10-2-20 (1)$V_{A\text{-}BCED}=\sqrt{3}cm^3$．

(2)二面角E-AF-C的度数为45°．

10-2-21 (1)$V_{B_1\text{-}ACC_1A_1}=\frac{1}{3}a^3$

(2)取 AB_1 的中点 E，连 BE，CE，则∠BEC 是二面角 $B\text{-}AB_1\text{-}C$ 的平面角．易算得 $\cos\angle BEC=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

10-2-22　(1)证 SD⊥平面 ANM 得出．

(2)$V_{S\text{-}AMN}=\frac{2\sqrt{3}}{21}cm^3$

10-2-23　(1)连结 A_1M，AM．证明 $A_1M\perp BC$，$AM\perp BC$，从而得出 BC⊥平面 A_1AM．

(2)过 M 作 MN⊥AB，N 为垂足．连 A_1N．由三垂线定理得 $A_1N\perp AB$，于是 $\angle A_1NM=60°$，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$MN=\frac{1}{2}a$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2$；在 $Rt\triangle A_1MN$ 中，$A_1M=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，故 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$．

10-2-24　(1)连结 AC，BD，交点为 O．连 B_1O，与 EF 交于 G，则 G 是 B_1O 的中点．易证 $D_1G\perp AC$，$D_1G\perp B_1O$，于是 $D_1G\perp$面 AB_1C，所以面 $D_1EF\perp$面 B_1EF．

(2)证明 $D_1G\perp$面 B_1EF．并可求得 $S_{\triangle AB_1C}=2$，$D_1G=\sqrt{3}$，因此，

$$V_{D_1\text{-}AB_1C}=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

10-2-25　(1)由已知有 $AA_1\parallel CC_1$，$\angle B_1C_1C=\angle B_1C_1D_1=\angle CC_1D_1=60°$．在 $\triangle C_1CB_1$ 中，$C_1C=a$，$C_1B_1=2a$，$\angle B_1C_1C=60°$．由余弦定理及勾股定理知 $CC_1\perp B_1C$，于是 $CC_1\perp$平面 B_1D_1C，即 $AA_1\perp$平面 B_1D_1C．

(2)由(1)知 $CC_1\perp$平面 CB_1D_1，所以 CC_1 是三棱锥 $C_1\text{-}CB_1D_1$ 的高．由 $CB_1=CD_1=\sqrt{3}a$，$B_1D_1=2a$，可算出

$$S_{\triangle CB_1D_1}=\sqrt{2}a^2，V_{C_1\text{-}CB_1D_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

但 $V_{C_1\text{-}CB_1D_1}=\frac{1}{3}V_{\text{三棱柱}BCD\text{-}B_1C_1D_1}=\frac{1}{6}V_{\text{平行六面体}AC_1}$，故

$$V_{\text{平行六面体}AC_1}=2\sqrt{2}a^3$$

10-2-26　(1)欲证 BB′⊥平面 B′AC,可证 BB′⊥B′C,BB′⊥AC．

(2)利用(1)及三垂线定理的逆定理证明，两异面直线 AC 与 BB′间的距离为 $\sqrt{3}a$．

(3)$V_{B'\text{-}ECA}=\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$

10-2-27　(1)利用三角形中位线性质定理有 MN∥QP，从而 M，N，P，Q 四点共面．

(2)取 SA 中点 D，连 MD，ND，则 $V_{S\text{-}DMN}=\frac{1}{8}V_{S-ABC}$，又 $V_{\text{柱}DMN-AQP}$

$3V_{S\text{-}DMN}=\frac{3}{8}V_{S\text{-}ABC}$，所以

$$V_{S\text{-}DMN}+V_{柱DMN\text{-}AQP}=\frac{1}{2}V_{S-ABC}$$

10-2-28　(1)和(2)　运用等底等高的两个棱锥等积的定理进行证明．

$(3)V_{A\text{-}MCD}=\frac{1}{3}V_{A-BCD}$，$V_{O-MCD}=\frac{1}{3}V_{O-BCD}$，**但是，**$V_{O-BCD}=\frac{1}{4}V_{A-BCD}$，**故**

$$V_{O\text{-}ACD}=V_{A\text{-}OCD}=V_{A\text{-}MCD}-V_{O\text{-}MCD}$$
$$=\frac{1}{3}V_{A-BCD}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{4}V_{A-BCD}$$

10-2-29　连 AD，PD，则有 BC⊥平面 PAD．故

$$V=V_{B\text{-}PAD}+V_{C\text{-}PAD}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAD}\cdot BD=\frac{1}{3}S_{\triangle PAD}\cdot CD$$
$$=\frac{1}{3}S_{\triangle PAD}\cdot(BD+CD)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}PA\cdot DE\cdot BC=\frac{1}{6}l^2h$$

10-2-30　由已知可得 BC⊥侧面 A_1ABB_1，从而 BC⊥AB，所以∠ABB_1=45°．作 B_1D⊥AB 交 AB 于 D，则 B_1D⊥底面 ABC．于是可得 AB=2a．又由 Rt△ABC∽Rt△$A_1B_1C_1$，得 BC=2a．设棱台上、下底面的面积分别是 S′，S．则

$$S'=\frac{1}{2}A_1B_1\times B_1C_1=\frac{a^2}{2}，S=\frac{1}{2}AB\times BC=2a^2$$

故
$$V_{棱台}=\frac{1}{3}\cdot A_1A\cdot(S'+\sqrt{S'S}+S)$$
$$=\frac{1}{3}a\left[\frac{a^2}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{2}\cdot 2a^2}+2a^2\right]=\frac{7}{6}a^2$$

2．旋转体的表面积与体积

10-2-31　D　10-2-32　A　10-2-33　C

10-2-34　A　10-2-35　C　10-2-36　A

10-2-37　8∶3　10-2-38　4πQ　10-2-39　3π

10-2-40　80πcm^2

10-2-41　1∶4　10-2-42　(π-2)∶4π

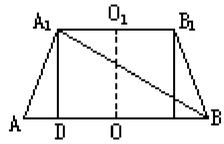
10-2-43　由∠AA′B=30°，A′B=16，得 AB=8．作 O′C′⊥A′B′，那么 O′C′=3，所以 O′A′=5．又 AA′= $8\sqrt{3}$**，故**$S_{圆柱侧}=80\sqrt{3}\pi$**．**

10-2-44　设圆锥的顶角为 2α，底面半径为 R，高为 h，则母线长 $l=\sqrt{R^2+h^2}$，$tg\alpha=\frac{R}{h}$**．由**$S_{圆柱侧}=S_{圆锥侧}$**，得**

$$\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{h}=2\Rightarrow\frac{R}{h}=\sqrt{3}\Rightarrow 2\alpha=120°$$

10-2-45　作圆台的轴截面 A_1ABB_1(如下图)．设圆台上、下底的半径分别为 r、R，母线长为 l，A_1D⊥AB 于 D，则 A_1D=h，∠A_1AB=α，∠BA_1A=90

°．可求得 $S_{圆台侧}=\pi h^2\sec\alpha$．



10-2-46 设圆锥的高为h，母线长为l，则有 $l=\sqrt{h^2+r^2}$．依题意有 $\pi r^2+\pi r\sqrt{h^2+r^2}=10\pi$，得 $h^2=\frac{100}{r^2}-20$．所以

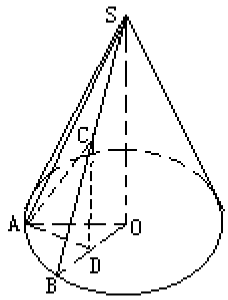
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{\frac{100}{r^2}-20}$$

$$=\frac{1}{3}\pi\sqrt{100r^2-20r^4}$$

$$=\frac{\pi}{3}\sqrt{125-20(r^2-\frac{5}{2})^2}$$

故当 $r^2=\frac{5}{2}$，即 $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 时，$V_{最大}=\frac{5\sqrt{5}}{3}\pi$．

10-2-47 (1)应用反证法．假设 AC⊥平面 SOB．过 C 作 CD⊥OB 于 D(如下图)，则有 AD⊥平面 SOB．于是 AD∥AC，这与“AD 与 AC 相交于点 A”矛盾．



(2)当 C 是 SB 中点时，D 为 OB 中点，∠CAD=45°．可求得

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi\cdot10^2\cdot10\sqrt{3}=\frac{1000\sqrt{3}}{3}\pi(cm^3)$$

10-2-48 (1)由 BQ⊥平面 SOC 得 QB⊥OH，又 OH⊥SC，即得 OH⊥平面 SBQ。

(2)由 $AB=\frac{QB}{\cos30°}=4$，$SO=\frac{1}{2}AB=2$，得 $V_{圆锥}=\frac{8}{3}\pi$。

10-2-49 设水面同高时的高度为 h，圆锥容器水面半径为 r，则

$$\begin{cases}\pi\times1^2\times h+\frac{1}{3}\pi r^2h=\pi\times1^2\times2\\ \frac{r}{2\sqrt{3}}=\frac{h}{2}\end{cases}\Rightarrow h=1$$

10-2-50 设圆台上、下底面圆半径分别为 r，R，与底面平行的截面圆的半径为 x，不妨设 R＞r。设截面与上、下底面的距离分别为 h_1，h_2，则 $\frac{h_1}{h_2}=\frac{x-r}{R-x}$。体积相等的条件是

$$\frac{1}{3}\pi h_1(r^2+x^2+rx)=\frac{1}{3}\pi h_2(R^2+x^2+Rx)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \dfrac{r^2+x^2+rx}{R^2+x^2+Rx}=\dfrac{h_2}{h_1}\\ \dfrac{h_2}{h_1}=\dfrac{x-r}{R-x}\end{array}\right\}\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}} \qquad \text{(i)}$$

若上面的小圆台侧面积是下面小圆台侧面积的 2 倍，则有

$$\left.\begin{array}{r}\pi(r+x)l_1=2\pi(R+x)l_2\Rightarrow \dfrac{r+x}{R+x}=\dfrac{2l_2}{l_1}\\ \dfrac{l_2}{l_1}=\dfrac{h_2}{h_1}=\dfrac{R-x}{x-r}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{2R^2+r^2}{3}} \qquad \text{(ii)}$$

如果符合题目条件的圆台存在，由(i)，(ii)知

$$\sqrt[3]{\frac{R^3+r^3}{2}}=\sqrt{\frac{2R^2+r^2}{3}}\Rightarrow 5R^6+48R^4r^2-5R^3r^3+24R^2r^4-23r^6=0$$

设$\frac{R}{r}=t(t>1)$，上式成为

$$5t^6+48t^4-54t^3+24t^2-23=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(5t^5+5t^4+53t^3-t^2+23t+23)=0 \qquad \text{(iii)}$$

因为 $t>1$，所在 $t-1>0$，且有

$5t^5+5t^4+53t^3-t^2+23t+23$

$>5t^5+5t^4+52t^3+23t+23>0$

可见(iii)式不成立，这表明当上面的小圆台的侧面积是下面小圆台侧面积 2 倍时，这样的圆台不存在。

用同样的方法，也可推出：当下面的小圆台的侧面积是上面小圆台侧面积的 2 倍时，这样的圆台也不存在。综上可知，符合题目要求的圆台不存在。

3．组合体的求积问题

10-2-51　B　　10-2-52　D

10-2-53　A　　10-2-54　A

10-2-55　C　　10-2-56　6a

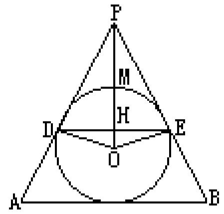
10-2-57　2∶π　　10-2-58　50πcm^2

10-2-59　2∶1

10-2-60　设圆锥底面圆半径为r，高为h，则$h=\sqrt{3}r$。设圆柱的底圆半径为 x，则圆柱高为 2x，则有

$$\frac{\sqrt{3}r-2x}{\sqrt{3}r}=\frac{x}{r}\Leftrightarrow x=(2\sqrt{3}-3)r$$

所以　$S_{圆柱全}=2\pi\cdot x(x+2x)=6\pi x^2=18(7-4\sqrt{3})r^2$



10-2-61　轴截面如右图所示。记小圆锥 P-DHE 的体积为 V_1，则

$$PH = PO - OH = 2R - \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R$$

$$DH = PH\text{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

所以 $$V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{8}\pi R^3$$

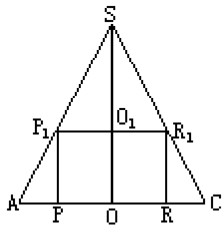
设球缺 DME 的体积为 V_2，则

$$V_2 = \pi \cdot MH^2(R - \frac{1}{3}MH) = \frac{5}{24}\pi R^3$$

所以球面与圆锥顶点间的部分体积 V 为

$$V = V_1 - V_2 = \frac{3}{8}\pi R^3 - \frac{5}{24}\pi R^3 = \frac{\pi}{6}R^3$$

且 $$\frac{V}{V_{球}} = \frac{\frac{\pi}{6}R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{8}$$



10-2-62　右图为其通过正方体对角面的轴截面。由已知 SA=l，∠SAC=θ知

AC=2lcosθ，SO=lsinθ

设正方体棱长为x，则$SO_1 = l\sin\theta - x$，由$\frac{l\sin\theta - x}{l\sin\theta} = \frac{\sqrt{2}x}{2l\cos\theta}$，解得

$$x = \frac{2l\sin\theta}{\sqrt{2}\text{tg}\theta + 2}$$

10-2-63　(1)设所求的圆柱底面半径为 r，它的侧面积 $S_{侧}=2\pi rx$。因$\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h}$，所以$r = R - \frac{R}{h} \cdot x$，故

$$S_{侧} = 2\pi Rx - \frac{2\pi R}{h}x^2$$

(2)由二次函数求最值的方法，当$x = -\frac{2\pi R}{-2 \cdot \frac{2\pi R}{h}} = \frac{h}{2}$时，即圆柱的高

是已知圆锥的高的一半时，它的侧面积最大。

(三)截面问题

10-3-1～10-3-10　ACDCD　ADCAC

10-3-11　$2500\pi cm^2$

10-3-12　$\sqrt{\dfrac{mR^2+nr^2}{m+n}}$

10-3-13　200　　10-3-14　ab

10-3-15　$\dfrac{1}{4}ab$

10-3-16　由已知可得∠SAO=45°，SO=OA=r。作 OC⊥AB 于 C。连 SC。可证平面 SOC⊥平面 SAB，从而∠OSC=30°。由 AB⊥SC，经计算可得$SC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$，$AB=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}r$。故$S_{\triangle SAB}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}r^2$。

10-3-17　连 BD，AC 交于 O，作 $OE\parallel BD_1$ 交 DD_1 于 E。连 AE，CE，则△ACE为所求截面。且有$\angle DOE=\alpha$，$AC=\sqrt{2}a$，$OD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$OE=\dfrac{\sqrt{2}a}{2\cos\alpha}$。故$S_{\triangle ACE}=\dfrac{1}{2}AC\cdot OE=\dfrac{a^2}{2\cos\alpha}$。

10-3-18　延长 BM 与 B_1A_1 的延长线交于 E，连 C_1E 交 A_1D_1 于 F，则 BC_1FM 为过 B，C_1，M 的截面。在面 A_1C_1 内，过 B_1 作 $B_1N\perp EC_1$ 于 N。连 BN，则$\angle B_1NB$ 为截面与面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的平面角。设正方体的棱长为1，通过相似三角形可求得$A_1F=\dfrac{2}{3}$，$B_1E=3$，$C_1E=\sqrt{10}$。又由$B_1N\cdot C_1E=B_1C_1\cdot B_1E$得$B_1N=\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$。在$Rt\triangle B_1BN$中得$BN=\dfrac{\sqrt{190}}{10}$，所以$\sin\angle BNB_1=\dfrac{B_1B}{BN}=\dfrac{\sqrt{190}}{19}$。

10-3-19　设底面对角线交于 O。连 EO。易证 E 为 PA 的中点，且$V_{E\text{-}ABD}=\dfrac{1}{4}V_{P\text{-}ABCD}$，故四棱锥被截面BDE分成两部分的体积之比为1∶3。

10-3-20　(1)$S_{侧}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}a^2$。

(2)在ΔCDE中由正弦定理，得$DE=CD\cdot\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a$，故

$S_{\triangle ABE}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}a^2$

10-3-21　截面应为平行四边形APC_1E，显然$AC_1=\sqrt{3}$为定值。设点P到AC_1的距离为h，则$S_{APC_1E}=2\times\dfrac{1}{2}AC_1\cdot h$，所以当h最小时，截面面积最小，此时 h 应为异面直线 DC 与 AC_1 的距离，即 DC 到面 AD_1C_1B

的距离，故$h=\frac{\sqrt{2}}{2}$。所以

$$S_{最小截面}=AC_1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

10-3-22 关键是要作出平面 CPQ 与底面 ABCD 所成二面角的棱，为此延长 CQ 交 BB_1 的延长线于 S；连 SP 交 BA 的延长线于 T；连结 TC 交 AD 于 R。则 TC 为所求二面角 S-TC-B 的棱。再作出此二面角的平面角。求得其正切值为$\frac{\sqrt{13}}{2}$。

10-3-23 取 AB 中点 D。由面 VBC⊥面 VAB，面 VCA⊥面 VAB，可得 VC⊥面 VAB，所以 VC⊥VD，VC⊥VB。同理，VB⊥面 VAC，所以$VB\perp VA$。又$VA=VB=a$，得$AB=\sqrt{2}a$，所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2，S_{\triangle VAB}=\frac{1}{2}a^2$$

在△DPC 中，∠DPC＞∠DVC=90°，所以 DC＞DP。

$$DV<DP<DC\Rightarrow\frac{1}{2}AB\cdot DV<\frac{1}{2}AB\cdot DP<\frac{1}{2}AB\cdot DC$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{2}<S_{截面}<\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

第十一部分　直线和圆

(一)有向线段、定比分点

11-1-1～11-1-6　DCBCBA

11-1-7　$-\frac{4}{3}$

11-1-8　(-3，-12)

11-1-9　(-1，0)

11-1-10　(9，-4)，(-3，0)，(1，8)

11-1-11　(1)设P点坐标为(x，y)，由已知题条件知 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=3$。所以

$$x=\frac{3+3(-1)}{1+3}=0，y=\frac{-2+3\times 4}{1+3}=\frac{5}{2}$$

故P的坐标为$(0，\frac{5}{2})$。

(2)当P为$\overline{P_1P_2}$的内分点时，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{1}{2}$，此时P的坐标为$(\frac{5}{3}，0)$；当P为$\overline{P_1P_2}$的外分点时，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{1}{2}$，此时P的坐标为(7，-8)。

11-1-12　由正△ABC的顶点C满足的条件|CA|=|CB|=|AB|，可建立关于C点坐标的方程组，从而可求出C的坐标为$(3+\sqrt{3}，1-\sqrt{3})$或$(3-\sqrt{3}，1+\sqrt{3})$。

11-1-13　设AI的延长线交BC于D，从而$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$，设点D的坐标为$(x_D，y_D)$，则

$$x_D=\frac{x_2+\frac{c}{b}x_3}{1+\frac{c}{b}}=\frac{bx_2+cx_3}{b+c}$$

$$y_D=\frac{y_2+\frac{c}{b}y_3}{1+\frac{c}{b}}=\frac{by_2+cy_3}{b+c}$$

又$\frac{|AI|}{|ID|}=\frac{|AB|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|DC|}$，得$\frac{|AI|}{|ID|}=\frac{|AB|+|AC|}{|BD|+|DC|}=\frac{b+c}{a}$。

设内心I的坐标为$(x_I，y_I)$，则

$$x_I=\frac{x_1+\frac{b+c}{a}x_D}{1+\frac{b+c}{a}}=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}$$

$$y_I=\frac{y_1+\frac{b+c}{a}y_D}{1+\frac{b+c}{a}}=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}$$

11-1-14　设 P 的坐标为(x，y)，则由|PA|∶|PB|=1∶2 和|PB|∶|PC|=2∶3，可得方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+4x-6y+5=0\\x^2+y^2+4x+10y-43=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2+2\sqrt{2}\\y_1=3\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_2=-2-2\sqrt{2}\\y_2=3\end{cases}$$

11-1-15　由已知可得 y 轴是线段 BC 的垂直平分线，于是可设外心 H 的坐标为(0，y)。由|AH|=|BH|可得

$$2^2+(\sqrt{3}-y)^2=3^2+y^2$$

解得$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$。于是外心H的坐标为$(0，-\frac{\sqrt{3}}{3})$。

11-1-16　设所求点 M(x，y)到三定点距离的平方和为 S，则 S 是一个含 x，y 的二元二次多项式，且不含 xy 项，所以能分成 x 的二次三项式和 y 的二次三项式两个部分，因而可用二次函数求最大(小)值的方法来求 S 的最大(小)值。

(1)中，

$$S=3[(x-2)^2+(y+3)^2]+50$$

易知，当 x=2，y=-3 时，S 取最小值，故 M 的坐标为(2，-3)。

(2)中，

$$S=[3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2]$$
$$+[3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+(y_1^2+y_2^2+y_3^2)]$$

当$x=-\frac{-2(x_1+x_2+x_3)}{2\cdot 3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$时，前后两括号内的两个二次三项式同时取得最小值，故 S 取得最小值，此时 M 的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}，\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

11-1-17　用构造法求解。

(1)设 A，B，C 的坐标分别为 A(a+c，0)，B(0，b+d)，C(c，b)。据不等式|AC|+|BC|≥|AB|即得。

(2)设A，B，C的坐标分别为$A(0，-\sqrt{a})$，$B(c，\sqrt{b})$，$C(d，0)$。据不等式|AC|+|CB|≥|BA|即得。

(3)设 A，B，C，D 的坐标分别为 A(a，b)，B(a+b，b+c)，C(a+b+c，b+c+d)，D(a+b+c+d，a+b+c+d)。由|OA|+|AB|+|BC|+|CD|≥|OD|即得。

11-1-18　以 D 为原点，BC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，设 A、 B、C 的坐标分别为(a，b)、(-nc，0)、(mc，0)。则

$$m|AB|^2+n|AC|^2=m[(a+nc)^2+b^2]+n[(a-mc)^2+b^2]$$

$$=(m+n)a^2+(mn^2+nm^2)c^2+(m+n)b^2$$

$$=(m+n)(a^2+b+mnc^2)$$

又 $(m+n)|AD|^2+m|BD|^2+n|DC|^2$

$$=(m+n)(a^2+b^2)+m(nc)^2+n(mc)^2$$

$$=(m+n)(a^2+b^2+mnc^2)$$

故 $m|AB|^2+n|AC|^2=(m+n)|AD|^2+m|BD|^2+n|DC|^2$

11-1-19 以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，设 A，B，C，D，P 的坐标分别为 A(0，0)，B(a，0)，C(b，c)，D(d，e)，P(x，y)。由题意得

$$(x^2+y^2)+[(x-b)^2+(y-c)^2]$$

$$=[(x-a)^2+y^2]+[(x-d)^2+(y-e)^2]$$

$$\Leftrightarrow 2(a-b+d)x+2(e-c)y+b^2+c^2-a^2-d^2-e^2=0$$

因等式成立与 x，y 无关，所以

$$\begin{cases} a-b+d=0 & \text{(i)} \\ e-c=0 & \text{(ii)} \\ b^2+c^2-a^2-d^2-e^2=0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

由(i)得 b=a+d，由(ii)得 c=e，代入(iii)得 2ad=0。因 a≠0，所以 d=0，则∠A=90°。d=0 代入(i)得 a=b。于是四边形 ABCD 为矩形。

(二)直线的方程

11-2-1～11-2-8 DCCBD DAC

11-2-9 -1 11-2-10 1

11-2-11 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

11-2-12 3

11-2-13 (1)由$k=\mathrm{tg}120°=-\sqrt{3}$，得所求直线方程为$y+3=-\sqrt{3}(x-2)$，即$\sqrt{3}x+y+3-2\sqrt{3}=0$

(2)直线过 P(3，-2)及(6，0)两点，由直线的两点式得其方程为

$$\frac{y-0}{-2-0}=\frac{x-6}{3-6}\Leftrightarrow 2x-3y-12=0$$

(3)设在 x 轴上的截距为 a，在 y 轴上的截距为 b，则由截距式有$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$。由题设$a+b=12$得$b=12-a$，代入上面的直线方程得$\frac{x}{a}+\frac{y}{12-a}=1$。又此直线过点$P(3,2)$，所以$\frac{3}{a}+\frac{2}{12-a}=1$，解这个关于a的方程得 a=4 或 a=9，于是所求方程为

2x+y-8=0 或 x+3y-9=0

(4)设$\theta=\arcsin\frac{3}{5}$，则$\sin\theta=\frac{3}{5}$($\theta$为锐角)，故$\cos\theta=\frac{4}{5}$，故$\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1}{3}$。因此所求直线方程为$x-3y+11=0$。

(5)设直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，已知斜率为$\frac{1}{6}$，所以$-\frac{b}{a}=\frac{1}{6}$。又$\frac{1}{2}|ab|=3$。由上面两方程求出 a，b 的值。于是可求得直线方程为

x-6y+6=0 或 x-6y-6=0

11-2-14 记直线$x-2y=0$的倾斜角为α，则$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$。依题设，所求直线的倾斜角为 2α，故斜率

$$k=\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{4}{3}$$

应用点斜式，得所求直线方程为 4x-3y+1=0

11-2-15 设所求直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，那么点A，B的坐标分别为$(a,0)$，$(0,b)$。已知$\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$，故由定比分点分式，得

$$\begin{cases}-5=\dfrac{a+\frac{1}{2}\times 0}{1+\frac{1}{2}}\\ 4=\dfrac{0+\frac{1}{2}\times b}{1+\frac{1}{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a}=-\dfrac{2}{15}\\ \dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{12}\end{cases}$$

于是，所求直线方程为 $-\frac{2x}{15}+\frac{y}{12}=1$。

11-2-16　若点$(x_0，y_0)$在直线 4x+y+6=0 上，则$(-x_0，-y_0)$在直线 3x-5y-6=0 上，于是

$$\begin{cases}4x_0+y_0+6=0\\ -3x_0+5y_0-6=0\end{cases}$$

在上方程组中消去常数项(即两方程相加)得 $x_0+6y_0=0$。易知所求直线方程为 x+6y=0。

11-2-17　设直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，则由题设知$|a-b|=3$，$\frac{1}{2}|ab|$=2。从而可求得 l 的方程为

4x+y±4=0 或 x+4y±4=0

11-2-18　(1)按 x 整理得

$3x^2+(2y+7)x-(y^2+5y-k)=0$

因方程表示两条直线，故

$\triangle=16y^2+88y+(49-12k)$

为 y 的完全平方式，于是

$$\Delta'=88^2-4\times 16(49-12k)=0\Leftrightarrow k=-6$$

(2)k=-6 时，原方程表示的两条直线为 3x-y-2=0 及 x+y+3=0。

(3)由两直线交点为$\left(-\frac{1}{4}，-\frac{11}{4}\right)$，可知

$$S=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+3)\times\frac{11}{4}=\frac{121}{24}$$

11-2-19　设过直线 l_2 与 l_3 的交点的直线系方程为

$bx+cy+a+\lambda(cx+ay+b)=0$($\lambda\neq 0$ 常数)

因三直线交于一点，即 l_1 是上面直线系中的一条直线，所以

$ax+by+c=bx+cy+a+\lambda(cx+ay+b)$

于是
$$\begin{cases}a=b+c\lambda\\ b=c+a\lambda\Rightarrow a+b+c=a+b+c+\lambda(a+b+c)\\ c=a+b\lambda\end{cases}$$

因$\lambda\neq 0$，所以 a+b+c=0。

11-2-20　由已知得 A=-(B+C)，于是已知直线方程可变为

(y-x)B+(1-x)C=0

由此可将原方程看作过$\begin{cases} y-x=0 \\ 1-x=0 \end{cases}$交点的直线系，故此定点为$(1，1)$。

11-2-21　设 Q 点的坐标为(a，4a)(a＞0)，则直线 PQ 的方程为$\frac{y-4}{4-4a}=\frac{x-6}{6-a}$。令$y=0$，得$M$点坐标是$\left(\frac{5a}{a-1}，0\right)$，因$M$点位于$x$的正半轴，所以$\frac{5a}{a-1}>0$，则$a>1$。故$\triangle OMQ$的面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot \frac{5a}{a-1}=10[(a-1)+\frac{1}{a-1}+2]$$

因$a-1>0$，$\frac{1}{a-1}>0$，$(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}=1$(定值)，所以当且仅当$a-1=\frac{1}{a-1}$，即 a=2(a=0 舍去)时，S 取得最小值 40。此时 Q 点坐标为(2，8)。

11-2-22　联立 l_1 和 l_2 的方程，解得交点的坐标为(-5，2)。从而可设所求直线方程为

y-2=k(x+5)(其中 k 为待定系数)　　(i)

或　x=-5

将方程(i)分别与方程 x-y-5=0 及 x-y-2=0 联立，解得其交点 A，B 的

坐标分别为$\left(\frac{5k+7}{1-k}，\frac{10k+2}{1-k}\right)$及$\left(\frac{5k+4}{1-k}，\frac{7k+2}{1-k}\right)$。依题意$|AB|=3$。由此可解得 k=0。于是 y-2=0 为所求直线之一。

又将方程 x=-5 分别与 x-y-5=0，x-y-2=0 联立，解得两交点 A′，B′的坐标分别为(-5，-10)，(-5，-7)。此时截线段长|A′B′|=3。

综上所知，所求直线方程为 y-2=0 和 x=-5。

(三)两条直线的位置关系

1．应用两直线位置关系求直线方程

11-3-1～11-3-6　CBBBCC

11-3-7　3x-y+9=0

11-3-8　x+2y-2=0

11-3-9　x-5y+22=0 或 5x+y-20=0

11-3-10　3x+4y-25=0 或 3x+4y-20=0

11-3-11　y=0，5x-12y-5=0 或 y=5，5x-12y+60=0

11-3-12　2x+3y-13=0

11-3-13　$\sqrt{3}x-y=0$

11-3-14　$\frac{a}{\cos\varphi}x-\frac{b}{\sin\varphi}y=a^2-b^2$

11-3-15　(1)设直线 AD 方程为

由 tg∠CAD=tg∠DAB 得

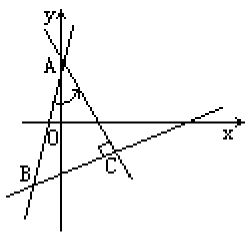
$$\frac{k-k_{AC}}{1+k\cdot k_{AC}}=\frac{k_{AB}-k}{1+k_{AB}\cdot k}$$

由题设可求得$k_{AC}=\frac{1}{5}$，$k_{AB}=5$，代入上式求得$k=1$或$k=-1$(不合，舍去)。

故 AD 的方程为 x-y=0。

(2)易知 AC 中点 E 的坐标为(-2，2)，据两点式得 BE 的方程为 x+y=0

(3)由$CF\perp AB$得$k_{CF}=-\frac{1}{5}$，据点斜式得CF的方程为$x+5y+2=0$。



11-3-16　如右图。由 AB 与 AC 的夹角为 45°，得

$$tg45°=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}\cdot k_{AB}}$$

已知 k_{AB}=3，求得 k_{AC}=-2。于是，直线 AC 的方程为 2x+y-7=0。

又$BC\perp AC$，故$k_{BC}\cdot k_{AC}=-1$，得$k_{BC}=\frac{1}{2}$。于是BC的方程为

x-2y-6=0。

11-3-17　设所求直线 l 的方程为 y=kx+b，则

$$\begin{cases} tg45°=\left|\frac{k-(-7)}{1+k(-7)}\right| \\ \frac{|-2k-6+b|}{\sqrt{1+k^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-\dfrac{3}{4} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} k=-\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{19}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} k=\dfrac{4}{3} \\ b=2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} k=\dfrac{4}{3} \\ b=\dfrac{46}{3} \end{cases}$$

于是，l 的方程为

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\text{或}y=-\frac{3}{4}x+\frac{19}{2}\text{或}y=\frac{4}{3}x+2\text{或}y=\frac{4}{3}x+\frac{46}{3}$$

11-3-18　由点斜式得 AC 的方程为 3x+2y-7=0，与 x+y=0 联立。得 C 的坐标为(7，-7)。同理得 B 的坐标为(-2，-1)。于是直线 BC 的方程为 2x+3y+7=0。

11-3-19　设过二已知直线交点的直线系方程为

(2x-y+4)+λ(x-y+5)=0

即　　(2+λ)x+(-1-λ)y+(4+5λ)=0

由题设知点(2，-1)到此直线的距离为

$$\frac{|(2+\lambda)\cdot 2+(-1-\lambda)\cdot(-1)+(4+5\lambda)|}{\sqrt{(2+\lambda)^2+(1+\lambda)^2}}=5$$

$$\Leftrightarrow 7\lambda^2-3\lambda-22=0\Leftrightarrow \lambda=-\frac{11}{7}\text{或}\lambda=2$$

故所求直线的方程为

4x-3y+14=0 或 3x+4y-27=0

11-3-20　先求出其交点。交点的坐标为(-1，2)。所求直线之一为过点(-1，2)且与两点(2，3)，(-4，5)连线平行的直线，另一为过点(-1，2)且过两点(2，3)，(-4，5)连结线段中点的直线。所求直线为

x+3y-5=0 或 x=-1

11-3-21　二平行线间的距离为3，由截线段长为$3\sqrt{2}$，知l与已知平行线的夹角为$45°$，于是由夹角公式求得l斜率为$k=\dfrac{1}{7}$或-7。故所求直线方程为

7x+y-17=0 或 x-7y-19=0

11-3-22　设一条边的方程为$y=\sqrt{3}x+b$，则中心$M(1,\ -1)$到此边的距离为 2，即

$$\frac{|\sqrt{3}\cdot 1-1\cdot(-1)+b)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=2\Leftrightarrow b=-(\sqrt{3}+1)\pm 4$$

则这相对两边所在直线方程为

$$y=\sqrt{3}x-(\sqrt{3}+1)\pm 4$$

又设另一组对边的方程为$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+c$，仿上得$c=(\sqrt{3}-1)\pm 4$，

则这组对边所在直线的方程为

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+(\sqrt{3}-1)\pm 4$$

2．对称问题

11-3-23～11-3-28　CDBCBD

11-3-29　$F(2x_0-x, 2y_0-y)=0$

11-3-30　$F(-1-y, -1-x)=0$

11-3-31　$y=f(2-x)$

11-3-32　$x=a$

11-3-33　$2a-b-c=0$

11-3-34　$y=2x-1$，$y=2x+1$；$x+2y+1=0$；$x+2y-3=0$；$2x-11y+5=0$

11-3-35　(1)设 $P'(x', y')$是 $P(4, 5)$关于 l 的对称点，于是 PP'的中点$M\left(\frac{x'+4}{2}, \frac{y'+5}{2}\right)$在$l$上，且$PP' \perp l$，于是

$$\begin{cases}\frac{y'+5}{2}=3\cdot\frac{x'+4}{2}+3\\ \frac{y'-5}{x'-4}\cdot 3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-2\\ y'=7\end{cases}$$

即 P'的坐标是(-2，7)。

(2)设 $P(x, y)$是 $y=x-2$ 上任一点，它关于 l 的对称点为 $P'(x', y')$。于是

$$\begin{cases}\frac{y-y'}{x-x'}\cdot 3=-1\\ \frac{y+y'}{2}=3\cdot\frac{x+x'}{2}+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{5}y'-\frac{4}{5}x'-\frac{9}{5}\\ y=\frac{4}{5}y'+\frac{3}{5}x'+\frac{3}{5}\end{cases}$$

代入 $y=x-2$ 中，即得所求对称直线方程 $7x+y+22=0$。

(3)设 $P(x, y)$为直线 l 上任意一点，它关于点 $M(3, 2)$的对称点为 $P'(x', y')$。由 M 为 PP'的中点，得

$$\begin{cases}\frac{x+x'}{2}=3\\ \frac{y+y'}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6-x'\\ y=4-y'\end{cases}$$

代入 l 的方程，得到所求直线方程是 $3x-y-17=0$。

11-3-36　(1)x 不变，以-y 代 y 得 $Ax-By+C=0$，即为所求；

(2)以-x 代 x，-y 代 y 得 $A(-x)+B(-y)+C=0$，即 $Ax+By-C=0$，即为所求；

(3)以 y 代 x，以 x 代 y 得 $Ay+Bx+C=0$，即 $Bx+Ay+C=0$，即为所求。

11-3-37　根据三角形内角平分线的性质知，点 A(0，1)关于 AG 的对称点 A′在边 BC 上，同理点 B(3，4)关于 AG 的对称点 B′在 AC 边上。设 A′的坐标为(x', y')，可得

$$\begin{cases}\frac{y'-1}{x'-9}=\frac{1}{3}\\ 3\cdot\frac{x'+9}{2}+\frac{y'+1}{2}-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=0\\ y'=-2\end{cases}$$

即 A′的坐标为(0，-2)。于是由两点式得直线 BC 的方程为 $2x-y-2=0$。

11-3-38　A 到 B 的长度实质上就是在 l 上找一点 P，使 AP+PB 的值最小。为此，可先求得 A 点关于 l 的对称点 A′，其坐标为(3，-3)，于是

$$AP+PB=A'P+PB=A'B=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}=5\sqrt{13}$$

11-3-39　(1)先求 A(3，-2)关于直线 3x-2y+3=0 的对称点 A′的坐标。解方程组

$$\begin{cases}y+2=-\dfrac{2}{3}(x-3)\\3x-2y+3=0\end{cases}$$

求得AA'**与镜面直线的交点**$M\left(-\dfrac{9}{13}，\dfrac{6}{13}\right)$**。再由中点坐标公式，求得**$A'$**的坐标为**$\left(-\dfrac{57}{13}，\dfrac{38}{13}\right)$**。过**$A'$**，**$B$**的直线方程**$30x+19y+76=0$**即为反射线方程。**

(2)解方程组

$$\begin{cases}30x+19y+76=0\\3x-2y+3=0\end{cases}$$

得入射点N**的坐标为**$\left(-\dfrac{209}{117}，-\dfrac{46}{39}\right)$**。**

(3)用两点式即得入射线 AN 的方程 6x+35y+52=0。

11-3-40　把$\sqrt{x^2+9}$**看成两点**$A(0，3)$**与**$P(x，0)$**间的距离**$|PA|$**；把**$\sqrt{x^2-8x+41}=\sqrt{(x-4)^2+25}$**看成两点**$B(4，5)$**与**$P(x，0)$**间的距离**$|PB|$**。设 A(0，3)关于 x 轴的对称点 A′(0，-3)。于是**

$$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-8x+41}=|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|\geq|A'B|$$

$$=\sqrt{(5+3)^2+4^2}=4\sqrt{5}$$

故函数y**的最小值为**$4\sqrt{5}$**。**

11-3-41　若 A，B 在直线 x-2y-2=0 异侧，则 AB 连线与 x-2y-2=0 的交点即为所求。而现在 A，B 在直线同侧，因此需求出 A 点关于直线的对称点 A′，则直线 A′B 与 x-2y-2=0 的交点 P(4，1)即为所求。

11-3-42　如果 A、B 在直线 3x-y-1=0 同侧，那么 AB 连线与直线 3x-y-1=0 的交点为所求。而现在 A，B 在直线 3x-y-1=0 的异侧，因此需求出 A 点关于直线 3x-y-1=0 的对称点 A′(-2，3)，则直线 A′B 与直线 3x-y-1=0 的交点 P(2，5)即为所求。

(四)圆的方程

11-4-1～11-4-8　AABCA　CBD

11-4-9　-16

11-4-10　$x^2+y^2+2x-4=0$

11-4-11　$(x-1)^2+y^2=\frac{1}{5}$

11-4-12　$(x-2\sqrt{3})^2+y^2=25$

11-4-13　$(x-1)^2+(y+2)^2=2$

11-4-14　因圆过点(a，0)，(b，0)，(0，c)，将坐标分别代入圆的一般方程，应用待定系数法求解，求得圆的方程为

$$x^2+y^2-(a+b)x-(c+\frac{ab}{c})y+ab=0$$

11-4-15　(1)可求得三边中点为(1，0)，($\frac{3}{2}$，2)，($-\frac{1}{2}$，2)，将坐标分别代入圆的一般方程，应用待定系数法求得圆的方程为$x^2+y^2-x-\frac{19}{8}y=0$。

