

高考数学填空题

西北工业大学 李潜 同济大学 邓琳玮

填空题是高考数学的一种重要的题型,分值虽小却占有重要的地位.可以说,做好填空题是拿到高分的关键.在解答作为介于选择题和解答题之间的填空题时,既要有选择题的灵活性,又要有解答题的严密性.那么,如何提高解填空题的准确率和速度呢?下面以往年年全国各地高考试题的填空题为例,对题目按知识点进行分类,谈谈解填空题的技巧.

一、函数

【例1】(江西卷)若函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 2a^2})$ 是奇函数,则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】对于奇函数 $f(x)$, 我们有 $f(-x) = -f(x)$, 用这个性质来解决此题固然是可以的, 但作为一道填空题来讲, 这样做的计算量就偏大了. 在这里, 我们先考虑一个特殊的函数值, 就是 $f(0)$, 易知对任意奇函数 $f(x)$ ($0 \in \text{定义域}$), 总有 $f(0) = 0$, 所以在本题中, 我们就有 $f(0) = \log_a \sqrt{2a^2} = 0$, 也就是 $2a^2 = 1$, 解得 $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. 事实上, 这里我们用到的就是解填空题是常用的特殊值法.

【例2】(福建卷)把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题.

若函数 $f(x) = 3 + \log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于__对称, 则函数 $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ (注: 填上你认为可以成为真命题的一种情形即可, 不必考虑所有可能的情形)

【解析】这是一道结论开放型试题, 没有惟一的结论, 但是所填的一般都是比较常规的答案. 比如, 前一空填 x 轴, 那么我们就用 $-y$ 来替换 y , 于是得到 $g(x) = -3 - \log_2 x$; 同样地, 若前一空填 y 轴, 那么我们就用 $-x$ 来替换 x , 于是得到 $g(x) = 3 + \log_2(-x)$; 若前一空填坐标原点, 那么我们就用 $-x$ 来替换 x 、用 $-y$ 来替换

y ，于是得到 $g(x)=-3-\log_2(-x)$ ；当然，我们也可以考虑 $f(x)$ 的反函数，于是第一空填 $y=x$ ，第二空填 2^{x-3} 。

二、数列

【例 3】(湖北卷) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，前 n 项的和为 S_n ，若 S_{n+1} 、 S_n 、 S_{n+2} 成等差数列，则 q 的值为_____。

【解析】我们知道，对等比数列求和时，应该分两种情况考虑。当公比为 1 时， $S_n=na_1$ ；当公比不为 1 时， $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 。

对于本题，当 q 为 1 时，我们有 $2na_1=(n+1)a_1+(n+2)a_1$ ，化简后就是 $0=3$ ，这显然是不可能的。当 q 不为 1 时，我们有 $2 \cdot \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q} + \frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q}$ ，化简后得到 $q^2+q-2=0$ ，解得 $q=1$ 或 $q=-2$ 。而前述我们已经得到 q 不可能为 1，所以只有 $q=-2$ 。

讨论完此题之后，大家都不会认为这个题是个难题。但事实上，据考后笔者了解到的情况，不少考生都将 1 填入了空中，白白的丢掉了 4 分，这是很可惜的。所以说，在解填空题时，一定要严谨。

【例 4】(北京卷) 已知 n 次多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 。

如果在一种算法中，计算 x_0^k ($k=2,3,4,\dots,n$) 的值需要 $k-1$ 次乘法，计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算 (6 次乘法，3 次加法)，那么计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要_____次运算。

下面给出一种减少运算次数的算法： $P_0(x_0)=a_0$ ， $P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}$ ($k=0,1,2,\dots,n-1$)。利用该算法，计算 $P_3(x_0)$ 共需要 6 次计算，计算 $P_n(x_0)$ 的值共

需要_____次运算 .