(2)直线 BC 原方程为

$$4x+3y=12$$

故 BC 边上的高 AG 所在的直线方程为

$$3x-4y=-3$$

解(i)、(ii)，得垂足G的坐标为$\left(\frac{39}{25}，\frac{48}{25}\right)$。同理解得垂足H的坐标为$\left(-\frac{13}{17}，\frac{16}{17}\right)$。另一垂足即为原点O(0，0)。用待定系数法求得圆的方程为

$$x^2+y^2-x-\frac{19}{8}y=0$$

注　△ABC 的中点三角形和垂足三角形的外接圆相同，故三中点及三垂足六点共圆。此结论对任何三角形都成立。

11-4-16　与两坐标轴相切的圆，其圆心必在直线 x±y=0 上，从而其半径长等于圆心的纵坐标或横坐标的绝对值。由此，再利用题设圆心在直线 5x-3y-8=0 上，即可求得圆心坐标为(4，4)或(1，-1)。故所求的圆方程为

$$(x-4)^2+(y-4)^2=16 \text{ 或 } (x-1)^2+(y+1)^2=1$$

11-4-17　以 y=3 代入方程 4x-3y+1=0，得 x=2，即所求圆与直线 4x-3y+1=0 切于点(2，3)。设此圆的圆心为(a，b)，半径为 r。由圆与 y 轴切于正半轴，知 b＞0，且

$$a^2=r^2 \qquad \text{(i)}$$

又点(2，3)为切点，得

$$(2-a)^2+(3-b)^2=r^2 \qquad \text{(ii)}$$

且　$$\frac{|4a-3b+1|}{5}=r \Leftrightarrow (4a-3b+1)^2=25r^2 \qquad \text{(iii)}$$

联立(i)、(ii)、(iii)，并注意$b>0$，得$a=\frac{10}{9}$，$b=\frac{11}{3}$，$r^2=\left(\frac{10}{9}\right)^2$。故所求的圆方程为

$$\left(x-\frac{10}{9}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\left(\frac{10}{9}\right)^2$$

11-4-18　已知圆与 x 轴相切，可设圆方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=y_0^2$$

又知点 A(0，1)，B(4，a)都在圆上，得

$$\begin{cases}x_0^2+(y_0-1)^2=y_0^2\\(x_0-4)^2+(y_0-a)^2=y_0^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y_0=x_0^2+1\\(x_0-4)^2+a^2=2ay_0\end{cases}\qquad\text{(i)}$$

消去 y_0 并整理得

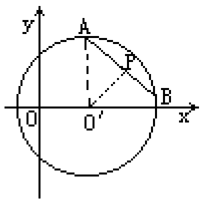
$$(1-a)x_0^2-8x_0+(a^2-a+16)=0\qquad\text{(ii)}$$

当 a=1 时，由(i)，(ii)可求得圆方程为

$$(x-2)^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}$$

当 a≠1 时，由已知得(ii)的△=0，求得 a=0，此时圆方程为

$$(x-4)^2+(y-\frac{17}{2})^2=\frac{289}{4}$$



11-4-19　如右图。设圆心为 O′(a，0)。由$|O'P|^2=|OA|^2-|AP|^2$，得

$$(a-5)^2+4^2=5^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a=7\text{或}a=3$$

所求圆的方程为

$$(x-7)^2+y^2=25\text{ 或 }(x-3)^2+y^2=25$$

11-4-20　由题设可设圆心 O′的坐标为(3a，a)，半径 R=3|a|。由圆心O′到直线$x-y=0$的距离$d=\frac{|3a-a|}{\sqrt{2}}$。由勾股定理得$R^2-d^2=\left(\frac{2\sqrt{7}}{2}\right)^2$。

于是可求得 a=±1。于是所求圆方程为

$$(x-3)^2+(y-1)^2=9\text{ 或 }(x+3)^2+(y+1)^2=9$$

11-4-21　设所求圆方程为

$$x^2+y^2+4x-2y-4+\lambda(x+y+4)=0$$

与 y=x 联立，消去 y，得

$$2x^2+2(1+\lambda)x+4(\lambda-1)=0$$

令△=0，得λ=3。故所求圆方程为

$$x^2+y^2+7x+y+8=0$$

(五)直线(圆)与圆的位置关系

11-5-1～11-5-6　ADCDDC

11-5-7　x=-8 或 21x-20y+288=0

11-5-8　$x_1x+y_1y=r^2$

11-5-9　(5，-4)

11-5-10　$a \in (-\sqrt{2}，\sqrt{2})$

11-5-11　x+y-2=0 或 7x+17y+26=0

11-5-12　(1)由切线公式 $x_0x+y_0y=r^2$ 得所求切线方程为

$$2x+\sqrt{6}y-10=0$$

(2)由圆心(0，0)到切线$y=x+b$的距离$d=\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}=1$，得$b=\pm\sqrt{2}$，故所求切线方程为$y=x\pm\sqrt{2}$；

(3)由圆心(0，0)到切线$y=kx+\sqrt{2}$的距离$d=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}=1$，得$k=\pm 1$，故所求切线方程为$y=\pm x+\sqrt{2}$；

(4)因$(2-1)^2+(4+3)^2=50>1$，所以点 M(2，4)在圆$(x-1)^2+(y+3)^2=1$外。

当过点M的直线的倾斜角$\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$时，设切线方程为

$$y-4=k(x-2)$$

与已知圆方程联立，消去y，再由$\Delta=0$，得$k=\dfrac{24}{7}$，所求切线方程为

$$24x-7y-20=0$$

当过点M的直线的倾斜角$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，这条直线方程是$=2$，圆心(1，-3)到此直线的距离等于圆的半径 1，所以 x=2 也是所求切线方程。

11-5-13　由已知等式知，过$(a，a^2)$，$(b，b^2)$两点的直线方程是 $x\cos\theta+y\sin\theta-1=0$，又此直线与原点的距离

$$d=\frac{|0+0+1|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=1(\text{定值})$$

所以直线恒切于圆 $x^2+y^2=1$。

11-5-14　(1)圆心到已知直线的距离$d=\dfrac{|-b|}{\sqrt{a^2+1}}<1$，即$a^2-b^2+1>0$ 时直线与圆有两个交点。

(2)取 MN 的中点 P。连结 OP，则

$$\angle xOP=\alpha+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

所以　$k_{MN}=a$，$k_{OP}=-\dfrac{1}{a}=tg\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

由万能置换公式即得

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-1}{a^2+1}$$

11-5-15　将点 P(1，-2)的坐标代入圆系方程

$$x^2+y^2+2x-3+\lambda(x^2+y^2-4x-5)=0$$

求得 $\lambda=1$。故所求圆方程为 $x^2+y^2-x-4=0$。

11-5-16　因 $r_1=12$，$r_2=3$，圆心距 $d=|15-0|=15=r_1+r_2$，所以两圆外切。

设两圆公切线为

$$y=kx+b \qquad \text{(i)}$$

将(i)代入 C_1，整理得 $(1+k^2)x^2+2bkx-144+b^2=0$，由 $\triangle_1=0$，得

$$b^2-144k^2-144=0 \qquad \text{(ii)}$$

同理，将(i)代入 C_2，由 $\triangle_2=0$，得

$$36k^2-4b^2+120b-864=0 \qquad \text{(iii)}$$

联立(ii)、(iii)，解得，$k=\pm\frac{4}{3}$，$b=20$ 或 $k=0$，$b=12$。

故所求公切线方程为

$$y=\pm\frac{4}{3}x+20 \text{或} y=12$$

11-5-17　由

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ x^2+y^2+x-6y+m=0 \end{cases}$$

得　$5x^2+10x-27+4m=0$

设 P，Q 的坐标分别为 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，则

$$x_1x_2=\frac{4m-27}{5}，x_1+x_2=-2$$

于是　$y_1y_2=\frac{1}{2}(3-x_1)\cdot\frac{1}{2}(3-x_2)=\frac{1}{4}[9-3(x_1+x_2)+x_1x_2]$

$$=\frac{1}{4}(9+6+\frac{4m-27}{5})=\frac{m+12}{5}$$

因 $OP\perp OQ$，所以 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$，即 $\frac{m+12}{4m-27}=-1$，所以 $m=3$。

第十二部分　椭圆、双曲线、抛物线

(一)椭圆

12-1-1　D　由$x^2+ky^2=2$，得$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{2}{k}}=1$，故$\frac{2}{k}>2$从而，$0<k<1$

12-1-2　C　直线 y-kx-1=0 恒过点(0，1)，仅当点(0，1)在椭圆上或椭圆内时，此直线才恒与椭圆有公共点。所以，$\frac{1}{m}\leq 1$且$m>0$，得$m\geq 1$。

12-1-3　D　因$\frac{2a^2}{c}:2c=4:3$，则$\left(\frac{a}{c}\right)^2=\frac{4}{3}$，所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

12-1-4　C　易求得离心率$e=\frac{4}{5}$。因P到椭圆右准线的距离为10，则P到右焦点距离为$r_1=10\times\frac{4}{5}=8$。又由椭圆定义得P点到椭圆左焦点距离为 $r_2=20-8=12$。

12-1-5　B　由题设知，$2c=\frac{1}{3}\cdot\frac{2a^2}{c}$，故$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

12-1-6　B　由题设知 2c=a+b，所以 b=2c-a，所以 $b^2=(2c-a)^2$。但$b^2=a^2-c^2$，于是

$$a^2-c^2=(2c-a)^2\Leftrightarrow 5c^2=4ac\Leftrightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$$

12-1-7　B　将方程 $x^2+2y^2-8x+4y+2=0$ 配方得

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{8}=1$$

则$a=4$，$b^2=8$。过焦点与长轴垂直的弦为椭圆的通径，长为$\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 8}{4}=4$。

12-1-8　A　由椭圆焦半径公式知

$$|AF|=a+ex_1,\ |BF|=a+ex_2,\ |CF|=a+ex_3$$

因 $2x_2=x_1+x_3$，所以

$$|AF|+|CF|=2a+e(x_1+x_3)=2(a+ex_2)=2|BF|$$

故|AF|、|BF|、|CF|成等差数列。

12-1-9　C　设直线l的方程为$y=x+t$，将其代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$得

$$5x^2+8tx+4t^2-4=0$$

当$\triangle=64t^2-80t^2+80=16(5-t^2)>0$ 时，

$$|AB|=\sqrt{1+1}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\frac{4\sqrt{5-t^2}}{5}$$

当$t=0$时，(此时△＞0)，$|AB|_{max}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$。

12-1-10　D　由题设知 AB 不与 x 轴重合。

设 AB 所在直线的方程为 ky=x，A、B 两点坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)。

将$x=ky$代入椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$得

$$(b^2k^2+a^2)y^2=a^2b^2\Leftrightarrow y_1=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2k^2}}，\ y_2=-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2k^2}}$$

于是△AFB 的面积

$$S_{\triangle AFB}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2k^2}}=\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2k^2}}$$

当 k=0 时，$S_{\triangle AFB}$取最大值 bc。

12-1-11　若 a＜4，动点 M 的轨迹不存在；若 a=4，动点 M 的轨迹为线段F_1F_2；若$a>4$，动点M的轨迹为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-16}=1$。

12-1-12　设 $P(x_0,y_0)$为轨迹上任一点，则

$$\begin{cases}y_0=k_1x_0+b\\y_0=k_2x_0-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0-b=k_1x_0\\y_0+b=k_2x_0\end{cases}$$

两式相乘得

$$y_0^2-b^2=k_1k_2x_0^2\ \Leftrightarrow\ y_0^2-k_1k_2x_0^2=b^2$$

故当 k_1 k_2 等于一个不为-1 的负实数时,两直线的交点轨迹是椭圆.

12-1-13 由题设知，椭圆焦点在x轴上，且$a=5$，$\frac{a^2}{c}=\frac{25}{4}$，易求得$b=3$．故椭圆方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$．

12-1-14 设椭圆方程为$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$．

因 M，N 两点在椭圆上，所以

$$\begin{cases}\frac{16}{A}+\frac{3}{B}=1\\\frac{8}{A}+\frac{9}{B}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=20\\B=15\end{cases}$$

故椭圆方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$．

12-1-15 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>c)$．由题设知

$$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\\ \dfrac{a^2}{c}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{5}\\ c=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=\frac{20}{9}$$

故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{9y^2}{20}=1$.

12-1-16 设 P(x，y)为椭圆上任一点，则

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-2\sqrt{2})^2}}{|y-3\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow(x-2)^2+\frac{1}{3}y^2=4$$

故椭圆方程为$\frac{y^2}{12}+\frac{(x-2)^2}{4}=1$.

12-1-17 边 AF_1，因 ABF_1CDF_2 为正六边形，则 $F_1A\perp F_2A$，且$\angle AF_2F_1=60°$.

因$|F_1F_2|=2c$，则$|AF_2|=c$，$|AF_1|=\sqrt{3}c$.

又$|AF_1+|AF_2|=2a$，则 $=(\sqrt{3}+1)c=2a$，所以，

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{3}-1$$

12-1-18 设椭圆半焦距为 c．P(x，y)为椭圆上一点，且 $PF_1\perp PF_2$(F_1、F_2为两焦点)．则P点为圆$x_2+y_2=c_2$与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$的交点．

当$c<b$，即$b<a<\sqrt{2}b$时，圆与椭圆无交点，则满足条件的点为零个；

当$c=b$，即$a=\sqrt{2}b$时，圆与椭圆有二交点，即短轴的两端点，则满足条件的点有 2 个；

当$c>b$，即$a>\sqrt{2}b$，圆与椭圆有四个交点，则满足条件的点有4个.

12-1-19 易知 B，C 两点坐标为(-2，0)，(2，0).

设 A 点坐标不(x_0，y_0)，△ABC 内坐标为 G(x，y)，则

$$\begin{cases}\dfrac{-2+2+x_0}{3}=x\\ \dfrac{0+0+y_0}{3}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=3x\\ y_0=3y\end{cases}$$

因点$A(x_0，y_0)$在椭圆上，则$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，将上式代入其中得重心 G 的轨迹方程为

$$\frac{9x^2}{4}+9y^2=1$$

12-1-20 设 A，B 两点坐标分别为(x_1，y_1)，(x_2，y_2)．因 A，B 两点都在椭圆上，故

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{y_1^2}{4}=1 & \text{(i)}\\ \dfrac{x_2^2}{9}+\dfrac{y_2^2}{4}=1 & \text{(ii)}\end{cases}$$

(i)减去(ii)，得

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{9}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{4}=0$$

所以AB所在直线的斜率

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{4(x_1+x_2)}{9(y_1+y_2)}$$

又P(2，1)为AB的中点，故$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$．所以$k=-\dfrac{8}{9}$．

故AB所在直线方程为$y-1=-\dfrac{8}{9}(x-2)$，即

8x+9y-25=0

12-1-21 设F_1，F_2的坐标为(-c，0)，(c，0)，则$c=\sqrt{a^2-b^2}$．因为$PF_1\perp PF_2$，故

$$\frac{4}{3+c}，\frac{4}{3-c}=-1\Leftrightarrow c^2=25$$

又点P(3，4)在椭圆上，则

$$\begin{cases}\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1\\ a^2-b^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=45\\ b^2=20\end{cases}$$

故所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{20}=1$．

12-1-22 $F_1(-3，0)$关于直线 l：x-y+9=0 的对称点为 F(-9，6)，连 F_2F 交 l 于 M．此点即为所求．

直线F_2F的方程为$y=-\dfrac{1}{2}(x-3)$，即$x+2y-3=0$．

解方程组$\begin{cases}x+2y-3=0\\ x-y+9=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=-5\\ y=4\end{cases}$，故点M的坐标为(-5，4)．

此时椭圆长轴长$2a=|MF_1|+|MF_2|=|FF_2|=6\sqrt{5}$．所以$a=3\sqrt{5}$．因为$c=3$，则$b^2=36$．

故椭圆方程为$\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$．

12-1-23 设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．

右焦点为F(c，0)($c=\sqrt{a^2-b^2}$)．短轴两端点为B′，B，长轴两端点为A′，A．

由已知，FB′⊥FB，又|FB′|=|FB|，故△FB′B 为等腰三角形，

所以$b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$。

又$|FA|=a-c=4(\sqrt{2}-1)$，故$a-\frac{\sqrt{2}}{2}a=4(\sqrt{2}-1)$，所以$a=4\sqrt{2}$，进而 b=c=4．

故所求椭圆方程为$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$，其离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，准线方程为$x=\pm 8$．

12-1-24　若焦点在x轴上，则设方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其两焦点$F_1$，$F_2$的坐标为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$．又设短轴的一个端点为 B(0，b)，长轴的一个端点为 A(a，0)．

由△BF_1F_2为正三角形知，$|BF_1|=|BF_2|=|F_1F_2|$，所以

$$a=2c \qquad \text{(i)}$$

设 P(x，y)为椭圆上任一点，则 $x\in[-a,a]$，所以

$$|PF_2|^2=(x-c)^2+y^2=(x-c)^2+(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2)$$

$$=\frac{c^2}{a^2}(\frac{a^2}{c}-x)^2\geq\frac{c^2}{a^2}(\frac{a^2}{c}-a)^2$$

即$|PF_2|\geq a-c$，故焦点到椭圆上点的最短距离为 a-c．于是

$$a-c=\sqrt{3} \qquad \text{(ii)}$$

由(i)，(ii)，得$c=\sqrt{3}$，$a=2\sqrt{3}$，$b=3$．

故椭圆方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$．

同理，若椭圆焦点在 y 轴上，则方程为

$$\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{9}=1$$

12-1-25　设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，两焦点为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，这里$c=\sqrt{a^2-b^2}$．又设$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，则

$r_1+r_2=2a$

$r_1-r_2=2$

又已知PQ为$\angle F_1PF_2$的平分线，则$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1Q|}{|QF_2|}$，即

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\frac{1}{2}+c}{c-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow c=\frac{r_1+r_2}{2(r_1-r_2)}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=2c \qquad \text{(i)}$$

又因为一条准线为 x=8，故

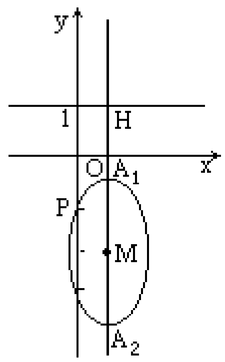
$$\frac{a^2}{c}=8 \qquad \text{(ii)}$$

由(i)，(ii)得 $c=2$，$a=4$，故 $b^2=a^2-c^2=12$．

故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$．

12-1-26 如下图．设椭圆中心为 M，长轴 A_1A_2 所在的直线与准线 $y=1$ 交于 H．

由椭圆性质知，椭圆上的点到其准线 $y=1$ 的距离的最小值为 $|A_1H|$，最大值为 $|A_2H|$．因 P 在椭圆上，且 P 到准线 $y=1$ 的距离为 2．故 $|A_1H|\leq 2\leq |A_2H|$，即



$$\frac{a^2}{c}-a\leq 2\leq \frac{a^2}{c}+a$$

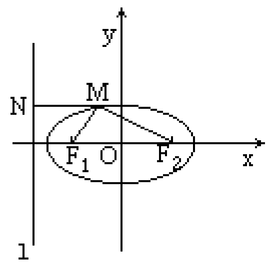
又 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，即 $c=\frac{1}{2}a$，故

$$a\leq 2\leq 3a\Leftrightarrow \frac{2}{3}\leq a\leq 2\Leftrightarrow \frac{4}{3}\leq 2a\leq 4$$

故椭圆长轴长的取值范围是 $[\frac{4}{3}，4]$．

12-1-27 如下图．由已知，椭圆长半轴、短半轴、半焦距的长分别

为 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$．则离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，右准线方程为 $x=-2$．



由椭圆定义，

$$\frac{|MF_1|}{|MN|}=e\Leftrightarrow |MF_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}|MN|$$

又$|MF_1|+|MF_2|=2a=2\sqrt{2}$，则$|MF_2|=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}|MN|$.

由已知$|MN|^2=|MF_1|\cdot|MF_2|$，所以

$$|MN|^2=\frac{\sqrt{2}}{2}|MN|(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}|MN|)\Leftrightarrow|MN|=\frac{4}{3}$$

设 M 点坐标为(x，y)则

$$|MN|=x-(-2)=x+2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$$

因点$M(x，y)$在椭圆上，所以$y^2=1-\frac{x^2}{2}$，则$y^2=1-\frac{1}{2}(-\frac{2}{3})^2=\frac{7}{9}$，所以

$$y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

故所求点M的坐标为$(-\frac{2}{3}，\frac{\sqrt{7}}{3})$或$(-\frac{2}{3}，-\frac{\sqrt{7}}{3})$.

12-1-28　由题设知 a=10，b=8，故 c=6，$|F_1F_2|=12$．设$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，则 $r_1+r_2=20$．

在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理得

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{r_1^2+r_2^2-12^2}{2r_1r_2}$$

$$=\frac{(r_1-r_2)^2-2r_1r_2-144}{2r_1r_2}$$

又$\angle F_1PF_2=30°$，故

$$\frac{20^2-144}{2r_1r_2}-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow r_1r_2=256(2-\sqrt{3})$$

所以，$\triangle F_1PF_2$的面积

$$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}r_1r_2\cdot\sin 30°=64(2-\sqrt{3})$$

12-1-29　设长半轴长为 a，半焦距为 c.

在$\triangle PF_1F_2$中，由正弦定理得

$$\frac{|F_1F_2|}{\sin(\pi-3\alpha)}=\frac{|PF_1|}{\sin\alpha}=\frac{|PF_2|}{\sin 2\alpha}$$，此即

根据等比定理得$\frac{|F_1F_2|}{\sin 3\alpha}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}$，此即

$$\frac{2c}{\sin 3\alpha}=\frac{2a}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}$$

故
$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}}{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{4\cos^3\frac{\alpha}{2}-3\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$=4\cos^2\frac{\alpha}{2}-3=2\cos\alpha-1$$

因为$0<e<1$，则$0<\cos\alpha-1<1$，即$\frac{1}{2}<\cos\alpha<1$.

故离心率$e=2\cos\alpha-1$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{3})$.

12-1-30　由对称性，设F为右焦点．则F点坐标为(c，0)，这里c=$\sqrt{a^2-b^2}$．P为x轴上方一点，则P点坐标为$(c,\frac{b^2}{a})$．点A′，A的坐标分别为(-a，0)，(a，0)．则PA′、PA所在直线的斜率分别为

$$k_{PA'}=\frac{b^2}{a(c+a)}，k_{PA}=\frac{b^2}{a(c-a)}$$

故

$$\operatorname{tg}\angle A'PA=\frac{k_{PA}-k_{PA'}}{1+k_{PA}\cdot k_{PA'}}=\frac{\frac{b^2}{a(c-a)}-\frac{b^2}{a(c+a)}}{1+\frac{b^4}{a^2(c^2-a^2)}}$$

$$=-\frac{2a^2}{a^2-b^2}=-\frac{2a^2}{c^2}$$

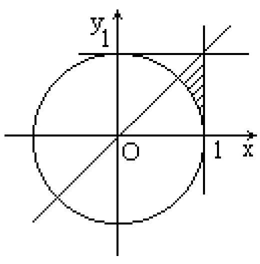
12-1-31　由方程组$\begin{cases}x+y=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$消去y，整理得

$$(a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2(1-b^2)=0 \qquad (i)$$

则椭圆与直线l在第一象限内有两个不同的交点的充要条件是方程(i)在区间(0，1)内有两相异实根．

令$f(x)=(a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2(1-b^2)$，则

$$\begin{cases}\triangle=4a^4-4a^2(a^2+b^2)(1-b^2)>0\\ f(0)=a^2(1-b^2)>0\\ f(1)=b^2-a^2+a^2(1-b^2)>0\\ 0<\frac{a^2}{a^2+b^2}<1\\ a>b>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2>1\\ 0<b<1\\ 0<a<1\\ a>b>0\end{cases}$$



同时满足上述四个条件的点P(a，b)的存在区域为上图中阴影部分(不含边界)．

12-1-32 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，直线$l$的方程为$y=x+m$．直线 l 与椭圆的交点 A，B 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$．AB 的中点的坐标为$(x_0，y_0)$．

由方程组$\begin{cases} y=x+m \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$消去$y$，得方程

$$(a^2+b^2)x^2+2a^2mx+a^2(m^2-b^2)=0$$

设x_1，x_2为此方程两实根，则$x_1+x_2=-\frac{2a^2m}{a^2+b^2}$，所以

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2m}{a^2+b^2}，\ y_0=x_0+m=\frac{b^2m}{a^2+b^2}$$

因中点$(x_0，y_0)$恒在直线 $y=-px$ 上，故

$$\frac{b^2m}{a^2+b^2}=-p(-\frac{a^2m}{a^2-b^2})\Leftrightarrow\frac{b^2}{a^2}=p.$$

故当 $0<p<1$ 时，$a>b$，焦点在 x 轴上，离心率为

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-p}$$

当 $p>1$ 时，$b>a$，焦点在 y 轴上，离心率

$$e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{p}}$$

12-1-33 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，右焦点F的坐标为$(c，0)$，P，Q 两点的坐标为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$．

由题设，P，Q 所在直线方程为 $y=x-c$．

由方程组$\begin{cases} y=x-c \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$消去$y$，得

$$(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+a^2(c^2-b^2)=0$$

由$\triangle=4a^4c^2-4a^2(c^2-b^2)(a^2+b^2)=8a^2b^4>0$，故上面的方程有两不等实根 x_1，x_2 且

$$x_1+x_2=\frac{2a^2c}{a^2+b^2}，\ x_1\cdot x_2=\frac{a^2(c^2-b^2)}{a^2+b^2} \qquad (i)$$

又已知 $OP\perp OQ$，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$．而 $y_1=x_1-c$，$y_2=x_2-c$，故

$$x_1x_2+(x_1-c)(x_2-c)=0\Leftrightarrow 2x_1x_2-c(x_1+x_2)+c^2=0 \quad (ii)$$

将(i)代入(ii)，得

$$\frac{2a^2(c^2-b^2)}{a^2+b^2}-\frac{2a^2c^2}{a^2+b^2}+c^2=0$$

$$\Leftrightarrow c^2(a^2+b^2)=2a^2b^2$$

又 $b^2=a^2-c^2$，则

$$c^2(2a^2-c^2)=2a^2(a^2-c^2)\Leftrightarrow c^4-4a^2c^2+2a^4=0$$

$$\Leftrightarrow e^4-4e^2+2=0\Leftrightarrow e^2=2\pm\sqrt{2}$$

考虑到$0<e<1$，则$e^2=2-\sqrt{2}$，故$e=\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

12-1-34　设半焦距为 c.

由已知一条准线的方程为$x=1$知$\frac{a^2}{c}=1$.

所以 $a^2=c$，所以 $b^2=a^2-c^2=c-c^2>0$，由此知 $0<c<1$.

椭圆方程为$\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c-c^2}=1$即

$(1-c)x^2+y^2+c^2-c=0$

设直线 l 的方程为 $y=x+m$.

由方程组$\begin{cases}y=x+m\\(1-c)x^2+y^2+c^2-c=0\end{cases}$消去$y$，得

$(2-c)x^2+2mx+m^2+c^2=0$

A，B 两点的横坐标 x_1，x_2 为此方程两实根，则

$$x_1+x_2=\frac{2m}{c-2}$$

设 AB 的中点 M 的坐标为(x_0,y_0)则

$$x_0=\frac{m}{c-2}，y_0=x_0+m=\frac{m(c-1)}{c-2}$$

由此知 OM 所在直线的斜率为 $k'=c-1$，又直线 l 的斜率为 1，故

$$tg\alpha=\left|\frac{c-1-1}{1+c-1}\right|=\frac{2-c}{c}$$

(1)当$\alpha=arctg2$ 时，$tg\alpha=2$，则

$$\frac{2-c}{c}=2\Leftrightarrow c=\frac{2}{3}$$

故椭圆方程为$\frac{3x^2}{2}+\frac{9y^2}{2}=1$.

(2)当 $arctg2<\alpha<arctg3$ 时，$2<tg\alpha<3$，则

$$2<\frac{2-c}{c}<3\Rightarrow\frac{1}{2}<c<\frac{2}{3}$$

由$b=\sqrt{c-c^2}=\sqrt{-(c-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}<c<\frac{2}{3})$得

$$\frac{\sqrt{2}}{3}<b<\frac{1}{2}$$

即短轴长的范围是$(\frac{2\sqrt{2}}{3}，1)$.

12-1-35 (1)由题设，可设椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$，$(a>b>0)$，

半焦距$c=2\sqrt{2}$. 又$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则$a=3$，$b=1$.

故椭圆方程为$\frac{y^2}{9}+x^2=1$．

(2)假设直线 l 存在，设 l 的方程为：y=kx+m．

由方程组$\begin{cases} y=kx+m \\ 9x^2+y^2=9 \end{cases}$消去y，得

$$(k^2+9)x^2+2kmx+(m^2-9)=0 \qquad (i)$$

设 M，N 两点的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则 x_1，x_2 为方程(i)的不等两实根．方程(i)的判别式应为正，即

$$\triangle=4k^2m^2-4(k^2+9)>0 \Leftrightarrow m^2-k^2-9<0 \qquad (ii)$$

由韦达定理知

$$x_1+x_2=-\frac{2km}{k^2+9}$$

又因线段MN恰被直线$x=-\frac{1}{2}$平分，故$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{1}{2}$，于是

$$-\frac{km}{k^2+9}=-\frac{1}{2}$$

又因 k≠0，则

$$m=\frac{k^2+9}{2k} \qquad (iii)$$

将(iii)代入(ii)，得

$$\left(\frac{k^2+9}{2k}\right)^2-k^2-9<0 \Leftrightarrow k>\sqrt{3}\text{或}k<-\sqrt{3}$$

故存在符合条件的直线l，l的倾斜角的范围为$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$．

12-1-36 化圆方程 $x^2+y^2-2y-8=0$ 为标准方程：$x^2+(y-1)^2=9$，知圆心

为P(0，1)，半径$r=3$．可求出圆的内接正方形ABCD的边长为$3\sqrt{2}$，圆

心P到直线l的距离$d=\frac{3\sqrt{2}}{2}$．故

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow k=4\text{或}k=-2$$

$k=4$时，解方程组$\begin{cases} y=x+4 \\ x^2+y^2-2y-8=0 \end{cases}$，得

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=1 \end{cases}$$

所以 C、D 两点坐标为(0，4)，(-3，1)．它们关于点 P 的对称点 A、B 的坐标分别为(0，-2)，(3，1)．

再由 A，B 在椭圆上，易求得 $a^2=12$，$b^2=4$．

当$k=-2$时，同法可求得$a^2=\frac{48}{5}$，$b^2=16$．

故所求椭圆及直线 l 的方程为

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1，y=x+4 \quad 或 \quad \frac{5x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1，y=x-2$$

12-1-37　设椭圆方程为 $Ax^2+By^2=1(A>0，B>0)$，P，Q 两点的坐标分别为 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$．

由方程组 $\begin{cases} y=x+1 \\ Ax^2+By^2=1 \end{cases}$ 消去y，得方程

$$(A+B)x^2+2Bx+B-1=0$$

当 $\triangle=4B^2-4(A+B)(B-1)=4(A+B-AB)>0$ 时，方程有两不等实根 x_1，x_2，且据韦达定理有

$$x_1+x_2=\frac{-2B}{A+B}，x_1x_2=\frac{B-1}{A+B}$$

所以 $$|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2}|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{A+B-AB}}{A+B}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

故 $$4\sqrt{A+B-AB}=\sqrt{5}(A+B) \qquad (i)$$

又因为 OP⊥OQ，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$．而 $y_1=x_1+1$，$y_2=x_2+1$，故

$$x_1x_2+(x_1+1)(x_2+1)=0 \Leftrightarrow 2x_1x_2+x_1+x_2+1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(B-1)}{A+B}+\frac{-2B}{A+B}+1=0 \Leftrightarrow A+B=2 \qquad (ii)$$

将(ii)代入(i)，得

$$AB=\frac{3}{4} \qquad (iii)$$

联立(ii)，(iii)解得 $A=\frac{3}{2}$，$B=\frac{1}{2}$，或 $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{3}{2}$．

故所求椭圆方程为

$$\frac{3x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1 \quad 或 \quad \frac{x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}=1$$

12-1-38　由题设知，椭圆长半轴长 $a=2$，短半轴长 $b=1$，半焦距 $c=\sqrt{3}$．则椭圆右焦点F坐标为 $(\sqrt{3}，0)$，右准线为 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

设直线l的方程为：$ky=x-\sqrt{3}$．M，N两点的坐标分别为 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，M，N两点到准线 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 的距离分别为 d_1，d_2．则 $d_1+d_2=\sqrt{3}$．

由椭圆定义得 $|MF|=\frac{\sqrt{3}}{2}d_1$，$|NF|=\frac{\sqrt{3}}{2}d_2$，故

$$|MN|=|MF|+|NF|=\frac{\sqrt{3}}{2}(d_1+d_2)=\frac{3}{2} \qquad (i)$$

又由方程组 $\begin{cases} ky=x-\sqrt{3} \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 消去x，得方程

$$(k^2+4)y^2+2\sqrt{3}ky-1=0$$

其判别式△=$12k^2+4(k^2+4)=16(k^2+1)>0$ 恒成立,故上面的方程有两不等实根 y_1，y_2．由韦达定理知

$$y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{3}k}{k^2+4}，\ y_1y_2=-\frac{1}{k^2+4}$$

从而 $$|MN|=\sqrt{1+k^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{k^2+1}}{k^2+4}=\frac{4(k^2+1)}{k^2+4}$$

(ii)

由(i)，(ii)得

$$\frac{4(k^2+1)}{k^2+4}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow k=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

故所求直线l的方程为 $x+\frac{2\sqrt{5}}{5}y-3=0$或$x-\frac{2\sqrt{5}}{5}y-3=0$．

12-1-39　设弦的端点为 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，AB 的中点为 $P(x，y)$．因 A，B 在椭圆上，所以

$$\begin{cases}\frac{(x_1-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y_1-y_0)^2}{b^2}=1\\ \frac{(x_2-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y_2-y_0)^2}{b}=1\end{cases}$$

两式相减，得

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2-2x_0)}{a^2}=-\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2-2y_0)}{b^2}$$

故 $$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2(x_1+x_2-2x_0)}{a^2(y_1+y_2-2y_0)}$$

因为 $\frac{x_1+x_2}{2}=x$，$\frac{y_1+y_2}{2}=y$，代入上式得

$$m=-\frac{b^2(2x-2x_0)}{a^2(2y-2y_0)}\Leftrightarrow b^2(x-x_0)+ma^2(y-y_0)=0$$

故轨迹为直线 $b^2(x-x_0)+m\cdot a^2(y-y_0)=0$ 在椭圆内的一段(即过椭圆中心的弦，也叫椭圆的直径)．

12-1-40　设 P 点坐标为(x，y)，由题设左焦点为 F(2，0)，P 为 BF 的中点可知，B 点的坐标为(2x-2，2y)．

由 B 向直线 x=1 作垂线，垂足为 D．

设椭圆中心为 O′，则

$$\frac{|BF|}{|BD|}=e=\frac{c}{a}=\frac{|O'F|}{|BF|}\Leftrightarrow|BF|^2=|BD|\cdot|O'F|$$

因为 $|BF|=\sqrt{(2x-4)^2+4y^2}$，$|BD|=(2x-2)-1=2x-3$，$|O'F|=(2x-2)-2=2x-4$，所以

$$(2x-4)^2+4y^2=(2x-3)(2x-4)\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{2}(x-2)\ \ (x\neq2)$$

此即为所求轨迹方程．

12-1-41 (1)设椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$．由题意得

$$\begin{cases}\sqrt{a^2-b^2}=1\\ \frac{a}{b}=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\frac{t^2}{t^2-1}\\ b^2=\frac{1}{t^2-1}\end{cases}$$

故椭圆方程为$(t^2-1)y^2+t^2(t^2-1)x^2=t^2$．

(2)解方程组$\begin{cases}(t^2-1)\cdot y^2+t^2(t^2-1)x^2=t^2.\\ y=tx\end{cases}$得

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2(t^2-1)}}\\ y=\frac{t}{\sqrt{2(t^2-1)}}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-\frac{1}{\sqrt{2(t^2-1)}}\\ y=-\frac{t}{\sqrt{2(t^2-1)}}\end{cases}$$

即Q点的坐标为$\left(\frac{1}{\sqrt{2(t^2-1)}},\ \frac{t}{\sqrt{2(t^2-1)}}\right)$．

设P点的坐标为(x,y)．

因为$\frac{|OP|}{|OQ|}=t\sqrt{t^2-1}$，又$\frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{|x|}{\frac{1}{\sqrt{2(t^2-1)}}}$，故$|x|=\frac{t}{\sqrt{2}}$，从而

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}t,\quad y=tx=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}t^2$$

而$t>1$，所以P点的轨迹方程为

$$x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y\left(x>\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{或}x^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}y\left(x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

所以轨迹为抛物线$x^2=\frac{\sqrt{2}}{2}y$在直线$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$右侧部分，和抛物线$x^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}y$在直线$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$的左侧部分．

12-1-42 由题设知A点的坐标为$(0,a)$．设点B，C，P的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_1,y)．

由已知$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}$得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{x_1}{x_2}\Leftrightarrow x=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}(x_1\neq x_2\neq 0)\qquad\text{(i)}$$

由方程组$\begin{cases}y=kx+a\\ (x-2)^2+by^2=1\end{cases}$消去$y$，得

$$(x-2)^2+b(kx+a)^2=1$$

$$\Leftrightarrow(1+bk^2)x^2+2(bka-2)x+ba^2+3=0$$

当$\triangle>0$时，方程有两实根x_1，x_2，且

$$x_1+x_2=\frac{2(2-bka)}{1+bk^2}，x_1x_2=\frac{ba^2+3}{1+bk^2} \qquad \text{(ii)}$$

将(ii)代入(i)得

$$x=\frac{ba^2+3}{2-bka}\Leftrightarrow bakx=2x-ba^2-3$$

$$\Leftrightarrow bakx+ba^2=2x-3 \qquad \text{(iii)}$$

又因为 P 点在直线 y=kx+a 上，在方程 y=kx+a 两边同乘以 ba，得

$$bay=bakx+ba^2 \qquad \text{(iv)}$$

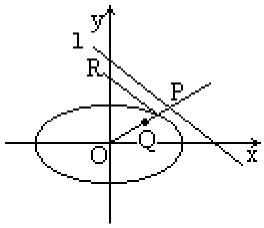
将(iii)代入(iv)得 bay=2x-3．此即为 P 点轨迹方程．

故 P 点轨迹为直线 2x-bay-3=0 在椭圆内的一段．

12-1-43　设点 P，R 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，动点 Q 的坐标为(x，y)．

由已知$|OP|\cdot|OQ|=k|OR|^2$，得$\frac{|OQ|}{|OR|}=\frac{k|OR|}{|OP|}$．设$\lambda=\frac{|OQ|}{|OR|}$，则

$$\frac{QO}{OR}=-\lambda，\frac{RO}{OP}=-\frac{\lambda}{k}$$



即O点分别外分线段QR，RP成定比$-\lambda$，$-\frac{\lambda}{k}$．由定比分点公式得

$$\begin{cases}0=\dfrac{x-\lambda x_2}{1-\lambda}\\[2ex]0=\dfrac{y-\lambda y_2}{1-\lambda}\end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases}0=\dfrac{x_2-\frac{\lambda}{k}x_1}{1-\frac{\lambda}{k}}\\[2ex]0=\dfrac{y_2-\frac{\lambda}{k}y_1}{1-\frac{\lambda}{k}}\end{cases}$$

由此得 $\begin{cases}x=\lambda x_2\\y=\lambda y_2\end{cases}$ (i)

及 $\begin{cases}x_2=\dfrac{\lambda}{k}x_1\\[1ex]y_2=\dfrac{\lambda}{k}y_1\end{cases}$ (ii)

将(ii)代入(i)得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\lambda^2}{k}x_1 \\ y=\dfrac{\lambda^2}{k}y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{k}{\lambda^2}x \\ y_1=\dfrac{k}{\lambda^2}y \end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

又因为 P，R 分别在直线 l 及椭圆上，故

$$\frac{x_1}{m}+\frac{y_1}{n}=1，\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$$

将(i)，(iii)分别代入得

$$\begin{cases} k(\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n})=\lambda^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda^2 \end{cases}$$

消去λ^2，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k(\frac{x}{m}+\frac{y}{n})$$

又因为$\lambda>0$，则$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>0$，即$x$，$y$不同时为$0$.

故 Q 点的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k(\frac{x}{m}+\frac{y}{n})\ \ (x，y\text{不同时为}0)$$

12-1-44　设椭圆上不同两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 关于直线 $y=4x+m$ 对称，则直线 $y=4x+m$ 是线段 PQ 的垂直平分线.

设PQ所在直线的方程为$y=-\dfrac{1}{4}x+n$，则此直线与椭圆有两个不同的交点 P，Q，且 PQ 的中点落在直线 $y=4x+m$ 上.