【解析】这是一道信息提取题 ,要求我们对题中所给的信息进行阅读和加工 ,首先我们来看第一步 ,计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算 (6 次乘法 , 3 次加法) 应该分别是对 x_0^3 的计算 ,需 2 次乘法 ;对 x_0^2 的计算 ,需 1 次乘法 ;对 a_0x^3 、 a_1x^2 、 a_2x 的计算 ,共需 3 次乘法 ,共 6 次 . 加法就是将四个项相加的 3 次加法 . 以此类推 ,计算 $P_n(x_0)$ 的值时 ,首先要做 $[1+2+\cdots+(n-1)]+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 次乘法 ,然后要做 n 次加法 ,所以是 $\frac{n(n+3)}{2}$ 次运算 .

下面再看第二步 ,由于 $P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}$,使得由 $P_k(x)$ 到 $P_{k+1}(x)$ 只需要一次乘法和一次加法 ,那么在 $P_0(x_0)=a_0$ 的条件下 ,每次由 k 到 $k+1$ ($k=0,1,2,\dots,n-1$) 均增加 2 次运算 ,所以此时计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要 $2n$ 次计算 .

三、三角函数

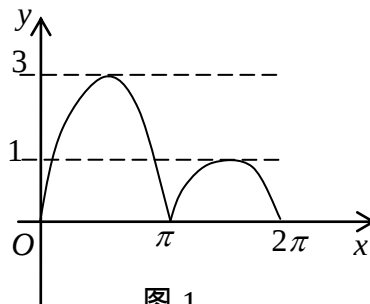
【例 5】(重庆卷) 已知 α 、 β 均为锐角 , 且 $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$, 则 $\tan\alpha=$ _____.

【解析】这个题需要我们认真地观察 , 如果盲目地就用和差角公式将 $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$ 展开 , 将很难继续算下去 . 而事实上 , 由于 α 、 β 均为锐角 , 因此我们可以得到 $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=\frac{\pi}{2}$, 于是 $\alpha=\frac{\pi}{4}$, 所以有 $\tan\alpha=1$.

【例 6】(上海卷) 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$

的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点 , 则 k 的取值范围是_____.

【解析】首先 , 我们用分段函数的形式写出函数 $f(x)$ 的表达式 :



$$f(x) = \begin{cases} 3\sin x, & x \in [0, \pi), \\ -\sin x, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

于是，我们可以做出函数 $f(x)$ 的图象如图 1 所示

根据图象我们可以知道 $1 < k < 3$.

四、平面向量

【例 7】(全国卷错误！未找到引用源。) $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O ，两条边上的高的交点为 H ， $\overrightarrow{OH} = m(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ ，则实数 $m =$ _____ .

【解析】在学习向量的时候，我们就经常见到一个结论，若 $\triangle ABC$ 的外心、垂心分别为 O 、 H ，则 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ，直接套用这个结论，可知本题中 $m=1$. 关于这个结论的证明，很多资料上都有详细的论述，这里就不再赘述了 .

【例 8】(江苏卷) 在 $\triangle ABC$ 中， O 为中线 AM 上一个动点，若 $AM=2$ ，则 $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 的最小值是_____ .

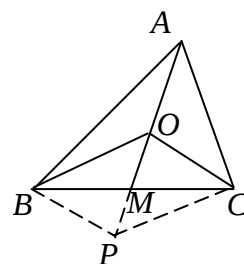


图 2

【解析】本题是一道以向量为载体，考查不等式应用的题目 . 首先，由于题目中没有角度关系，所以我们需要把向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 转化到一条直线上 . 如图 2，延长 AM 到点 P ，使得 $OM=PM$ ，连接 BP 、 CP ，则四边形 $OBPC$ 是平行四边形，于是 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP}$. 设 $|\overrightarrow{OA}| = x$ ，则

$$\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = -|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OP}| = -2x(2-x) \geq -2 \cdot \frac{(x+2-x)^2}{4} = -2 .$$

其中等号当且仅当 $x=2-x$ 即 $x=1$ 时成立，所以 $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 的最小值是 -2 .