由方程组$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \\ y=-\dfrac{1}{4}x+n \end{cases}$消去$y$，得方程

$$13x^2-8nx+16n^2-48=0$$

当$\triangle=64n^2-52(16n^2-48)>0$，即　　(i)

$$-\frac{\sqrt{13}}{2}<n<\frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \text{(ii)}$$

时，方程(i)有两不等式实根x_1，x_2. 由韦达定理，$x_1+x_2=\dfrac{8n}{13}$，又

$$y_1+y_2=-\frac{1}{4}(x_1+x_2)+2n$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{8n}{13}+2n=\frac{24n}{13}$$

则PQ的中点为$(\dfrac{4n}{13}，\dfrac{12n}{13})$. 因中点在直线$y=4x+m$上，故

$$\frac{12n}{13}=\frac{16n}{13}+m \Leftrightarrow m=-\frac{4n}{13} \Leftrightarrow n=-\frac{13}{4}m \qquad \text{(iii)}$$

由(ii)，(iii)得m的取值范围为$(-\frac{2\sqrt{13}}{13}$，$\frac{2\sqrt{13}}{13})$．

12-1-45　设 A，B 两点坐标为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)．

若 $x_1=x_2$，则 AB 的垂直平分线为 x 轴，不合题意，所以 $x_1\neq x_2$．

因A，B在椭圆上，则有 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，即

$$y_1^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2,\ y_2^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_2^2 \qquad \text{(i)}$$

又 $P(x_0, 0)$是线段 AB 的垂直平分线上一点，所以$|PA|=|PB|$，即

$$(x_1-x_0)^2+y_1^2=(x_2-x_0)^2+y_2^2 \qquad \text{(ii)}$$

将(i)代入(ii)，得

$$(x_1-x_0)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2=(x_2-x_0)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_2^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1-x_0)^2-(x_2-x_0)^2=\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-x_2^2)$$

$$\Leftrightarrow x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

设 $x_1<x_2$，又由椭圆性质有$-a\leq x_1\leq a$，$-a\leq x_2\leq a$，故

$$-a<\frac{x_1+x_2}{2}<a \Leftrightarrow -\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$$

12－1－46　(1)设$\frac{y}{x}=t$，即$y=tx$，代入椭圆方程，得

$$(1+4t^2)x^2-4x+1=0$$

因 $x\in R$，则$\triangle=16-4(1+4t^2)\geq 0$，即

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq t\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故$t_{max}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{4}$，因而这时点P的坐标为$(\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{4})$；

或$t_{min}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时$x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，因而这时点P坐标为$(\frac{1}{2}$，$-\frac{\sqrt{3}}{4})$．

(2)设$u=x^2-y^2$．$P(x,y)$为椭圆上一点，则$y^2=\frac{1}{4}(4x-x^2-1)$，于是

$$u=x^2-\frac{1}{4}(4x-x^2-1)=\frac{5}{4}x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}(x-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{20}$$

又因为$y^2=\frac{1}{4}(4x-x^2-1)\geq 0$，解之得

$$2-\sqrt{3}\leq x\leq 2+\sqrt{3}$$

故当$x=\frac{2}{5}$时，$u_{min}=\frac{1}{20}$，此时P的坐标为$(\frac{2}{5}$，$\frac{\sqrt{11}}{10})$或$(\frac{2}{5}$，$-\frac{\sqrt{11}}{10})$；

当$x=2+\sqrt{3}$时，$u_{max}=7+4\sqrt{3}$，此时P的坐标为$(2+\sqrt{3}, 0)$.

12-1-47 设$|MF_1|=r_1$，$|MF_2|=r_2$，$\angle MF_1F_2=\alpha$，$\angle MF_2F_1=\beta$，$c=\sqrt{a^2-b^2}$，则$|F_1F_2|=2c$.

在$\triangle MF_1F_2$中，由正弦定理有

$$\frac{r_2}{\sin\alpha}=\frac{r_1}{\sin\beta}=\frac{2c}{\sin 30°}=4c \Leftrightarrow r_2=4c\sin\alpha，r_1=4c\sin\beta$$

因$r_1+r_2=2a$，则$4c(\sin\alpha+\sin\beta)=2a$. 所以

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2(\sin\alpha+\sin\beta)}$$

因为$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin 75°\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，且

$$-150°<\alpha-\beta<150° \Leftrightarrow -75°<\frac{\alpha-\beta}{2}<75°$$

故
$$\cos 75°<\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leq 1 \Rightarrow \sin 150°<\sin\alpha+\sin\beta\leq 2\sin 75°$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}<\sin\alpha+\sin\beta\leq\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

所以
$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\leq e=\frac{1}{2(\sin\alpha+\sin\beta)}<1$$

所以椭圆的离心率$e_{min}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

12-1-48 易知半焦距$c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{1}{2}a$，准线方程为$x=\pm 2a$.

因$P(x_0, y_0)$到一条准线距离为1，即

$x_0=2a-1$ 或 $x_0=-(2a-1)$

因$P(x_0, y_0)$在椭圆上，故

$$\frac{(2a-1)^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2a-1)^2}{a^2}+\frac{4y_0^2}{3a^2}=1 \Leftrightarrow 4y_0^2=3a^2[1-\frac{(2a-1)^2}{a^2}]$$

$$\Leftrightarrow 4y_0^2=-9a^2+12a-3=-3(3a-1)(a-1)$$

因为$4y_0^2\geq 0$，则$(3a-1)(a-1)\leq 0$，解之得

$$\frac{1}{3}\leq a\leq 1$$

当$a=1$时，长轴长最大. 此时$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y_0=0$.

故所求椭圆方程为$x^2+\dfrac{4y^2}{3}=1$.

12-1-49 椭圆$x^2+4y^2=12$，即$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$的长半轴、短半轴的长

及半焦距分别为$a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}$，$c=3$．

由题意得，可设椭圆 E 的方程为

$$\frac{x^2}{n^2+9}+\frac{y^2}{n^2}=1 \qquad (i)$$

将 y=x+9 代入(i)，得

$$n^2x^2+(n^2+9)(x+9)^2=n^2(n^2+9)$$

$$\Leftrightarrow (2n^2+9)x^2+18(n^2+9)x-(n^2+9)(81-n^2)=0$$

因直线与椭圆有公共点，所以这个方程有实根，其判别式非负，即

$$\triangle=[18(n^2-9)]^2-4(2n^2+9)(n^2+9)(81-n^2)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow n\geq 6 \text{或} n\leq -6(\text{舍去})$$

当 n=6 时，椭圆 E 的长轴最短．此时椭圆 E 的方程为

$$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$$

12-1-50 由题设易知$a=2$，$e=\frac{c}{2}$．

设椭圆的左顶点为 $P(x_0, y_0)$，则椭圆中心为 $O'(x_0+2, y_0)$．又 y 轴为其左准线，所以$x_0+2=\frac{a^2}{c}=\frac{4}{c}$，则$x_0=\frac{4}{c}-2$．又P在抛物线$y^2=x-1$上，故$y_0^2=x_0-1$，即$y_0^2=\frac{4}{c}-3\geq 0$，所以

$$\frac{4}{c}\geq 3\Leftrightarrow 0<c\leq\frac{4}{3}$$

从而$e=\frac{c}{2}\leq\frac{2}{3}$，所以$e_{max}=\frac{2}{3}$．此时，$c=\frac{4}{3}$，$b^2=a^2-c^2=4-\frac{16}{9}=\frac{20}{9}$，$x_0=1$，$y_0=0$，故椭圆中心 O′坐标为(3，0)．

故所求椭圆方程为$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{9y^2}{20}=1$．

12－1－51 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．因为$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow a^2=4b^2$$

设椭圆上一点 $Q(x_0, y_0)$到 P 点距离为 d．因 Q 在椭圆上，故

$$\frac{x_0^2}{4b^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\Leftrightarrow x_0^2=4b^2-4y_0^2$$

从而 $$d^2=x_0^2+(y_0-\frac{3}{2})^2=4b^2-4y_0^2+y_0^2-3y_0+\frac{9}{4}$$

$$=-3(y_0+\frac{1}{2})^2+4b^2+3 \quad (-b\leq y_0\leq b)$$

若$b<\frac{1}{2}$，则$y_0=-b$时，d^2取最大值7．这时

$$-3(-b+\frac{1}{2})^2+4b^2+3=7\Leftrightarrow b=\sqrt{7}-\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$$

这是不可能的，所以$b\geq\frac{1}{2}$，则当$y_0=-\frac{1}{2}$时，d^2取最大值7，此时$4b^2+3=7$，即$b^2=1$，进而$a^2=4b^2=4$．

所求椭圆方程$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

由$y_0=-\frac{1}{2}$，$b=1$得$x_0^2=3$，即$x_0=\pm\sqrt{3}$．所以，椭圆上最远点的坐标为$(\sqrt{3}，\frac{1}{2})$或$(-\sqrt{3}，-\frac{1}{2})$．

12-1-52　设 A、B、C 三点的坐标分别为$(x_1，0)$，$(x_2，0)$，$(a，b)$．则 AC，BC 边所在直线方程可表示为

$$k(y-b)=x-a\Leftrightarrow x-ky+kb-a=0 \qquad (i)$$

因△ABC 的内心为 I(0，1)，故内切圆半径为 1．所以 I 到直线(i)的距离为 1，即

$$\frac{|-k+kb-a|}{\sqrt{1+k^2}}=1\Leftrightarrow(b^2-2b)k^2-2(b-1)ak+a^2-1=0$$

当$\triangle=4(b-1)^2a^2-4(a^2-1)(b^2-2b)>0$，即

$$4(a^2+b^2-2b)>0$$

时，方程有两实根k_1，k_2，由韦达定理知

$$k_1+k_2=\frac{2(b-1)a}{b^2-2b}，k_1k_2=\frac{a^2-1}{b^2-2b}$$

在(*)中，令 $y=0$ 得 $x=a-kb$，则 $x_1=a-k_1b$，$x_2=a-k_2b$．从而

$$|AB|=|x_1-x_2|=|(k_2-k_1)b|$$

$$=\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}\cdot|b|=\frac{2\sqrt{a^2+b^2-2b}}{|b-2|}$$

又点$C(a，b)$在曲线$x^2+\frac{(y-2)^2}{2}=1(y\geq3)$上，所以$a^2=1-\frac{(b^2-2)}{2}$，故

$$1-\frac{(b-2)^2}{2}\geq0\Leftrightarrow3\leq b\leq2+\sqrt{2}$$

从而 $$|AB|=\frac{2\sqrt{1-\frac{(b-2)^2}{2}+b^2-2b}}{|b-2|}=\frac{\sqrt{2(b^2-2)}}{|b-2|}=\sqrt{\frac{2b^2-4}{(b-2)^2}}$$

设$t=b-2$，则$b=t+2$．因$3\leq b\leq2+\sqrt{2}$，则$1\leq t\leq\sqrt{2}$，于是

$$|AB|=\sqrt{\frac{2(t+2)^2-4}{t^2}}=\sqrt{\frac{4}{t^2}+\frac{8}{t}+2}$$

$$=\sqrt{4(\frac{1}{t}+1)^2-2}\quad(\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\frac{1}{t}\leq1)$$

故当$\frac{1}{t}=1$即$t=1$时，$|AB|_{max}=\sqrt{14}$．此时$b=3$，$a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．C点坐标为$(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}，3)$．

12-1-53　将方程 $x^2+4y^2-2kx-16y+21=0$ 整理得

$$\frac{(x-k)^2}{k^2-5}+\frac{(y-2)^2}{\frac{k^2-5}{4}}=1$$

则椭圆中心 0′坐标为(k，2)，焦点在平行于 x 轴的直线 y=2 上．易知

$$a^2=k^2-5，b^2=\frac{k^2-5}{4}，c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{k^2-5}$$

由已知两准线间距离为$\frac{8\sqrt{3}}{3}$，故$2\cdot\frac{a^2}{c}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，所以

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{k^2-5}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow k^2-5=4\Leftrightarrow k^2=9$$

又 k＞0，所以 k=3。故椭圆方程为

$$\frac{(x-3)^2}{4}+(y-2)^2=1$$

中心为 O′(3，2)。

设直线 l 的方程为 x=m，代入椭圆方程，得

$$\frac{(m-3)^2}{4}+(y-2)^2=1\Leftrightarrow 4y^2-16y+m^2-6m+21=0 \quad \text{(i)}$$

当△=16^2-16(m^2-6m+21)=-16(m^2-6m+5)＞0，即 1＜m＜5 时，方程(i)有二不等实根 y_1，y_2 则

$$|AB|=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=\frac{4\sqrt{-m^2+6m-5}}{4}=\sqrt{4-(m-3)^2}$$

又 O′到直线 l 的距离为|m-3|，则△O′AB 的面积

$$S_{\triangle O'AB}=\frac{1}{2}\cdot|m-3|\cdot\sqrt{4-(m-3)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(m-3)^2[4-(m-3)^2]}$$

由均值不等式，得

$$S_{\triangle O'AB}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{(m-3)^2+4-(m-3)^2}{2}=1$$

当且仅当选$(m-3)^2=4-(m-3)^2$，即$m=3\pm\sqrt{2}$时等号成立。

故当$m=3\pm\sqrt{2}$时，$S_{\triangle O'AB}$取最大值1。此时直线l的方程为

$$x=3+\sqrt{2}\text{或}x=3-\sqrt{2}$$

12-1-54　(1)设点 P 的坐标为(x_0，y_0)。两切点 A，B 的坐标分别为(x_1，y_1)，(x_2，y_2)。

因 PA 与圆 $x^2+y^2=b^2$ 相切，则 PA 所在直线方程为

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)\Leftrightarrow x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2=b^2$$

同理 PB 的方程为 $x_2x+y_2y=b^2$。

因 P(x_0，y_0)为 PA，PB 的交点，故

$$\begin{cases}x_1x_0+y_1y_0=b^2\\x_2x_0+y_2y_0=b^2\end{cases}$$

故 A，B 两点所在直线 l 的方程为

$$x_0x+y_0y=b^2$$

显然l与x轴，y轴的交点M，N的坐标分别为$M\left(\frac{b^2}{x_0}，0\right)$，$N\left(0，\frac{b^2}{y_0}\right)$。

又点$(x_0，y_0)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上，故

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$$

从而$\frac{b^2}{|OM|^2}+\frac{a^2}{|ON|^2}=\frac{x_0^2}{b^2}+\frac{a^2y_0^2}{b^4}=\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2}{b^4}=\frac{a^2b^2}{b^4}=\frac{a^2}{b^2}$为定值。

(2)△OMN 的面积为

$$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|OM|\cdot|ON|=\frac{b^4}{2|x_0y_0|}$$

因$1=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\geq 2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2}\cdot\frac{y_0^2}{b^2}}=\frac{2|x_0y_0|}{ab}$，所以$\frac{1}{2|x_0y_0|}\geq\frac{1}{ab}$，所以

$$S_{\triangle OMN}\geq\frac{b^4}{ab}=\frac{b^3}{a}$$

当且仅当$\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{1}{2}$，即$x_0^2=\frac{a^2}{2}$，$y_0^2=\frac{b^2}{2}$时等号成立。

故当P点坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a，\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$或$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a，-\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a，\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a，-\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$时，△OMN面积最小，最小值为$\frac{b^3}{a}$。

12-1-55 (1)设 A，B 两点的坐标为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$。

因 AB 所在直线不与 x 轴重合，则设 AB 所在直线方程为

$x=ky+c(k\neq 0)$

因方程组$\begin{cases}x=ky+c\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$消去x，得

$$(b^2k^2+a^2)y^2+2b^2kcy-b^4=0$$

因$\triangle=4b^4k^2c^2+4b^4(b^2k^2+a^2)=4b^4a^2(k^2+1)>0$，所以方程有两实根$y_1$，$y_2$根据韦达定理有

$$y_1+y_2=\frac{2b^2kc}{b^2k^2+a^2}，y_1y_2=-\frac{b^4}{b^2k^2+a^2}$$

于是 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}|y_1-y_2|$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2ab^2\sqrt{k^2+1}}{b^2k^2+a^2}\cdot\frac{2ab^2(k^2+1)}{b^2k^2+a^2}=m$$

$$\Leftrightarrow k^2=\frac{a(ma-2b^2)}{b^2(2a-m)} \qquad (i)$$

又O到直线$x=ky+c$的距离$d=\dfrac{c}{\sqrt{1+k^2}}$，所以

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{1+k^2}}\cdot m$$

将(i)代入得

$$S_{\triangle OAB}=\frac{b}{2}\sqrt{m(2a-m)}=\frac{b}{2}\sqrt{a^2-(m-a)^2}$$

(2)由$k^2=\dfrac{a(ma-2b^2)}{b^2(2a-m)}\geq 0$，且$m<2a$得$ma\geq 2b^2$，所以$m\geq\dfrac{2b^2}{a}$。

若$\dfrac{2b^2}{a}>a$，即$b^2<a^2<2b^2$，则当$m=\dfrac{2b^2}{a}$时，

$$(S_{\triangle AOB})_{max}=\frac{b^2c}{a}$$

若$\dfrac{2b^2}{a}\leq a$，即$a^2\geq 2b^2$，当$m=a$时，

$$(S_{\triangle AOB})_{max}=\frac{ab}{2}$$

12-1-56　设A，B两点的坐标为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)。

当AB⊥x轴时，$x_1=x_2=1$，$y_1=\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$，$|AB|=2\sqrt{2}$。

当AB不垂直于x轴时，设AB所在直线方程为

$$y=k(x-1)$$

将$y=k(x-1)$代入椭圆方程$2x^2+y^2=4$，得

$$(2+k^2)x^2-2k^2x+k^2-4=0$$

其判别式$\triangle=4k^4-4(2+k^2)(k^2-4)=8(k^2+4)>0$恒成立，故它总有二不等实根$x_1$，$x_2$。根据韦达定理有

$$x_1+x_2=\frac{2k^2}{2+k^2}，x_1x_2=\frac{k^2-4}{2+k^2}$$

从而　$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{8(k^2+4)}}{2+k^2}=\sqrt{\frac{8(k^4+5k^2+4)}{k^4+4k^2+4}}=\sqrt{8+\frac{8k^2}{k^4+4k^2+4}}$$

当$k=0$时，$|AB|=2\sqrt{2}$；

$k\neq 0$时，$|AB|=\sqrt{8+\dfrac{8}{k^2+\dfrac{4}{k^2}+4}}$。

因为$k^2+\dfrac{4}{k^2}\geq 2\sqrt{k^2\cdot\dfrac{4}{k^2}}=4$，故

$$|AB|\leq\sqrt{8+1}=3$$

当且仅当$k^2=\dfrac{4}{k^2}$，即$k=\pm\sqrt{2}$时等号成立。

综上所述，$|AB|_{max}=3$，此时直线l方程为

$y=\sqrt{2}(x-1)$或$y=-\sqrt{2}(x-1)$

12-1-57 因为AB∥OP，则其斜率$k_{AB}=k_{OP}=tg60°=\sqrt{3}$。设AB，OP所在直线的方程分别为AB：$y=\sqrt{3}x+m$，OP：$y=\sqrt{3}x$。A，B两点的坐标分别为$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$。

解方程组$\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\3x^2+y^2=6\end{cases}$得$\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$。因P在第一象限，故P点的坐标为$(1,\sqrt{3})$。

由方程组$\begin{cases}y=\sqrt{3}x+m\\3x^2+y^2=6\end{cases}$消去y，得

$$6x^2+2\sqrt{3}mx+m^2-6=0$$

当$\triangle=12m^2-24(m^2-6)=144-12m^2>0$即$-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$时，方程有两不等实根$x_1$，$x_2$，故

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{1+3}\frac{\sqrt{144-12m^2}}{6}=2\sqrt{4-\frac{m^2}{3}}$$

又点P到直线AB的距离$d=\frac{|\sqrt{3}-\sqrt{3}+m|}{2}=\frac{|m|}{2}$，故

$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{4-\frac{m^2}{3}}\cdot\frac{|m|}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{(12-m^2)\cdot m^2}$$
$$\leq\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{12-m^2+m^2}{2}=\sqrt{3}$$

等号在$12-m^2=m^2$，即$m=\pm\sqrt{6}$时成立。

故当$m=\pm\sqrt{6}$时，△PAB面积最大，最大值为$\sqrt{3}$。此时AB边所在直线的方程为

$$y=\sqrt{3}x+\sqrt{6}\text{或}y=\sqrt{3}x-\sqrt{6}$$

12-1-58 过O作OH⊥AB于H，|OH|为O到AB的距离。在Rt△OAB中，

$$|OH|=\frac{|OA|\cdot|OB|}{|AB|}=\frac{|OA|\cdot|OB|}{\sqrt{|OA|^2+|OB|^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}}}\quad(i)$$

当OA、OB在坐标轴上时，$|OH|=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$；

当OA不在坐标轴上时，设OA所在直线方程为y=kx。(k≠0)，A点坐标为(x，y)。

由方程组$\begin{cases}y=kx\\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\end{cases}$解得$x^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$，$y^2=\dfrac{k^2a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$。所以

$$\frac{1}{|OA|^2}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{b^2+a^2k^2}{a^2b^2(k^2+1)} \qquad \text{(ii)}$$

因$OA\perp OB$，故OB所在直线方程为$y=-\dfrac{1}{k}x$。

同理可得，

$$\frac{1}{|OB|^2}=\frac{b^2+a^2\cdot\dfrac{1}{k^2}}{a^2b^2(\dfrac{1}{k^2}+1)}=\frac{b^2k^2+a^2}{a^2b^2(k^2+1)} \qquad \text{(iii)}$$

由(i)，(ii)，(iii)易知$|OH|=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

综上所述，O到AB的距离为常数$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

12-1-59　设点$A(x_0,y_0)$在以PQ为直径的圆上，则∠PAQ=90°。设P，Q两点坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)。

当l不与x轴垂直时，设l方程为

$$y+\frac{1}{2}=k\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

由方程组$\begin{cases}y+\dfrac{1}{2}=k\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$　消去y，得

$$4(1+3k^2)x^2+12k(3k-1)x+9(3k^2-2k-5)=0$$

其判式$\triangle=144k^2(3k-1)^2-144(1+3k^2)(3k^2-2k-5)=144(13k^2+2k+5)>0$恒成立，故方程有两不等实根$x_1$，$x_2$。由韦达定理知

$$x_1+x_2=-\frac{3k(3k-1)}{1+3k^2}，\ x_1x_2=\frac{9(3k^2-2k-5)}{4(1+3k^2)} \qquad \text{(i)}$$

从而　$y_1+y_2=k(x_1+x_2+3)-1=\dfrac{3k-1}{3k^2+1}$ 　(ii)

$$y_1y_2=\frac{1-6k-39k^2}{4(3k^2+1)}$$

因为$AP\perp AQ$，所以

$$(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)=0 \qquad \text{(iii)}$$

将(iii)左边展开，并将(i)，(ii)代入得

$\begin{cases}x=x_0+t\cos\beta\\ y=y_0+t\sin\beta\end{cases}$　(t为参数)

令$\begin{cases}x_0^2+y_0^2+3x_0-1=0\\x_0+y_0+2=0\\x_0^2+y_0^2+y_0-11=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x_0=-3\\y_0=1\end{cases}$。即当$x_0=-3$，$y_0=1$时，(iv)对一切实数 k 都成立。即点 A(-3，1)恒在以 PQ 为直径的圆上，且在椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$上。

又当直线⊥x轴时，P，Q两点坐标分别为$P\left(-\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$，$Q\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$，显然以 PQ 为直径的圆过点 A(-3，1)。

综上可知，过 M 点的任意直线与椭圆的两交点 P，Q，则以 PQ 为直径的圆恒过椭圆上一定点 A(-3，1)。

12-1-60 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，短轴上两端点为$B(0,b)$，B′(0，-b)。

又设 P 点的坐标为$(x_0，y_0)$。则直线 PB′方程为

$$y=\frac{y_0+b}{x_0}x-b$$

直线 PB 的方程为

$$y=\frac{y_0-b}{x_0}x+b。$$

又直线l交左准线$x=-\frac{a^2}{c}$于B，则B点横坐标$x_B=-\frac{a^2}{c}$.

$$|OR|=\left|\frac{bx_0}{y_0+b}\right|，|OQ|=\left|\frac{bx_0}{y_0-b}\right|$$

所以 $|OR|\cdot|OQ|=\left|\frac{b^2x_0^2}{y_0^2-b^2}\right|$

因为$P(x_0，y_0)$在椭圆上，则$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，故$\frac{b^2x_0^2}{b^2-y_0^2}=a^2$。

故$|OR|\cdot|OQ|=a^2$为常数。

12-1-61 设 P，P_1，P_2 的坐标分别为$(x_0，y_0)$，$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，两焦点的坐标为$F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$。又设$\frac{PF_1}{F_1P_1}=\lambda_1$，$\frac{PF_2}{F_2P_2}=\lambda_2$。由定比分点公式，得

$$\begin{cases}-c=\dfrac{x_0+\lambda_1x_1}{1+\lambda_1}\\0=\dfrac{y_0+\lambda_1y_1}{1+\lambda_1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{c(1+\lambda_1)+x_0}{\lambda_1}\\y_1=-\dfrac{y_0}{\lambda_1}\end{cases}\qquad(i)$$

因 P_1 在椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上，故 $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$。将(i)代入，得

若$2\sqrt{k}>\frac{12}{5}$，即$k>\frac{36}{25}$，则当$x=2\sqrt{k}$时，

$$|PA|_{min}=\sqrt{4k-12\sqrt{k}+9}=1\Leftrightarrow k=4\text{或}k=1(\text{舍去})$$

$\Leftrightarrow b^2c^2(1+\lambda_1)^2+2b^2c(1+\lambda_1)x_0+b^2x_0^2+a^2y_0^2=\lambda_1^2a^2b^2$

$\Leftrightarrow b^2c^2(1+\lambda_1)^2+2b^2c(1+\lambda)x_0+a^2b^2(1-\lambda_1^2)=0$

因$\lambda_1\neq -1$，$b^2>0$，故

$\lambda_1=\frac{a^2+c^2+2cx_0}{b^2}$

同理，P_2在椭圆上，则有

$\lambda_2=\frac{a^2+c^2+2cx_0}{b^2}$

故$\frac{PF_1}{F_1P_1}+\frac{PF_2}{F_2P_2}=\lambda_1+\lambda_2=\frac{2(a^2+c^2)}{b^2}$为定值。

(二)双曲线

12-2-1　C　由已知得 a=4，b=3，c=5，则 a+c=9＞8.5，所以点 A 必在双曲线中与 F_1 相应的一支上，故$|AF_2|=8.5+2\times4=16.5$。所以 C 正确。

12-2-2　C　椭圆的两焦点为 $F_1(0,-4)$，$F_2(0,4)$。设双曲线方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$。因$c=4$，又$\frac{c}{a}=2$。所以$a=2$，$b^2=16-4=12$，故双曲线方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$。所以C正确。

12-2-3 C 共轭双曲线的方程为$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$，故其准线的方程为$y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$。故C正确。

12-2-4 B 设两共轭双曲线方程为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$与$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$，则$e_1=\frac{c}{a}$，$e_2=\frac{c}{b}$，所以$e_1^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}$，$e_2^2=\frac{a^2+b^2}{b^2}$，所以$\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1$，即$e_1^2+e_2^2=e_1^2e_2^2$。故B正确。

12-2-5 A 由题设条件知，$\frac{\sqrt{3}}{4}c\cdot c=ab$，故

$$\frac{3}{16}c^4=a^2b^2\Leftrightarrow\frac{3}{16}c^4=a^2(c^2-a^2)\Leftrightarrow3c^4-16a^2c^2+16a^4=0$$

由$3e^4-16e^2+16=0$ 解得$e^2=4$或$e^2=\frac{4}{3}$。又因为$b>a$。则$c^2=a^2+b^2>2a^2$，所以$e^2>2$。故$e^2=4$，所以$e=2$。故A正确。

12-2-6　B　由题设知 P，Q 关于 x 轴对称，又$\angle PF_2Q=90°$，所以$\triangle PF_1F_2$ 为等腰直角三角形，故

$$|PF_1|=|F_1F_2|=2c，|PF_2|=|PF_1|+2a=2c+2a=2\sqrt{2}c$$

所以$a=(\sqrt{2}-1)c$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$。

故 B 正确。

12-2-7　A　方程 $x^2-2y^2-2ax=0$ 整理得

$$(x-a)^2-2y^2=a^2$$

由已知原点移动(-2，0)时，方程可化为标准方程，故$a=-2$，从而双曲线方程为$\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$。所以在原坐标系中，渐近线方程为$\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{y^2}{2}=0$，即$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$。故A正确。

12-2-8　D　设半焦距为 c，由已知得 2b=a+c；又 $c^2=a^2+b^2$。故

$$c^2=a^2+(\frac{a+c}{2})^2 \Leftrightarrow 3c^2-2ac-5a^2=0$$

即$3e^2-2e-5=0$，解得$e=\frac{5}{3}$或$e=-1$(舍)。故D正确。

12-2-9 D 若双曲线焦点在x轴上，方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$。则渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，由已知，得$\frac{b}{a}=tg30°$或$\frac{b}{a}=tg60°$。所以$a=\sqrt{3}b$或$b=\sqrt{3}a$。又$\frac{b^2}{c}=\frac{1}{2}$，则$c=2b^2$。又$a^2+b^2=c^2$，则

$$3b^2+b^2=4b^2 \text{或} b^2+\frac{b^2}{3}=4b^4$$

解得$b^2=1$，$a^2=3$或$b^2=\frac{1}{3}$，$a^2=\frac{1}{9}$，故方程为

$$\frac{x^2}{3}-y^2=1 \text{或} 9x^2-3y^2=1$$

同理可知，焦点在y轴上时，又曲线方程为$\frac{y^2}{3}-x^2=1$或$9y^2-3x^2=1$。

故适合条件的双曲线有 4 条，故选 D。

12-1-10 由题设知

$$(2+\lambda)(1+\lambda)>0 \Leftrightarrow \lambda<-2 \text{ 或 } \lambda>-1$$

12-1-11 由两焦点坐标得双曲线中心为$O'(2,0)$，半焦距$c=|O'F_1|=4$。又因为$e=\frac{c}{a}=2$，则$a=2$。所以$b^2=c^2-a^2=16-4=12$。故双曲线的方程为

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

12-2-12 设点$P(x,y)$为双曲线上任一点，由双曲线定义得

$\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{|y-2|}=3$。化简得所求双曲线方程为

$$x^2-8y^2-6x+36y-27=0 \Leftrightarrow \frac{16(y-\frac{9}{4})^2}{9}-\frac{2(x-3)^2}{9}=1$$

12-2-13 由双曲线及椭圆方程知，两曲线有公共焦点 $F_1(-3,0)$、$F_2(3,0)$。设$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，又设 P 到双曲线左、右两准线距离分别为 d_1，d_2，双曲线离心率为 e。由双曲线、椭圆定义得

$$\begin{cases} r_1+r_2=10 \\ r_1-r_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1=7 \\ r_2=3 \end{cases}$$

故 $$\frac{d_1}{d_2}=\frac{\frac{r_1}{e}}{\frac{r_2}{e}}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{7}{3}$$

12-2-14 由渐近线方程$y=\pm\frac{1}{3}x$得双曲线方程$\frac{x^2}{9}-y^2=k$。因双曲线过点$(-3,\sqrt{6})$则$\frac{9}{9}-6=k$，即$k=-5$。

故双曲线方程为$\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{45}=1$。

12-2-15 可设所求双曲线方程为$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{12}=k(k\neq 0)$，则

$$|3k|+|12k|=(\frac{10}{2})^2\Leftrightarrow k=\pm\frac{5}{3}$$

故所求双曲线方程$\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{20}=1$或$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$。

12-2-16 设过 A 点的弦 PQ 的两端点 P，Q 的坐标分别为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则

$$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1\\ \frac{x_2^2}{4}-y_2^2=1\end{cases}$$

两式相减得

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{4}=(y_1-y_2)(y_1+y_2)$$

所以PQ的斜离$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}$。

又因为$\frac{x_1+x_2}{2}=3$，$\frac{y_1+y_2}{2}=-1$，则$x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=-2$。从而

$$k=\frac{6}{4\cdot(-2)}=-\frac{3}{4}$$

故PQ所在直线的方程为$y+1=-\frac{3}{4}(x-3)=0$即$3x+4y-5=0$。

12-2-17 设直线 l 的方程为 $y=2x+c$。

将$y=2x+c$代入双曲线方程$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$中，整理得

$$10x^2+12cx+3c^2+6=0$$

当$\triangle=144c^2-40(3c^2+6)=24c^2-240>0$ 即 $c^2>10$ 时，方程(1)有两不等实根 x_1，x_2 则

$$弦长=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+2^2}|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{24c^2-240}}{10}=4\Rightarrow c=\pm\frac{\sqrt{210}}{3}$$

故直线l的方程为$y=2x\pm\frac{\sqrt{210}}{3}$。

12-2-18 平移坐标轴，将坐标原点移到(1，-1)，则双曲线在新坐

标系中的方程为

$$\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{16}=1$$

故其实半轴长、虚半轴长及半焦距分别为 a=3，b=4，c=5。则在新坐标系中，渐近线方程为$y'=\pm\frac{4}{3}x'$，一条准线方程为$x'=\frac{9}{5}$。此准线与两渐近线交点坐标为$(\frac{9}{5}，\frac{12}{5})$，$(\frac{9}{5}，-\frac{12}{5})$，故则所围三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{24}{5}=\frac{108}{25}$$

12-2-19　由于椭圆的离心率越大，椭圆越扁；双曲线的离心离越大，双曲线的开口就越开阔；又椭圆的离心率总小于 1，双曲线的离心率总大于 1。故 $e_2<e_1<e_3<e_4$。

12-2-20 解方程$2x^2-5x+2=0$得$x_1=-2$，$x_2=\frac{1}{2}$，所以离心率$e=2$或$e=\frac{1}{2}$。

(i)$m>0$时，曲线为椭圆，则离心率$e=\frac{1}{2}$，其方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1$。

若 $0<m<4$，则焦点在 x 轴上，此时

$$e^2=\frac{4-m}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow m=3$$

若 $m>4$，则焦点在 y 轴，故

$$e^2=\frac{m-4}{m}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow m=\frac{16}{3}$$

(ii)$m<0$时，曲线为双曲线，则离心率$e=2$，方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{(-m)}=1$，则

$$e^2=\frac{4-m}{4}=4\Leftrightarrow m=-12$$

故满足条件的曲线有 3 条，它们分别是

焦点在x轴上的椭圆为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；焦点在y轴上的椭圆为$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{16}=1$；双曲线为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$。

12-2-21　设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\text{或}\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$$

由题设知，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故$c^2=\frac{3}{2}a^2$，$b^2=\frac{1}{2}a^2$。故双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{a^2}=1\text{或}\frac{y^2}{a^2}-\frac{2x^2}{a^2}=1$$

又因为双曲线过点$P(2，3\sqrt{2})$，所以

$$\frac{4}{a^2}-\frac{36}{a^2}=1\text{或}\frac{18}{a^2}-\frac{8}{a^2}=1$$

显然前者无解，由后者解得 $a^2=10$，则 $b^2=5$。

故所求双曲线方程为$\frac{y^2}{10}-\frac{x^2}{5}=1$。

12-2-22　因点 A(4，-1)在圆 $x^2+y^2=17$ 上，可知圆在 A 点处的切线方程为

$$4x-y=17$$

由题设知双曲线两渐近线的方程为

$$4x\pm y=0$$

所以双曲线的方程为

$$16x^2-y^2=k$$

又因 A 在双曲线上，故 $k=16\cdot4^2-(-1)^2=255$。

故所求双曲线方程为$\frac{16x^2}{255}-\frac{y^2}{255}=1$。

12-2-23　化已知椭圆方程$x^2+4y^2=64$为$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$，故其焦点为$F_1(-4\sqrt{3}，0)$，$F_2(4\sqrt{3}，0)$，即双曲线的焦点在$x$轴上，且半焦距$c=4\sqrt{3}$。

双曲线的一条渐近线的方程为$x+\sqrt{3}y=0$，所以双曲线的方程为

$$x^2-3y^2=k(k>0)$$

从而

$$k+\frac{k}{3}=c^2=48\Leftrightarrow k=36$$

故所求双曲线方程为$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$。

12-2-24　双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的两渐近线的方程为$bx\pm ay=0$。

点 A 到两渐近线的距离分别为

$$d_1=\frac{|\sqrt{14}b+\sqrt{5}a|}{\sqrt{a^2+b^2}}，d_2=\frac{|\sqrt{14}b-\sqrt{5}a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

已知$d_1d_2=\frac{4}{3}$，故

$$\frac{|14b^2-5a^2|}{a^2+b^2}=\frac{4}{3}\qquad\text{(i)}$$

又 A 在双曲线上，则

$$14b^2-5a^2=a^2b^2\qquad\text{(ii)}$$

(ii)代入(i)，得

$3a^2b^2=4a^2+4b^2$ (iii)

联立(ii)、(iii)解得 $b^2=2$，$a^2=4$。

故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$。

12-2-25 设双曲线的方程为 $x^2-y^2=a(a\neq 0)$，A，B 两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$。

由方程组$\begin{cases} y=3x+2 \\ x^2-y^2=a \end{cases}$，消去y，得

$$x^2-(3x+2)^2=a \Leftrightarrow 8x^2+12x+4+a=0$$

且 x_1，x_2 为其两根。据韦达定理有

$$x_1+x_2=-\frac{12}{8}，x_1x_2=\frac{4+a}{8}$$

所以 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+3^2}|x_1-x_2|$

$$=\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{12^2-32(4+a)}}{8}=\frac{\sqrt{10(1-2a)}}{2}$$

依题意得

$$\frac{\sqrt{10(1-2a)}}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow a=-4$$

故所求双曲线方程为 $y^2-x^2=4$。

12-2-26 解方程组$\begin{cases} 3x-4y-2=0 \\ 3x+4y-10=0 \end{cases}$得$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$，所以双曲线中心坐标为(2，1)

平移坐标轴，将原点移到(2，1)处，平移公式为

$$\begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'+1 \end{cases}$$

在新坐标系中，渐近线方程为$3x'\pm 4y'=0$，准线方程为$y'=-\frac{9}{5}$。

设双曲线新方程为 $\frac{y'^2}{a^2}-\frac{x'^2}{b^2}=1$，则

$$\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{3}{4} \\ \frac{a^2}{c}=\frac{9}{5} \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=16 \\ c^2=25 \end{cases}$$

所以双曲线的新方程为 $\frac{y'^2}{9}-\frac{x'^2}{16}=1$。

故在原坐标系中，双曲线的方程为 $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$。

12-2-27 设 M 在 y 轴上的射影为 N，则

$$\frac{|MF|}{|MN|}=\frac{\sqrt{(2-1)^2+(-\sqrt{5})^2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}>1$$

故此曲线为双曲线，且焦点在x轴上，离心率为$e=\frac{\sqrt{6}}{2}$。

设P(x，y)为双曲线上任一点，则$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x|}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，整理得双曲线方程

$$\frac{(x+2)^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$$

12-2-28 若椭圆焦点在x轴上，设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，离心率为$e_1$，$c_1=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{13}$。

又设双曲线方程为$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0，n>0)$，离心率为$e_2$，$c_2=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{13}$。

依题设有

$2a-2m=8\Leftrightarrow a-m=4$

$$\frac{e_1}{e_2}=\frac{\frac{c_1}{a}}{\frac{c_2}{m}}=\frac{m}{a}=\frac{3}{7}$$

由上两式得 a=7，m=3 则 $n^2=4$。

故所求双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$。

若焦点在y轴上，同理可得双曲线方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$。

12-2-29 由题设知，P(5，14)到直线 l：5x-7y-1=0 的距离

$$d=\frac{|5\times5-7\times14-1|}{\sqrt{5^2+7^2}}=\sqrt{74}$$

设 A 点坐标为(x_1，y_1)，因△PAB 为等腰直角三角形，故

$$d=\frac{\sqrt{2}}{2}|PA|=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(x_1-5)^2+(y_1-14)^2}$$

所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(x_1-5)^2+(y_1-14)^2}=\sqrt{74}$

$\Leftrightarrow(x_1-5)^2+(y_1-14)^2=148$

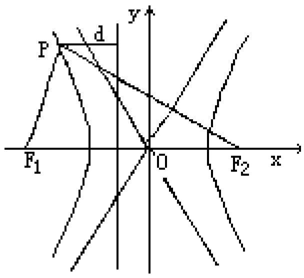
又 A 在直线 l 上，故 $5x_1-7y_1-1=0$。

解方程组$\begin{cases}(x_1-5)^2+(y_1-14)^2=148\\5x_1-7y_1-1=0\end{cases}$得$\begin{cases}x_1=3\\y_1=2\end{cases}$或$\begin{cases}x_1=17\\y_1=12\end{cases}$。所以A，B 两点的坐标为(3，2)，(17，12)。

设双曲线方程为 $mx^2-ny^2=1$。因 A，B 在双曲线上，所以

$$\begin{cases}9m-4n=1\\289m-144n=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$$

故所求双曲线方程为 $x^2-2y^2=1$。



12-2-30 (1)因双曲线的一条渐近线的方程为$y=\sqrt{3}x$，故$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，即$b=\sqrt{3}a$；且半焦距$c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$，离心离$e=2$。

设点 P 的坐标为 $P(x_0，y_0)$。

因 d、$|PF_1|$、$|PF_2|$成等比数列，所以

$$\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{|PF_1|}{d}=e=2\Rightarrow|PF_2|=2|PF_1|，|PF_1|=2d$$

又因为$|PF_2|-|PF_1|=2a$，故$|PF_1|=2a$，所以 $a=d$。所以

$$|x_0|=|d+\frac{a^2}{c}|=|a+\frac{a^2}{2a}|=\frac{3}{2}a$$

因为$x_0<0$，则$x_0=-\frac{3}{2}a$。

因$P(x_0，y_0)$在双曲线上，所以$\frac{(-\frac{3}{2}a)^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以$y_0=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}a$，

所以P点的坐标为$(-\frac{3}{2}a，\pm\frac{\sqrt{15}}{2}a)$。

(2)由题设知$\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{|PF_1|}{d}=e(e>1)$，所以

$$\begin{cases}|PF_2|-e|PF_1|=0\\|PF_2|-|PF_1|=2a\end{cases}\Rightarrow|PF_1|=\frac{2a}{e-1}，|PF_2|=\frac{2ae}{e-1}$$

因为$|PF_1|+|PF_2|\geq|F_1F_2|$，$|F_1F_2|=2c=2ea$，

所以$\frac{2a}{e-1}+\frac{2ae}{e-1}\geq2ea$，又因为$a>0$，$e>1$，所以

$$1+e\geq e^2-e\Leftrightarrow e^2-2e-1\leq0$$

$$\Leftrightarrow 1<e\leq1+\sqrt{2}$$

12-2-31 ；因为 $MN\perp x$ 轴，又 M，N 在双曲线上，则 M，N 关于 x 轴对称。设点 M 坐标为$(x_1，y_1)(y_1>0)$，则 N 的坐标为$(x_1，-y_1)$又 A'，A 的坐标为$(-a，0)$，$(a，0)$。所以

$$tg\angle MA'x\cdot tg\angle MAx=\frac{y_1}{x_1+a}\cdot\frac{y_1}{x_1-a}=\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}$$

因为 M 在双曲线上，所以 $x_1^2-y_1^2=a^2$，即 $x_1^2-a^2=y_1^2$。所以，tg∠MA′x·tg∠MAx=1，∠MA′x+∠MAx=90°。

同理，∠NA′x+∠NAx=90°。

故∠MAN+∠MA′N=180°。

12-2-32 设两焦点坐标为$F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)$，$(c=\sqrt{a^2+b^2})$。又设$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，则$|r_1-r_2|=2a$。

在△F_1PF_2 中，由余弦定理

$$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\theta$$

即
$$4c^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=(r_1-r_2)^2+2r_1r_2(1-\cos\theta)$$
$$=4a^2+2r_1r_2(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow r_1r_2=\frac{4(c^2-a^2)}{2(1-\cos\theta)}=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$$

则△F_1PF_2 的面积

$$S=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2\sin\theta}{1-\cos\theta}=b^2\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$$

12-2-33　不失一般性，设 P 在双曲线的右支上，$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，则 $r_1-r_2=2a$，$|F_1F_2|=2$。

在$\triangle PF_1F_2$中，由正弦定理知$\frac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\frac{|PF_1|}{\sin\beta}=\frac{|F_1F_2|}{\sin[\pi-(\alpha+\beta)]}$，即

$$\frac{r_2}{\sin\alpha}=\frac{r_1}{\sin\beta}=\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}。$$

$$\Leftrightarrow\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{r_1-r_2}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{2a}{\sin\beta-\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow\frac{c}{a}=\frac{2\sin\frac{2\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

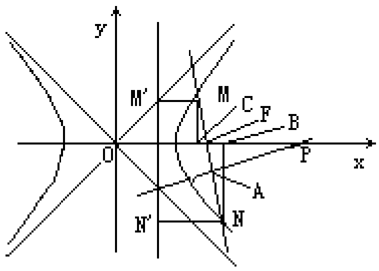
$$\Leftrightarrow c(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$=a(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2})$$

$$\Leftrightarrow(c-a)\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=(a+c)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{c-a}{c+a}。$$

12-2-34　如图。设 MN 的垂直平分线交 MN 于 A，过 M，N 作 x 轴垂线，垂足分别为 C，B。过 M，N 作右准线的垂线，垂足为 M′，N′。设∠MFC=∠BFN=α，$|MF|=r_1$，$|NF|=r_2$，$|MM'|=d_1$，$|NN'|=d_2$，

则$|FA|=\frac{|r_1-r_2|}{2}$。



又$|PF|=\dfrac{|FA|}{|\cos\alpha|}$，$|MF|=\dfrac{|FC|}{|\cos\alpha|}$，$|NF|=\dfrac{|BF|}{|\cos\alpha|}$。所以

$$|MN|=|MF|+|NF|$$
$$=\frac{|FC|+|BF|}{|\cos\alpha|}=\frac{|BC|}{|\cos\alpha|}=\frac{|d_1-d_2|}{|\cos\alpha|}$$

设双曲线离心率为e，则$d_1=\dfrac{r_1}{e}$，$d_2=\dfrac{r_2}{e}$，所以$|d_1-d_2|=\dfrac{|r_1-r_2|}{e}$。所以

$$\frac{|PF|}{|MN|}=\frac{|FA|}{|d_1-d_2|}=\frac{|r_1-r_2|}{2}\cdot\frac{e}{|r_1-r_2|}=\frac{e}{2}$$

由双曲线方程$x^2-y^2=a^2$得$e=\sqrt{2}$。故$\dfrac{|PF|}{|MN|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

12-2-35 设 P 点的坐标为$(x_1，y_1)$，$\angle ROQ=\alpha$。又设 P 到两渐近线的距离分别 d_1，d_2。

因双曲线的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，所以

$$d_1=\frac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}，d_2=\frac{|bx_1+ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}，b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$$

因平行四边形 ORPQ 的面积

$$S=d_1|PQ|=d_2|PR|=|PR|\cdot|PQ|\cdot\sin\alpha$$

故 $d_1d_2=|PQ|\cdot|PR|=(|PR\cdot|PQ|\cdot\sin\alpha)^2$

从而 $|PR|\cdot|PQ|=\dfrac{d_1d_2}{\sin^2\alpha}$

又因为$d_1d_2=\dfrac{|b^2x_1^2-a^2y_1^2|}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$及$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{b}{a}$，故

$$\sin\alpha=\frac{2\cdot\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

由以上诸等式即得欲证的等式。

12-2-36 由方程组$\begin{cases}x^2-2y^2=1\\y=kx+b\end{cases}$消去y，得

$$(1-2k^2)x^2-4kbx-2b^2-1=0 \qquad (i)$$

由题设知对一切实数 b，此方程有实数解。

(i)当$1-2k^2=0$即$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时，方程(i)为$\pm 2\sqrt{2}bx=2b^2+1$，注意到$b=0$时，方程无解，故不合题意，舍去。

(ii)当$1-2k^2\neq 0$即$k\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时，方程(*)为x的二次方程，其判别式应为非负数，即

$$\triangle=16k^2b^2+4(1-2k^2)(2b^2+1)=8(b^2+\frac{1}{2}-k^2)\geq 0$$

从而应有$k^2\leq b^2+\frac{1}{2}$对$b\in R$成立，即

$$k^2<\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

故满足条件的实数$k\in(-\frac{\sqrt{2}}{2}，\frac{\sqrt{2}}{2})$。

12-2-37 设A，B两点坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$。

将$y=kx+1$代入双曲线方程$3x^2-y^2=1$，整理得

$$(3-k^2)x^2-2kx-2=0$$

当$\triangle=4k^2+8(3-k^2)=24-4k^2>0$，即$0<k^2<6$且$k^2\neq 3$时，方程有两不等实根$x_1$，$x_2$且

$$x_1+x_2=\frac{2k}{3-k^2}，x_1x_2=\frac{-2}{3-k^2} \qquad \text{(i)}$$

因为以AB为直径的圆过原点，所以$OA\perp OB$，所以$x_1x_2+y_1y_2=0$。又$y_1=kx_1+1$，$y_2=kx_2+1$，故

$$x_1x_2+(kx_1+1)(kx_2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(1+k^2)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=0 \qquad \text{(ii)}$$

将(i)代入(ii)得

$$(1+k^2)\cdot\frac{-2}{3-k^2}+k\cdot\frac{2k}{3-k^2}+1=0\Leftrightarrow k=\pm 1$$

12-2-38 (1)由题设知，渐近线OA方程为$bx-ay=0$，右焦点坐标为$F(c，0)(c=\sqrt{a^2+b^2})$。故

$$|FM|=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$$

(2)因$FM\perp OA$，则FM所在直线l的方程为

$$y=-\frac{a}{b}(x-c)$$

解方程组$\begin{cases}bx-ay=0\\ y=-\frac{a}{b}(x-c)\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{a^2}{c}\\ y=\frac{ab}{c}\end{cases}$，所以M点坐标为$(\frac{a^2}{c}，\frac{ab}{c})$，

故M点在右准线$x=\frac{a^2}{c}$上。

(3)设 P，Q 两点的坐标分别为(x_1，y_1)，(x_2，y_2)。

由方程组$\begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}(x-c) \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，消去y，整理得

$$(b^2-a^2)c^2x^2+2a^4cx-a^2(a^2c^2+b^4)=0$$

注意到 a=b 时，l 与一条渐近线平行与双曲线仅一个交点，不合题意，故 a≠b，于是

$$\triangle=4a^8c^2+4a^2c^2(b^2-a^2)(a^2c^2+b^4)=4a^2c^2b^6>0$$

故方程有二不等实根 x_1，x_2，且

$$x_1+x_2=-\frac{2a^4c}{(b^2-a^2)c^2}，x_1x_2=\frac{-a^2(a^2c^2+b^4)}{(b^2-a^2)c^2}$$

故所求的函数关系式为

$$x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$$

函数的定义域为$[0，\sqrt{10}]$.

12-2-39 双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$的长半轴长、短半轴长、半焦距分别为 a=3，b=4，c=5，右焦点 F(5，0)。

设 A，B，M 点的坐标分别为(x_1，y_1)，(x_2，y_2)，(x_0，y_0)。

由题设知，弦 AB 所在直线的方程为 y=x-5。

由方程组$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1 \\ y=x-5 \end{cases}$消去y，得方程

$$7x^2+90x-369=0$$

依题意上面的方程有两不等实根x_1，x_2，故$x_1+x_2=-\dfrac{90}{7}$，所以

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{45}{7}$$

因 M，F 均在直线 y=x-5 上，故

$$|MF|=\sqrt{1+1}|x_0-5|=\sqrt{2}|-\frac{45}{7}-5|=\frac{80\sqrt{2}}{7}$$

12-2-40　设四点 A，B，C，D 的坐标分别为 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，C(x_3，y_3)，D(x_4，y_4)。设直线 l 的方程为

$$y=kx+b \qquad (i)$$

将(i)代入圆的方程，得

$$(1+k^2)x^2+2bkx+b^2-1=0$$

由题设，其判别式为正，即

$$\triangle_1=4b^2k^2-4(1+k^2)(b^2-1)>0\Leftrightarrow k^2+1-b^2>0 \qquad (ii)$$

又将(i)代入双曲线方程 $x^2-y^2=1$，整理得

$$(1-k^2)x^2-2bkx-b^2-1=0$$

同理应有

$$\triangle_2=4k^2b^2+4(b^2+1)(1-k^2)>0$$

$$\Leftrightarrow b^2+1-k^2>0 \qquad (iii)$$

由(ii)，(iii)得

$$b^2-1<1<k^2<b^2+1 \qquad (iv)$$

因为 A，B 将线段 CD 三等分，则线段 AB 与 CD 的中点重合，故 |CD|=3|AB|，所以

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_3+x_4 \\ |x_3-x_4|=3|x_1-x_2| \end{cases}$$

又由韦达定理知，$x_1+x_2=-\dfrac{2bk}{1+k^2}$，$x_3+x_4=\dfrac{2bk}{1-k^2}$，于是

$$|x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{k^2+1-b^2}}{1+k^2}，|x_3-x_4|=\frac{2\sqrt{b^2+1-k^2}}{|1-k^2|}$$

从而 $\begin{cases} -\dfrac{2bk}{1+k^2}=\dfrac{2bk}{1-k^2} \\ \dfrac{2\sqrt{b^2+1-k^2}}{|1-k^2|}=3\cdot\dfrac{2\sqrt{k^2+1-b^2}}{1+k^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ b=\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=0 \\ k=\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5} \end{cases}$

它们均满足(iv)．

故所求直线 l 的方程为

$$y=\pm\frac{2}{5}\sqrt{5} \text{ 或 } y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$$

12-2-41 设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$，则渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，右顶点A的坐标为(a，0)．设OP所在直线方程为

$$y=kx \quad (k\neq\pm\frac{b}{a})$$

过 A 点与渐近线平行的直线方程分别为

$$y=\frac{b}{a}(x-a)，y=-\frac{b}{a}(x-a)$$

分别解方程组 $\begin{cases} y=kx \\ y=\dfrac{b}{a}(x-a) \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y=kx \\ y=-\dfrac{b}{a}(x-a) \end{cases}$ 得Q，R点的坐标为

$$Q\left(\frac{ab}{b-ak}，\frac{abk}{b-ak}\right)，R\left(\frac{ab}{b+ak}，\frac{abk}{b+ak}\right)$$

又解方程组$\begin{cases} y=kx \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$得P点坐标为

$\left(\dfrac{ab}{\sqrt{b^2-a^2k^2}}，\dfrac{abk}{\sqrt{b^2-a^2k^2}}\right)$或$\left(-\dfrac{ab}{\sqrt{b^2-a^2k^2}}，-\dfrac{abk}{\sqrt{b^2-a^2k^2}}\right)\left(k^2<\dfrac{b^2}{a^2}\right)$

所以　$|OQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot|\dfrac{ab}{b-ak}|$，$|OP|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{ab}{\sqrt{b^2-a^2k^2}}$

$|OR|=\sqrt{1+k^2}|\dfrac{ab}{b+ak}|$

从而　$|OR|\cdot|OQ|=(1+k^2)\cdot\dfrac{a^2b^2}{|b^2-a^2k^2|}$，$|OP|^2=(1+k^2)\cdot\dfrac{a^2b^2}{|b^2-a^2k^2|}$

所以，|OQ|，|OP|，|OR|成等比数列．

12-2-42 (1)由双曲线方程得$a=b=1$，$c=\sqrt{2}$，则$e=\sqrt{2}$，右焦点为$F(\sqrt{2}，0)$，右准线为$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

由双曲线定义知，

$$\frac{|AF|}{\left|x_1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|AF|=\sqrt{2}x_1-1$$

同理，$|BF|=\sqrt{2}\,x_2-1$．

所以，$|AF|+|BF|=\sqrt{2}(x_1+x_2)-2=|AB|$．故A，B，F三点共线，直线 l 过右焦点 F．

(2)因为$|AF|=2|FB|$，所以$\dfrac{AF}{FB}=2$．由定比分点公式得

$$\sqrt{2}=\frac{x_1+2x_2}{1+2}\Leftrightarrow x_1+2x_2=3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1+x_2=3\sqrt{2}-x_2 \qquad \text{(i)}$$

又|AB|=3|FB|，故

$$\sqrt{2}(x_1+x_2)-2=3(\sqrt{2}x_2-1) \qquad \text{(ii)}$$

将(i)代入(ii)得

$$\sqrt{2}(3\sqrt{2}-x_2)-2=3\sqrt{2}x_2-3\Leftrightarrow x_2=\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

所以$|AB|=3\left(\sqrt{2}\times\dfrac{7\sqrt{2}}{8}-1\right)=\dfrac{9}{4}$．

由 B 在双曲线上，故

$$\left(\frac{7\sqrt{2}}{8}\right)^2-y_2^2=1\Leftrightarrow y_2=\pm\frac{\sqrt{34}}{8}$$

则直线l的斜率$k=\frac{y_2-0}{x_2-\sqrt{2}}=\pm\sqrt{17}$．故所求直线l的方程为

$$y=\pm\sqrt{17}(x-\sqrt{2})$$

12-2-43　设直线 l 与双曲线 C_2 相交于 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点，AB 的中点 M 的坐标为$(x_0，y_0)$．

因 A，B 在双曲线上，故

$$(x_1-1)^2-y_1^2=1，(x_2-1)^2-y_2^2=1$$

两式相减得

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$$

当 $x_1\neq x_2$ 时，直线 l 的斜率为

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2-2}{y_1+y_2}=\frac{x_0-1}{y_0}$$

故　　$x_0-ky_0-1=0$　（i）

又因为直线 l 与圆 C_1 相切于点 M，则 OM⊥AB，所以

$x_0+ky_0=0$　（ii）

由(i)，(ii)得$x_0=\frac{1}{2}$，$y_0=-\frac{1}{2k}$．

又点 M 在圆 C_1 上．所以

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4k^2}=1\Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，点M的坐标为$\left(\frac{1}{2}，-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$时，点M的坐标为$\left(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$．故直线l的方程为

$$y+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\text{或}y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

即　　$x-\sqrt{3}y-2=0$或$x+\sqrt{3}y-2=0$

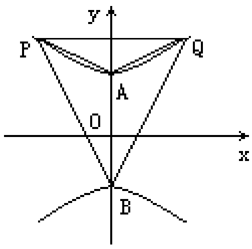
当 $x_1=x_2$ 时，l⊥x 轴，A，B 关于 x 轴对称，且中点 M 在 x 轴上，则 $y_0=0$，$x_0=-1$．所以直线 l 方程为 $x=-1$．

综上所述，所求直线方程为

$$x-\sqrt{3}y-2=0\text{或}x+\sqrt{3}y-2=0\text{，或}x=-1$$

12-2-44　如下图，设双曲线的方程为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>0，b>0)$$



则点 A，B 的坐标分别为 A(0，a)，B(0，-a)．

设 Q 点坐标为(x，y)．因为∠PAQ+∠PBQ=180°．由对称性知∠yAQ+∠yBQ=90°，所以 AQ，BQ 所在直线斜率满足 $k_{AQ}\cdot k_{BQ}=1$．

由方程组 $\begin{cases}\dfrac{y-a}{x}\cdot\dfrac{y+a}{x}=1\\ \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1\end{cases}$ 得

$$b^2(y^2-a^2)=a^2(y^2-a^2)\ (\mathrm{i})$$

且(i)式对 y＞a 或 y＜-a 恒成立，所以 $a^2=b^2$，故双曲线方程为

$$y^2-x^2=a^2$$

又设 M，N 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$．因 M，N 在双曲线上，则

$$\begin{cases}y_1^2-x_1^2=a^2\\ y_2^2-x_2^2=a^2\end{cases}$$

两式相减得

$$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)\quad(\mathrm{ii})$$

双因为MN的中点为圆D的圆心，所以 $\dfrac{y_1+y_2}{2}=6$，$\dfrac{x_1+x_2}{2}=4$，即

$$y_1+y_2=12，x_1+x_2=8\quad(\mathrm{iii})$$

由(ii)，(iii)得直线 MN 的斜率

$$k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

所以直线MN的方程为 $y-6=\dfrac{2}{3}(x-4)$，即

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$$

由方程组 $\begin{cases}y^2-x^2=a^2\\ y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{10}{3}\end{cases}$，消去y，得方程

$$5x^2-40x+9a^2-100=0\quad(\mathrm{iv})$$

当 $\Delta=1600-20(9a^2-100)=3600-180a^2>0$，即 $a^2<20$ 时，方程(iv)有两不相等实根 x_1，x_2，这时

$$|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{\frac{13}{9}}\cdot\frac{\sqrt{3600-180a^2}}{5}=2\sqrt{13}\Leftrightarrow a^2=15$$

故所求双曲线方程为 $y^2-x^2=15$.

12-2-45 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的右准线为$x=\frac{a^2}{c}$，左准线为$x=-\frac{a^2}{c}$.

解方程组$\begin{cases}x=\frac{a^2}{c}\\y=\frac{b}{a}x\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{a^2}{c}\\y=\frac{ab}{c}\end{cases}$，所以A点的坐标为$\left(\frac{a^2}{c},\ \frac{ab}{c}\right)$. 故过A，F两点的直线l的斜率为

$$k_{AF}=\frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c}-c}=-\frac{a}{b}$$

又直线l交左准线$x=-\frac{a^2}{c}$于B，则B点横坐标$x_B=-\frac{a^2}{c}$.

设 C 点坐标(x_C，y_C)，因 B 是 AC 的中点，则

$$2x_B=x_C+x_A\Leftrightarrow x_C=2x_B-x_A=-\frac{3a^2}{c}$$

因 C 是双曲线左支与直线 l 的交点，故

$$\frac{\left(-\frac{3a^2}{c}\right)^2}{a^2}-\frac{y_C^2}{b^2}=1\Leftrightarrow y_C=\frac{b}{c}\sqrt{9a^2-c^2}$$

又 F，A，C 共线，所以 $k_{AF}=k_{CF}$,即

$$\frac{\frac{b}{c}\sqrt{9a^2-c^2}}{-\frac{3a^2}{c}-c}=-\frac{a}{b}\Leftrightarrow 25a^4-10a^2c^2+c^4=0$$

$$\Leftrightarrow e^4-10e^2+25=0\Leftrightarrow e=\sqrt{5}$$

即双曲线离心率为$\sqrt{5}$.

12-2-46 设点 A，B，M 的坐标分别为(x_1，y_1)，(x_0，y_0).

由方程组$\begin{cases}y=kx+1\\x^2-y^2=1\end{cases}$消去y，得

$$(1-k^2)x^2-2kx-2=0$$

因直线 m 与双曲线左支有两不同交点，则上面的方程应有两不等的负实根，故

$$\begin{cases}\Delta=4k^2+8(1-k^2)=8-4k^2>0\\ 1-k^2\neq 0\\ \dfrac{2k}{1-k^2}<0\\ \dfrac{-2}{1-k^2}>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<k<\sqrt{2}$$

又$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{k}{1-k^2}$，$y_0=kx_0+1=\dfrac{1}{1-k^2}$，所以M点的坐标为$\left(\dfrac{k}{1-k^2}，\dfrac{1}{1-k^2}\right)$. 所以过点M，P的直线l的方程为

$$y=\frac{\dfrac{1}{1-k^2}}{\dfrac{k}{1-k^2}+2}(x+2)\Leftrightarrow y=\frac{1}{-2k^2+k+2}x+\frac{2}{-2k^2+k+2}$$

故l在y轴上的截距$b=\dfrac{2}{-2k^2+k+2}(1<k<\sqrt{2})$.

设$\varphi(k)=-2k^2+k+2=-2\left(k-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$，则$\varphi(k)$在$k\in(1，\sqrt{2})$上为减函数，所以$\sqrt{2}-2<\varphi(k)<1$且$\varphi(k)\neq 0$，故

$b<-2-\sqrt{2}$或$b>2$

12-2-47　满足条件的 a 不存在.

假设存在实数 a 使 A，B 关于直线 y=2x 对称，又 A，B 的坐标为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，则

$$y_1+y_2=2(x_1+x_2)$$

又 $y_1=ax_1+1$，$y_2=ax_2+1$，故 $y_1+y_2=a(x_1+x_2)+2$，所以

$$a(x_1+x_2)+2=2(x_1+x_2)\Leftrightarrow(2-a)(x_1+x_2)=2$$

(i)

将 y=ax+1 代入双曲线方程 $3x^2-y^2=1$ 得

$$(3-a^2)x^2-2ax-2=0$$

点 A，B 的坐标即这个方程的两实根，由韦达定理有

$$x_1+x_2=\frac{2a}{3-a^2}$$

(ii)

由(i)，(ii)得

$$(2-a)\cdot\frac{2a}{3-a^2}=2\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$$

显然直线$y=\dfrac{3}{2}x+1$与$y=2x$不垂直，故满足条件的实数a不存在.

12-2-48　设双曲线上 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点关于直线 l 对称. 又设 AB 的中点 C 的坐标为$(x_0，y_0)$.

因 l 是线段 AB 的垂直平分线，故可设 AB 所在直线的方程为

y=2x+b

由方程组$\begin{cases} y=2x+b \\ \dfrac{(x+2)^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$消去$y$，得方程

$7x^2+(8b-4)x+2(b^2+1)=0$

此方程有两不等实根，故

$$\Delta=(8b-4)^2-56(b^2+1)>0 \Leftrightarrow b<4-\sqrt{21}\text{或}b>4+\sqrt{21}$$

又由韦达定理知$x_1+x_2=\dfrac{4-8b}{7}$，故

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2-4b}{7}，\ y_0=2x_0+b=\frac{4-b}{7}$$

因 $C(x_0，y_0)$在直线 l 上，故

$$\frac{4-b}{7}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2-4b}{7}+m \Leftrightarrow b=\frac{5-7m}{3}$$

即 $$\frac{5-7m}{3}<4-\sqrt{21}\text{或}\frac{5-7m}{3}>4+\sqrt{21}$$

$$\Leftrightarrow m<-1-\frac{3}{7}\sqrt{21}\text{或}m>-1+\frac{3}{7}\sqrt{21}$$

12-2-49 设双曲线方程为$\dfrac{y^2}{m^2}-\dfrac{x^2}{n^2}=1(m>0，n>0)$，半焦距为$c$，因椭圆与双曲线有公共焦点，故 $c^2=a^2-b^2=m^2+n^2$，所以 $n^2=c^2-m^2$.

解方程组$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{y^2}{m^2}-\dfrac{x^2}{c^2-m^2}=1 \end{cases}$得$\begin{cases} x^2=\dfrac{b^2(c^2-m^2)}{c^2} \\ y^2=\dfrac{a^2m^2}{c^2} \end{cases}$.

因椭圆、双曲线都关于坐标轴对称，故以它们的交点为顶点的四边形为矩形，其面积

$$S=4|xy|=\frac{4ab}{c^2}\sqrt{m^2(c^2-m^2)}\le\frac{4ab}{c^2}\cdot\frac{m^2+c^2-m^2}{2}=2ab$$

等号在$m^2=c^2-m^2$，即$m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c$时成立，此时$x^2=\dfrac{b^2}{2}$，$y^2=\dfrac{a^2}{2}$. 则对应四边形的四顶点的坐标为

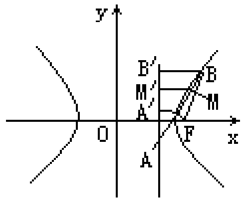
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b，\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)，\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b，-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}b，\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)，\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}b，-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$$

所求双曲线方程为$y^2-x^2=\dfrac{1}{2}(a^2-b^2)$.

12-2-50 由题设知，$a=4$，$b=3$，$c=5$，右准线为$x=\frac{16}{5}$，右焦点为$F(5，0)$，离心率$e=\frac{5}{4}$．

过 A，B，M 分别作右准线的垂线，垂足为 A′，B′，M′．连 AF，BF．



由双曲线定义知$|AF|=\frac{5}{4}|AA'|$，$|BF|=\frac{5}{4}|BB'|$，所以

$$|AA'|+|BB'|=\frac{4}{5}(|AF|+|BF|)$$

又$|MM'|=\frac{|AA'|+|BB'|}{2}$，故

$$|MM'|=\frac{2}{5}(|AF|+|BF|)\geq\frac{2}{5}|AB|=4$$

设M点坐标为$(x_0，y_0)$，则$x_0\geq 4+\frac{16}{5}$，即$x_0\geq\frac{36}{5}$．所以当$|AF|+|BF|=|AB|$，即AB过点F时，AB的中点M的横坐标取最小值$\frac{36}{5}$．

设 AB 所在直线方程为 y=k(x-5)．

由方程组$\begin{cases}y=k(x-5)\\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$ 消去y，得

$$(9-16k^2)x^2+160k^2x-400k^2-144=0$$

点 A，B 的横坐标 x_1，x_2 是这个方程的两实根，故

$$x_1+x_2=\frac{160k^2}{16k^2-9}=2x_0$$

当$x_0=\frac{36}{5}$时，

$$\frac{80k^2}{16k^2-9}=\frac{36}{5}\Leftrightarrow k=\pm\frac{9\sqrt{11}}{22}$$

所以，当 AB 的中点 M 的横坐标最小时，AB 所在直线的方程为

$$y=\pm\frac{9\sqrt{11}}{22}(x-5)$$

12-2-51 解方程组$\begin{cases}x-2y-1=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$，故双曲线的中心为$(1，0)$．

平移坐标轴，将原点移到(1，0)处．平移公式为

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' \end{cases}$$

在新坐标系中，双曲线两渐近线新的方程为$y' = \pm\frac{1}{2}x'$.

在新坐标系中，双曲线的方程为

$$\frac{x'^2}{4} - y'^2 = k \quad (k > 0)$$

定点 A(4，0)的新坐标为 A(3，0).

在新坐标系中，设双曲线上任一点 P 的坐标为(x，y)，故

$$|PA| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

又$\frac{x^2}{4} - y^2 = k$，即$y^2 = \frac{x^2}{4} - k$，所以

$$|PA| = \sqrt{(x-3)^2 + \frac{x^2}{4} - k} = \sqrt{\frac{5}{4}\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} - k}$$

若$2\sqrt{k} > \frac{12}{5}$，即$k > \frac{36}{25}$，则当$x = 2\sqrt{k}$时，

$$|PA|_{\min} = \sqrt{4k - 12\sqrt{k} + 9} = 1 \Leftrightarrow k = 4 \text{或} k = 1(\text{舍去})$$

若$2\sqrt{k} \leq \frac{12}{5}$，即$0 < k \leq \frac{36}{25}$，则当$x = \frac{12}{5}$时，

$$|PA|_{\min} = \sqrt{\frac{9}{5} - k} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{4}{5}$$

所以在新坐标系中，所求双曲线方程为

$$\frac{x'^2}{4} - y'^2 = 4 \text{或} \frac{x'^2}{4} - y'^2 = \frac{4}{5}$$

则在原坐标系中，双曲线方程为

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{或} \frac{5(x-1)^2}{4} - \frac{5y^2}{4} = 1$$

12-2-52　设 P 点的坐标为$(x_1，y_1)$．因 PQ⊥AA′，由双曲线对称性，则 Q 点的坐标为$(x_1，-y_1)$($x_1 < -a$ 或 $x_1 > a$)．所以直线 AP 的方程为

$$y = \frac{y_1}{x_1 + a}(x + a)$$

(i)

直线 A′Q 的方程为

$$y = \frac{-y_1}{x_1 - a}(x - a)$$

(ii)

(i)×(ii)得

$$y^2 = \frac{-y_1^2}{x_1^2 - a^2}(x^2 - a^2)$$

(iii)

因 P 在双曲线上，则

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow y_1^2=\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-a^2)$$

(iv)

将(iv)代入(iii)得

$$y^2=-\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (y\neq 0)$$

此即所求点的轨迹方程．

12-2-53　由题设知双曲线方程为

$$\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$$

故半焦距$c=\sqrt{2+2}=2$，所以焦点F坐标为$(0，2)$．

设Q点的坐标为$(x_0，y_0)$，P点的坐标为$(x，y)$．由已知$\frac{FP}{PQ}=\frac{1}{3}$，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\frac{1}{3}x_0}{1+\frac{1}{3}} \\ y=\dfrac{2+\frac{1}{3}y_0}{1+\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=4x \\ y_0=4y-6 \end{cases} \qquad (i)$$

因 Q 在双曲线上，则

$$y_0^2-x_0^2=2$$

(ii)

将(i)代入(ii)得

(4y-6)^2-(4x)^2=2

整理得 P 点轨迹为双曲线

$$8\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-8x^2=1$$

12-2-54　(1)设双曲线的右顶点为 A(x_1，y_1)，中心为(x_0，y_0)．

因右顶点在抛物线 y^2=x-1 上，且 2a=4，故

$$\begin{cases} x_1=x_0+2 \\ y_1=y_0 \\ x_0<0 \\ y_1^2=x_1-1 \end{cases} \Leftrightarrow y_0^2=x_0+1(-1\leq x_0<0)$$

所以，双曲线中心的轨迹方程为

y^2=x+1(-x≤x＜0)

(2)设双曲线方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{4}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

则离心率$e=\frac{\sqrt{4+b^2}}{2}$.

又y轴为右准线，则$x_0=-\frac{a^2}{c}=-\frac{c}{e^2}=-\frac{4}{\sqrt{4+b^2}}$，所以

$$-\frac{4}{\sqrt{4+b^2}}\geq -1\Leftrightarrow \sqrt{4+b^2}\geq 4$$

当 $b^2=12$ 时，e 取最小值 2．此时 $x_0=-1$，$y_0=0$．

故所求双曲线方程为

$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

12-2-55 设中心 O′的坐标为(x，y)(x＜1)，其右焦点为 F(x′，y′)，M 到右准线距离为 d，

由双曲线定义知，$\frac{|MF|}{d}=e$，所以

$$\frac{\sqrt{(x'-5)^2+(y'-\sqrt{55})^2}}{5-1}=2\Leftrightarrow (x'-5)^2+(y'-\sqrt{55})^2=64$$

设双曲线半焦距为c，实半轴长为a，则$x'-x=c$且$1-x=\frac{a^2}{c}$．所以

$$\frac{x'-x}{1-x}=\left(\frac{c}{a}\right)^2=4\Leftrightarrow x'=4-3x$$

又 y′=y，故

$$(4-3x-5)^2+(y-\sqrt{55})^2=64$$

整理得 O′的轨迹方程为

$$\frac{9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}{64}+\frac{(y-\sqrt{55})^2}{64}=1\ (x<1)$$

12-2-56 设 M，B，C 的坐标分别为(x，y)，$(x_1，y_1)(x_2，y_2)$．显然当直线 l 与 x 轴垂直时，l 不与双曲线相交，故可设 l 的方程为

$$y=k(x-2)$$

由方程组$\begin{cases}y=k(x-2)\\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$消去y，整理得方程

$$(9-16k^2)x^2+64k^2x-(64k^2+144)=0\quad (i)$$

注意到 $9-16k^2=0$ 时，直线 l 与双曲线渐近线平行，与双曲线仅一个交点，故不合题意，故 $9-16k^2\neq 0$，于是

$$\Delta=64^2k^4+4(9-16k^2)(64k^2+144)=36(144-192k^2)$$

当$\Delta \geq 0$，即$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$且$k \neq \pm\frac{3}{4}$时，方程(i)有两实根$x_1$，$x_2$，且

$$x_1 + x_2 = -\frac{64k^2}{9-16k^2}$$

因为$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$，且M在直线l上，故

$$\begin{cases} x = -\frac{32k^2}{9-16k^2} \\ y = k(x-2) \end{cases}$$

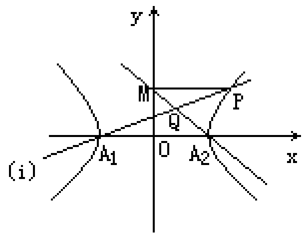
消去参数k，得

$$(x-1)^2 - \frac{16y^2}{9} = 1$$

又因为$0 \leq k^2 \leq \frac{3}{4}$且$k^2 \neq \frac{9}{16}$，所以$x \leq 0$或$x \geq 8$.

所以，M点的轨迹为双曲线$(x-1)^2 - \frac{16y^2}{9} = 1$在$x \leq 0$或$x \geq 8$内的部分.

12-2-57　双曲线两顶点A_1，A_2的坐标分别为$A_1(-a，0)$，$A_2(a，0)$.



设直线l的方程为

$$y=k(x+a)(k \neq 0) \quad (i)$$

l与双曲线右支交于点$P(x_1，y_1)$.

将$y = k(x+a)$代入双曲线方程$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$，整理得

$$(b^2-a^2k^2)x^2-2a^3k^2x-a^2(a^2k^2+b^2)=0$$

$$\Leftrightarrow x = -a\text{或}x = \frac{a^3k^2 + ab^2}{b^2 - a^2k^2}$$

于是，$y_1 = k(x_1 + a) = \frac{2akb^2}{b^2 - a^2k^2}$，所以M点的坐标为$\left(0，\frac{2akb^2}{b^2 - a^2k^2}\right)$.

A_2M所在直线的方程为

$$y = \frac{-2kb^2}{b^2 - a^2k^2}(x-a) \quad (ii)$$

因Q为直线A_1P与A_2M的交点，故由(i)，(ii)消去k，即得Q点轨迹方程

$$\frac{9\left(x+\frac{a}{3}\right)^2}{4a^2}-\frac{3y^2}{4b^2}=1\ \left(x>\frac{a}{3}\right)$$

12-2-58 由双曲线方程$\frac{x^2}{3}-y^2=1$**知，**$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$**，右焦点**F**的坐标为**$(2，0)$**；右准线**l**的方程为**$x=\frac{3}{2}$**，左准线**l'**的方程为**$x=-\frac{3}{2}$**.**

设椭圆中心为 A(m，0)，长、短半轴长为 a′，b′.