五、不等式

【例 9】(全国卷错误！未找到引用源。) 若正整数 m 满足 $10^{m-1} < 2^{512} < 10^m$ ，

则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$. ($\lg 2 \approx 0.3010$)

【解析】如果 $\lg 2$ 是一个没有提示的值，那么这个题或许就会难一些，括号中提示 $\lg 2$ 值的意义决不仅仅在于计算．它直接提示了我们可以利用对数函数的性质，对不等式的各项取对数，化简后就是 $m-1 < 512\lg 2 < m$ ，解得 $m=155$ ．

【例 10】(全国卷错误！未找到引用源。) 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $BC=3$ ， $AC=4$ ， P 是 AB 上的点，则点 P 到 AC 、 BC 的距离乘积的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ．

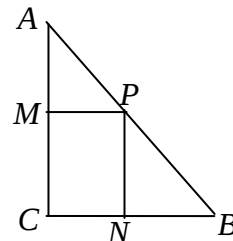


图 3

【解析】如图 3，记点 P 到 AC 、 BC 的垂线的垂足分别为 M 、 N ，设 $CN=x$ ，则可算得 $PM=3-x$ ， $PN=\frac{4}{3}x$ ，则

$$PM \cdot PN = \frac{4}{3}x(3-x) \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{(x+3-x)^2}{4} = 3 \text{ 其中等号当且仅当 } x=3-x \text{ 即 } x=\frac{3}{2} \text{ 时}$$

成立，所以点 P 到 AC 、 BC 的距离的乘积的最大值是 3．

本题在求最值时所采取的手法与前面的例 8 异曲同工，都用到了这样一个不等式： $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ （其中等号当且仅当 $a=b$ 时成立）．这个不等式与我们常用的不等式 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 是等价的，同样有着广泛的应用．

六、平面解析几何

【例 11】(湖南卷) 已知直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相交于 A 、 B 两点，且 $|AB|=\sqrt{3}$ ，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【解析】在解答题中，我们遇到此类与二次曲线的弦有关的问题时，总是先想到列方程组之后用一元二次方程根与系数的关系求解．但是对一道填空题来说，这样做将得不偿失．这时，我们应该换一种角度考虑．首先，我们很容易知

道,当三角形三边分别为 1、1、 $\sqrt{3}$ 的时候,三个内角分别是 30° 、 30° 、 120° (如果不知道这个结论可以用余弦定理推导). 在本题中, 也就是 $\angle AOB=120^\circ$, 于是

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \angle AOB = -\frac{1}{2}.$$

【例 12】 (江西卷) 以下四个关于圆锥曲线的命题中 :

- ① 设 A 、 B 为两个定点, k 为非零常数, $|\overrightarrow{PA}| - |\overrightarrow{PB}| = k$, 则动点 P 的轨迹为双曲线 ;
- ② 过定圆 C 上一定点 A 作圆的动点弦 AB , O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ 则动点 P 的轨迹为椭圆 ;
- ③ 方程 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 的两根可分别作为椭圆和双曲线的离心率 ;
- ④ 双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{35} + y^2 = 1$ 有相同的焦点 .

其中真命题的序号为 _____. (写出所有真命题的序号)

【解析】 本题的答案是③④, 这两个命题的正确性是显然的. 命题①是一个老生常谈的问题, 因为没有对 k 的范围进行限制, 所以是不对的. 很多同学可能会把②选上, 因为计算出的结果满足一个椭圆方程, 但是, 由于 A 、 B 是不同的点, 因此在 P 点的轨迹上应该挖去一点 (A 点), 也就是说, 点 P 的轨迹是椭圆挖去一点得到的图形.

【例 13】 (山东卷) 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点 F , 右准线 l 与两条渐近线交于 P 、 Q 两点, 如果 $\triangle PQF$ 是直角三角形, 则双曲线的离心率 $e =$ _____ .