因A'**在左准线**l'**上，可设**A'**坐标为**$\left(-\frac{3}{2}，n\right)$**.**

因 A 与 A′关于直线 y=2x 对称，所以

$$\begin{cases}\frac{n}{2}=2\cdot\frac{m-\frac{3}{2}}{2}\\ \frac{-n}{m+\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$$

所以椭圆中心的坐标为$A\left(\frac{5}{2}，0\right)$**. 又**$F$**为椭圆的左焦点，所以椭圆半焦距**$c'=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$**. 又椭圆的左准线为**$x=\frac{3}{2}$**，故**$\frac{a'^2}{c'}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1$**，所以**

$$a'^2=\frac{1}{2}，b'^2=\frac{1}{4}\text{d}$$

所以所求椭圆方程为$2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+4y^2=1$**，离心率**$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$**.**

12-2-59 (1)经配方，椭圆与双曲线的方程分别为

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1，\ \frac{(x-2)^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$$

令$\begin{cases}x'=x-2\\ y'=y\end{cases}$**，平移坐标轴，将原点移到**$(2，0)$**处.**

在新坐标系中，椭圆与双曲线的方程分别为

$$\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{16}=1，\ \frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{4}=1$$

因两曲线有公共焦点，故

$$a^2+4=25-16\Leftrightarrow a=\sqrt{5}$$

(2)由椭圆与双曲线定义得

$$\begin{cases}|MF_1|+|MF_2|=10\\ |MF_1|-|MF_2|=\pm2\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|MF_1|=5+\sqrt{5}\\ |MF_2|=5-\sqrt{5}\end{cases}\text{或}\begin{cases}|MF_1|=5-\sqrt{5}\\ |MF_2|=5+\sqrt{5}\end{cases}$$

又$|F_1F_2|=6$．在△MF_1F_2中，由余弦定理得

$$\cos\angle F_1MF_2=\frac{|MF_1|^2+|MF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|MF_1|\cdot|MF_2|}=\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \angle F_1MF_2=\arccos\frac{3}{5}$$

12-2-60　(1)设P，Q两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$．将$y=ax-1$代入$x^2-2y^2=1$得

$$(1-2a^2)x^2+4ax-3=0$$

由题设知$1-2a^2\neq0$，且其判别式为正，即

$$\Delta=(4a)^2+12(1-2a^2)>0\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{2}<a<\frac{\sqrt{6}}{2}$$

由韦达定理知$x_1+x_2=\frac{-4a}{1-2a^2}$，$x_1x_2=\frac{-3}{1-2a^2}$，故

$$|PQ|=\sqrt{1+a^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{\sqrt{12-8a^2}}{|1-2a^2|}$$

又因为已知$|PQ|=2\sqrt{1+a^2}$，所以

$$\sqrt{12-8a^2}=2\cdot|1-2a^2|\Leftrightarrow 2a^4-a^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow a^2=1\text{或}a^2=-\frac{1}{2}(\text{舍})$$

即$a=\pm1$时，$|PQ|=2\sqrt{1+a^2}$．

(2)假设以PQ为直径的圆经过原点O，则OP⊥OQ．所以$x_1x_2+y_1y_2=0$．因为$y_1=ax_1-1$，$y_2=ax_2-1$，所以

$$(ax_1-1)(ax_2-1)+x_1x_2=0$$

$$\Leftrightarrow(1+a^2)x_1x_2-a(x_1+x_2)+1=0$$

由第(1)题知

$$(1+a^2)\cdot\frac{-3}{1-2a^2}-a\cdot\frac{-4a}{1-2a^2}+1=0$$

化简得$a^2=-2$．与$a^2\geq0$矛盾．

故不存在实数a，使以PQ为直径的圆经过原点．

(三)抛物线

12-3-1　B　由题设知P的坐标为(x，12)或(x，-12)，故$12^2=8x$．得$x=18$，所以P到焦点距离$d=18+\frac{8}{4}=20$．

12-3-2　C　直线$2x-y+4=0$与x轴、y轴的交点分别为(-2，0)，(0，4)．

当焦点为F(-2，0)时，抛物线方程为$y^2=-8x$；

当焦点为F(0，4)时，抛物线方程为$x^2=16y$．

12-3-3 D 将$y=kx+b$代入$y=ax^2$得方程$ax^2-kx-b=0$，那么$x_1+x_2=\frac{k}{a}$，$x_1x_2=-\frac{b}{a}$．又$x_3=-\frac{b}{k}$．所以，$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\cdot x_3=\left(-\frac{k}{b}\right)\cdot\left(-\frac{b}{k}\right)=1$．

故$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}$．

12-3-4 C 抛物线 $y^2=a(x+1)$的顶点为(-1，0)，准线方程为 x=-3．设

焦点为$F(x，0)$，则$\frac{x-3}{2}=-1$，解得$x=1$，即焦点F的坐标为$(1，0)$．

12-3-5 C $y=4x^2-8x+3\Leftrightarrow(x-1)^2=\frac{1}{4}(y+1)$

故抛物线顶点为$(1，-1)$，开口向上，焦参数$p=\frac{1}{8}$．所以焦点的坐标为$\left(1，-1+\frac{1}{16}\right)$，即$\left(1，-\frac{15}{16}\right)$．

12-3-6 C 将$y^2=\frac{1}{2}x$代入圆的方程，得

$$x^2+\left(\frac{1}{2}-2a\right)x+a^2-1=0$$

因$y^2=\frac{1}{2}x\geq0$，故上面的方程应有两异号实根或两相等的正根．

当$\Delta=\left(\frac{1}{2}-2a\right)^2-4(a^2-1)=0$时，$a=\frac{17}{8}$．此时$x=\frac{15}{8}>0$．

当$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1x_2=a^2-1<0\end{cases}$时，$-1<a<1$．

综上所述，a的取值范围为：$a=\frac{17}{8}$或$-1<a<1$．

12-3-7 2 $x^2+y^2-6x-7=0$，即$(x-3)^2+y^2=16$．

因抛物线准线为$x=-\frac{p}{2}$，故$3+\frac{p}{2}=4$，解得$p=2$．

12-3-8 2 因为$|AB|=4\sqrt{3}$，且AB⊥x轴，故A，B两点的坐标为$(x_0，-2\sqrt{3})$，$(x_0，2\sqrt{3})$．由$(2\sqrt{3})^2=4x_0$得$x_0=3$．所以AB所在直线的方程为 x=3．又 F 的坐标为(1，0)，故 F 到 AB 距离为 2．

12-3-9 $\frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$ 设顶点M的坐标为$(x，y)$．因x轴为其准线，故焦点的坐标为 F(x，2y)．由定义知|AF|等于点 A 到 x 轴的距离，即 $x^2+(2y-2)^2=4$，所以 M 点的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$$

12-3-10 4 因焦点为$F\left(-1+\frac{a}{4}，0\right)$，故$l$的方程为$x=-1+\frac{a}{4}$．由$y^2=a\left(-1+\frac{a}{4}+1\right)=\frac{a^2}{4}$得$y=\pm\frac{a}{2}$，故$2\cdot\frac{a}{2}=4$，所以$a=4$．

12-3-11 $(x+1)^2=2\left(y+\frac{1}{2}\right)$抛物线$C$的顶点为$\left(-\frac{3}{2}，0\right)$，焦点为$F(-1，0)$．旋转后，焦点位置不变，顶点坐标为$\left(-1，-\frac{1}{2}\right)$，故抛物线$C'$的方程为

$$(x+1)^2=2\left(y+\frac{1}{2}\right)$$

12-3-12 设抛物线方程为$y^2=mx$．因$M\left(\frac{3}{2}，-\sqrt{6}\right)$在抛物线上，故$6=\frac{3}{2}m$，即$m=4$．故抛物线方程为$y^2=4x$．

这抛物线的准线方程为 $x=-1$，故双曲线的左焦点为$(-1，0)$；又因为点$M\left(\frac{3}{2}，-\sqrt{6}\right)$在双曲线上，所以

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\ \frac{9}{4a^2}-\frac{6}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\frac{1}{4}\\ b^2=\frac{3}{4}\end{cases}$$

故双曲线方程为$4x^2-\frac{4y^2}{3}=1$．

12-3-13 依题设，抛物线方程为

$$x^2=-2py(p>0)$$

设 A，B 两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$、$(x_2，y_2)$．

由方程组$\begin{cases}x^2=-2py\\ 3x+2y+8=0\end{cases}$消去$y$，得

$$x^2-3px-8p=0$$

故 $x_1x_2=-8p，y_1y_2=\frac{x_1^2x_2^2}{4p^2}=16$

因$\angle AOB=90°$，即 $OA\perp OB$，所以，$x_1x_2+y_1y_2=0$，即$-8p+16=0$，解之得 $p=2$．故抛物线方程为

$$x^2=-4y$$

由 $p=2$ 易求得 A，B 的坐标分别为$(8，-16)$，$(-2，-1)$，从而圆心为

$\left(3，-\frac{17}{2}\right)$，半径$r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{5}{2}\sqrt{13}$．故圆的方程为

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{17}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\sqrt{13}\right)^2$$

12-3-14　因为抛物线的对称轴与 x 轴平行，且过 A(-1，6)，B(-1，-2)两点，易知抛物线的对称轴为$y=\frac{-2+6}{2}=2$．

设抛物线方程为

$$(y-2)^2=2p(x-x_0)(p>0)\quad (i)$$

因 B 在抛物线上，故

$$(-2-2)^2=2p(-1-x_0)\Leftrightarrow px_0=-p-8$$

(ii)

设直线 y=2x+7 与抛物线两交点 P，Q 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$．

将 y=2x+7 代入方程(i)，得

$$4x^2+2(10-p)x+25+2px_0=0$$

这方程两实根为 x_1，x_2，故

$$|PQ|=\sqrt{1+2^2}|x_1-x_2|=\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{p^2-20p-8px_0}}{4}=4\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow p^2-20p-8px_0=128\qquad (iii)$$

将(ii)代入(iii)得

$$p^2-12p-64=0\Leftrightarrow p=16\text{或}-4(\text{舍})$$

当$p=16$时，$x_0=-\frac{3}{2}$．故抛物线方程为

$$(y-2)^2=32\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

12-3-15 抛物线的焦点为$F\left(\frac{p}{2}，0\right)$．设A，B两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，则 AB 的方程为

$$y=x-\frac{p}{2}$$

将$y=x-\frac{p}{2}$代入$y^2=2px$中，得

$$x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$$

则 $x_1+x_2=3p$．所以 AB 中点 C 的坐标满足

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}p，y_0=x_0-\frac{p}{2}=p$$

故 AB 的中垂线方程为

$$y-p=-\left(x-\frac{3}{2}p\right)$$

已知点 Q(5，0)在 AB 的中垂线上，则

$$-p=-\left(5-\frac{3}{2}p\right)\Leftrightarrow p=2$$

所以，抛物线方程为 $y^2=4x$．

12-3-16　将 $y=kx-8$ 代入 $(x+2)^2=3(x-1)$ 中，消去 y，得

$$k^2x^2-(12k+3)x+39=0$$

当 $k=0$ 时，$x=13$，$y=-8$，方程组只有一解；

当 $k\neq 0$，

$$\Delta=(12k+3)^2-156k^2=-3(4k^2-24k-3)$$

当$\Delta>0$，即$4k^2-24k-3<0$，即$\frac{6-\sqrt{39}}{2}<k<0$或$0<k<\frac{6+\sqrt{39}}{2}$时，方程组有两不等实解；

当$\Delta=0$，即$k=\frac{6\pm\sqrt{39}}{2}$时，方程组有两相等实数解．

当$\Delta<0$，即$k<\frac{6-\sqrt{39}}{6}$或$k>\frac{6+\sqrt{39}}{6}$时，方程组无解．

综上所述，当$k=0$或$k=\frac{6\pm\sqrt{39}}{2}$时，$l$与抛物线$C$只有一个公共点；

当$k\in\left(\frac{6-\sqrt{39}}{2}，0\right)\cup\left(0，\frac{6+\sqrt{39}}{2}\right)$时，$l$与抛物线$C$有两个公共点；

当$k\in\left(-\infty，\frac{6-\sqrt{39}}{2}\right)\cup\left(\frac{6+\sqrt{39}}{2}，+\infty\right)$时，$l$与抛物线$C$无公共点．

12-3-17　设直线 l 与 x 轴的交点为 $N(x_0，0)$，则直线 l 的方程为

$$ky=x-x_0$$

将 $x=ky+x_0$ 代入抛物线方程 $y^2=2px$，得

$$y^2-2pky-2px_0=0$$

由韦达定理知　$y_1y_2=-2px_0$．

充分性：若 $y_1y_2=-2pa$，则 $x_0=a$．所以 l 过定点(a，0)．

必要性：若直线 l 过定点 M(a，0)，则 $x_0=a$．所以，$y_1y_2=-2pa$．

12-3-18　设 A，B 两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，AB 的中点 C 的坐标为$(2，y_0)$．

将 $y=kx-2$ 代入 $y^2=8x$ 中，得方程

$$k^2x^2-4(k+2)x+4=0$$

当 $\Delta=64(k+1)>0$，即 $k>-1$ 且 $k\neq 0$ 时，方程有两实根 x_1、x_2．根据韦达定理知

$$x_1+x_2=\frac{4(k+2)}{k^2}$$

但$\frac{x_1+x_2}{2}=2$，故

$$\frac{4(k+2)}{k^2}=4 \Leftrightarrow k=2\text{或}-1\ (\text{舍去})$$

从而 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{64(k+1)}}{k^2}$

$$=\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{64\times3}}{4}=2\sqrt{15}$$

12-3-19 由方程组$\begin{cases}6x-3y-4=0\\y^2=6x\end{cases}$消去$x$，得方程

$$y^2-3y-4=0$$

由韦达定理知 $y_1+y_2=3$．故弦 AB 的中点 C 的坐标为

$$y_0=\frac{3}{2}，x_0=\frac{3y_0+4}{6}=\frac{17}{12}$$

又弦长$d=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}|y_1-y_2|=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{9+16}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$．故圆的半径为$\frac{5\sqrt{5}}{4}$，

圆心坐标为$\left(\frac{17}{12}，\frac{3}{2}\right)$．

故所求圆的方程为$\left(x-\frac{17}{12}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{125}{16}$．

12-3-20 设直线 BC 的方程为

$$k(y-b)=x-a \Leftrightarrow x=ky+a-kb$$

代入方程 $y^2=2px$ 中，得方程

$$y^2-2pky-2p(a-kb)=0$$

则$b=\frac{y_1+y_2}{2}=pk$，得$k=\frac{b}{p}$．

故直线BC的方程为$\frac{b}{p}(y-b)=x-a$即

$$px-by+b^2-pa=0$$

12-3-21 抛物线 $y^2=32x$ 的焦点坐标为(8，0)，故△ABC 的重心 G 的坐标为(8，0)．设 B，C 两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，则

$$\frac{2+x_1+x_2}{3}=8，\frac{8+y_1+y_2}{3}=0 \Leftrightarrow x_1+x_2=22，y_1+y_2=-8$$

故 BC 的中点为(11，-4)．

又$y_1^2=32x_1$，$y_2^2=32x_2$，则$y_1^2-y_2^2=32(x_1-x_2)$．所以

$$k_{BC}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{32}{y_1+y_2}=-4$$

故 BC 边所在直线的方程为 y+4=-4(x-11)，即

$4x+y-40=0$

12-3-22　设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，则对称轴为 x 轴，焦点为

坐标分别为$(\rho_2，\theta+\pi)$，$(\rho_3，\theta+\frac{\pi}{2})$，$(\rho_4，\theta+\frac{3\pi}{2})$。则

设 A，B 两点的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$.

因直线AB过焦点F，故$y_1y_2=-p^2$，即$y_2=-\frac{p^2}{y_1}$. 故B的坐标为

$B\left(x_2，-\frac{p^2}{y_1}\right)$，AM方程为$y=\frac{y_1}{x_1}\cdot x$.

由方程组$\begin{cases} y=\frac{y_1}{x_1}x \\ x=-\frac{p}{2} \end{cases}$得M的坐标为$\left(-\frac{p}{2}，-\frac{py_1}{2x_1}\right)$，但$y_1^2=2px_1$故，$2x_1$

$=\frac{y_1^2}{p}$. 于是M点的坐标为$\left(-\frac{p}{2}，-\frac{p^2}{y_1}\right)$.

故 B，M 两点的纵坐标相等，所以 MB∥x 轴.

12-3-23　(1)设直线 l 的方程为 y=2x+b.点 A,B 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$.

将 y=2x+b 代入方程 $y^2=4x$，得

$4x^2+4(b-1)x+b^2=0$

当$\Delta=16(b-1)^2-16b^2=16(1-2b)>0$即$b<\frac{1}{2}$时，方程有两实根$x_1，x_2$. 则

$$|AB|=\sqrt{1+2^2}\cdot\frac{4\sqrt{1-2b}}{4}=3\sqrt{5}\Leftrightarrow b=-4$$

故所求直线方程为 y=2x-4.

(2)设P点的坐标为(x，0)，则P到直线l距离$d=\frac{|2x-4|}{\sqrt{5}}$，于是

$$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|2x-4|}{\sqrt{5}}\cdot 3\sqrt{5}=39\Leftrightarrow x=15\text{或}x=-11$$

故所求 P 点的坐标为(15，0)或(-11，0)。

12-3-24　(1)设过 A，B 两点的直线为 y=kx。点 A，B 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$。依题设抛物线焦点 F(2，0)，因以 AB 为直径的圆过点 F，故 AF⊥BF，所以

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{7}{2}$

将 y=kx 代入方程 $y^2=4(x-1)$，得

$k^2x^2-4x+4=0$

据韦达定理知$x_1+x_2=\frac{4}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{4}{k^2}$。

又 $y_1=kx_1$，$y_2=kx_2$，所以，$y_1y_2=k^2x_1x_2$，则

$k^2x_1x_2=-x_1x_2+2(x_1+x_2)-4$

$\Leftrightarrow (k^2+1)x_1x_2=2(x_1+x_2)-4 \Leftrightarrow \frac{4(k^2+1)}{k^2}=\frac{8}{k^2}-4$

$\Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

故所求直线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$。

(2)$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{1-k^2}}{k^2}$。由(1)知$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{2}}\cdot\frac{4\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=4\sqrt{3}$$

12-3-25　设 A 点的坐标为$(a,(a-2)^2)$。由题设知顶点 C 为(2，0)，对称轴为$x=2$。因D到直线$x=2$的距离为$\frac{1}{2}$，故$x_D=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$或$x_D=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，故B点横坐$x_B=5-a$或$3-a$。所以B的坐标为$(5-a，(3-a)^2)$或$(3-a，(1-a)^2)$，故AC的斜率$k_{AC}=A-2$，BC的斜率为$k_{BC}=3-a$或$1-a$。因AC⊥BC，故

$(a-2)(3-a)=-1$ 或 $(a-2)(1-a)=-1$

$\Leftrightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$或$a=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

故A点的坐标为$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}，\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$或$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}，\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$或$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}，\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$或$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}，\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$。

12-3-26　设直线 l 的方程为 $y=x+b$,点 A,B 的坐标分别为(x_1,y_1)，$(x_2，y_2)$。

由方程组$\begin{cases}y=x+b\\y^2=8x\end{cases}$消去y，得

$x^2+2(b-4)x+b^2=0$

当$\triangle=4(b-4)^2-4b^2=16(4-2b)>0$,即 $b<2$ 时,方程有两不等实根 x_1，x_2，且 $x_1+x_2=-2(b-4)$，$x_1x_2=b^2$，故

$$|AB|=\sqrt{1+1}|x_1-x_2|=8\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{16(4-2b)}=8\sqrt{5}\Leftrightarrow b=-3$$

从而$x_1=7+2\sqrt{10}$，$x_2=7-2\sqrt{10}$。所以，

$|AF|=x_1+2=9+2\sqrt{10}$，$|BF|=x_2+2=9-2\sqrt{10}$

在△AFB 中，由余弦定理得

$$\cos\angle AFB=\frac{|AF|^2+|BF|^2-|AB|^2}{2|AF|\cdot|BF|}=-\frac{39}{41}$$，故

$$\angle AFB=\pi-\arccos\frac{39}{41}$$

12-3-27　当 k=0 时，直线 l 为 y=3，显然抛物线上不存在关于 l 对称的两点。

当 k≠0 时，假设抛物线上存在关于 l 对称的两点 P，Q。设 P，Q 两点的坐标分别为 $P(a, a^2)$，$Q(b, b^2)(a\neq b)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=\dfrac{1}{k}\\ k\cdot\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a^2+b^2}{2}-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{1}{k}\\ ab=\dfrac{1-5k^2}{2k^2}\end{cases}$$

则以a，b为根的方程$x^2-\frac{1}{k}x+\frac{1-5k^2}{2k^2}=0$有两不等实根，故

$$\Delta=\frac{1}{k^2}-\frac{2-10k^2}{k^2}>0\Leftrightarrow k^2>\frac{1}{10}$$

所以，当$k^2\leq\frac{1}{10}$，即当$-\frac{\sqrt{10}}{10}\leq k\leq\frac{\sqrt{10}}{10}$，抛物线上不存在关于直线 l 对称的两点。

12-3-28　(1)设直线 l 的方程为 y=kx+3(k≠0)，点 P_1，P_2 的坐标为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，P_1P_2 的中点为 $M(x_0, y_0)$。因 l 是 P_1P_2 的垂直平分

线，则P_1P_2所在直线方程可设为$y=-\frac{1}{k}x+b$，即

x=bk-ky

将 x=bk-ky 代入 $y^2=4x$，得

$y^2+4ky-4bk=0$

则　$\triangle=16k^2+166k>0$　　　(i)

且 $y_1+y_2=-4k$，则 $y_0=-2k$，$x_0=bk+2k^2$。

又 M 在直线 l 上，则

$$-2k=bk^2+2k^3+3\Leftrightarrow bk=\frac{-(2k^3+2k+3)}{k}$$

代入(i)得

$$16k^2+16\cdot\frac{-(2k^3+2k+3)}{k}>0\Leftrightarrow\frac{k^3+2k+3}{k}<0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(k+1)(k^2-k+3)}{k}<0\Leftrightarrow -1<k<0$$

故直线l的倾斜角的范围为$\left(\frac{3\pi}{4}，\pi\right)$。

(2)由$y_0=-2k$，$x_0=\frac{y_0-3}{k}=-\frac{2k+3}{k}$消去参数k得$x_0y_0+2y_0-6=0$，这里$x_0=-2-\frac{3}{k}>-2+3=1$。

所以点 M 的轨迹方程为

xy+2y-6=0(x>1)

12-3-29　因点 M 在抛物线 C 上，故

$$-2p(1+4\sqrt{5})+16+2p=0\Leftrightarrow p=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

于是抛物线 C 的方程为

$$(y-4)^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}(x-1)$$

平移坐标轴，将原点移到O′(1，4)，平移公式为$\begin{cases}x=x'+1\\y=y'+4\end{cases}$。在新坐标系x′O′y′中，抛物线C方程$y'^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}x'$；A点的坐标为(-1，0)；直线l的新方程为$y'=kx'$。设A′的坐标为(a，b)，则

$$\begin{cases}\frac{b}{a+1}\cdot k=-1\\\frac{b}{2}=k\cdot\frac{a-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{k^2-1}{k^2+1}\\b=-\frac{2k}{k^2+1}\end{cases}$$

因A′在抛物线$y'^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}x'$上，所以

$$\left(-\frac{2k}{k^2+1}\right)^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{k^2-1}{k^2+1}\Leftrightarrow k^4-\sqrt{5}k^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow k=\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

12-3-30　设直线 l_1 的方程为 y=k(x+1)。依题设易知 k>0。

由方程组$\begin{cases}y=k(x+1)\\y^2=x\end{cases}$，得

$ky^2-y+k=0$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(i)

因为直线 l_1 与抛物线 $y^2=x$ 有两个交点,则方程(i)有两个不等的实根 y_1，y_2。所以$\triangle=1-4k^2>0$，即$0<k<\frac{1}{2}$。

设 PQ 的中点为 M(x，y)，则

$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{2k}$，$x=\frac{1-2k^2}{2k^2}$

假设l_2过点B，则有$k_{BM}=\frac{k-6k^2}{1-2k^2}$。又因为$l_1\perp l_2$，则$k_{BM}=-\frac{1}{k}$，故

$6k^3+k^2=1$ (ii)

但$0<k<\frac{1}{2}$，所以$6k^3+k^2<6\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=1$。故(ii)式不成立。所以$l_2$不过B点。

12-3-31 (1)设 Q 点的坐标为(x，y)，P 点的坐标为(x′，y′)。因A，Q关于P点对称，故$x'=\frac{x+a}{2}$，$y'=\frac{y}{2}$。又因为P点在抛物线$y=x^2$上，则$\frac{y}{2}=\left(\frac{x+a}{2}\right)^2$，即$y=\frac{1}{2}(x+a)^2$此即为Q点的轨迹方程。

(2)由方程$\begin{cases}y=x^2\\ y=\frac{1}{2}(x+a)^2\end{cases}$消去y，得$x^2-2ax-a^2=0$。据韦达定理知

$x_1+x_2=2a$，$x_1x_2=-a^2$ (i)

由题设知 AB⊥AC，则

$y_1y_2+(x_1-a)(x_2-a)=0$

又$y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$。所以

$x_1^2x_2^2+x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2=0$

将(i)代入上式，得$a^4=2a^2$。但$a\neq 0$，所以$a=\pm\sqrt{2}$。

12-3-32 设弦的两端点为 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，线段 AB 的中点为C(x，y)，则$y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，两式相减得

$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2p(x_1-x_2)$

当$x_1\neq x_2$时，$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}$。因$y_1+y_2=2y$，所以，$k_{AB}=\frac{p}{y}$。又A，M，C，B共线，故$k_{AB}=k_{MC}=\frac{y-b}{x-a}$，所以

$\frac{y-b}{x-a}=\frac{p}{y}\Leftrightarrow y^2-by-px+pa=0$

当 $x_1=x_2$ 时，AB⊥x 轴，则 C 的坐标(a，0)适合上述方程。

故 C 点轨迹方程为 $y^2-by-px+pa=0$。

12-3-33 设 P，Q，M 三点的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$(x，y)。

因 OP⊥OQ，则 $x_1x_2+y_1y_2=0$

又$y_1=ax_1^2$，$y_2=ax_2^2$，则$y_1y_2=a^2x_1^2x_2^2$，所以

$x_1x_2+a^2x_1^2x_2^2=0\Leftrightarrow x_1x_2=-\frac{1}{a^2}$

又$y_1+y_2=a(x_1^2+x_2^2)=a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]$，且$y_1+y_2=2y$，$x_1+x_2=2x$，所以

$$2y=a\left(4x^2+\frac{2}{a^2}\right)\Leftrightarrow y=2ax^2+\frac{1}{a}$$

此即为点 M 的轨迹方程。

12-3-34　抛物线 C 的焦点为 F(1，0)，准线方程为 x=-1。设 P 点的坐标为(x，y)，B 点的坐标为(x_0，y_0)，是椭圆中心为(x_0，0)。因 P 是 FB 的中点，故 $x_0=2x-1$，$y_0=2y$。由题设，椭圆短半轴长为 $b=|y_0|$，半焦距$c=x_0-1$。因$x=-1$为椭圆的准线，故$\frac{a^2}{c}=x_0+1$，所以

$$a^2=c(x_0+1)=(x_0-1)(x_0+1)=x_0^2-1$$

所以　$a^2=(2x-1)^2-1=4x^2-4x$

又$a^2=b^2+c^2=y_0^2+(x_0-1)^2=4y^2+(2x-2)^2$，所以

$$4x^2-4x=4y^2+(2x-2)^2\Leftrightarrow y^2=x-1$$

因 $x_0>1$，则 $x>1$，故 P 点轨迹方程为

$y^2=x-1(x>1)$

12-3-35　(1)设 A，B，M 的坐标分别为(x_1，y_1)，(x_2，y_2)，(x，y)。因圆在 y 轴右侧，且 A，B 在 x 轴上方，则 x_1，x_2，y_1，y_2 均为正数。

由方程组$\begin{cases}y^2=p(x+2)\\(x-3)^2+y^2=9\end{cases}$消去y，得

$x^2-(6-p)x+2p=0$

此方程有两不相等的实根，故其判别式为正，即

$$\Delta=(6-p)^2-8p=p^2-20p+36>0\Leftrightarrow p>18\text{或}p<2$$

由韦达定理知

$x_1+x_2=6-p>0$，$x_1x_2=2p>0$

故$0<p<2$，$x=\frac{x_1+x_2}{2}\in(2，3)$。又$y_1^2=p(x_1+2)$，$y_2^2=p(x_2+2)$，故

$$y_1+y_2=\sqrt{(y_1+y_2)^2}=\sqrt{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2}$$
$$=\sqrt{p(x_1+x_2+4)+2\sqrt{p^2(x_1+2)(x_2+2)}}=\sqrt{18p-p^2}$$

所以，点 M 的轨迹的参数方程为

$$\begin{cases}x=\frac{6-p}{2}\\y=\frac{1}{2}\sqrt{18p-p^2}\end{cases}$$

消去参数 p，得 M 的轨迹方程为

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{81}{4}\quad(2<x<3\text{，且}y>0)$$

所以，M点的轨迹为圆$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{81}{4}$在$2<x<3$且$y>0$内的一段弧。

(2)由(1)知点M的坐标为$\left(\frac{6-p}{2},\ \frac{\sqrt{18p-p^2}}{2}\right)$。当点M在直线$y=x$上时，

$$\frac{6-p}{2}=\frac{\sqrt{18p-p^2}}{2}\Leftrightarrow p=\frac{15\pm3\sqrt{17}}{2}$$

又$0<p<2$，则$p=\frac{15-3\sqrt{17}}{2}$。

12-3-36　设三点 A，B，Q 的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x,y)，则

$y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$

因为|AB|=l。所以，

$l^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1-x_2)^2+(x_1^2-x_2^2)^2$

$=(x_1-x_2)^2[(x_1+x_2)^2+1]$

而$(x_1-x_2)^2=2(x_1^2+x_2^2)-(x_1+x_2)^2$，且$x_1+x_2=2x$，$x_1^2+x_2^2=y_1+y_2=2y$，所以，

$(4y-4x^2)(4x^2+1)=l^2$

此即为所求点 Q 的轨迹方程。

因为 Q(x，y)在抛物线内部，所以 $y>x^2$，所以

$(4x^2+1)(4y-4x^2)\geq2\sqrt{(4x^2+1)(4y-4x^2)}=2l$

所以，$y\geq\frac{2l-1}{4}$。等号在$4x^2+1=4y-4x^2$时成立。因为$l\geq1$，所以，$x=\pm\frac{\sqrt{l-1}}{2}$时，$y_{min}=\frac{2l-1}{4}$。即Q点坐标为$\left(\pm\frac{\sqrt{l-1}}{2},\ \frac{2l-1}{4}\right)$时，Q到x轴距离最近。

12-3-37　(1)设 P_1，P_2，M 的坐标分别为$(x_1,y_1)(x_2,y_2)(x,y)$。

将 y=mx 代入 $y=x^2-2x+2$，得

$x^2-(2+m)x+2=0$　　　　　　　　　　(i)

当$\triangle=(2+m)^2-8>0$，即$m<-2\sqrt{2}-2$或$m>2\sqrt{2}-2$时，方程(i)有两不等实根x_1，x_2，且$x_1+x_2=2+m$，故

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2+m}{2}\Leftrightarrow m=2x-2$$

代入 y=mx 中，得 M 点轨迹方程为 y=x(2x-2)即

$y=2x^2-2x\quad(|x|>\sqrt{2})$

(2)设 Q 点的坐标为(x',y')，由(1)知 $x_1x_2=2$，则 x_1，x_2 同号，因为

$|OP_1|=\sqrt{1+m^2}|x_1|$，$|OP_2|=\sqrt{1+m^2}|x_2|$，$|OQ|=\sqrt{1+m^2}|x'|$又$\frac{1}{|OP_1|}$

$+\frac{1}{|OP_2|}=\frac{2}{|OQ|}$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}|x_1|}+\frac{1}{\sqrt{1+m^2}|x_2|}=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}|x'|}$$

而$x_1x_2=2$，所以$|x_1|+|x_2|=\frac{4}{|x'|}$。

因 x_1，x_2，x' 同号，所以，

$$x_1+x_2=\frac{4}{x'}\Leftrightarrow x'=\frac{4}{x_1+x_2}$$

因 $x_1+x_2=2+m$，所以，

$$x'=\frac{4}{2+m}，y'=mx'=\frac{4m}{m+2}$$

消去参数 m，得 Q 点的轨迹方程

$y'=4-2x'$

因为$m+2>2\sqrt{2}$或$m+2<-2\sqrt{2}$，则$|x'|<\sqrt{2}$。

故所求 Q 点的轨迹方程为

$y=-2x+4(0<|x|<\sqrt{2})$

12-3-38　设点 P，B，C 的坐标为$(x_0，y_0)(x_1，y_1)(x_2，y_2)$，△POA 的重心 Q 的坐标为$(x，y)$。显然 y_0，y_1，y_2 均匀正。

设$\frac{y_1}{y_2}=\lambda$，则$y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}$。

依题设，可设 l 的方程为

$$y=k(x-2)\quad (k\neq 0) \qquad \text{(i)}$$

由(i)得$x=\frac{y+2k}{k}$，代入$y=x^2+2$，得

$$y=\frac{(y+2k)^2}{k^2}+2\Leftrightarrow y^2+(4k-k^2)y+6k^2=0 \qquad \text{(ii)}$$

据韦达定理有 $y_1+y_2=k^2-4k$，$y_1y_2=6k^2$，则

$$\frac{2}{y_0}=\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{k-4}{6k} \qquad \text{(iii)}$$

又由(i)知$k=\frac{y_0}{x_0-2}$，代入(iii)得

$$4x_0-y_0+4=0 \qquad \text{(iv)}$$

又因为 Q 为△POA 的重心，则

又B，C在椭圆上，故$\rho_2=\dfrac{10}{2-\sqrt{2}\cos\theta}$，$\rho_3=\dfrac{10}{2+\sqrt{2}\cos\theta}$，从而

$$|BC|=\rho_2+\rho_3=\frac{20}{2-\cos^2\theta}$$

将(v)代入(iv)得 Q 点的坐标适合方程

$$12x-3y-4=0 \qquad \text{(vi)}$$

又要使方程(ii)有两不等实根，则须

$$\triangle=(4k-k^2)^2-24k^2>0$$

$$\Leftrightarrow k<4-2\sqrt{6}\text{或}k>4+2\sqrt{6} \qquad \text{(vii)}$$

由(iii)知，$y_0=\dfrac{12k}{k-4}$；由(v)得，$y=\dfrac{4k}{k-4}=4+\dfrac{16}{k-4}$。

由(vii)得$4-\dfrac{4}{3}\sqrt{6}<y<4+\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，且$y\neq 4$。

故△POA的重心Q的轨迹方程为直线$12x-3y-4=0$在$y\in\left(4-\dfrac{4}{3}\sqrt{6}，4+\dfrac{4}{3}\sqrt{6}\right)$内的一段，并除去点$\left(\dfrac{4}{3}，4\right)$。

12-3-39　设 P 的坐标为(x，y)。由题设知焦点 F 的坐标为 F(2，0)。故$k=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x+2|}$，且$y^2=8x(x\geq 0，k\geq 0)$。所以

$$k^2(x+2)^2=x^2+8x$$

$$\Leftrightarrow (k^2-1)x^2+4(k^2-2)x+4k^2=0$$

$k=1$时，$x=1$，$y=\pm 2\sqrt{2}$，即P的坐标为$(1，\pm 2\sqrt{2})$。

k≥0 且 k≠1 时，方程的判别式应为非负数，即

$$\Delta=16(k^2-2)^2-16k^2(k^2-1)\geq 0\Leftrightarrow 0\leq k\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

所以，$k_{max}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，此时$x=4$，$y=\pm 4\sqrt{2}$，此时P的坐标为$(4，\pm 4\sqrt{2})$。

12-3-40 设AB所在直线的方程为$ky=x-\dfrac{p}{2}$，即

$$x=ky+\frac{p}{2}$$

代入 $y^2=2px$，得

$$y^2-2pky-p^2=0$$

其判别式为$\triangle=4p^2k^2+4p^2$，故

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{4p^2k^2+4p^2}=(1+k^2)\cdot 2p$$

所以，当$k=0$时，$|AB|_{min}=2p$。此时AB所在直线的方程为$x=\dfrac{p}{2}$。

12-3-41　(1)设 B 点的坐标为(0，t)，则 C 点的坐标为(0，t-2)，其中 t∈[-1，3]。BC 的垂直平分线为 y=t-1。

又设 $P(x，y)$ 为 AB 的垂直平分线上一点，则 $|PA|=|PB|$，即

$$(x-3)^2+y^2=x^2+(y-t)^2 \quad \Leftrightarrow 6x-2ty+t^2-9=0$$

由 $\begin{cases} y=t-1 \\ 6x-2ty+t^2-9=0 \end{cases}$ 消去 t，得 P 点的轨迹方程为

$y^2=6x-8(-2\le y\le 2)$

(2)设 E，F 的坐标分别为 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$。

由方程组 $\begin{cases} y=3x+b \\ y^2=6x-8 \end{cases}$ 消去 x，得

$y^2-2y+2b+8=0$ (i)

因 $y\in[-2，2]$，则方程(i)在 $[-2，2]$ 上应有两不等实根。

设 $f(y)=y^2-2y+2b+8$，其图象的对称轴为 $y=1$，则须

$$\begin{cases} \Delta=4-4(2b+8)>0 \\ f(-2)=16+2b\ge 0 \Leftrightarrow -4\le b<-\dfrac{7}{2} \\ f(2)=2b+8\ge 0 \end{cases}$$

原点 O 到直线 $l：3x-y+b=0$ 距离为 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{10}}$。

又由(i)知 $y_1+y_2=2$，$y_1y_2=2b+8$，故

$$|EF|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}|y_1-y_2|$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot 2\sqrt{-2b-7}(-4\le b<-\frac{7}{2})$$

于是，有

$$\frac{|EF|}{d}=\frac{20}{3}\cdot\frac{\sqrt{-2b-7}}{|b|}$$

$$=\frac{20}{3}\sqrt{-7\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{7}\right)^2+\frac{1}{7}} \quad (-4\le b<-\frac{7}{2})$$

故当 $b=-4$ 即 $\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{4}$ 时。$\left(\dfrac{|EF|}{d}\right)_{max}=\dfrac{5}{3}$。

12-3-42　以 AT 为中点 O 为坐标原点，OA 为 x 轴正向，建立直角坐标系，则半圆圆心为 $(a+R，0)$。圆的方程为

$(x-a-R)^2+y^2=R^2$ (i)

又因为 $d_1=|MA|$，$d_2=|NA|$，所以点 M，N 在以 A 为焦点、l 为准线、焦参数 $p=2a$ 的抛物线上，方程为

$y^2=4ax$ (ii)

将(ii)代入(i)，得

$x^2+2(a-R)x+a^2+2aR=0$

其两根 x_1，x_2 分别为 M，N 的横坐标，则 $x_1+x_2=2R-2a$。

又$|MA|=x_1+a$，$|NA|=x_2+a$。所以

$|MA|+|NA|=x_1+x_2+2a=2R-2a+2a=2R$

12-3-43　(1)将 $y^2=x+7$ 代入 $x^2+y^2=5$ 中，得 $x^2+x+2=0$。因$\triangle=1-8<0$，方程无实根。所以圆与抛物线无交点。

(2)因 l 与 x 轴不垂直，可设 l 的方程为

$y=k(x-a)$

将其代入 C_1 方程中，得

$k^2x^2-(2ak^2+1)x+(a^2k^2-7)=0$

当$\triangle=(2ak^2+1)^2-4k^2(a^2k^2-7)>0$，即$(4a+28)k^2+1>0$ 时，l 与 C_1 有两交

点A，D，且线段AD中点的横坐标为$\frac{2ak^2+1}{2k^2}$。

又将 $y=k(x-a)$代入 C_2 方程中，得

$(k^2+1)x^2-2ak^2x+(a^2k^2-5)=0$

当$\triangle=4a^2k^4-4(k^2+1)(a^2k^2-5)>0$，即 $a^2k^2-5k^2-5<0$ 时，l_1 与 C_2 有两交点

B，C。线段BC的中点的横坐标为$\frac{ak^2}{k^2+1}$。

由题设知$|AB|=|CD|$，则 AD，BC 的中点重合，所以

$$\frac{2ak^2+1}{2k^2}=\frac{ak^2}{k^2+1}\Leftrightarrow k^2=-\frac{1}{2a+1}$$

于是
$$\begin{cases}k^2=-\frac{1}{2a+1}\\(4a+28)k^2+1>0\Leftrightarrow -10<a<-\frac{1}{2}\\(a^2-5)k^2-5<0\end{cases}$$

所以，a的取值范围为$\left(-10,\ -\frac{1}{2}\right)$。

12-3-44　圆 $x^2+y^2-4x=0$ 的圆心为(2，0)，半径 r=2。

设抛物线方程为 $y^2=2px$。因焦点为 F(2，0)，故 p=4，所以抛物线方程为

$y^2=8x$

设 A，D 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$。

由题设知，直线 l 的方程为 $y=2(x-2)$。代入 $y^2=8x$ 中，得

$x^2-6x+4=0$

依韦达定理，有 $x_1+x_2=6$，故

$|AD|=|AF|+|DF|=x_1+x_2+p=6+4=10$

又 BC 为圆的直径，所以$|BC|=4$，则

$|AB|+|CD|=10-4=6$

12-3-45 (1)解方程组$\begin{cases}x^2=4y\\x^2+y^2=32\end{cases}$得$\begin{cases}x=-4\\y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=4\\y=4\end{cases}$，于是A的坐标为(-4，4)，B的坐标为(4，4)，从而易知C的坐标为(0，$4\sqrt{2}$)。

(2)抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为 $y=-1$。由抛物线定义得

$d=(y_1+1)+(y_2+1)=y_1+y_2+2$　　　　(i)

设直线l方程为$y=kx+b$。因l与圆相切，则$\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{32}$，所以

$k^2=\frac{b^2}{32}-1$　　　　(ii)

当 k=0 时，l 过 C 点且与 x 轴平行，则

$y_1=y_2=4\sqrt{2}$，$d=8\sqrt{2}+2$

当 $k\neq0$ 时，将 $y=kx+b$ 代入 $x^2=4y$，得

$y^2-2(b+2k^2)y+b^2=0$

据韦达定理，有

$y_1+y_2=2b+4k^2$　　　　(iii)

由(i)，(ii)，(iii)得

$$d=2b+\frac{b^2}{8}-2=\frac{1}{8}(b+8)^2-10$$

因为直线l与圆相切且切点在$\overset{\frown}{ACB}$上，所以当切点为C时，b最小，此时$b=4\sqrt{2}$。

当切点为 A(或 B)时，b 最大。此时由

$\begin{cases}4=-4k+b\\k^2=\frac{b^2}{32}-1\end{cases}$ 及 $\begin{cases}4=4k+b\\k^2=\frac{b^2}{32}-1\end{cases}$

解得 b=8，k=±1。

所以，$4\sqrt{2}\leq b\leq 8$。则当$b=8$时，d最大。$d_{max}=22$。

此时，直线 l 方程为

x-y+8=0 或 x+y-8=0

12-3-46 设内接三角形为△OAB，因抛物线的焦点$F\left(\frac{p}{2}，0\right)$为△OAB 的垂心，故 x 轴垂直平分 AB 边。

设 A 点的坐标为$(x_1，y_1)(y_1>0)$，则 B 的坐标为$(x_1，-y_1)$。

设△OAB 外心为(a，0)，则半径 r=a。

由于 AF⊥OB，则

$$\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}\cdot\frac{-y_1}{x_1}=-1\Leftrightarrow y_1^2=x_1^2-\frac{p}{2}x_1$$

又$y_1^2 = 2px_1$，所以$2px_1 = x_1^2 - \frac{p}{2}x_1$。而$x_1 \neq 0$。所以，$x_1 = \frac{5}{2}p$。则

$y_1 = \sqrt{2px_1} = \sqrt{5}p$。所以，A的坐标为$\left(\frac{5p}{2}，\sqrt{5}p\right)$。故

$$\left(\frac{5}{2}p - a\right)^2 + (\sqrt{5}p)^2 = a^2 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}p$$

故△OAB 的外接圆的方程为

$$\left(x - \frac{9}{4}p\right)^2 + y^2 = \frac{81}{16}p^2$$

12-3-47 设P（x_0，y_0）为抛物线$y = x^2 - 2$上任一点，则$y_0 = x_0^2 - 2$。因

$$|OP| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{y_0^2 + y_0 + 2} > 1$$

所以，圆在抛物线内部。

设 $P_1(x_1，y_1)(x_1 \neq \pm 1)$为抛物线上一点。过 P_1 作圆 C_1 的两切线，交抛物线于 P_2，P_3。设 P_2，P_3 的坐标分别为$(x_2，y_2)$，$(x_3，y_3)$，则

$$y_1 = x_1^2 - 2，y_2 = x_2^2 - 2，y_3 = x_3^2 - 2$$

直线P_1P_2的方程为$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$。因$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2$，所以

P_1P_2的方程为

$$y=(x_1+x_2)x-x_1x_2-2$$

因直线 P_1P_2 与圆 C_1 相切，则

$$\frac{|x_1x_2 + 2|}{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow (x_1^2 - 1)x_2^2 + 2x_1x_2 + 3 - x_1^2 = 0$$

同理，因 P_1P_3 与圆 C_1 相切，则

$$(x_1^2 - 1)x_3^2 + 2x_1x_3 + 3 - x_1^2 = 0$$

所以，x_2 与 x_3 为方程

$$(x_1^2 - 1)x^2 + 2x_1x + 3 - x_1^2 = 0$$

的两根。故

$$x_2 + x_3 = -\frac{2x_1}{x_1^2 - 1}，x_2x_3 = \frac{3 - x_1^2}{x_1^2 - 1}$$

同理可得 P_2P_3 的方程为

$$y=(x_2+x_3)x-x_2x_3-2$$

所以，0 到 P_2P_3 的距离

$$d = \frac{|x_2x_3 + 2|}{\sqrt{(x_2 + x_3)^2 + 1}} = \left|\frac{\dfrac{1 + x_1^2}{x_1^2 - 1}}{\dfrac{1 + x_1^2}{x_1^2 - 1}}\right| = 1$$

所以，直线 P_2P_3 与圆相切。

故存在符合条件的△$P_1P_2P_3$。

12-3-48 将$y^2=\frac{1}{2}x$代入椭圆方程，消去y，得

$x^2-(2a-1)x+a^2-2=0$ (i)

因$y^2=\frac{1}{2}x\geq 0$，则要使两曲线有公共点，方程(i)至少应有一个非负实数根。而$\triangle=(2a-1)^2-4(a^2-2)=9-4a$，故应有

$$\begin{cases}9-4a\geq 0\\ a^2-2>0\\ 2a-1>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}9-4a\geq 0\\ a^2-2\leq 0\end{cases}$$

解得 $-\sqrt{2}\leq a\leq\frac{9}{4}$

12-3-49 由抛物线定义知，椭圆上符合条件的点必在以 A 为焦点，l 为准线的抛物线上。

设抛物线方程为 $y^2=2px$，则椭圆上存在四个不同的符合条件的点的充要条件是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\left[x-\left(2+\dfrac{p}{2}\right)\right]^2}{4}+y^2=1\\ y^2=2px\end{cases}$$

有四个不同的实数解。消去 y，整理得

$$x^2+(7p-4)x+\frac{p^2}{4}+2p=0$$

因 $y^2=2px\geq 0$，则上面的方程应有两个不等的正实根，故

$$\begin{cases}\Delta=(7p-4)^2-4\left(\dfrac{p^2}{4}+2p\right)>0\\ \dfrac{p^2}{4}+2p>0\\ 7p-4<0\\ p>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<p<\frac{1}{3}$$

12-3-50 (1)双曲线E的半焦距$c=\sqrt{3}m$。右焦点F的坐标为$(\sqrt{3}m, 0)$，则抛物线方程为

$$y^2=4\sqrt{3}mx$$

由方程组$\begin{cases}y^2=4\sqrt{3}mx\\ 2x^2-y^2=2m^2\end{cases}$消去y，得

$$2x^2-4\sqrt{3}mx-2m^2=0$$

其判别式$\triangle=48m^2+16m^2=64m^2>0$ 恒成立，故上面的方程有一正根，则两

曲线总有两个不同的交点。

(2)设直线l的方程为$ky = x - \sqrt{3}m$，即$x = ky + \sqrt{3}m$。将其代入抛物线的方程得

$$y^2 - 4\sqrt{3}mky - 12m^2 = 0$$

易证其判别式△恒正，故方程有两不等实根 y_1，y_2，且由韦达定理知

$$y_1 + y_2 = 4\sqrt{3}mk，y_1y_2 = -12m^2$$

故$|y_1 - y_2| = \sqrt{48m^2(1+k^2)}$，所以

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}|OF| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}m \cdot 4\sqrt{3}m\sqrt{1+k^2} = 6$$

于是$m^2\sqrt{1+k^2} = 1$，而$k^2 \geq 0$，故$\sqrt{1+k^2} \geq 1$，所以$m^2 \leq 1$，从而$0 < m \leq 1$。

第十三部分 参数方程与极坐标

(一)参数方程

13-1-1 C 两条射线为 y-2(x≥2)或 y=2(x≤-2)。

13-1-2 D $\mathrm{tg}\theta=\mathrm{tg}(\alpha+\frac{3\pi}{2})=\mathrm{tg}(\alpha+\frac{\pi}{2})$

13-1-3 B $\begin{cases}x=3+3\cos\varphi\\y=-1+5\sin\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

故椭圆中 a=5，b=3，c=4，中心为(3，-1)，两焦点的坐标为(3，3)，(3，-5)。

13-1-4 双曲线 $x^2-y^2=1$ 题设抛物线的方程可写成 $y=(x-\sec\alpha)^2+\mathrm{tg}\alpha$

则顶点轨迹的参数方程为$\begin{cases}x=\sec\alpha\\y=\mathrm{tg}\alpha\end{cases}$。消去$\alpha$得轨迹普通方程为$x^2-y^2=1$。

13-1-5 $x^2+y^2=1$ 由已知$\begin{cases}x=\cos\omega t\\y=\sin\omega t\end{cases}$，则Q点轨迹方程为

$$\begin{cases}x'=-2xy=-\sin2\omega t\\y'=y^2-x^2=-\cos2\omega t\end{cases}$$

消去参数 t，得 $x'^2+y'^2=1$。所以 Q 点运动轨迹仍为单位圆。

13-1-6 $7\sqrt{2}$ 将$\begin{cases}x=4+t\\y=-1-t\end{cases}$代入圆方程$(x+3)^2+(y+1)^2=25$中得

$t^2+7t+12=0\Leftrightarrow t_1=-3，t_2=-4$

故

$|AP|+|BP|=\sqrt{2}(|t_1|+|t_2|)=7\sqrt{2}$

13-1-7 $\left(\frac{17}{5}，\frac{21}{5}\right)，\left(-\frac{7}{5}，-\frac{11}{5}\right)$ 由$|PQ|=\sqrt{3^2+4^2}|t|=4$得$t=\pm\frac{4}{5}$，

代入标准方程得Q点的坐标为：$\left(\frac{17}{5}，\frac{21}{5}\right)$或$\left(-\frac{7}{5}，-\frac{11}{5}\right)$。

13-1-8

(1)直线 x+y=1；(2)线段 x+y=1(|x|≤1)；

(3)直线 x+y=1；(4)射线 x+y=1(x≤1)；

(5)线段 x+y=1(0≤x≤1)。

13-1-9

$(1)y=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

$(2)\frac{(y+1)^2}{8}-\frac{(x+1)^2}{8}=1$

$(3)y^2=-8(x-2)$

13-1-10 双曲线右焦点为 F(5，0)。由题设知弦 AB 所在直线的参

数方程为

$$\begin{cases} x = 5 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} (t\text{为参数})$$

代入双曲线方程中得

$$7t^2 + 160\sqrt{2}t + 512 = 0$$

A，B两点对应的参数t_1，t_2为此方程的两根，且$t_1 + t_2 = -\dfrac{160\sqrt{2}}{7}$。因C为AB的中点，故

$$|CF| = |t_c| = \left|\frac{t_1 + t_2}{2}\right| = \frac{80\sqrt{2}}{7}$$

13-1-11 把直线l的方程化为$\begin{cases} x = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}t' \\ y = 4 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t' \end{cases}$，代入抛物线C的方程$y^2 = 4x$中，整理得

$$t'^2 + 12\sqrt{2}t' + 16 = 0$$

P，Q两点对应的参数t'_1，t'_2为此方程二根，且

$$t'_1 + t'_2 = -12\sqrt{2} < 0，t'_1 t'_2 = 16 > 0$$

故t'_1，t'_2均为负数，所以

$$|PA| + |QA| = -t'_1 - t'_2 = -(t'_1 + t'_2) = 12\sqrt{2}$$

13-1-12 设直线l的方程为$\begin{cases} x = 3 + t\cos\alpha \\ y = 2 + t\sin\alpha \end{cases}$(t为参数)。将其代入椭圆方程，整理得

$$(16\cos^2\alpha + 25\sin^2\alpha)t^2 + 2(16\cos\alpha + 25\sin\alpha)t - 359 = 0$$

(1)因M为弦的中点，则$t_1+t_2=0$，即

$$16\cos\alpha + 25\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha = -\frac{16}{25}$$

所以直线l的方程为

$$y - 2 = -\frac{16}{25}(x - 3)$$

(2)设弦AB的中点P对应参数为t，则$t = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$，所以

$$|PM| = |t| = \frac{|t_1 + t_2|}{2} = 1$$

因$0° \le \alpha \le 90°$，则

$$\frac{16\cos\alpha + 25\sin\alpha}{16\cos^2\alpha + 25\sin^2\alpha} = 1 \Leftrightarrow 16\cos\alpha + 25\sin\alpha = 16\cos^2\alpha + 25\sin^2\alpha$$

因为$\cos\alpha \ge \cos^2\alpha$，$\sin\alpha \ge \sin^2\alpha$，故$\cos\alpha = \cos^2\alpha$且$\sin\alpha = \sin^2$

α，所以α=0°或90°。

故直线 l 的方程为 x=3 或 y=2。

13-1-13　抛物线焦点为 F(1，0)。

设直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}(t\text{为参数})$$

代入抛物线方程 $y^2=4x$ 中，整理得

$t^2\sin^2\alpha-4t\cos\alpha-4=0$

这里 sinα≠0，方程的判别式$\triangle_1=16\cos^2\alpha+16\sin^2 a=16>0$，故方程有两不等实根 t_1，t_2，则

$$|MN|=|t_1-t_2|=\frac{4}{\sin^2\alpha}$$

由题设

$$\frac{4}{\sin^2\alpha}\le 8 \qquad (i)$$

将 l 的方程代入椭圆方程得

$(2+\cos^2\alpha)t^2+6t\cos\alpha+1=0$

因直线 l 与椭圆有公共点，故这方程的判别式非负，即

$$\triangle_2=36\cos^2\alpha-8-4\cos^2\alpha=24-32\sin^2\alpha\ge \qquad (ii)$$

由(i)，(ii)得$\frac{1}{2}\le\sin^2\alpha\le\frac{3}{4}$，但$\sin\alpha>0$，故

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\alpha\le\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4}\right]$$

13-1-14　设 OP 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}(t\text{为参数}) \qquad (i)$$

将(i)代入椭圆方程，解得

$$|OP|^2=t^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$$

又因 AQ 过 A(-a，0)，且 OP∥AQ，故 AQ 的方程为

$$\begin{cases} x = -a + t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}(t\text{为参数}) \qquad (ii)$$

将(ii)代入椭圆方程，解得

$$|AQ|=\left|\frac{2ab^2\cos\alpha}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}\right|$$

在(ii)中，令$x=0$，得$|RA|=\left|\frac{a}{\cos\alpha}\right|$。故

$$\frac{1}{2}|AQ|\cdot|AR|=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}=|OP|^2$$

13-1-15　设 PQ 所在直线的方程为

$$\begin{cases} x = c + t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases} (t\text{为参数})$$

将其代入双曲线方程，整理得

$$(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha)t^2 + 2b^2ct\cos\alpha + b^4 = 0$$

当 $b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha \neq 0$，即 $tg\alpha \neq \pm\frac{b}{a}$ 时，方程有两不等实根 t_1，t_2，它们分别为 P，Q 对应的参数。因 P，Q 在右支上，则 t_1 与 t_2 异号，故有

所以 $$\frac{1}{|PF_2|} + \frac{1}{|QF_2|} = \frac{\sqrt{4b^4c^2\cos^2\alpha - 4b^4(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha)}}{b^4}$$

$$= \frac{2b^2\sqrt{a^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}}{b^4} = \frac{2a}{b^2}$$

13-1-16　设直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} (t\text{为参数})$$

将其代入 $y^2=2px$ 中，得

$$t^2 - 2\sqrt{2}(p+4)t + 8(p+4) = 0$$

当△$=8(p+4)^2-32(p+4)=8p(p+4)>0$，即 $p>0$ 或 $p<-4$ 时，方程有两不等实根 t_1，t_2，由参数 t 几何意义知，

$$|AP_1|=|t_1|，|AP_2|=|t_2|，|P_1P_2|=|t_1-t_2|$$

因 $|AP_1|\cdot|AP_2|=|P_1P_2|^2$，所以 $|t_1t_2|=|t_1-t_2|^2$，由韦达定理知

$$t_1t_2 = 8(p+4)，|t_1 - t_2| = \sqrt{8p(p+4)}$$

所以　$8p(p+4) = 8|p+4| \Leftrightarrow p = 1$

故所求抛物线方程为 $y^2=2x$。

13-1-17　半圆 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\alpha \end{cases} (0\leq\theta\leq\pi)$$

因 M，N 在半圆上，则设 M，N 两点的坐标分别为

M$(\cos\alpha，\sin\alpha)$，N$(\cos\beta，\sin\beta)(\alpha\neq\beta)$

又 M、N 在直线 l 上，故

$$\begin{cases} A\cos\alpha + B\sin\alpha + C = 0 \\ A\cos\beta + B\cos\beta + C = 0 \end{cases}$$

两式相减得

$$A(\cos\alpha - \cos\beta) + B(\sin\alpha - \sin\beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2A\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+2B\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin a\frac{\alpha-\beta}{2}\left(A\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-B\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$$

因为α、β $\in[0,\pi]$，且α≠β，α + β≠π，则$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq 0$，$A\neq 0$，所以$tg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{B}{A}$，故

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\cdot\frac{B}{A}}{1+\left(\frac{B}{A}\right)^2}=\frac{2AB}{A^2+B^2}$$

13-1-18 将l的方程$\begin{cases}x=t\\y=b+mt\end{cases}$化为普通方程，得

y=mx+b

将曲线 E 的参数方程代入 y=mx+b 中，得

sinθ-macosθ=m+b

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+m^2a^2}\sin(\theta-\text{arctg}ma)=m+b$$

因$|\sin(\theta-\text{arctg}ma)|\leq 1$，且l与E对m∈R恒有公共点，则$\sqrt{1+m^2a^2}\geq |m+b|$对 m∈R 恒成立，即

$(a^2-1)m^2-2bm+1-b^2\geq 0$

对 m∈R 恒成立。

(i)若|a|=1，则 $2bm\leq 1-b^2$ 对 m∈R 成立，所以 b=0。

(ii)|a|≠1，则

$$\begin{cases}a^2-1>0\\\Delta=4b^2-4(1-b^2)(a^2-1)\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|a|>1\\b^2\leq\frac{a^2-1}{a^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|>1\\-\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\leq b\leq\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\end{cases}$$

综上所述，a，b满足条件为$|a|\geq 1$且$|b|\leq\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$。

13-1-19 将 C_2 化为普通方程，得

$$y^2=6(x-\frac{3}{2})$$

将 C_1 的方程代入上式，整理得

$\cos^2\theta+4\cos\theta+2m-4=0$

由于 C_1 与 C_2 有交点，则此方程有解。

当△=16-4(2m-4)=8(4-m)＞0，即 m＜4 时，

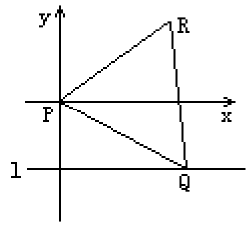
$$\cos\theta=-2\pm\sqrt{2(4-m)}$$

因为 $-1\leq\cos\theta\leq 1$，显然 $\cos\theta=-2-\sqrt{2(4-m)}$ 不合，故

$$\begin{cases}-1\leq -2+\sqrt{2(4-m)}\leq 1\\ m<4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{7}{2}$$

13-1-20　以 P 为坐标原点，以平行于直线 l 的直线为 x 轴，建立如右图所示的平面直角坐标系。



设点 Q，R 的坐标分别为 (x', y')，(x, y)。$\angle xPR=\theta$，则

$$\begin{cases}x=|PR|\cos\theta\\ y=|PR|\sin\theta\end{cases}\qquad\text{(i)}$$

又 $\angle RPQ=60°$，$|PR|=|PQ|$，因△RPQ 为正三角形，则

$y'=|PR|\sin(\theta-60°)$

另一方面 $y'=-a$，所以 $|PR|\sin(\theta-60°)=-a$，即

$$|PR|\sin\theta\cdot\frac{1}{2}-|PR|\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-a\qquad\text{(ii)}$$

将(i)代入(ii)得 $\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}x=-a$，即

$$\sqrt{3}x-y-2a=0$$

13－1－21　设直线 $y=mx$ 倾角为 θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$。则其参数方程为

$$\begin{cases}x=t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}\ (t\text{为参数})\qquad\text{(i)}$$

将(i)代入抛物线方程得

$$t^2\cos^2\theta-(2\cos\theta+\sin\theta)t+2=0\qquad\text{(ii)}$$

当 $\triangle=(2\cos\theta+\sin\theta)^2-8\cos^2\theta\geq 0$，即 $\mathrm{tg}\theta\geq 2(\sqrt{2}-1)$ 时，方程(ii)有两实根 t_1，t_2，因 θ 为锐角，则 t_1，t_2 为正根，则 $|OP_1|=t_1$，$|OP_2|=t_2$。

设 Q 点的坐标为 (x, y)，对应参数为 t_0，则 $|OQ|=t_0$。

由题设知 $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{2}{t_0}$，所以，$t_0=\frac{2t_1t_2}{t_1+t_2}=\frac{4}{2\cos\theta+\sin\theta}$，故

$$\begin{cases}x=t_0\cos\theta=\dfrac{4\cos\theta}{2\cos\theta+\sin\theta}\\ y=t_0\sin\theta=\dfrac{4\sin\theta}{2\cos\theta+\sin\theta}\end{cases}$$

消去 θ，得 Q 点的轨迹方程为

$2x+y-4=0$

又$x=\frac{4\cos\theta}{2\cos\theta+\sin\theta}=\frac{4}{2+\mathrm{tg}\theta}$，而$\mathrm{tg}\theta \geq 2\sqrt{2}-2$，所以

$$0 < x \leq \frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

故 Q 点的轨迹方程为

$$2x+y-4=0(0 < x \leq \sqrt{2})$$

13-1-22　设 l 与 m 相交于点 $P(x_0, y_0)$。

直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

直线 m 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\beta \\ y=y_0+t\sin\beta \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

将 l 的方程代入抛物线方程得

$$t^2\sin^2\alpha+(2y_0\sin\alpha-\cos\alpha)t+y_0^2-x_0=0$$

若其中$PA_1=t_1$，$PA_2=t_2$，则$t_1t_2=\frac{y_0^2-x}{\sin^2\alpha}$。

同理，若$PB_1=t_3$，$PB_2=t_4$，则$t_3t_4=\frac{y_0^2-x}{\sin^2\beta}$。

因 A_1，A_2，B_1，B_2 四点共圆，故 $t_1t_2=t_3t_4$。所以 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta$。因 $0<\alpha$、$\beta<\pi$，$\alpha\neq\beta$，于是 $\alpha=\pi-\beta$。故△PAB 为等腰三角形。PA=PB。所以 P 为 AB 的垂直平分线上一点。

故 l 与 m 的交点 P 的轨迹为直线

$$x=\frac{a+b}{2} \quad (y\neq 0,\ y^2\neq x)$$

13-1-23　设 P 点的坐标为(x_0, y_0)，则直线 l：$y=x+m$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=y_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

将它代入椭圆方程，整理得

$$3t^2+2\sqrt{2}(x_0+2y_0+2)t+2(x_0^2+2y_0^2+4y_0-1)=0$$

由韦达定理及参数 t 的几何意义得

$$|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\frac{2|x_0^2+2y_0^2+4y_0-1|}{3}=2$$

所以，$x_0^2+2y_0^2+4y_0-1=\pm3$，即$\frac{x_0^2}{6}+\frac{(y_0+1)^2}{3}=\frac{\pm3+3}{6}$，即点P满足方程$\frac{x^2}{6}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$或与点$(0, -1)$重合。

又由

$$\Delta=8(x_0+2y_0+2)^2-24(x_0^2+2y_0^2+4y_0-1)$$
$$=-8[2(y_0-x_0)^2+4(y_0-x_0)-7]\geq 0$$

及 $y_0-x_0=m$，得

$$2m^2+4m-7\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2-3\sqrt{2}}{2}\leq m\leq \frac{-2+3\sqrt{2}}{2}$$

故P点的轨迹为椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{(y+1)^2}{3}=1$ 在两平行直线 $y=x-\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$ 和 $y=x-\frac{2-3\sqrt{2}}{2}$ 之间的部分及点 $(0，-1)$ 。

13-1-24　化椭圆的普通方程为参数方程

$$\begin{cases}x=5+4\cos\alpha\\ y=3\sin\alpha\end{cases}\quad(\alpha\text{为参数})$$

因 P 在椭圆上，则 P 点坐标为(5+4cosα，3sinα)。所以

$$u=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=(\frac{5}{4}+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha=\frac{41}{16}+\frac{5}{2}\cos\alpha$$

当 $\alpha=0$ 时，$u_{max}=\frac{81}{16}$；当 $\alpha=\pi$ 时，$u_{min}=\frac{1}{16}$。

13-1-25　因 P 在椭圆上，可设 $x_0=2\cos\alpha$，$y_0=1+\sin\alpha$。所以，

$$x_0^2+y_0^2=4\cos^2\alpha+(1+\sin\alpha)^2=-3(\sin\alpha-\frac{1}{3})^2+\frac{16}{3}$$

当 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ 时，即 $y_0=\frac{4}{3}$ 时，$(x_0^2+y_0^2)_{max}=\frac{16}{3}$；

当 $\sin\alpha=-1$ 时，即 $y_0=0$ 时，$(x_0^2+y_0^2)_{min}=0$。

$$x_0+y_0=2\cos\alpha+1+\sin\alpha=\sqrt{5}\sin(\alpha+\varphi)+1(\mathrm{tg}\varphi=2)$$

所以，$(x+y)_{max}=1+\sqrt{5}$，$(x+y)_{min}=1-\sqrt{5}$。

13-1-26　设梯形 $A_1A_2B_1B_2$ 内接于椭圆，A_1，A_2 为长轴两端点，不妨设 B_1 坐标为 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，则

$$S=\frac{1}{2}(2a+2a\cos\alpha)\cdot b\sin\alpha=ab(1+\cos\alpha)\sin\alpha$$
$$\Rightarrow S^2=a^2b^2(1+\cos\alpha)^2\cdot\sin^2\alpha=a^2b^2(1+\cos\alpha)^3(1-\cos\alpha)$$
$$\Rightarrow S^2\leq\frac{1}{3}a^2b^2\left(\frac{3(1+\cos\alpha)+3-3\cos\alpha}{4}\right)^4=\frac{27}{16}a^2b^2$$
$$\Rightarrow S_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$

13-1-27　设直线 AP 的倾斜角为θ，参数方程为

$$\begin{cases}x=-1+t\cos\theta\\ y=-\sqrt{3}+t\sin\theta\end{cases}\quad(t\text{为参数})$$

将其代入圆的方程得

$$t^2-t(2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta)=0\Leftrightarrow t_1=0，t_2=2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

所以

$$|AP|=|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta|=4|\cos\theta-60°|$$

又直线 AQ 的倾角为θ+30°，同理可得

|AQ|=4|cos'(θ-30°)

从而

$$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}|AP|\cdot|AQ|\sin30°=2|\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}|$$

因$\theta\in[0，\pi)$，所以$2\theta=90°$即$\theta=45°$时，$S_{\triangle APQ}$取最大值$2+\sqrt{3}$。

13－1－28 设$\angle AOC=\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，则A，B的坐标分别为

A(4cosθ，4sinθ)，B(4cosθ，sinθ)

所以 $$\mathrm{tg}\angle BOC=\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}=\frac{1}{4}\mathrm{tg}\theta$$

从而 $$\mathrm{tg}\angle AOB=\mathrm{tg}(\theta-\angle BOC=\frac{\mathrm{tg}\theta-\frac{1}{4}\mathrm{tg}\theta}{1+\frac{1}{4}\mathrm{tg}^2\theta}=\frac{3\mathrm{tg}\theta}{4+\mathrm{tg}^2\theta}$$

因 tgθ＞0，所以

$$\mathrm{tg}\angle AOB=\frac{3}{\frac{4}{\mathrm{tg}\theta}+\mathrm{tg}\theta}\le\frac{3}{4}$$

当且仅当$\frac{4}{\mathrm{tg}\theta}=\mathrm{tg}\theta$，即$\mathrm{tg}\theta=2$，即$\theta=\mathrm{arctg}2$时，$\angle AOB$取最大值$\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$。

13-1-29 设 AB 的方程为

$$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$$

因 AB⊥CD，则 CD 的方程为

$$\begin{cases}x=t\cos(\alpha+90°)\\y=t\sin(\alpha+90°)\end{cases}$$

将 AB 的方程代入抛物线的方程得 $t^2\sin^2\alpha-4t\cos\alpha-4=0$，则

$$|AB|=|t_1-t_2|=\frac{4}{\sin^2\alpha}$$

同样可得，

$$|CD|=\frac{4}{\sin^2(\alpha+90°)}=\frac{4}{\cos^2\alpha}$$

所以

$$|AB|+|CD|=\frac{4}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\cos^2\alpha}=\frac{16}{\sin^2 2\alpha}\ge16$$

当$\alpha=\frac{\pi}{4}$时，$|AB|+|CD|$取得最小值16。

13-1-30 化椭圆的普通方程为参数方程

$$\begin{cases} x = 4\cos\alpha \\ y = 5\sin\alpha \end{cases}$$

设 P 点的坐标为(4cosα，5sinα)，又 AB 的坐标分别为(4，0)(0，5)。则四边形 OAPB 的面积

$$S = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle APB} \qquad \text{(i)}$$

由题设知

$$S_{\triangle OAB} = 10 \qquad \text{(ii)}$$

又直线AB**的方程为**$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$**即**$5x + 4y = 20$。P**到直线**AB**的距离**

$$d = \frac{|20\cos\alpha + 20\sin\alpha - 20|}{\sqrt{41}} = \frac{20|\cos\alpha + \sin\alpha - 1|}{\sqrt{41}}$$

因$|AB| = \sqrt{41}$**，故**

$$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{41} \cdot \frac{20(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)}{\sqrt{41}} = 10(\cos\alpha + \sin\alpha - 1) \quad \text{(iii)}$$

将(ii)，(iii)代入(i)得

$$S = 10 + 10(\cos\alpha + \sin\alpha - 1) = 10\sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$**时，**$S_{max} = 10\sqrt{2}$。**此时**P**点的坐标为**$\left(2\sqrt{2}，\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$。

（二）极坐标

13-2-1　B　P点的极坐标为

$(5，2k\pi+\pi-\mathrm{arctg}\frac{4}{3})$或$(-5，2k\pi-\mathrm{arctg}\frac{4}{3})$

$13-2-2$　A　M，N，P点的极坐标可为$\left(\frac{1}{2}，\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{3}{2}，\frac{3\pi}{2}\right)$，$(1,0)$，均适合方程，所以M，N，P三点在曲线C上。

13-2-3　D　$\rho^2-(1+\cos\theta)\rho+\cos\theta=0$

$\Leftrightarrow(\rho-1)(\rho-\cos\theta)=0\Leftrightarrow\rho=1$或$\rho=\cos\theta$

13-2-4　D

$\rho\sin\theta=\sin 2\theta\Leftrightarrow\sin\theta=0$或$\rho=2\cos\theta\Leftrightarrow$即$\theta=k\pi$或$\rho=2\cos\theta$

$13-2-5$　D　$4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=5\Rightarrow\rho=\dfrac{\frac{5}{2}}{1-\cos\theta}$

$13-2-6$　A　因曲线表示圆心在$\left(4，\frac{\pi}{3}\right)$，半径为4的圆。

13-2-7　A　极点(0，0)为右焦点。令θ=0，π，得ρ_1=-9，ρ_2=1，则2c=|ρ_1-ρ_2|=10。所以，左焦点坐标为(10，π)。

$13-2-8$　C　令$\theta=0$，π，得$\rho_1=3$，$\rho_2=1$，则$a=\frac{3+1}{2}=2$，$c=\frac{3-1}{2}$=1。

设短轴端点坐标为$(\rho，\theta)$，则$\rho=a=2$，$\cos\theta=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$。所以$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\frac{5\pi}{3}$，故端点坐标为$(2，\frac{\pi}{3})$，$(2，\frac{5\pi}{3})$。

$13-2-9$　D　设椭圆方程为$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$。由于

$$p=\frac{b^2}{c}=\frac{a^2}{c}-c=c\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)=\frac{c(1-e^2)}{e^2}$$

因此代入椭圆方程得

$$\rho=\frac{c(1-e^2)}{e(1-e\cos\theta)}$$

$13-2-10$　$\left(\frac{3}{2}，\pm\arccos\frac{1}{3}\right)$由$\rho=\dfrac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$知$y^2=4x$。焦点为F(1，0）。由题设知，|MO|=|MF|。故M点的直角坐标为$\left(\frac{1}{2}，\pm\sqrt{2}\right)$，所以M点的极坐标为$\left(\frac{3}{2}，\pm\arccos\frac{1}{3}\right)$。

$13-2-11$　$\rho=\frac{2}{3}a\cos\theta$设P，Q点的极坐标分别为$(\rho'，\theta')$，$(\rho，\theta)$。

因点Q分OP为1∶2，故$\rho=\frac{1}{3}\rho'$，$\theta=\theta'$，即$\rho'=3\rho$，$\theta'=\theta$。

因 P 在圆 $\rho=2a\cos\theta$ 上，所以 $\rho'=2a\cos\theta'$，则 $3\rho=2a\cos\theta$。故 Q 点的轨迹方程为

$$\rho=\frac{2}{3}a\cos\theta$$

13－2－12　15/4 A，B两点的坐标可转化为$A\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(5,\ \frac{7\pi}{6}\right)$，故

$$|AB|=\sqrt{3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{34+15\sqrt{3}}$$

从而　$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \sin\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{15}{4}$$

13-2-13　(1)以 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入已知方程中得

$$(1-e^2)\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-2e^2p(\rho\cos\theta)-e^2p^2=0$$

$$\Leftrightarrow (1-e^2\cos^2\theta)\rho^2-(2e^2p\cos\theta)\rho-e^2p^2=0$$

当$1-e^2\cos^2\theta\neq 0$时，解之得$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$或$\rho=-\frac{ep}{1+e\cos\theta}$。易证二方程表示同一曲线，则所求极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

$$(2)x^3=(2a-x)y^2\Leftrightarrow (x^2+y^2)x=2ay^2$$

以 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入上述方程得 $\rho^3\cos\theta=2a\rho^2\sin^2\theta$，即 $\rho=0$ 或 $\rho=2a\sin\theta\cdot tg\theta$，综合两种情况得曲线的极坐标方程为

$$\rho=2a\sin\theta\cdot tg\theta$$

13－2－14　$(1)\rho=a\sin 2\theta\Leftrightarrow \rho^2=2a\cdot\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta$

以$\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=x$代入上式，得

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^3=2axy\Leftrightarrow (x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$$

$$(2)\rho=2+\cos\theta\Rightarrow \rho^2=2\rho+\rho\cos\theta\Rightarrow (\rho^2-\rho\cos\theta)^2=4\rho^2$$

以$\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$代入得

$$(x^2+y^2-x)^2=4(x^2+y^2)\quad (x^2+y^2\neq 0)$$

13－2－15　化$\rho=\frac{2}{3-2\cos\theta}$为$\rho=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}\cos\theta}$。所以已知椭圆的离心率$e=\frac{2}{3}$，$p=1$。

令$\theta=\frac{\pi}{2}$，得$\rho=\frac{2}{3}$，故椭圆通径长为$\frac{4}{3}$。

因 p=1，则椭圆左准线的方程为 $\rho\cos\theta=-1$。

又令$\theta=0$，得$\rho_1=\dfrac{2}{3-2}=2$；令$\theta=\pi$，得$\rho_2=\dfrac{2}{5}$。故半焦距$c=\dfrac{2-\dfrac{2}{5}}{2}$ $=\dfrac{4}{5}$，故右准线方程为$\rho\cos\theta=\dfrac{13}{5}$。

13-2-16　令θ=0，π得ρ$_1$=-6，ρ$_2$=2，故

$$a=\frac{|\rho_1+\rho_2|}{2}=2，c=\frac{|\rho_1-\rho_2|}{2}=4，b=\sqrt{|\rho_1\rho_2|}=2\sqrt{3}$$

所双曲线中心极坐标为$(4，\pi)$；渐近线的斜率为$k=\mathrm{tg}\theta=\pm\dfrac{b}{a}=\pm\sqrt{3}$，其倾角为$\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{\pi}{3}$；焦点到渐近线的距离为$b=2\sqrt{3}$。故两渐近线的极坐标方程分别为

$$\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=2\sqrt{3}，\rho\sin(\theta-\frac{2\pi}{3})=2\sqrt{3}$$

13-2-17　以原点为极点，Ox为极轴建立极坐标系。设M，A，B点的极坐标分别为(ρ，θ)，(ρ$_1$，θ$_1$)，(ρ$_2$，θ$_2$)，则有

$$\begin{cases}\theta_1=\theta_2=\theta\\ \rho_1=\dfrac{1}{2}(\rho_1+\rho_2)\\ \rho_1=2\\ \rho_2\cos\theta_2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\theta_1=\theta_2=\theta\\ \rho=\dfrac{1}{2}(2+\rho_2)\Rightarrow(2\rho-2)\cos\theta=4\\ \rho_2\cos\theta_2=4\end{cases}$$

所以M点的轨迹的极坐标方程为

$$\rho\cos\theta=2+\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

化为直角坐标方程为

$$x^2+y^2=\left(\frac{x}{x-2}\right)^2$$

因$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则$0<\cos\theta\leq1$，所以$x=\rho\cos\theta\in(2，3]$。

故所求M点的轨迹方程为

$$x^2+y^2=\left(\frac{x}{x-2}\right)^2\quad x\in(2，3]$$

13-2-18　以原点为极点，Ox为极轴，建立极坐标系。设点P，Q的极坐标分别为(ρ，θ)，(ρ′，θ)(0<θ<2π，θ≠π)，则ρ′=2sinθ。

由题设知，|2-ρsinθ|=|ρ-ρ′|，故

2-ρsinθ=±(ρ-ρ′)

$$\Leftrightarrow 2-\rho\sin\theta=\pm(\rho-2\sin\theta)\Rightarrow(\rho-2)(1\pm\sin\theta)=0$$

所以$\rho=2$，$\theta\in(0，\pi)\cup(\pi，2\pi)$或$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\rho\in R$。所以点P的轨迹为圆$x^2+y^2=4$(去掉点$(\pm2，0)$)及直线$x=0$。

13-2-19　设点 A 的极坐标为(ρ_1，θ)，则 B，M 两点的坐标分别为(ρ_2，π+θ)，(ρ，θ)，则

$$\rho_1=\frac{ep}{1-e\cos\theta}，\rho_2=\frac{ep}{1+e\cos\theta}，\rho=\frac{\rho_1-\rho_2}{2}$$

于是，$\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{ep}{1-e\cos\theta}-\frac{ep}{1+e\cos\theta}\right)=\frac{e^2p\cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$，所以，M点的轨迹方程为

$$\rho=\frac{e^2p\cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$$

13-2-20　以 O 为极点，Ox 为极轴，建立极坐标系，则椭圆的极坐标方程为$\rho^2=\frac{48}{2\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}$，直线l的极坐标方程为$\rho=\frac{24}{2\cos\alpha+3\sin\alpha}$。

设∠xOP=θ，点 P，R，Q 的坐标分别为(ρ_1，θ)，(ρ_2，θ)，(ρ，θ)，(ρ_1，ρ_2，$\rho\in R^+$)。

因 P 在直线 l 上，R 在椭圆上，故

$$\rho_1=\frac{24}{2\cos\theta+3\sin\theta}，\rho_2^2=\frac{48}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta}$$

又题设$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$，所以$\rho\cdot\rho_1=\rho_2^2$，即

$$\rho\cdot\frac{24}{2\cos\theta+3\sin\theta}=\frac{48}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta}。$$

$$\Leftrightarrow 2\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta+6\rho\sin\theta。$$

用 x=ρcosθ，y=ρsinθ 代入上式得 $2x^2+3y^2=4x+6y$，即

$$\frac{2(x-1)^2}{5}+\frac{3(y-1)^2}{5}=1\ \ (x，y不同时为0)$$

此即为Q点轨迹方程。轨迹为以(1，1)为中心，长、短半轴分别为$\frac{\sqrt{10}}{2}$和$\frac{\sqrt{15}}{3}$，且长轴与x轴平行的椭圆(去掉点(0，0))。

13-2-21　以 F 为极点，Fx 为极轴，建立极坐标系，则抛物线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$$

设P点的坐标为$(\rho_1，\theta)(0<\theta<\frac{\pi}{2})$。因PQ⊥RS，故R，Q，S的坐标分别为：$(\rho_2，\theta+\frac{\pi}{2})$，$(\rho_3，\theta+\pi)$，$(\rho_4，\theta+\frac{3\pi}{2})$。所以

$$\rho_1=\frac{p}{1-\cos\theta}，\rho_2=\frac{p}{1+\sin\theta}，\rho_3=\frac{p}{1+\cos\theta}，\rho_4=\frac{p}{1-\sin\theta}$$

因 P，R，Q，S 四点共圆，故$\rho_1\rho_3=\rho_2\rho_4$，于是

$$1-\cos^2\theta=1-\sin^2\theta\Leftrightarrow\sin^2\theta=\cos^2\theta\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

从而$\rho_1=(2+\sqrt{2})p$，$\rho_2=(2-\sqrt{2})p$。所以P，R点的坐标分别为$\left((2+\sqrt{2})p,\ \frac{\pi}{4}\right)$，$\left((2-\sqrt{2})p,\ \frac{3\pi}{4}\right)$。

由对称性知，所求圆的圆心在极轴上。设圆心为(a，0)，半径为 r，则圆的极坐标方程为

$$\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta=r^2$$

因 P，R 在圆上，故

$$r^2=(2+\sqrt{2})^2p^2+a^2-2a(2+\sqrt{2})p\cos\frac{\pi}{4}$$

$$r^2=(2-\sqrt{2})^2p^2+a^2-2a(2-\sqrt{2})p\cos\frac{3\pi}{4}$$

解得 a=2p，$r^2=6p^2$，所以圆的极坐标方程为

$$\rho^2-4p\rho\cos\theta-2p^2=0$$

化为直角坐标方程为

$$x^2+y^2-4px-2p^2=0$$

13-2-22　以 F 为极点，Fx 为极轴，建立极坐标系，则抛物线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{4}{1-\cos\theta}$$

设 M 点坐标为(ρ_1，α)(0＜α＜π)，则 N 的坐标为(ρ_2，π+α)，且

$$|FM|=\rho_1=\frac{4}{1-\cos\alpha}，|FN|=\rho_2=\frac{4}{1+\cos\alpha}$$

所以　$$|MN|=|FM|+|FN|=\rho_1+\rho_2=\frac{8}{\sin^2\alpha}$$

因$|MN|=18$，所以$\frac{8}{\sin^2\alpha}=18$，所以$\sin\alpha=\frac{2}{3}$，从而

$$S_{\triangle OMN}=S_{\triangle OFM}+S_{\triangle ONF}$$

$$=\frac{1}{2}|MF|\cdot|OF|\cdot\sin(\pi-\alpha)+\frac{1}{2}|FN|\cdot|OF|\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}|OF|\cdot|MN|\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot18\cdot\frac{2}{3}=12$$

13－2－23　由椭圆$\frac{(x-10)^2}{100}+\frac{y^2}{50}=1$得$a=10$，$b=5\sqrt{2}$，$c=5\sqrt{2}$，离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$p=\frac{b^2}{c}=5\sqrt{2}$。它与已知抛物线的公共焦点为$F(10-5\sqrt{2}，0)$。

以 F 为极点，Fx 为极轴，建立极坐标系，则椭圆的极坐标方程为

$$\rho=\frac{10}{2-\sqrt{2}\cos\theta}$$

抛物线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{6}{1-\cos\theta}$$

设直线 l 的倾斜角为 θ，θ∈[0，π)。点 A，B，C，D 的极坐标分别为 A(ρ_1，θ)，B(ρ_2，θ)，C(ρ_3，π+θ)，D(ρ_4，π+θ)。

因A，D在抛物线上，故$\rho_1=\frac{6}{1-\cos\theta}$，$\rho_4=\frac{6}{1+\cos\theta}$，从而

$$|AD|=\rho_1+\rho_4=\frac{12}{\sin^2\theta}$$

又B，C在椭圆上，故$\rho_2=\frac{10}{2-\sqrt{2}\cos\theta}$，$\rho_3=\frac{10}{2+\sqrt{2}\cos\theta}$，从而

$$|BC|=\rho_2+\rho_3=\frac{20}{2-\cos^2\theta}$$

而|AD|-|BC|=|AB|+|CD|=2|BC|，所以|AD|=3|BC|，即

$$\frac{12}{\sin^2\theta}=\frac{60}{2-\cos^2\theta}\Leftrightarrow\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}\text{或}\frac{5\pi}{6}\Rightarrow \mathrm{tg}\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

故直线 l 的方程为

$$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-10+5\sqrt{2})$$

12-2-24　以右焦点 F_2 为极点，F_2x 为极轴，建立极坐标系，则双曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{1}{2-\sqrt{5}\cos\theta}$$