【解析】 求圆锥曲线的离心率, 实际上就是对满足某种性质的圆锥曲线的 a 、 b 、 c 之间的关系. 对于此题, 我们首先根据对称性知, $\triangle PQF$ 是等腰直角三角形,

记 l 交 x 轴于点 R ，则 $|PR|=|FR|$ 。事实上，对于 $|FR|$ ，我们最好记住一个结论，可在解题中节省一些时间，就是椭圆与双曲线的焦点与准线之间的距离（也就是焦参数） $p = \frac{b^2}{c}$ 。另一方面，我们由 $x = \frac{a^2}{c}$ 和 $y = \frac{b}{a}x$ 可知 P 点的纵坐标为 $\frac{ab}{c}$ ，于是 $\frac{ab}{c} = \frac{b^2}{c}$ ，即 $a=b$ ，此时双曲线的离心率当然是 $\sqrt{2}$ 。

七、立体几何

【例 14】（全国卷错误！未找到引用源。）在正方形 $ABCD - A'B'C'D'$ 中，过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E ，交 CC' 于 F ，则

- ① 四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形；
- ② 四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形；
- ③ 四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形；
- ④ 四边形 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$ 。

以上结论正确的为_____。（写出所有正确结论的编号）

【解析】本题的答案是错误！未找到引用源。错误！未找到引用源。错误！未找到引用源。错误！未找到引用源。是显然的，当 E 、 F 分别为 AA' 、 CC' 的中点时，错误！未找到引用源。成立。对于错误！未找到引用源。，我们从直觉可知不成立，事实上，我们可以证明 $\angle BED'$ 是钝角，这里不再赘述，请大家自己思考。

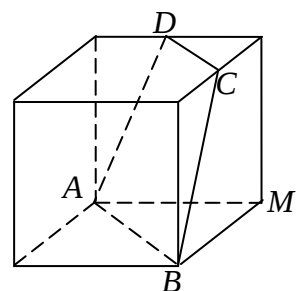


图 1

【例 15】（辽宁卷）如图 4，正方体的棱长为 1， C 、 D 分别是两条棱的中点， A 、 B 、 M 是顶点，那么点 M 到截面 $ABCD$ 的距离是_____。

【解析】对于求点到平面距离的题目，我们一般有两种不同的做法：一是用体积法，利用体积与底面积和高的关系；二是直接作出点到平面的垂线段，计算垂线段的长度。这里我们谈谈两种思路，请读者自行计算。孰优孰劣，还请读者自己评判。

如果采用体积法，那么我们就需要计算梯形 $ABCD$ 的面积，上下底和高的长度都不难得，而 M 点和平面 $ABCD$ 所在的几何体的体积也不难通过计算其余部分的体积的方法得到，于是可以计算出所求距离。

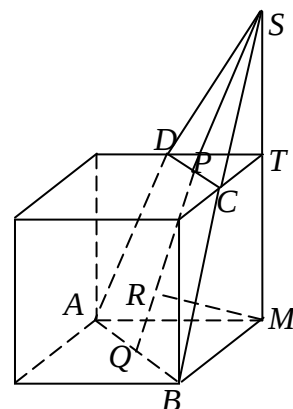


图 5

如果直接作出垂线(如图 5 所示),则垂足 R 一定在线段 PQ 上(其中 P 、 Q 分别为 AB 、 CD 的中点)。在这里计算 MR 的长度的时候,我们可以采取一种较为简单的方法,如图 5 所示,如果我们将 QP 、 MT 、 BC 、 AD 延长,则它们相交于一点 S ,在 $\text{Rt}\triangle SQM$ 中应用面积法,即可得到 MR 的长。

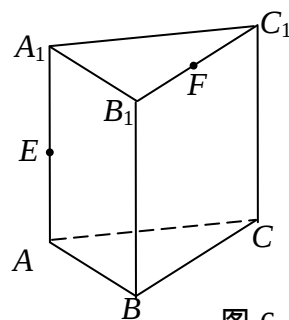


图 6

【例 16】(江西卷)如图 6,在直三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = \sqrt{2}$, $BB_1 = 2$, $\angle ABC = 90^\circ$, E 、 F 分别为 AA_1 、 C_1B_1 的中点,沿棱锥表面从 E 到 F 两点的最短路径的长度为_____。