设直线 l 的倾斜角为 α，则 A，B 两点的坐标分别为(ρ_1，α)，(ρ_2，π+α)，且

$$\rho_1=\frac{1}{2-\sqrt{5}\cos\alpha}，\rho_2=\frac{1}{2+\sqrt{5}\cos\alpha}$$

因$|F_1A|=4+|F_2A|$，$|F_1B|=|F_2B|+4$，所以，

$$|F_1A|\cdot|F_1B|=(\rho_1+4)(\rho_2+4)=\rho_1\rho_2+4(\rho_1+\rho_2)+16$$

从而 $$\frac{1}{4-5\cos^2\alpha}+\frac{16}{4-5\cos^2\alpha}+16=84\Leftrightarrow\frac{17}{4-5\cos^2\alpha}=68$$

$$\Leftrightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}\text{或}\frac{5\pi}{6}$$

13-2-25　以焦点 F 为极点，Fx 为极轴，建立极坐标系。则抛物线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$$

设 A 点的坐标为(ρ_1，θ)。因 AB⊥CD，那么 B，C，D 点的

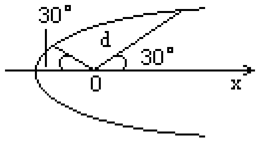
坐标分别为$(\rho_2，\theta+\pi)$，$(\rho_3，\theta+\frac{\pi}{2})$，$(\rho_4，\theta+\frac{3\pi}{2})$。则

$$|AB|=\rho_1+\rho_2=\frac{p}{1-\cos\theta}+\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{2p}{1-\cos^2\theta}=\frac{2p}{\sin^2\theta}$$

$$|CD|=\rho_3+\rho_4=\frac{p}{1+\sin\theta}+\frac{p}{1-\sin\theta}=\frac{2p}{\cos^2\theta}$$

从而$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2p}=\frac{1}{2p}$为定值。

13-2-26　建立如图所示极坐标系，O 为抛物线焦点，则抛物线的极坐标方程为



$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$$

由已知：

(i)当θ=30°时，ρ=d，所以

$$d=\frac{p}{1-\cos 30°}\Leftrightarrow p=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d\Leftrightarrow\rho=\frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d}{1-\cos\theta}$$

于是，当$\theta=\pi$时，$\rho_{min}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}d$。

(ii)当θ=150°时，ρ=d，故

$$d=\frac{p}{1-\cos 150°}\Leftrightarrow p=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d\Leftrightarrow\rho=\frac{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d}{1-\cos\theta}$$

于是，当$\theta=\pi$时，$\rho_{min}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}d$。

故彗星与地球的最短距离为$\frac{2-\sqrt{3}}{4}d$或$\frac{2+\sqrt{3}}{4}d$。

13-2-27　以 F_1 为极点，F_1x 为极轴建立极坐标系。

由椭圆方程$\frac{x^2}{5}+y^2=1$知$a=\sqrt{5}$，$b=1$，$c=2$，离心率$e=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$p=\frac{b^2}{c}=\frac{1}{2}$。故椭圆的极坐标方程为

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{5}-2\cos\theta}$$

设 A 的极坐标为(ρ_1,θ)，则 B 的极坐标为$(\rho_2,\pi+\theta)$$(0<\theta<\pi)$，所以

$$|AB|=\rho_1+\rho_2=\frac{2\sqrt{5}}{5-4\cos^2\theta}$$

又$|MF_1|=|a-c|=\sqrt{5}-2$，故

$$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}|MF_1|\cdot\sin\theta\cdot|AB|$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-2)\sin\theta\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5-4\cos^2\theta}=\frac{(5-2\sqrt{5})\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

因 $0<\theta<\pi$，则 $\sin\theta>0$，所以

$$S_{\triangle ABM}=\frac{5-2\sqrt{5}}{\frac{1}{\sin\theta}+4\sin\theta}\leq\frac{5-2\sqrt{5}}{4}$$

等号在$\frac{1}{\sin\theta}=4\sin\theta$，即$\sin\theta=\frac{1}{2}$，即$\theta=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$时成立。

故$\triangle ABM$的面积的最大值为$\frac{5-2\sqrt{5}}{4}$。

13-2-28　以坐标原点为极点，Ox 为极轴，建立极坐标系，则椭圆的极坐标方程为

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$$

设$\angle xOP_i=\alpha$，则

$$\angle xOP_i=\alpha+\frac{(i-1)\pi}{n}=(i=1，2，\cdots，n)$$

则 P_i 的极坐标为

$$\left(\rho_i，\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)\quad(i=1，2，\cdots n)$$

故
$$\frac{1}{OP_i^2}=\frac{1}{\rho_i^2}=\frac{1}{a^2}\cos^2\left[\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right]+\frac{1}{b^2}\sin^2\left[\alpha+\frac{(i-1)2\pi}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left[1+\cos\left(2\alpha+\frac{4(i-1)\pi}{n}\right)\right]+\frac{1}{2b^2}\left[1-\cos\left(2\alpha+\frac{4(i-1)\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\left(2\alpha+\frac{4(i-1)\pi}{n}\right)$$

从而
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{OP_i^2}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{4(i-1)\pi}{n}\right)。$$

但
$$\sum_{i=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{4(i-1)\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{n}}\sum_{i=1}^{n}\left[\sin\left(2\alpha+\frac{2(2i-1)\pi}{n}\right)-\sin\left(2\alpha+\frac{2(2i-3)\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{n}}\left[\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi}{n}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi}{n}\right)\right]=0$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{OP_i^2}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

第十四部分　其他

(一)命题、充要条件

14-1-1　略。

14-1-2　不能。原命题与逆否命题等价。

14-1-3　不能。逆命题与否命题互为逆否，是等价的。

14-1-4　(1)逆命题：若 $a^2+b^2=0$，则 $a=0$ 且 $b=0$(真)；否命题：若 $a\neq0$ 或 $b\neq0$，则 $a^2+b^2\neq0$(真)；逆否命题：若 $a^2+b^2\neq0$，则 $a\neq0$ 或 $b\neq0$(真)。

(2)逆命题：若 $m^2+n^2=25$，则 $m=4$ 或 $n=3$(假)；否命题：若 $m\neq4$ 且 $n\neq3$，则 $m^2+n^2\neq25$(假)；逆否命题：若 $m^2+n^2\neq25$，则 $m\neq4$ 且 $n\neq3$(假)。

(3)逆命题：两条不相交直线是异面直线(假)；否命题：两条不异面的直线相交(假)；逆否命题：两条相交直线不是异面直线(真)。

14-1-5　(1)假。　(2)假。　(3)真。　(4)真。

14-1-6　(1)$a<0$ 或 $b\leq0$。

(2)x，y 中至少有一个是 0。

(3)$a\neq0$，且 $b\neq0$。

(4)$a\leq0$，且 $b\leq0$。

14-1-7　若 $x\neq2$，$x\neq3$，则 $x^2-5x+6\neq0$。

(2)若 a，b 为实数，a，b 都不为正数，则 $a+b\leq0$。

(3)a+b 不是偶数，则 a，b 不都是偶数。

14-1-8　(1)因为 p 假 q 真，所以“p 或 q”为真，“p 且 q”为假，“非 p”为真。

(2)因为 p 假 q 真，所以“p 或 q”为假，“p 且 q”为假，“非 p”为真。

(3)因为 p 真 q 真，所以“p 或 q”为真，“p 且 q”为真，“非 p”为假。

(4)因为 p 真 q 假，所以“p 或 q”为真，“p 且 q”为假，“非 p”为假。

14-1-9　(1)逆命题：若 $x=0$ 或 $y=0$，则 $xy=0$。真。否命题：若 $xy\neq0$，则 $x\neq0$ 且 $y\neq0$。真。逆否命题：若 $x\neq0$ 且 $y\neq0$。真。

(2)逆命题：若 $xy>0$，则 $x>0$，$y>0$。假。否命题：若 $x\leq0$ 或 $y\leq0$，则 $xy\leq0$。假。逆否命题：若 $xy\leq0$，则 $x\leq0$ 或 $y\leq0$。真。

14-1-10　(1)满足条件 C 的点中，有不在 F 上的点。

(2)不满足条件 C 的点中，存在位于 F 上的点。

(3)不满足条件 C 的点，都不在图形 F 上。

(4)满足条件 C 的点，都位于图形 F 上。

14-1-11　p 是 q 的(1)充分非必要条件；(2)必要非充分条件；(3)充要条件；(4)既非充分条件，也非必要条件。

14-1-12　(1)必要非充分条件；(2)充分非必要条件。

14-1-13　线段方程 $x+y=3(0\leq x\leq3)$，代入 $y=-x^2+mx-1$ 即得 $x^2-(m+1)x+4=0$。因此，原问题转化为求

$f(x)=x^2-(m+1)x+4$

在[0，3]内有两个不同实数根的充要条件。这个条件就是

$$\left.\begin{array}{l}\Delta=(m+1)^2-16>0\\ 0<\dfrac{m+1}{2}<3\\ f(0)\geq 0\\ f(3)\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow 3<m\leq\frac{10}{3}$$

故所求充要条件为$3<m\leq\frac{10}{3}$。

14-1-14　因为

$$\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}$$

而在ΔABC中，$\cos\frac{A+B}{2}>0$。若$\sin A>\sin B$，则$\sin\frac{A-B}{2}>0$，从而$A>B$；若$A>B$，则$\sin\frac{A-B}{2}>0$，从而$\sin A>\sin B$。所以$\angle A>\angle B$是$\sin A>\sin B$的充要条件。

14-1-15　(1)A 是 B 的必要条件，但非充分条件。

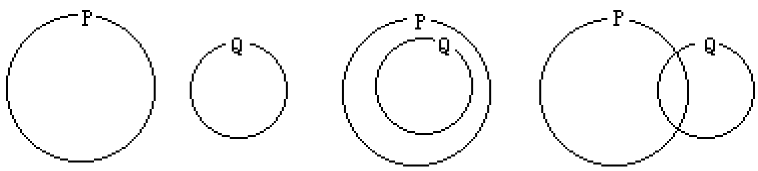
(2)A 是 B 的充要条件。

14-1-16　令 y=0，则 $x^2+Gx+F=0$。设 x_1，x_2 为这个方程的根，如果$|x_1-x_2|=\sqrt{G^2-4F}=1$，则$G^2-4F=1$。这就是必要条件。下面证明这也是充分条件。若 $G^2-4F=1>0$，则 $x^2+Gx+F=0$ 有两根为 x_1，x_2，且 $x_1+x_2=-G$，$x_1x_2=F$，所以

$$|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=G_2-4F=1$$

故所求的充要条件是 $G^2-4F=1$。

14-1-17　(1)如下图(有三种情况)。



(2)存在 x 使得是 p，但不是 q。

14-1-18　(1)对所有实数 t，不等式 $y^2-4<t(t-2x)$成立是点(x，y)不属于集合 M 的条件。

(2)$x^2+y^2<4$。(用判别式解)。

14-1-19　略。

14-1-20　(1)必要条件，但不是充分条件；(2)必要条件，但不是充分条件；(3)充分条件，但不是必要条件；(4)充分条件，但不是必要条件。

14-1-21　C

14-1-22　必要性。在 $ax+by+cz\geq 0$ 中取 x=1，y=z=0，则有 $a\geq 0$；

取 $x=y=1$，$z=0$，则有 $a+b\geq0$；取 $x=y=z=1$ 时 $a+b+c\geq0$。

充分性。将原式变形

$$ab+by+cz=a(x-y)+(a+b)(y-z)+(a+b+c)z$$

现在以 $x\geq y\geq z\geq0$，$a\geq0$，$a+b\geq0$，$a+b+c\geq0$ 代入，右边≥0，因此，

$$ax+by+cz\geq0$$

14－1－23　$0<k<\dfrac{25}{3}$

14-1-24　(1)充分必要条件。(2)充分条件，但不是必要条件。

(3)既非充分条件，又非必要条件。(4)必要条件，但不是充分条件。

14-1-25　(1)√　(2)×　(3)×　(4)×　(5)√　(6)√

14-1-26　(1)①×　②√　③×　④√　⑤×　⑥√　⑦√

(2)“若 $|1-x|<1$，则 $|x-2|+|1-x|<2$ 或 $x\geq3$。”

(3)“若 $|1-x|\leq2$，则 $|x-2|\geq1$ 且 $x\geq0$。”

(二)探索性问题

1．归纳型问题

14-2-1　一般法则

$$[n(n-1)+1]+[n(n-1)+3]+\cdots+[n(n-1)+2n-1]=n^3$$

用数学归纳法证明。

14－2－2　由题设条件有 $\frac{S_n}{n}=(2n-1)a_n$。

当 n≥2 时，有 $S_n=n(2n-1)(S_n-S_{n-1})$，，从而得

$$S_n=\frac{n(2n-1)}{n(2n-1)-1}\cdot S_{n-1}$$

由 $S_1=a_1=\frac{1}{3}$，推得 $S_2=\frac{6}{5}S_1=\frac{2}{5}$，$S_3=\frac{15}{14}S_2=\frac{3}{7}$，$S_4=\frac{28}{27}S_3=\frac{4}{9}$。

由此归纳、猜想出

$$S_n=\frac{n}{2n+1}\quad(n\in N)$$

然后用数学归纳法证明。

14-2-3　表中第 n 行的最后一个数是 3n-2,第 n 行的各个数之和是 $(2n-1)^2$。用数学归纳法证明。

14-2-4　从第一行开始计算，可得前 4 行之和分别是 2，4，8，16，即 2^1，2^2，2^4。从而可以递推出第 n 行各数之和为 2^n。可利用二项式定理证明。

14-2-5　$S_n=3\times2^{n-1}$

14－2－6　$\frac{1}{\sqrt{1\times2}}+\frac{1}{\sqrt{2\times3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<\sqrt{n}$，$n\in N$

14-2-7　由已知条件得 f(1)=-1g2，f(n)=f(n-1)+(n-1)lg2(n∈N，n≥2)，故

$$f(2)=f(1)+(2-1)\lg2=(-1+2-1)\lg2$$
$$f(3)=f(2)+(3-1)\lg2=(-1+2-1+3-1)\lg2$$
$$f(4)=f(3)+(4-1)\lg2=(-1+2-1+3-1+4-1)\lg2$$

由此猜想

$$f(n)=[-1+2-1+3-1+4-1+\cdots+(n-1)]\lg2=\frac{n^2-n-2}{2}\lg2。$$

用数学归纳法证明。

14－2－8　$S_n=\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\quad(n\in N)$

14-2-9　由题设条件有

$$a_n=\frac{(2+2n)n}{2}=n(n+1)，\ b_n=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

当 n=1 时，$a_1=2$，$b_1=1$，有 $a_1>b_1$；当 n=2 时，$a_2=6$，$b_2=3$，有 $a_2>b_2$；当 n=3 时，$a_3=12$，$b_3=7$，有 $a_3>b_3$；当 n=4 时，$a_4=20$，$b_4=15$，有 $a_4>b_4$；当 n=5 时，$a_5=30$，$b_5=31$，有 $a_5<b_5$。当 n=6 时，$a_6=42$，$b_6=63$，

有 $a_6 < b_6$。观察归纳可知，当 $1 \le n \le 4$ 时，$a_n > b_n$，猜想到当 $n \ge 5$ 时，有 $a_n < b_n$。须用数学归纳法证明 $n(n+1) < 2^n - 1 (n \ge 5)$。

2．存在型问题

14-2-10　由题设条件知

$$\frac{a_n}{2^{n-1}} = 1 + (n-1) \cdot 1 \Leftrightarrow a_n = n \cdot 2^{n-1}$$

令 n=1，2，3，代入原等式两端得关于 b_1，b_2，b_3 的三元一次方程组，解之 $b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=3$。由此猜想 $b_n=n$。以下用数学归纳法证明。

14-2-11　不存在反函数。因函数非一一映射。

14-2-12　由于 $3^2+4^2=5^2$ 知 x=2 是原方程的根，可将原方程变形为 $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1$。由指数函数的单调性知，当 $x > 2$ 时，$3^x + 4^x < 5^x$；当 $x < 2$ 时，$3^x+4^x > 5^x$。故除 x=2 外，原方程不存在其它实根。

14-2-13　令 m=n。考虑下面的方程：

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = a(x^2 - x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow ax^2 - (a+3)x + (a-1) = 0 \qquad \text{(i)}$$

要使 $A \cap B \neq \varnothing$，必须且只须

$$\triangle = (a+3)^2 - 4a(a-1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 - 2\sqrt{13}}{2} \le a \le \frac{5 + 2\sqrt{13}}{2}$$

由于 a 为非 0 整数，故 a=1，2，3，4。当 a=1 时，$x=4 \in N$；当 a=2，3 时，方程(i)无自然数解；当 a=4 时，$x=1 \in N$。故存在 a=1 或 4 时，$A \cap B = \{(4,13)\}$或$\{(1，4)\}$。

14-2-14　因为 C 是以原点为圆心，半径为 r 的圆面，故原点(0，0)为 C 中的元素。又取 $A=\{(0，0)\}$，B 为不含原点(0，0)的任意点集，则有 $C \cup A \subseteq C \cup B$，但 $A \not\subseteq B$。故命题不正确。

14-2-15　首先推知 f(1)=2，f(2)=4，f(3)=8。由此猜想 $f(n)=2^n (n \in N)$。可用数学归纳法证明这个猜想。故存在符合条件的函数 f(x)，其解析式为 $f(x)=2^x$。

14-2-16　将原问题转化为：是否存在自然数 k，b，使直线 y=kx+b 与抛物线 $y^2 = x + 1$ 及 $y = 8x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ 在 x 轴上方没有交点。由于 $y^2 = x + 1$，$y = 8x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ 在 y 轴上的正截距分别为 1，$\frac{5}{2}$，故自然数 $b = 2$。又由 $\begin{cases} y = kx + 2 \\ y^2 = x + 1 \end{cases}$ 无实数解，得 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < k < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$。而 k 为自然数，故 $k = 1$。

此时方程组 $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 8x^2 + 4x + \frac{5}{2} \end{cases}$ 也无实数解。故存在 $k = 1$，$b = 2$ 满足要求

$$(A \cup B) \cap C = \varnothing$$

14－2－17　要判断这两个三角形能否相似。只要看等式$\frac{\lg a}{a}=\frac{\lg b}{b}=\frac{\lg c}{c}$能否成立，即$a^{\frac{1}{a}}=b^{\frac{1}{b}}=c^{\frac{1}{c}}$能否成立。

设$a^{\frac{1}{a}}=m(m>0)$，则$a=m^a$。原问题转化为是否存在正数m，使$a=m^a$，$b=m^b$，$c=m^c$同时成立？也即方程$x=m^x$是否存在三个不等的正根？也即一次函数$y=x$的图象与指数函数$y=m^x$的图象在$(0,+\infty)$内是否存在三个不同的交点？显然，答案是否定的。而上两问题的转化都是等价的。故这两个三角形不可能相似。

14-2-18　满足条件的 a 存在，a=3。

14-2-19　设c_0是满足条件的集合 C 中一个元素。根据题设条件$C=A\cap B\neq\varnothing$，则$c_0\in A$且$c_0\in B$。令A中元素$a^s=c_0$，B中元素$(a+1)t+b=c_0$。则$a^s=(a+1)t+b$，即$t=\frac{a^s-b}{a+1}$。因为$s\in N$，$t\in N$，所以a^s-b应能被$a+1$整除。

(i)当$s=2m(m\in N)$时，$t=\frac{a^{2m}-b}{a+1}$。而$b\in[1,a]$，且$a\in N$，$a\geq 2$。故当且仅当 b=1 时，$a^{2m}-1$能被 a+1 整除，此时$t\in N$。

(ii)当$s=1$时。因为$b\in[1,a]$，所以$t=\frac{a-b}{a+1}\notin N$。当$s=2m+1$时$(m\in N)$，

$$t=\frac{a^{2m+1}-b}{a+1}=\frac{a(a^{2m}-\frac{b}{a})}{a+1}$$

因此当且仅当$\frac{b}{a}=1$，即$a=b$时，$t\in N$。

综上所述，存在$[1,a]$上的b，使$C=A\cap B\neq\varnothing$。对应的$b=1$或$b=a$。当 b=1 时，$C=\{y|y=a^{2x},x\in N\}$；当 b=a 时，$C=\{y|y=2^{x+1},x\in N\}$。

14-2-20　假设存在 a，b，c 使题中所述成立。由 n=1，2，3 分别得$a+b+c=1$，$4a+2b+c=3$，$9a+3b+c=6$，解之$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=0$。还须证明，对任意$n\in N$，都有$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$。

14-2-21　(1)由右边推出左边。

(2)设$x_{n-1}+x_{n+1}=2x_n$，则$f(x_{n-1}+x_{n+1})=f(2x_n)$。若$\{f(x_n)\}$是等比数列，

则$f(x_{n-1})\cdot f(x_{n+1})=f^2(x_n)$。于是由(1)，有

$$f(x_{n-1}+x_{n+1})=\frac{f(x_{n-1})+f(x_{n+1})}{1+f(x_{n-1})f(x_{n+1})}=\frac{f(x_{n-1})+f(x_{n+1})}{1+f^2(x_n)}$$

又因$f(2x_n)=\frac{2f(x_n)}{1+f^2(x_n)}$，且$f(x_{n-1})+f(x_{n+1})=f(2x_n)$，故

$$\frac{f(x_{n-1})+f(x_{n+1})}{1+f^2(x_n)}=\frac{2f(x_n)}{1+f^2(x_n)}$$

即　$f(x_{n-1})+f(x_{n+1})=2f(x_n)$　　　　(i)

但　$f(x_{n-1})\cdot f(x_{n+1})=f^2(x_n)$　　　　(ii)

由(i)，(ii)得$[f(x_{n-1})-f(x_{n+1})]^2=0$，所以 $f(x_{n-1})=f(x_{n+1})=f(x_n)$，所以

$\frac{a^{x_{n-1}}-1}{a^{x_{n-1}}+1}=\frac{a^{x_n}-1}{a^{x_n}+1}$，由此易知，$a^{x_{n-1}}=a^{x_n}$，所以$x_{n-1}=x_n$．这与$\{x_n\}$是公差 d 不为 0 的等差数列相矛盾，故$\{f(x_n)\}$不是等比数列．

14-2-22　假设满足题设的虚数 z 存在，且 $z=x+yi$，其中 x，$y\in R$，$y\neq 0$，则$z-\overline{z}\neq 0$．于是，

$$z+\frac{5}{z}\in R\Leftrightarrow z+\frac{5}{z}=\overline{z}+\frac{5}{\overline{z}}$$

$$\Leftrightarrow (z-\overline{z})\left(1-\frac{5}{z\overline{z}}\right)=0\Leftrightarrow |z|^2=5\Leftrightarrow x^2+y^2=5$$

又$y\neq 0$，所以$x\in(-\sqrt{5},\sqrt{5})$，所以$x+3>3-\sqrt{5}>0$，于是$z+3=(x+3)+yi$的实部$x+3>0$．则$z+3$的对应点只能落在复平面的第一、四象限内，从而$\arg(z+3)\neq\frac{3\pi}{4}$，即满足题设的虚数z不存在．

14-2-23　假设存在实数 t，使得复数 $f(t)\in A$，则有

$$|f(t)+2i|\leq 8\sqrt{3}\qquad\text{(i)}$$

又因为　$|f(t)+2i|^2=t^2+(4n^2+tn+16)^2$

$=(1+n^2)t^2+2n(16+4n^2)t+(4n^2+16)^2$

所以　当$t=-\frac{n(16+4n^2)}{1+n^2}$时，$|f(t)+2i|^2$取最小值$\frac{(4n^2+16)^2}{1+n^2}$。而

$$\frac{(4n^2+16)^2}{1+n^2}=16\left(\sqrt{1+n^2}+\frac{3}{\sqrt{1+n^2}}\right)^2\geq 16(2\sqrt{3})^2=(8\sqrt{3})^2$$

所以　$|f(t)+2i|\geq 8\sqrt{3}$　　　　(ii)

由(i)，(ii)知$|f(t)+2i|=8\sqrt{3}$．再由(ii)式等号成立的条件得

$$\sqrt{1+n^2}=\frac{3}{\sqrt{1+n^2}}\Leftrightarrow n^2=2$$

这与 $n\in Z$ 矛盾。故不存在实数 t，使得复数 $f(t)\in A$．

14-2-24　若ω是正实数．由已知$\omega=(z+\mu)^2$，则 $z+\mu$ 是非 0 实数，而

$$z+\mu=1-\cos\theta+a^2+(a+\sin\theta)i$$

所以$a+\sin\theta=0$，即$a=-\sin\theta$．又由已知可解得$a=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$，所以$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\sin\theta$，所以 $\cos\theta=2$．矛盾．本题中的ω不可能是正实数．

14-2-25　本题可转化为下述等价问题：首尾相接的三条线段之一

的长为 3 ;另两条线段的夹角为α,且其长度之和|z|+|ω|=4.问 cos(180°-α)有没有最大值?如果有，把它求出来.

由余弦定理可得

$$\cos(180°-\alpha)=\frac{9-(|z|^2+|\omega|^2)}{2|z|\cdot|\omega|}=\frac{2|z|\cdot|\omega|-7}{2|z|\cdot|\omega|}$$

$$=1-\frac{7}{2|z|\cdot|\omega|}\leq 1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$$

(当$|z|=|\omega|=2$时取等号.)

故$\cos(\arg z-\arg\omega)$取最大值$\frac{1}{8}$.

14-2-26 设 z_1，z_2，z_3 在复平面内所对应的点为正三角形的顶点，则$z_2=\omega z_1$，$z_3=\omega^2 z_1$(这里$\omega^3=1$，代入$z_1^2=mz_2z_3$得$z_1^2=m\cdot\omega z_1\cdot\omega^2 z_1$，所以$z_1^2=mz_1^2$，所以$m=1$．反之，当$m=1$时，由已知可得

$$\frac{z_1^2}{z_2^2}=\frac{z_2z_3}{z_3z_1}\Leftrightarrow\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3=1$$

题设$z_1\neq z_2$，故$\frac{z_2}{z_1}=\omega$或ω^2．取$\frac{z_2}{z_1}=\omega$，得$z_2=\omega z_1$，$z_1^2=\omega z_1\cdot z_3$，所以$z_3=\omega^2 z_1$，所以$z_1$，$z_2$，$z_3$，所对应的点为正三角形的三个顶点.

取$\frac{z_2}{z_1}=\omega^2$可得同样结论.

14-2-27 假设存在α，β使$f(x)$为常数函数，取$x=0$，$\frac{\pi}{2}$，-α，-β推知$\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，然后代入$f(x)$的表达式可验证$f(x)$为常数函数.

14-2-28 f(x)是周期函数;一个周期为 4a.

14-2-29 令$a=x+\frac{c}{2}$，$b=\frac{c}{2}$，代入题设中的等式并考虑到$f\left(\frac{c}{2}\right)=0$，得$f(x+c)=-f(x)$，所以

$$f(x+2c)=-f(x+c)=f(x)$$

故 2c 为 f(x)的一个周期.

14-2-30 假设存在实数 x,y,使得题设的两个等式能同时成立.由 arcsinx=arccosy，知 x，y∈(0，1).

$$\begin{cases}\sin x=\cos y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\\ \arcsin x=\arccos y=\arcsin\sqrt{1-y^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}-y \\ x=\sqrt{1-y^2} \end{cases}$$ (因为x，y为锐角)

由此得$\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)^2=1-y^2$，化简即得$2y^2-\pi y+\dfrac{\pi^2}{4}-1=0$．其判别式

$$\triangle=\pi^2-4\bullet 2\left(\frac{\pi^2}{4}-1\right)=8-\pi^2<0$$

故上面的方程没有实根，这与 y∈(0，1)矛盾．所以不存在实数 x，y 使题设两个不等式同时成立．

14-2-31　令 c=(2k+1)π(k∈Z)，则 af(x)+bf(x-c)=1 变为

$$a(3\sin x+2\cos x+1)-b(3\sin x+\cos x-1)=1$$

在上式中分别令 x=0，π/2 可得 a=1/2，b=1/2．

再只须证明，对于任意 x∈R，等式

$$\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(x-(2k+1)\pi)=1$$

恒成立．这只须用诱导公式即可．

14-2-32　有最值．当 $x_1>x_2\geq 0$ 时，

$$f(x_1)=f(x_1-x_2)+f(x_2)$$

因为 $x_1-x_2>0$，所以 $f(x_1-x_2)<0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，即 f(x)在[0，3]上递减，由奇函数的性质知 f(x)在[-3，0]上也是递减的．所以

$$f_{max}(x)=f(-3)=6，f_{min}(x)=f(3)=-6$$

14-2-33　能堆成正三棱锥．因为底面正三角形的球的个数为

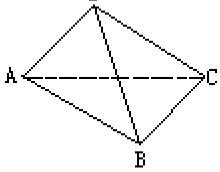
$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

堆成一个底面边长为 n 的正三棱锥共需球的个数为

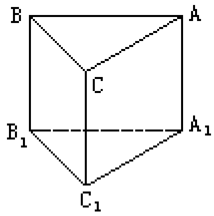
$$1+3+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

令上式等于 120，解得 n=8．即堆出的正三棱锥底面正三角形的边由 8 个球组成．

14-2-34　不一定．如下图，在三棱锥 S-ABC 中，AB=BC=AC=SC，SA=SB≠SC，则各个侧面为等腰三角形，底面为正三角形．但这个三棱锥不是正三棱锥．



14-2-35　假命题．如下图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，∠ACB=90°．考察二面角 A_1-AC-B(为直二面角与二面角 A-BB_1-C．有平面 BC_1⊥平面 AC_1，平面 AB_1⊥平面 ABC，但这两个二面角既不相等，也不互补．



14-2-36　H 是垂心,PH 是垂线,AH⊥BC,由三垂线定理得 AP⊥BC．又 AP⊥PB，故 AP⊥平面 PBC，从而 AP⊥PC．所以△APC 是直角三角形．同理，△BPC 也是直角三角形．由分析过程知，PA⊥BC 与否与∠APB 的大小无关，即 PA⊥BC 成立．

14-2-37　若 H 为△PBC 的垂心，则 BH⊥PC，由三垂线定理得 AB⊥PC．又 PA⊥平面 ABC，从而 AB⊥AC．这与△ABC 是锐角三角形矛盾．

14-2-38　作出它们的公共轴截面．设圆柱、圆锥的底面半径分别是 r_1，r_2，锥高为 h，则内切球半径为 r_1．又设圆锥母线与底面成 2θ角($\theta<45°$)，那么$r_1=r_2\mathrm{tg}\theta$，$h=r_2\mathrm{tg}2\theta$，从而$V_{柱}=2\pi r_2^3\mathrm{tg}^3\theta$，$V_{锥}=\frac{1}{3}\pi r_2^3\mathrm{tg}2\theta$.假若圆柱与圆锥体积相等，则有$2\pi r_2^3\mathrm{tg}^3\theta=\frac{1}{3}\pi r_2^3\mathrm{tg}2\theta$，整理得

$$3\mathrm{tg}^4\theta-3\mathrm{tg}^2\theta+1=0$$

因为$\triangle=(-3)^2-4\times3\times1<0$，也就是说关于 $\mathrm{tg}^2\theta$ 的上面的二次方程无实根，因此这两个几何体体积不可能相等．

14-2-39 棱长为1的正四面体高为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，对棱间的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，底面外接圆半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}$．为放入两个正四面体，底面不能在正方体相对的两面内．作正方体的对角面A_1BCD_1，易知B_1C_1到该对角面的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．可使正四面体的一条棱与 B_1C_1 重合，其对棱在对角面 A_1C 内，则可使该四面体置于多面体 $A_1B_1B-D_1C_1C$ 内．同样在多面体 A_1AB-D_1DC 内也可置入另一个正四面体．因此本题的答案是肯定的．

14-2-40　显然，直线 x=1 不符合题意．假设满足要求的直线 m 存在，其方程为

$$y=k(x-1)+1$$

代入双曲线方程，整理得

$$(2-k^2)x^2+(2k^2-2k)x-k^2+2k-3=0 \qquad (\mathrm{i})$$

设 Q_1，Q_2 的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，则 x_1，x_2 是方程(i)的两实根，$x_1+x_2=\frac{2k^2-2k}{k^2-2}$.如果$B(1，1)$是$Q_1$，$Q_2$的中点，就有$\frac{1}{2}(x_1+x_2)=1$，即 $x_1+x_2=2$，所以

$$\frac{2k^2-2k}{k^2-2}=2 \qquad (\mathrm{ii})$$

由(ii)解得 k=2．但 k=2 时方程(i)无实根，所以满足条件的直线 m 不存

在．

14-2-41　设满足条件的抛物线的方程为

$$(y+1-a)^2=4(x+1-a)$$

利用弦长相等推出矛盾．故满足条件的抛物线不存在．

14-2-42　(1)设直线 $ax-y=1$ 与 $x^2-2y^2=1$ 交点 P，Q 的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)．将 $ax-y=1$ 代入 $x^2-2y^2=1$ 得

$$(1-2a^2)x^2+4ax-3=0 \text{ 且 } 1-2a^2\neq 0$$

由$\triangle=(4a)^2-4(-3)(1-2a^2)>0$，得$-\frac{\sqrt{6}}{2}<a<\frac{\sqrt{6}}{2}$．又

$$x_1+x_2=\frac{-4a}{1-2a^2}，x_1\cdot x_2=\frac{-3}{1-2a^2} \qquad \text{(i)}$$

据弦长公式$|PQ|=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$(这里$k=a$)，又题设$|PQ|=2\sqrt{1+a^2}$，于是可得

$$(x_1-x_2)^2=4 \qquad \text{(ii)}$$

由(i)，(ii)可得

$$2a^4-a^2-1=0\Leftrightarrow a^2=1\text{或}a^2=-\frac{1}{2}(\text{舍去})$$

$a=\pm1$时，$|PQ|=2\sqrt{1+a^2}$．

(2)假设以 PQ 为直径的圆经过原点 O，因 OP⊥OQ，故

$$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow y_1y_2=-x_1x_2$$

将 $y_1=ax_1-1$，$y_2=ax_2-1$ 代入得

$$(ax_1-1)(ax_2-1)=-x_1x_2\Leftrightarrow(1+a^2)x_1x_2-a(x_1+x_2)+1=0$$

再据(1)中的(i)式知

$$(1+a^2)\cdot\frac{-3}{1-2a^2}-a\cdot\frac{-4a}{1-2a^2}+1=0\Leftrightarrow a^2=-2$$

与 $a^2\geq 0$ 矛盾．故不存在实数 a，使以 PQ 为直径的圆经过原点．

14-2-43　假设存在满足条件的圆锥曲线 C，其离心率为 e，则 C 的方程为

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=e|x+4| \qquad \text{(i)}$$

因为(i)与方程 $x=y^2+2$ 仅有一解，也即方程

$$(1-e^2)y^4+(7-12e^2)y^2+9-36e^2=0 \qquad \text{(ii)}$$

仅有一实数解，所以 $y=0$．这是因为，若 $y=y_0$ 是方程(ii)的非零解，那么$y=y_0$也是(ii)的解，这与条件(2)矛盾，故$9-36e^2=0$，于是$e=\frac{1}{2}$．

故曲线C的方程是$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\frac{1}{2}|x+4|$，化简得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．此即为符合已知条件的曲线C的方程．

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=e|x+4| \qquad \text{(i)}$$

因为(i)与方程 $x=y^2+2$ 仅有一解，也即方程

$$(1-e^2)y^4+(7-12e^2)y^2+9-36e^2=0 \qquad \text{(ii)}$$

仅有一实数解，所以 $y=0$．这是因为，若 $y=y_0$ 是方程(ii)的非零解，那么 $y=y_0$ 也是(ii)的解，这与条件(2)矛盾，故 $9-36e^2=0$，于是 $e=\frac{1}{2}$．

故曲线C的方程是 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\frac{1}{2}|x+4|$，化简得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．此即为符合已知条件的曲线C的方程．

14－2－44　设椭圆方程为 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$．由题设得

$$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ \frac{a^2}{c}=x_0+2\\ \frac{(1-x_0)^2}{a^2}+\frac{(0-y_0)^2}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \frac{(2a-3)}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \qquad \text{(i)}$$

所以 $\frac{(2a-3)^2}{a^2}\leq 1 \Leftrightarrow 1\leq a\leq 3$

若存在 a 能使椭圆的中心在原点，则由 $x_0=2a-2=0$ 得，$a=1$ 代入(i)得 $y_0=0$．

所以当 $a=1$ 时，能使 $(x_0，y_0)=(0，0)$，且 $c=\frac{1}{2}$，$b^2=\frac{3}{4}$．此时椭圆的方程为

$$x^2+\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$$

14-2-45　若 C 点存在，即△ABC 是以 AB 为斜边的直角三角形，即 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，也即 $AC\perp BC$．可利用互相垂直的直线的斜率的性质推出矛盾．故不存在满足条件的点 C．

14-2-46　设满足条件的直线为

$$\begin{cases}x=t\cos\theta\\ y=-2+t\sin\theta\end{cases}$$

将直线方程代入抛物线方程得

$$t^2\sin^2\theta-4(\sin\theta+\cos\theta)t+4=0 \qquad \text{(i)}$$

首先，由 $\triangle=16(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)-16\sin^2\theta>0$，知 $2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta>0$．而 $\cos^2\theta\neq0$，故 $2\mathrm{tg}\theta+1>0$，所以 $\mathrm{tg}\theta>-\frac{1}{2}$．

其次，由 $|PQ|^2=|RP|\cdot|RQ|$，知

$$|t_2-t_1|^2=|t_1|\cdot|t_2| \Leftrightarrow (t_2-t_1)^2=t_1t_2 \Leftrightarrow (t_1+t_2)^2-5t_1t_2=0$$

将韦达定理用于方程(i)，止式变为

$$16\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^2-5\cdot\frac{4}{\sin^2\theta}=0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\theta-8\sin\theta\cdot\cos\theta-4\cos^2\theta=0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2\theta-8\mathrm{tg}\theta-4=0\Leftrightarrow \mathrm{tg}\theta=4\pm2\sqrt{5}$$

这些值均适合于 $\mathrm{tg}\theta>-1/2$.

所以存在满足条件的直线l：$y=(4\pm2\sqrt{5})x-2$.

14-2-47 (1)所求点 P 的轨迹方程是

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{8}{9}}-\frac{(y-1)^2}{8}=1$$

它表示中心在点(1，1)的双曲线.

(2)由(1)知$a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=\frac{4\sqrt{5}}{3}$，$e=\sqrt{10}$.假设双曲线上有点 Q 适合题意，应在左支上，于是

$$\frac{|QF_2|}{|QF_1|}=\frac{|QF_1|}{d}=e=\sqrt{10}\Leftrightarrow|QF_2|=\sqrt{10}|QF_1| \qquad \text{(i)}$$

另一方面，

$$|QF_2|-|QF_1|=2a=\frac{4\sqrt{2}}{3} \qquad \text{(ii)}$$

由(i)，(ii)解得

$$|QF_1|=\frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{10}-1)}，|QF_2|=\frac{8\sqrt{5}}{3(\sqrt{10}-1)}$$

故 $$|QF_1|+|QF_2|=\frac{4(\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{3(\sqrt{10}-1)}$$

而$|F_1F_2|=\frac{8\sqrt{5}}{3}$. 但$\frac{4(\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{3(\sqrt{10}-1)}<\frac{8\sqrt{5}}{3}$，这与$|QF_1|+|QF_2|\geq|F_1F_2|$矛盾，故满足条件的点Q不存在.

14-2-48 (1)首先推知 $0<a<1$，进而求得

$|AM|+|AN|=8$

(2)假设|AM|，|AP|，|AN|成等差数列．由(1)知|AP|=4．所以

$$4a^2-16a+a(8-2a)+2a\sqrt{a^2+8a}=0\Leftrightarrow a=1$$

这与 $0<a<1$ 矛盾，故适合条件的 a 不存在.

14-2-49 (1)用数学归纳法.注意把假设$0<x_k<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$变形为

$$\frac{1}{1+x_k}>\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

(2)证明$\{x_n\}$是递增数列．不存在合条件的正整数 M.

14-2-50 (1)所求轨迹方程为 $y^2=x(y>0)$.

(2)圆C的圆心的坐标为$\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}, \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right)$，半径$r=\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$．由题设条件知$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3\in(0，\pi)$且成等差数列，公差 $d\neq0$ 故

$$\theta_2=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_3)$$

(i)当$\theta_2=\frac{\pi}{2}$时，$r_2=\mathrm{tg}\frac{\theta_2}{2}=1$，$r_1$，$r_2$，$r_3$成等比数列．

(ii)当$\theta_2\neq\frac{\pi}{2}$时，

$$\frac{2r_2}{1-r_2^2}=\frac{r_1+r_3}{1-r_1r_3}$$

假设$r_2^2=r_1\bullet r_3$，推知$2r_2=r_1+r_2$．于是$r_1=r_2=r_3$，从而$\theta_1=\theta_2=\theta_3$与已知矛盾.故此时$r_1$，$r_2$，$r_3$不成等比数列.

3．分析型问题

14-2-51　由题中结论可知，应有判别式$\triangle>0$；$x_1+x_2>4$，$x_1x_2>4$；由二次函数 $f(x)=x^2+(m-2)x+5-m$ 的图象开口向上，可知 $f(2)>0$．由这些条件便构成确定 m 范围的充分条件(也是必要条件)：

$$\begin{cases}(m-2)^2-4(5-m)\geq0\\2-m>4\\5-m>4\\4+2(m-2)+5-m>0\end{cases}$$

解这个不等式组便可确定 m 的范围为$-5<m\leq-4$．

14-5-52 将结论$\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{\pi}{2}$和已知$|z_1|=|z_2|$视为两个条件，进而设法将此两条件转化为关于 a，b 的等量关系式，再由等量关系式求出 a，b．由结论$\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{\pi}{2}$可推得$z_1$和$z_2$的辐角主值相差$\frac{\pi}{2}$；又由已知模相等，并联想到复数乘法的几何意义，可得到关系式 $z_2=z_1i$，即

$$\sqrt{3}b-1+(\sqrt{3}-b)i=(2-\sqrt{3}a+ai)i$$

解此等式可得$a=b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

14-2-53　由基本不等式易得

$$f(x，y，z)=x^2+y^2+z^2$$

$$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\geq\frac{1}{3}(x+y+z)^2$$

再由$f_{\min}=\frac{1}{3}$逆索得到充分条件$x+y+z=1$或-1.

14-2-54　由题设条件知$\alpha>0$，$\beta>0$，从而可知 $m>0$．又因$\triangle\geq0$，即

$$4^2-4\cdot\frac{1}{m}\geq 0\Leftrightarrow m\geq\frac{1}{4}$$

解题设方程得$x=2\pm\sqrt{4-\frac{1}{m}}$.再由题设条件知

$$0\leq|\lg\alpha-\lg\beta|=\lg\frac{2+\sqrt{4-\frac{1}{m}}}{2-\sqrt{4-\frac{1}{m}}}\leq 1\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leq m\leq\frac{121}{160}$$

综合上述结果得，$\frac{1}{4}\leq m\leq\frac{121}{160}$.

14-2-55　因为α为非等边三角形的最小角，所以0°＜α＜60°，故$\frac{1}{2}<\frac{m+1}{m-1}<1$．由此不等式解得$m<-3$．即$m<-3$时，能使$\cos\alpha=\frac{m+1}{m-1}$成立．

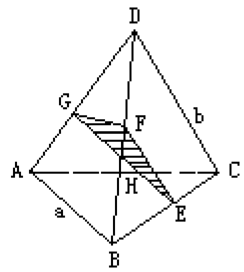
14-2-56　由题设条件易知 BED_1F 为平行四边形，要满足要求，只须△EBD_1面积最小.而由已知BD_1为定长,只要E到BD_1的距离EH最小.故只要EH是BD_1和CC_1的公垂线段即可.设上、下底的中心分别为O_1,O.连结OO_1和BD_1交于H．在平面ACC_1A_1内作$HE\perp CC_1$，则HE为BD，CC_1的公垂线段(证明略)．

14-2-57　首先由平面ASB⊥平面BSC推导出θ_1，θ_2，θ可能满足的关系式．由这个关系式若能推导出平面ASB⊥平面BSC，这个关系式就是我们所要探求的关系式.最后可推出平面ASB⊥平面BSC的充要条件是

$$\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2=\cos\theta$$

14-2-58　由题设条件可推得AB⊥EF，CD⊥EF且AB∥CD．显然，由此不能推出EF⊥BD．

欲使EF⊥BD，须EF⊥平面ABCD，从而EF⊥AC．因此，需增加条件AC⊥EF．还可将此条件加强，变为AC⊥β于C点．



14-2-59　如图，设AB，CD长分别为a，b；AB，CD所成角为α(均为定值)．设满足条件的截面为EFGH，其中BE：BC=λ．则易证得

$\angle FEH=\alpha$，$EF=\frac{\lambda}{1+\lambda}b$，$EH=\frac{1}{1+\lambda}a$，故

$$S_{EFGH}=EH\bullet EF\cos\alpha=\frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\lambda)}ab\cos\alpha$$

因为$\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}=1$(定值)，所以，当且仅当$\frac{1}{1+\lambda}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$，即$\lambda=1$时，$\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}$有最大值，即过各棱中点的截面面积最大．

14-2-60 欲由结论$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=0$推得θ的条件，必须先将结论式中的$a_n$-$a_{n-1}$换成θ的表达式．由已知

$$a_n\sin\theta-a_{n+1}\cos\theta=1，a_{n+1}\sin\theta-a_{n+2}\cos\theta=1$$

两式相减得

$$(a_{n+1}-a_n)\sin\theta+(a_{n+2}-a_{n+1})\cos\theta=0$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2}-a_{n+1}=-\mathrm{tg}\,\theta(a_{n+1}-a_n)=(-\mathrm{tg}\,\theta)^n(b-a)$$

由结论，即$\lim\limits_{n\to\infty}(-\mathrm{tg}\,\theta)^{n-2}(b-a)=0$．又由已知$a\neq b$，所以$|\mathrm{tg}\,\theta|<1$，所以

$$k\pi-\frac{\pi}{4}<\theta<k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$$

14-2-61　不妨设此实数解为x_0，则

$$x_0^2-kx_0-2x_0i+2+ki=0$$

$$\Leftrightarrow(x_0^2-kx_0+2)+(-2x_0+k)i=0$$

由复数为0的充要条件得

$$\begin{cases}x_0^2-kx_0+2=0\\-2x_0+k=0\end{cases}$$

由此可得$\left(\frac{k}{2}\right)^2-k\bullet\frac{k}{2}+2=0$，解之得$k=\pm2\sqrt{2}$．

14-2-62　将条件代入结论，有

$$1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma>0$$

欲研究α+β+γ满足的条件，可取其余弦函数

$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma$

$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}\gamma)$

又由结论和条件可知$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$及$(1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha)$均大于0，所以$\cos(\alpha+\beta+\gamma)>0$，而$0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$，所以当α＋β＋γ为锐角时才能使$1-ab-bc-ac>0$．

14-2-63　由条件知旋转90°后的椭圆方程为

$$\frac{(x-1)^2}{2}+(y-1)^2=1$$

设平移后的方程为

$$\frac{(x+k)^2}{2}+(y-1)^2=1$$

将$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$**代入后一方程并整理得**

$$2x^2+(2k-2\sqrt{2}x)+k^2=0$$

由相交弦长公式以及结论知

$$\frac{\sqrt{(2k-2\sqrt{2})^2-8k^2}}{2}\bullet\sqrt{1+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\sqrt{3}$$

解得$k=0$**或**$k=-2\sqrt{2}$**.**

故必须将旋转后的抛物线向左移一个单位或向右移$(2\sqrt{2}-1)$**个单位.**

(三)应用性问题

1．代数应用题(函数、不等式、数列)

14-3-1　设每天至少生产 x 件产品才能保本，则总成本为 0.8x+3000，而每天的总产值为 2x 元．工厂不亏损时，总收入等于总成本，即 2x=0.8x+3000，解之得 x=2500 件．

14-3-2　设 x 表示总产量，则 x∈[a，b]．生产 x 个单位产品变动成本为 dx，总成本为 y，则

$$y=c+dx \quad x\in[a,b]$$

14-3-3　设手表销售量为 x，x∈[10000，20000]．按每多销售 3000 只，价格相应地减少 3 元的比例，多销售 x-10000 只，价格就相应地减少$3\cdot\dfrac{x-10000}{3000}$，故价格函数

$$y=70-\frac{x-10000}{1000}$$

14-3-4　设手表价格为 x，需求量为 y，则

$$y=1000(80-x)(70\leq x\leq 80)$$

14-3-5　设总销售量为 x，销售总收入为 y，则

$$y=\begin{cases}80x \quad (0\leq x\leq 800)\\ 6400+72x(800<x\leq 1000)\end{cases}$$

14-3-6　$y=\begin{cases}200x \quad (a\leq x\leq 500)\\ 10000+180x \quad (500<x\leq 700)\end{cases}$

14-3-7　销售量为 Q 时，总收入函数为

$$R(p)=Qp=(5000-10p)p$$

于是总利润函数为

$$L(p)=R(p)-C(Q)=-10p^2-5030p-20000$$

当价格为$p_0=-\dfrac{5030}{2\times(-10)}=251.5$(元)时，总利润最大，最大总利润为 612522.5元.

14-3-8　设提高 x 元出售时，则利润为(10+x)(500-10x)元(0≤x<50)．当 x=20 时，(10+x)(500-10x)最大．故售价定为 70 元利润最大．

14-3-9　设日销售金额为 S 元．当 0≤t≤40，t∈N 时

$$S=\left(\frac{1}{4}t+22\right)\left(-\frac{1}{3}t+\frac{109}{3}\right)=-\frac{1}{12}(t+88)(t-109)$$

此时$S_{max}=\dfrac{9702}{12}$；

当$40<t\leq 100$，$t\in N$时，

$$S=\left(-\frac{1}{2}t+52\right)\bullet\left(-\frac{1}{3}t+\frac{109}{3}\right)=\frac{1}{6}(t-104)(t-109)$$

此时 $S_{max}=714$．

综合上述知，日销售金额的最大值为$\dfrac{9702}{12}=808.5$(元)．

14-3-10　设销售价定为 x 元时，可获利润 y 元，则

$$y=(x-2500)[400-(x-2700)\div 2]$$
$$=-\frac{1}{2}(x-3000)^2+125000$$

当 x=3000 时，y 有最大值 125000 元．

14-3-11　设蔬菜、棉花、水稻分别种 x，y，z 亩．预计产值

$$W=2200x+1500y+1200z \qquad \text{(i)}$$

由方程组 $\begin{cases} x+y+z=50 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=20 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} y=90-3x \\ z=2x-40 \end{cases}$，从而 $20\leq x\leq 30$．

代入(i)得

$$W=2200x+1500(90-3x)+1200(2x-40)$$
$$=100x+87000(20\leq x\leq 30)$$
$$W_{最大}=100\times 30+87000=90000$$

此时种蔬菜 30 亩，水稻 20 亩．

14-3-12　设喝酒后至少 x 小时才能驾驶，x 小时后，血液中酒精含量达 $0.3(1-50\%)^x=0.3\times 0.5^x$，得不等式

$$0.3\times 0.5^x\leq 0.08\Leftrightarrow x\geq\frac{\lg 0.2677}{\lg 0.5}\approx 1.91$$

大约 2 小时后，才能驾驶．

14-3-13　设杂志的最高定价为 x 元，则

$$x(12+\frac{1.2-x}{0.1}\times 4)\geq 20\Leftrightarrow 0.5\leq x\leq 1$$

最高定价为 1 元．

14-3-14　设 S 为 a 与各数据差的平方和，则

$$S=(a-a_1)^2+(a-a_2)^2+\cdots+(a-a_n)^2$$
$$=na^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)a+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

当 $a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 时，S 有最小值，故 a 的值应为 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$．

14-3-15　据题意

$$0.055x+\frac{x^2}{160}>12.2$$

解这个不等式即可知这辆汽车的车速每小时大于 40 千米．

14-3-16　设从刹车到停车滑行距离为 s 米，时速 v 千米，卡车总重量是 t，则据题意得 $s=kv^2t$(k 为比例常数)．设卡车空载总重量为 t_0，则 $20=k\cdot 50^2\cdot t_0$．设最大限速为 x 千米/时(x＞0)，则

$$20-5-\frac{1000}{3600}\geq 2kt_0x^2$$

依题意，其解(舍去小数部分)为 0＜x≤23．所以最大限制速度为 23 千米

/时.

14-3-17　设原住宅的窗户面积和地板面积分别为 a,b(平方单位)，同时增加的面积为 m(平方单位)，则 $a<b\leq 10a$，且 $m>0$. 注意到 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$. 因此，同时增加相等的窗户面积和地板面积，住宅的采光条件变好.

14-3-18　根据欧姆定律，按甲、乙、丙三种方法连接时，通过 R 的电流分别是

$$I_{甲}=\frac{2\varepsilon}{R+\frac{2r}{2}}，I_{乙}=\frac{4\varepsilon}{R+4r}，I_{丙}=\frac{\varepsilon}{R+\frac{r}{4}}$$

根据电功率公式 $P=I^2\cdot R$，由题意，有

$$P_{甲}=I_{甲}^2\bullet R>P_{乙}=I_{乙}^2\bullet R，P_{甲}=I_{甲}^2\bullet R>P_{丙}=I_{丙}^2\bullet R$$

即
$$\begin{cases}\left(\frac{2\varepsilon}{R+r}\right)^2>\left(\frac{4\varepsilon}{R+4r}\right)^2\\\left(\frac{2\varepsilon}{R+r}\right)^2>\left(\frac{4\varepsilon}{4R+r}\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2r<R<-\frac{r}{2}(舍)或\frac{r}{2}<R<2r$$

所以R的取值范围为 $\frac{r}{2}<R<2r$.

14-3-19　设明年产量为 x 袋. 分别考虑劳动力因素、原料因素和销售因素，得不等式组

$$\begin{cases}4x\leq 200\times 2100\\20x\leq(800-200+1200)\times 1000\\x\geq 80000\end{cases}$$

解得 $80000\leq x\leq 90000$. 明年的产量计划应为 80000 至 90000 袋之间.

14-3-20　设初始有人民币 a 元.

(1) $y=a(1+0.06)^x=1.06^x a$

或　$y=[0.24(1+0.06)^{x-1}+0.24(1+0.06)^{x-2}+\cdots+0.24]a$

$=(4\times 1.06^x-4)a$

(2)令 $1.06^x=4\times 1.06^x-4$，得 $x=\frac{\lg 4-\lg 3}{\lg 1.06}=4.9372$，即大约5年购股票与储蓄所拥有的人民币相等.

14-3-21　盒子的容积

$$V=(2a-2x)^2x\leq 2\left[\frac{(a-x)+(a-x)+2x}{3}\right]=\frac{16}{27}a^3$$

当 $a-x=2x$，即 $x=\frac{a}{3}$ 时，盒子的容积最大，最大值为 $\frac{16}{27}a^3$.

14-3-22　设 x，y 是所用纸张的长和宽，则

$(x-2a)(y-2b)=A$

所以 $y=\frac{A}{x-2a}+2b$

于是纸张面积为

$$S=xy=\frac{Ax}{x-2a}+2bx\geq(\sqrt{A}+2\sqrt{ab})^2$$

当且仅当$\frac{2Aa}{x-2a}=2b(x-2a)$时，S有最小值$(\sqrt{A}+2\sqrt{ab})^2$．这时$x=\sqrt{\frac{Aa}{b}}+2a$，$y=\sqrt{\frac{Ab}{a}}+2b$．

14-3-23 设池底半径为r，池高为h，则$\pi r^2h=\frac{3}{2}\pi$．制造成本

$$3\pi r^2+2\times2\pi rh\geq3\pi\sqrt[3]{3r^2\cdot2rh\cdot2rh}=9\pi$$

当$3r^2=2rh$，即$r=1$米，$h=\frac{3}{2}$米时，成本最低，为9π元．

14-3-24 设梁宽为x，梁高为h，圆柱直径为d，梁的强度$p=kxh^2$(k为一物理常数)．又$x^2+h^2=d^2$，所以$p=kx(d^2-x^2)$，于是

$$p^2=k^2x^2(d^2-x^2)^2=\frac{k^2}{2}\cdot2x^2\cdot(d^2-x^2)\cdot(d^2-x^2)$$

$$\leq\frac{k^2}{2}\left[\frac{2x^2+(d^2-x^2)+(d^2-x^2)}{3}\right]^3=\frac{4k^2d^6}{27}$$

故当$2x^2=d^2-x^2$，即$x=\frac{\sqrt{3}}{3}d$时，梁的强度取最大值，为$\frac{2\sqrt{3}}{9}kd^3$．这时梁高$h=\frac{\sqrt{6}}{3}d$，即$h=\sqrt{2}x$．即当梁高是梁宽的$\sqrt{2}$倍时，所截得的梁的强度最大．

14-3-25 设平均每年增长率为x，则

$$(1+x)^{20}=2$$

两边取对数得$\lg(1+x)=\frac{1}{10}\lg2$，从而可得$x\approx0.072=7.2\%$．平均每年增长7.2%，即可完成第一阶段的任务．

17-3-26 (1)设到2000年底我国人口达x亿，则

$$x=10\times(1.02)^{20}\approx14.859(亿)$$

(2)设人口每年比上年平均递增率最高是y，则

$$10\times(1+y)^{20}\leq12$$

解这个方程得y=0.92%．

14-3-27 设a_1，a_2，a_3…依次是1996年，1997年，1998年，……的年产量，则$\{a_n\}$是以2为首项，1.2为公比的等比数列，通项公式为$a_n=2\times1.2^{n-1}$．令$2\times1.2^{n-1}=12$．由此求出n=11，即从2006年开始，年产量超过12万件．

14-3-28 转化为等比数列问题．投资总额为

$$S_5 = 100 \times 1.1 \times \frac{1.1^5 - 1}{1.1 - 1} = 671.561(\text{万元})$$

14-3-29　各次往返路程构成一个等差数列，其中 $a_1=2\times600$，$d=2\times150$，$n=7$．可求得 $S_7=14700$．实际往返路程是 14700-100=14600(米)，即 14.6 千米．

14-3-30　设每年平均新增住房面积 d 万米^2．由题意，从 1994 年底起，这个城市每年底的住房面积组成一个以 160 万为首项，d 为公差的等差数列；每年底的人口组成一个以 20 万为首项，(1+1%)为公比的等比数列．1998 年底对应的项数 n=5．于是

$$20 \times (1+1\%)^4 \times 10 = 160 + 4d \Leftrightarrow d \approx 12.03(\text{万米}^2)$$

14-3-31　设成本为 a 元,则月初售出,到月末共获利为 100+(a+100)×2.4%；月末售出获利为 120-5=115．两者作差比较

$$[100+(a+100)\times2.4\%]-115=2.4(a-525)$$

故若成本大于 525 元，月初售出利润大；若成本小于 525 元，月末售出利润大；若成本等于 525 元，利润相等．

14-3-32　(1)经过 5 年猪的存栏数为

$$a_5=422(1+x)^5-m[(1+x)^4+(1+x)^3+(1+x)^2+(1+x)+1]$$

$$= 422(1+x)^5 - m\frac{(1+x)^5 - 1}{x}$$

(2)当 x=50%时，

$$a_5 = \frac{211 \times 243}{16} - \frac{211}{16}m$$

令 $a_5=422\times4$，解得 m=115．满足题意的 m 的最大值是 115(头)．

14-3-33　第 20 年末的木材存量为

$$a\left(\frac{5}{4}\right)^{20} - x\left[1 + \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{4}\right)^{19}\right]$$

$$= a\left(\frac{5}{4}\right)^{20} - 4x\left(\frac{5}{4}\right)^{20} + 4x$$

依题意

$$a\left(\frac{5}{4}\right)^{20} - 4x\left(\frac{5}{4}\right)^{20} + 4x = 4a$$

令 $y = \left(\frac{5}{4}\right)^{20}$，则 $\lg y = (\lg 5 - 2\lg 2) \times 20$．由 $\lg 2 = 0.3$ 代入得到 $y = 100$．

从而解得 $x = \frac{8}{33}a$．故每年砍伐量的最大值为 $\frac{8}{33}a$．

14-3-34　(1)依题意得

$$y(1+x\%)^9+y(1+x\%)^8+\cdots+y(1+x\%)+y$$

$$=3000(1+x\%)^3+3000(1+x\%)^2+3000(1+x\%)+3000$$

故　$$y = \frac{3000[(1+x\%)^4 - 1]}{(1+x\%)^{10} - 1}(\text{元})$$

(2)将 x=20 代入上式，

$$y=\frac{3000(1.2^4-1)}{1.2^{10}-1}=\frac{3000(2.074-1)}{6.194-1}\approx 620(\text{元})$$

14-3-35　设第 n 天堤坝发生危险，则有

$$5000\sqrt{n(n+24)}-4000n>128000-80000$$

$$\Leftrightarrow n<-32\text{或}n>8$$

由于 n∈N，所以取 n＞8．故该水库在第 9 天会发生危险．

14-3-36　(1)依题设有

$$1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2}$$

即　$5x^2+(8t-80)x+(4t^2-64t+280)=0$

当判别式$\triangle=800-16t^2\geq 0$ 时，可得

$$x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$$

由△≥，t≥0，8≤x≤14，得不等式组

$$\begin{cases}0<t\leq\sqrt{50}\\8\leq 8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 14\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}0<t\leq\sqrt{50}\\8\leq 8-\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 14\end{cases}$$

解前一不等式组，得$0\leq t\leq\sqrt{10}$．后一不等式组无解．

故所求的函数关系式为

$$x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$$

函数的定义域为$[0,\sqrt{10}]$．

(2)为使 x≤10，应有

$$8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 10\Leftrightarrow t\geq 1\text{或}t\leq -5$$

由于 t≥0，故只能取 t≥1．从而政府补贴至少为每千克 1 元．

14-3-37　当税率为 p%时，销售金额为 f(p)=80(80-10p)万元，税收金额为 g(p)=80(80-10p)p%．于是

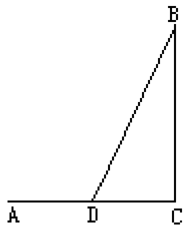
(1)80(80-10p)p%≥96 且 0＜p＜8，解得 2≤p≤6．

(2)当 2≤p≤6 时，f(p)=80(80-10p)要最大，只需取 p=2，此时 $f(p)_{max}$=4800(万元)．

(3)当 0＜p＜8 时，

$$g(p)=80(80-10p)\frac{p}{100}=-8(p-4)^2+128$$

即当 p=4 时，$g(p)_{max}$=128．



14-3-38　如图．视河为一条直线，B 为直线外一点，设从河岸 D 处筑一条公路到城市 B．每吨公里水路运费为 1 个价格单位．设 AD=x 千米$(0\leq x\leq 40)$，则$BD=\sqrt{30^2+(40-x)^2}$，而总运费

$$y=x+2\sqrt{30^2+(40-x)^2}$$

化上式为关于 x 的二次方程

$$3x^2-2(160-y)x+(10000-y^2)=0$$

令其判别式非负，即

$$\triangle=16(y^2-80y-1100)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow y\geq 40+30\sqrt{3}\text{或}y\leq 40-30\sqrt{3}(\text{负值舍去})$$

此时$x=-\dfrac{-2(160-y)}{2\times 3}=40-10\sqrt{3}\approx 23$．要使运费最省，公路的靠河一端应筑于A，C间距A约23千米处．

2．代数应用题(集合、排列组合、复数)

14-3-39　设集合 A={有彩电的农户}，B={有自行车的农户}．一方面，

$$n(A\cup B)=100-2=98$$

另一方面

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=65+84-53=96$$

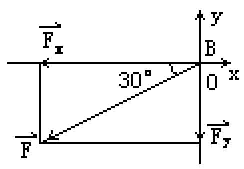
两者矛盾．说明统计数据不正确．

14-3-40　最小值为 26 人，最大值为 53 人．

14-3-41　甲方最终获胜的情况有

$$C_6^6+C_7^6+C_8^6+\cdots+C_{13}^6=C_{13}^7(\text{种})$$

乙方与此相同．故比赛过程的种数是$2C_{13}^7$．



14-3-42　取 B 为坐标原点，B，C 所在的直线为实轴建立复平面．如上图．$\vec{F}$表示梁AB所受的力，$\vec{F}_x$表示链条BC的拉力，$\vec{F}_y$表示起吊物重量，它们的大小分别用f，f_x，f_y表示，则有

$$\vec{F}_x=-f_x+0i，\vec{F}_y=0-1000i$$

$$\vec{F}=f(\cos 210°+i\sin 210°)$$

而$\vec{F}=\vec{F}_x+\vec{F}_y$，根据复数相等的意义可得

$$f\bullet\sin 210°=-1000，f_x=-f\bullet\cos 210°$$

由此可求得

$$f=2000(\text{千克}),\ f_x=1000\sqrt{3}(\text{千克})$$

3．三角函数应用题

14-3-43　设 x 小时后 B 行驶到 D，A 行驶到 C．根据已知条件，BD=20x，BC=100-15x．由余弦定理知

$$DC^2=BD^2+BC^2-2\cdot BD\cdot BC\cdot\cos\angle DBC$$
$$=(20x)^2+(100-15x)^2-2\times 20x\cdot(100-15x)\cdot\cos 120°$$
$$=325x^2-1000x+10000\left(0<x<\frac{20}{3}\right)$$

当$x=\frac{20}{13}$时，DC^2有最小值．即两船行驶$\frac{20}{13}$小时时两船相距最近，约96海里．

14-3-44　过 A 点向钢板 P，Q 外沿作垂线 AC，AD．

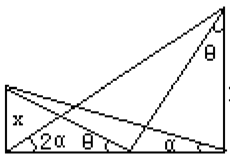
在 Rt△ACB 及 Rt△ADB 中，

$$AB=\frac{AC}{\sin x},\ AB=\frac{AD}{\sin(60°-x)}$$

于是得三角方程

$$\frac{4}{\sin x}=\frac{8}{\sin(60°-x)}\Leftrightarrow x=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$$

答：$x=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}\approx 19°$．



14-3-45　如上图，设两塔高分别为 x，y，则

$$x=60\mathrm{tg}\theta,\ y=60\mathrm{ctg}\theta$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{x}{120},\ \mathrm{tg}2\alpha=\frac{y}{120}$$

由以上诸方程可先求出$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{3}$，然后求得$x=40$米，$y=90$米．

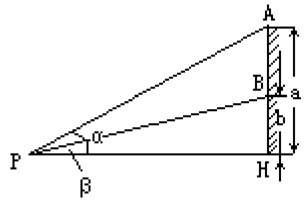
14-3-46　$I_A+I_B+I_C=0$ 即

$$\sin\omega t+\sin(\omega t+120°)+\sin(\omega t+\beta)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+\cos\beta\right)\sin\omega t+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\beta\right)\cos\omega t=0$$

于是有$\begin{cases}\frac{1}{2}+\cos\beta=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\beta=0\end{cases}$

而 0°＜β＜360°，故β=240°．



14-3-47　如上图．设学生 P 距黑板 x 米．黑板上、下边缘与学生 P 的水平视线 PH 的夹角分别为∠APH=α，∠BPH=β（α＞β），则 tgα= $\frac{a}{x}$，$\mathrm{tg}\beta=\frac{b}{x}$，所以

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{(a-b)x}{x^2+ab}$$

当且仅当$x=\sqrt{ab}$时，$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$的值最大．

14－3－48 $BD=\frac{8}{\mathrm{tg}75°-\mathrm{tg}60°}=\frac{8(3-\sqrt{3})}{6-2\sqrt{3}}=4>3.8$

所以不会触礁．

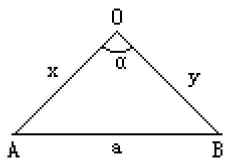
14-3-49　设任意两颗相邻(相切)的滚球中心为 P，Q，轴承的内、外圆的圆心为 O．设∠POQ=α，则

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{d}{2}}{R+\frac{d}{2}}=\frac{d}{2R+d}\Leftrightarrow\alpha=2\arcsin\frac{d}{2R+d}$$

故可放滚球的个数不超过

$$\frac{2\pi}{\alpha}=\frac{\pi}{\arcsin\frac{d}{2R+d}}$$

14-3-50　塔现达高度为 158.3 米．



14-3-51　如上图．先设矩形木板的长边 AB=a 着地，令 OA=x，OB=y，则

$$a^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow a^2\geq 2xy(1-\cos\alpha)$$

由于 0＜α＜π，1-cosα＞，所以

$$xy\leq\frac{a^2}{2(1-\cos\alpha)}(\text{当且仅当}x=y\text{时取等号})$$

此时谷仓的容积最大，最大值为

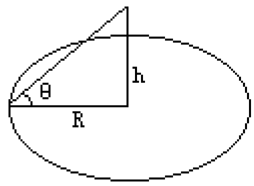
$$V_1=\left(\frac{1}{2}xy\sin\alpha\right)b=\frac{a^2b\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)}=\frac{1}{4}a^2b\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

同理，若木板的短边着地时，谷仓的容积最大值

$$V_2=\frac{1}{4}ab^2\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

但 a＞b，所以 $v_1>V_2$.

因此，当木板的长边着地且谷仓的底面是以 a 为底边的等腰三角形时，谷仓的容积最大，其最大值为 $\frac{1}{4}a^2b\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.



14-3-52　如上图所示.

$$r=\frac{R}{\cos\theta}，I=\frac{k}{R^2}\sin\theta\cdot\cos^2\theta(0°<\theta<90°)$$

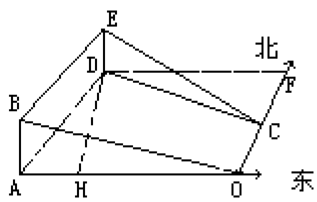
所以，

$$I^2=\frac{K^2}{R^4}\sin^2\theta\cdot\cos^4\theta$$

$$\leq\frac{k^2}{2R^4}\left(\frac{2\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}{3}\right)=\frac{4k^2}{27R^4}(常数)$$

当且仅当 $2\sin^2\theta=\cos^2\theta$，即 $\mathrm{tg}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时上式取等号，也即 I 取最大值，此时 $h=R\mathrm{tg}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}R$，所以把灯挂在桌面正中央离桌面 $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ 处，桌面边缘亮度最大.

14-3-53　同 14-3-50.



14-3-54　作出草图如上．正北方向为 OF，正西方向为 OA．设看飞机在正西时，汽车位置是 O 点，飞机位置是 B 点，飞机正下方是 A 点；36 秒后，汽车位置是 C 点，飞机位置是 E 点，飞机正下方是 D 点．因为飞机在一定高度的一条直线上飞行，所以可设

AB=DE=x 千米，∠AOB=∠ECD=∠DCF=30°

在 Rt△AOB 与 Rt△EDC 中，

$$OA=CD=x\cdot\mathrm{ctg}30°=\sqrt{3}x$$

$$BE=100\times\sqrt{7}\times\frac{36}{3600}=\sqrt{7}，OC=100\times\frac{36}{3600}=1$$

过 D 作 DF⊥OF 于 F，则

$$DF = CD \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}x，CF = CD \cdot \cos 30° = \frac{3}{2}x$$

过D作DH⊥OA于H，则$HO = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

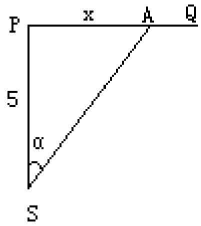
在 Rt△AHD 中，

$$AH = AO - HO = \frac{\sqrt{3}}{2}x，HD = FO = OC + CF = 1 + \frac{3}{2}x$$

因为 $AD^2=AH^2+HD^2$，即

$$7 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{2}x\right)^2 \Leftrightarrow x = 1$$

所以飞机高度为 1 千米.



14-3-55 如上图.设此人在 P，Q 间距 P 点 x 千米的 A 处登岸，由 S 到 Q 需 t 小时，则

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 5^2}}{4} + \frac{5 - x}{6}$$

整理得 $12t - 10 + 2x = 3\sqrt{x^2 + 5^2}$

由此求得 t 的最小值

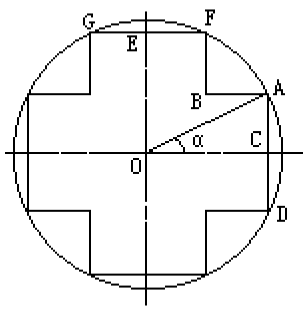
$$t_{最小} = \frac{5}{12}(\sqrt{5} + 2)$$

此时$x = 2\sqrt{5}$，则

$$tg\angle PSA = \frac{AP}{PS} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \angle PSA = arctg\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

即此人应朝北偏东$arctg\frac{2\sqrt{5}}{5}$的方向驶船登岸，才能使他到达Q点时间最短.

14-3-56 利用余弦定理和二次函数求最值的方法，可以求得甲船离港 4 海里，乙船离港 5 海里.



14-3-57 如上图.设 AO=a，AC=CD=EF=EG=x，EO=CO=y，则 AB=BF=y-x.

十字形铁片面积

S=[xy+x(y-x)]

设∠AOC=α，则 x=asinα，y=acosα，代入上式，整理后可得

$$S=2a^2\left[\sqrt{5}\sin\left(2\alpha+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-1\right]$$

所以，当$\sin(2\alpha+\operatorname{arctg}\frac{1}{2})=1$时，面积的最大值是$2a^2\left(\sqrt{5}-1\right)$.

14-3-58　设所求的底边 CD=x 米，梯形的腰 AC=y 米．从而湿周长

l=CD+AC+BD=x+2y

$$=x+2\left[\sqrt{x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}S}-x\right]=2\sqrt{x^2+a^2}-x$$

$$\left(\text{其中}a^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}S\right)$$

为了求 l 的最小值，令 x=atgθ(0°＜θ＜90°)，得

$$l=a\cdot\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}\Leftrightarrow\frac{l}{a}\cos\theta=2-\sin\theta$$

两边平方得

$$\left(\frac{l}{a}\right)^2\cos^2\theta=4-4\sin\theta+\sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{l^2}{a^2}+1\right)\sin^2\theta-4\sin\theta+\left(4-\frac{l^2}{a^2}\right)=0\qquad(i)$$

因为 sinθ 为实数，所以

$$(-4)^2-4\left(\frac{l^2}{a^2}+1\right)\left(4-\frac{l^2}{a^2}\right)\geq0\Leftrightarrow\frac{l^2}{a^2}\left(\frac{l^2}{a^2}-3\right)\geq0$$

因为$\frac{l}{a}>0$，解得$\frac{l}{a}\geq\sqrt{3}$，湿周长的最小值$l_{min}=\sqrt{3}a$，将它代入(i)，

解得$\theta=30°$，此时$x=a\cdot tg30°=\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{S}$(米).

由问题的实际意义，可知湿周长有最小值存在，即底边取值$\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$米时，可使湿周最小.

14-3-59　由题意得 BD=a(1+cosθ)，所以

$$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)\sin\theta$$

当$\theta=60°$时，$S_{\triangle BDC}$最大，最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$.

14-3-60　因为$AC=\frac{m}{\cos A}$，A′C＝mtgA，CB′＝A′B′－A′C＝l－mtgA，所以从 A 经过 C 到 B′所需时间为

$$t=\frac{m}{u\cos A}+\frac{l-mtgA}{v}=\frac{l}{v}+\frac{m}{v}\cdot\frac{\frac{v}{u}-\sin A}{\cos A}$$

由于$\frac{l}{v}$，$\frac{m}{v}$为常数，问题转化为求

$$y=\frac{\frac{v}{u}-\sin A}{\cos A}$$

的最小值．参照 14-3-58 题的方法求得

$$y_{min}=\frac{\sqrt{v^2-u^2}}{u}$$

从而$\sin A=\frac{u}{v}$，$A'C=mtgA=\frac{mu}{\sqrt{v^2-u^2}}$．即车站C距A′为$\frac{mu}{\sqrt{v^2-u^2}}$千米，它与l的长短无关．同理，站D距B′为$\frac{nu}{\sqrt{v^2-u^2}}$千米．

4．立体几何应用题

14-3-61　木球半径约为 3.464㎝，一根木料可加工 28 个木球，加工 1000 个木球需 36 根木材．

14-3-62　正方体木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 锯掉 4 个角即得到最大的正四

面体木块ACB_1D_1．这个正四面体体积为原正方体体积的$\frac{1}{3}$．

14-3-63　塔高约 104 米．

14-3-64　该锥体的全面积为 75π，所需费用 24 元．

14-3-65　当水箱所盛水的水平面恰好经过 P，Q，R 三点时，所盛水最多．不妨设 P，Q，R 三点所确定的平面交 CD 于 S，交 BC 延长线于 M，易知 M 为 PQ，BC，RS 三直线的交点，则 BPR-CQS 为三棱台．故所求容积为

$$V=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{BPR-CQS}=13300(cm^3)$$

14-3-66　该正方体放入容器后，一部分露在容器外面．算出正方体位于容器口以下部分的体积约为 $33.6cm^3$,容器放入正方体前尚余的容积约为 $44.3cm^3$．由 33.6＜44.3 知放入铁块后容器中的水不会溢出．

14-3-67　因正四棱锥的底面边长就是所裁等腰三角形底边长，侧棱长就是所裁三角形的腰长．若设所裁等腰三角形底边长为 x㎝，则

$$V_{正四棱锥}=\frac{1}{3}x^2\sqrt{25-\frac{1}{4}x^2}\,(0<x<10)$$

运用算术-几何平均不等式可得,当所裁等腰三角形底边长约为 8.2㎝时，所制造的容器容积最大，最大容积约为 $64.1cm^3$．

14-3-68　OC 应取 36㎝．

14-3-69　该房间是一个长方体，要使灯光集中照亮房内墙壁 1m 高以下各处，只要长方体的对角面满足这一要求即可．灯泡应装在距地板 250㎝ 高处．

14-3-70　两箱球一样重．

14-3-71　光源距广场的高度应为 17.3 米．

14-3-72 浮出水面部分的体积占全球体积的$\frac{5}{32}$．

14-3-73　设铆钉的钉杆铆过钢板以后剩余部分的长为 x㎜，那么 l=20+x，从而

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 x=\frac{1}{6}\pi h\left[3\left(\frac{D}{2}\right)^2+h^2\right]$$

解之 x≈45，故钉杆长 l≈65(㎜)．

14-3-74　圆轴的直径应约为 35.4㎜．

14-3-75　可缩短 129π千米的航程．

5．解析几何应用题

14-3-76　剩余部分的重心是(-6，0)

14-3-77 光线从A到B的长度为$5\sqrt{13}$．

14-3-78　欲使卡车通过，a 最小整数值应取 13．

14-3-79　支柱 A_2P_2 的长约 4.49m．

14-3-80　p=15，所以抛物线方程为 y^2=30x．又 A=30，所以抛物线的一个端点为(d，15)，将其代入方程解得 d=7.5．所以反射面开口为 30 米，深度为 7.5 米．

14-3-81　设抛物线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}$$

这里$p=\frac{2-\sqrt{3}}{2}d$或$p=\frac{2+\sqrt{3}}{2}d$．当$\theta=180°$时，得到所求的最近距离$\frac{2-\sqrt{3}}{4}d$或$\frac{2+\sqrt{3}}{4}d$．

14-3-82　设彗星轨道的极坐标方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

由$\theta=180°$时$\rho=2$得，$2=\frac{ep}{1+e}$；又由$\theta=90°$时$\rho=3.6$得$3.6=ep$．解关于 e，p 的方程组得 e=0.8．这个彗星的轨道是椭圆，它还会再回来．

14-3-83　取 AB 的中点为原点 O，直线 AB 为 x 轴，建立直角坐标系．设 P(x，y)是区域分界线上的任一点．得方程

$$\left(x+\frac{25}{4}\right)^2+y^2=\left(\frac{15}{4}\right)^2$$

故从A，B两地购买此货运费相等的点的轨迹是以$(-\frac{25}{4}，0)$为圆心，以$\frac{15}{4}$为半径的圆．圆上的居民从 A，B 两地购买此货的总费用相同；圆内的居民从 A 地购买合算；圆外的居民从 B 地购买合算．

14-3-84　取最小半径圆的圆心 O 为原点，一条直径所在直线为 x 轴建立直角坐标系，则双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{x^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

由$a=12$和点$(25，-45)$在双曲线上，求得$b^2=\frac{45^2\times 12^2}{25^2-12^2}$．令$y_0=10$，得$x_0=\frac{2}{9}\sqrt{3397}$即为所求半径．

14-3-85　以 A，B 两点所在的直线为 x 轴，线段 AB 的中垂线为 y 轴建立直角坐标系，则 A 的坐标为(-5×340,0)．由爆炸声的时间差为 6 秒，知点 P 在双曲线

$$\frac{x^2}{(3\times 340)^2}-\frac{y^2}{(4\times 340)^2}=1 \qquad \text{(i)}$$

上，又 B 处的声强是 A 处的 4 倍，知点 P 也在圆

$$3x^2+3y^2-50\times 340x+3\times(5\times 340)^2=0 \qquad \text{(ii)}$$

上．联立(i)，(ii)解得点 P 坐标后计算得

$$|PA|=\frac{344}{15}\sqrt{34361}$$

14-3-86　以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立坐标系．则弹道抛物线的方程是

$$y=-\frac{1}{7500}(x-3000)^2+1200$$

将$x=500$代入方程求得$y=\frac{1100}{3}\approx 367>350$．所以可越过障碍物击中目标．

14-3-87　当曲柄 OB 在右半圆时，点 M 的轨迹的参数方程是

$$\begin{cases} x=b\cos\theta+\sqrt{r^2-(a+b)^2\sin^2\theta} \\ y=a\sin\theta(|\theta|\leq \arcsin\frac{r}{a+b}) \end{cases}$$

当曲柄 OB 在左半圆时，点 M 的轨迹的参数方程是

$$\begin{cases} x=b\cos\theta-\sqrt{r^2-(a+b)^2\sin^2\theta} \\ y=a\sin\theta(|\theta|\leq \arcsin\frac{r}{a+b}) \end{cases}$$