【解析】我们知道,两点之间,线段最短。而如果想沿棱锥表面使得 E 、 F 两点间距离最小,那么我们可以考虑将棱锥展开。这里,我们有三种可行的展开方式:沿 A_1B_1 展开、沿 BB_1 展开、沿 A_1C_1 展开。分别对这三种情形进行计算可知,沿 A_1C_1 展开时线段 EF 的长度最小,为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

八、排列组合、二项式定理、概率与统计

【例 17】(浙江卷) 从集合 $\{O, P, Q, R, S\}$ 与 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 中各任取 2 个元素排成一行 (字母和数字均不重复). 每排中字母 O 、 Q 和数字 0 至多只能出现一个的不同的排法总数是_____ . (用数字作答)

【解析】本题是一个组合计数问题，其关键在于分好类，做到所谓的“不重不漏”. 对于这道题，我们进行如下分类：

(1) 字母 O 、 Q 和数字 0 均不出现的情况，共有 $C_3^2 C_9^2 A_4^4 = 2592$ 种排法；

(2) 字母 O 、 Q 和数字 0 只出现一个的情况，若字母 O 、 Q 出现一次而数字 0 不出现，共有 $C_2^1 C_3^1 C_9^2 A_4^4 = 5184$ 种排法；若字母 O 、 Q 不出现而数字 0 出现一个，共有 $C_3^2 C_1^2 C_9^1 A_4^4 = 648$ 种排法 .

综上所述，共有 $2592+5184+648=8424$ 种排法 .

【例 18】(湖北卷) $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5$ 的展开式中整理后的常数项为_____ .

【解析】作为一种常规的解法，我们可以将括号中的项分成两部分，然后应用两次二项式定理后可以求解，但是这样要进行较为复杂的运算 . 事实上，我们

只要认真观察一下，就会发现 $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5 = \left[\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2\right]^5 = \left(\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{10}$ ，

然后我们再用二项式定理求中间项的值，也就是 $T_6 = C_{10}^5 \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^5 \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^5 = \frac{63\sqrt{2}}{2}$ ，

即得常数项的值 .

【例 19】(全国卷错误！未找到引用源。) 设 l 为平面上过点 $(0,1)$ 的直线， l

的斜率等可能地取 $-2\sqrt{2}$ 、 $-\sqrt{3}$ 、 $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ 、 0 、 $2\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，用 ξ 表示坐标原点到 l 的距离，则随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi=$ _____.

【解析】对于此题，我们肯定不能先求出直线的方程，然后一一求出原点到直线的距离，这样计算量实在太大了．我们可以画图观察一下，事实上，直线的倾斜角的余弦的绝对值就是原点到直线的距离，利用公式 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha}$ ，我们算得这些距离分别为 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 1 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ （后面三个可由对称性直接得出），所以随机变量 ξ 的期望 $E\xi = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{2}{3} \times 2 + 1 \right) = \frac{4}{7}$ ．

【例 20】（天津卷）某公司有 5 万元资金用于投资开发项目，如果成功，一年后可获利 12%，一旦失败，一年后将丧失全部资金的 50%，下表是过去 200 例类似项目开发的实施结果：

投资成功	投资失败
192 次	8 次

则该公司一年后估计可获收益的期望是_____（元）．

【解析】这是一道由表给出的统计问题，由一定市场经济背景．由表可知，投资成功的概率是 $\frac{24}{25}$ ，投资失败的概率是 $\frac{1}{25}$ ．投资成功获利 6000 元，失败亏损 25000 元．所以，所求的期望为 $\frac{24}{25} \times 6000 + \frac{1}{25} \times 25000 = 4760$ 元．

九、导数

【例 21】（重庆卷）曲线 $y=x^3$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积为_____．

【解析】对 $y=x^3$ 求导得 $y'=3x^2$ ，于是曲线 $y=x^3$ 在点(1,1)处的斜率为 3，从而

切线方程是 $y=3(x-1)+1=3x-2$,在切线方程中令 $y=0$,得 $x=\frac{2}{3}$;令 $x=2$,得 $y=4$.所

以所求三角形的面积是 $\frac{1}{2} \times \left(2 - \frac{2}{3}\right) \times 4 = \frac{8}{3}$.